

JEFERSON CAMILO SILVA

**ESTIMATIVAS PARA AUTOVALORES DE SISTEMAS
ELÍPTICOS QUASE LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exi-
gências do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

S586e
2016 Silva, Jeferson Camilo, 1992-
 Estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase
 lineares / Jeferson Camilo Silva. – Viçosa, MG, 2016.
 viii, 68f. ; 29 cm.

Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Inclui bibliografia.

1. Teoria da estimativa. 2. Autovalores. 3. Sistemas
lineares - Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em
Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 519.544

JEFERSON CAMILO SILVA

**ESTIMATIVAS PARA AUTOVALORES DE SISTEMAS
ELÍPTICOS QUASE LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de julho de 2016.

Margareth da Silva Alves

Eder Marinho Martins

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Adão e Iolanda.*

A mente que se abre a uma nova
ideia jamais voltará ao seu
tamanho original.

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Adão e Iolanda, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Agradeço ao meu orientador, Anderson, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela grande pessoa que é.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Notações

- $\mathbb{R}^n$ representará o espaço euclidiano n -dimensional.
- Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$.
- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^n$ denotará o operador gradiente.
- $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ denotará o divergente de u .
- $\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ denotará o operador p -Laplaciano aplicado em u .
- $|u| := |u(x)|$.
- $|\nabla u| := |\nabla u(x)|$.
- $\rightarrow$: convergência forte.
- $\rightharpoonup$: convergência fraca.
- $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ denotam, respectivamente, a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e a norma do vetor gradiente.
- $\|u\|_p = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\right)^{1/p}$.

Resumo

SILVA, Jeferson Camilo, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, julho de 2016. **Estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase lineares.** Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

No presente trabalho apresenta-se estimativas para autovalores de sistemas elípticos. O objetivo é estabelecer condições para que a estimativa obtida para os autovalores do sistema com domínio em $\mathbb{R}$ seja a mesma para uma classe de conjuntos em $\mathbb{R}^n$ quando considera-se o sistema com domínio em $\mathbb{R}^n$. Para isso, utiliza-se várias mudanças de variáveis sobre o sistema considerado.

Abstract

SILVA, Jeferson Camilo, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, july, 2016.
Estimates for eigenvalues of almost linear elliptic systems. Adviser:
Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this magister's dissertation we present estimates for eigenvalues of elliptic systems. The goal is to establish conditions for the estimate obtained for the eigenvalues of the system with domain in $\mathbb{R}$ is the same for a class of sets in $\mathbb{R}^n$, when we consider the system with domain in $\mathbb{R}^n$. For this, we use several changes of variables on the system considered.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Espaços Funcionais e Resultados	4
1.2 Desigualdades importantes	11
1.3 Gênero	14
1.4 Uma Caracterização Variacional	15
2 Existência de Autovalores Generalizados	18
2.1 Existência de Autovalores Generalizados	18
3 Estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase lineares na reta	43
3.1 Limites máximos para autovalores generalizados	43
3.2 A desigualdade de Lyapunov e limites inferiores	47
4 Estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase lineares no $\mathbb{R}^n$	52
4.1 Estimativas para o primeiro autovalor em $\mathbb{R}^n$	53
4.2 Transformação radial do p-Laplaciano	55
4.3 Estimativas para Autovalores em Anéis	56
Considerações Finais	66
Referências Bibliográficas	67

Introdução

Estamos interessados em encontrar limites inferiores e superiores para os autovalores de sistemas elípticos não-lineares. Existem vários limites para valores próprios de uma única equação elíptica, não necessariamente linear, com base em diferentes técnicas. No entanto a situação é diferente para sistemas elípticos, e há poucos resultados neste caso. Poderíamos citar o trabalho de Protter [13], que introduziu a noção de espectro generalizado, o conjunto dos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ tal que o seguinte sistema

$$\sum_{i=1}^m L_{ij}u + \lambda_j \sum_{i=1}^m r_{i,j}u_i = 0, \quad 1 \leq j \leq m \quad (1)$$

tem solução não trivial $u = (u_i, \dots, u_m)$ sujeita a um conjunto de condições de contorno homogêneas, onde L_{ij} são operadores elípticos lineares. Em seguida o espectro generalizado foi estendido a sistemas elípticos gerais. Com a mesma abordagem Protter obteve os seguintes resultados:

(i) Existe um autovalor positivo $r_\Omega \in \mathbb{R}$ tal que $r_\Omega < \sum_i \lambda_i^2$ para todo λ no

espectro generalizado.

(ii) Para cada $\lambda \in \mathbb{C}^m$, se Ω está contido em uma esfera de raio suficientemente pequeno, dependendo do seu tamanho apenas nos coeficientes, então não existem soluções não triviais do sistema.

Além disso, considerando o problema de autovalores não-linear,

$$\sum_{i=1}^m L_{ij} + \lambda f(x, u) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (2)$$

em que $f(x, u)$ é não linear e satisfaz certas condições de crescimento, Protter obteve relações entre a norma de uma solução e λ , usando as desigualdades de Faber-Krahn e Sobolev. Para uma única equação p-Laplaciano, alguns limites inferiores foram obtidos. Além disso, foram aplicadas técnicas de simetrização para obter limites de valores próprios. No entanto, até antes dos resultados de Nápoli e Pinasco [6] não tínhamos conhecimento de trabalhos similares para sistemas do tipo p-Laplaciano.

Consideramos um sistema elíptico quase linear do tipo ressonante

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \alpha r(x) |u|^{\alpha-2} |v|^\beta, \quad x \in \Omega \\ -\Delta_q v &= \mu \beta r(x) |u|^\alpha |v|^{\beta-2}, \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

onde as funções u e v satisfazem a condição homogênea de fronteira de Dirichlet

$$u(x) = v(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega.$$

Aqui, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto com bordo suave $\partial\Omega$, e $\Delta_s u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{s-2} \nabla u)$. Os expoentes satisfazem $1 < p, q < +\infty$, os parâmetros positivos α, β satisfazem

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1, \quad (4)$$

e $r \in L^\infty(\Omega)$.

A condição (4) fornece um tipo de homogeneidade, visto que, as soluções de (3) são invariantes sobre o reescalonamento

$$(u, v) \longmapsto (\theta^{\frac{1}{p}} u, \theta^{\frac{1}{q}} v), \quad \theta > 0.$$

Por simplicidade nos limitaremos apenas a duas equações, mas os resultados seguem a menos de mudanças para m equações.

Os valores próprios de sistemas elípticos quase lineares tem merecido uma grande atenção nos últimos anos. Definimos o espectro S de um sistema não linear elíptico generalizado como o conjunto de pares $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de tal modo que o problema de autovalor (3) admite solução não trivial. A diagonal $\lambda = \mu$ do espectro generalizado coincide com os valores próprios do sistema elíptico considerado em [7]. Para $\lambda = \mu$ o problema (3) tem uma infinidade de autovalores dados por:

$$\lambda_k = \inf_{C \in C_k} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha |v|^\beta} \quad (5)$$

onde C_k é a classe dos conjunto compactos simétricos ($C = -C$) de subconjuntos do espaço $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ de gênero maior ou igual a k , que será devidamente definido no capítulo preliminar.

Considerando em (3), $\Omega = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, foi provado por Nápoli e Pinasco em [6], que para $\mu = t\lambda$, existe uma infinidade de autovalores para (3) satisfazendo

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\Lambda_k}{p} + \frac{m^{-1+q/p}}{qt} \left(\frac{p}{q} \right)^q \Lambda_k^{q/p}, \quad (6)$$

onde Λ_k é o k -ésimo autovalor variacional do problema de Dirichlet

$$(-|u'(x)|^{p-2} u'(x))' = \lambda r(x) |u|^{p-2} u, \quad x \in (a, b).$$

Ainda em [6], quando Ω é um domínio arbitrário em $\mathbb{R}^n$, os autores provaram que

$$\lambda_1(t) \leq \frac{\Lambda_1}{p} + \frac{m^{-1+q/p}}{qt} \left(\frac{p}{q}\right)^q \Lambda_1^{q/p},$$

onde Λ_1 é o primeiro autovalor variacional do problema de Dirichlet

$$-\Delta_p u = \lambda r(x)|u|^{p-2}u, \quad x \in \Omega.$$

Também em [6], os autores conjecturaram que a desigualdade (6) é válida para todos os autovalores variacionais $\lambda_k(t)$, $k \geq 1$ para Ω em $\mathbb{R}^n$.

No capítulo quatro desta dissertação, daremos uma resposta positiva para a conjectura de Nápoli e Pinasco feita em [6], quando consideramos $p = q$ e estamos sobre a reta $\mu = t\lambda$ onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / R < |x| < \bar{R}\}$, ou seja, quando Ω é um anel para certos valores de R e $\bar{R}$.

Para tornar o texto mais dinâmico este trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 descreve-se as notações, os espaços funcionais, algumas desigualdades importantes, alguns resultados sobre gênero, e uma caracterização variacional que serão usados no trabalho.

No Capítulo 2 apresenta-se a demonstração da existência de autovalores generalizados para o problema (3) sobre a reta $\mu = \lambda t$. Seguindo as mesmas ideias usadas por [6].

No Capítulo 3 apresenta-se estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase lineares em $\mathbb{R}$, sobre a reta $\mu = \lambda t$, obtendo limites máximos para autovalores generalizados. Também mostraremos a desigualdade de Lyapunov para o problema (3), e como consequência garantiremos uma curva do tipo hipérbole que limita inferiormente os autovalores do problema (3) em $\mathbb{R}$.

No Capítulo 4 apresenta-se estimativas para sistemas elípticos quase lineares no $\mathbb{R}^n$. Primeiramente faremos uma mudança de variável no problema (3) sobre a reta $\mu = t\lambda$ e consideraremos Ω um anel em $\mathbb{R}^n$. Sobre estas condições conseguimos a mesma estimativa para os autovalores de (3) apresentadas no Capítulo 3, mas agora em $\mathbb{R}^n$, e ainda conseguiremos uma curva que limita inferiormente estes autovalores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Espaços Funcionais e Resultados

Nesta seção apresentaremos as definições dos espaços funcionais que serão utilizados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes consultar Brézis [4].

Nas definições seguintes consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

Definição 1.1. *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u , que será denotado por $\text{supp}(u)$, é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se $\text{supp}(u)$ for um compacto do Ω então dizemos que u possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ ao espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto.*

Definição 1.2. *$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.*

Definição 1.3. *O conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem todas as derivadas até a ordem m contínuas em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ , é denotado por $C_0^m(\Omega)$ (ou C_0^∞ se $m = \infty$).*

Definição 1.4. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que:*

$$* \text{ supp } \varphi_\nu \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N};$$

$$* \text{ Para cada } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$$D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } K,$$

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Definição 1.5. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω .

Definição 1.6. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $f_n : S \rightarrow X$ em que S e X são espaços topológicos. Dizemos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para uma função $f : S \rightarrow X$ quando, para todo $x \in S$, a sequência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(x)$.

Definição 1.7. Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de conjuntos abertos $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ tais que

$$\begin{aligned} a) \quad & S \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k \\ b) \quad & \sum_{k=1}^\infty \text{vol}(I_k) < \varepsilon \end{aligned}$$

Diz-se que a coleção $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ é uma cobertura de S . Para o caso em que a cobertura é finita, diz-se que S tem conteúdo nulo.

Definição 1.8. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções, tal que para cada n tem-se $f_n : S \rightarrow X$, em que S é um conjunto de medida e X é um espaço topológico. Dizemos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge q.t.p para uma função $f : S \rightarrow X$ se existe um conjunto de medida nula Z tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em $S \setminus Z$.

Definição 1.9. Seja $1 \leq p \leq +\infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω , com norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty$$

e, para $p = \infty$, denotamos $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis de u definidas sobre Ω , que são essencialmente limitadas, com a norma dada por

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf \{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Definição 1.10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido como sendo o conjunto

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in L^p(\Omega)\}.$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.11. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 . Então as seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para } p < n, \forall q \in [1, p^*], \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para } p = n, \forall q \in [p, +\infty), \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ para } p > n, \end{aligned}$$

$$\text{com } p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Demonstração. Ver L.A. da J.Medeiros [11] p. 75. □

Teorema 1.12. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para } p < n, \forall q \in [1, p^*), \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para } p = n, \forall q \in [p, +\infty), \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ para } p > n, \end{aligned}$$

$$\text{com } p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Demonstração. Ver L.A. da J.Medeiros [11] p. 75. □

Definição 1.13. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$, equipado com a norma de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema 1.14. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ em $\partial\Omega$ no sentido do traço.*

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 217. □

Seja E um espaço de Banach e seja $f \in E^*$, onde

$$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é linear e limitada}\},$$

é o espaço dual de E . Denotamos por $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Como f percorre E^* obtemos uma coleção $(\varphi_f)_{f \in E^*}$ de funções de E em $\mathbb{R}$. Ignoramos a topologia usual de E (associada a $\|\cdot\|$) e definimos uma nova topologia no conjunto E como se segue:

Definição 1.15. *A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ em E é a topologia associada a coleção $(\varphi_f)_{f \in E^*}$.*

Note que toda função φ_f é contínua na topologia usual portanto a topologia fraca é mais fraca que a topologia usual.

Notação. Se a sequência (x_n) em E converge para x na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ escrevemos

$$x_n \rightharpoonup x$$

e dizemos que " x_n converge fracamente para x em $\sigma(E, E^*)$ ".

Proposição 1.16. *Seja (x_n) uma sequência em E . Então*

$$(i) \ x_n \rightharpoonup x \text{ fracamente em } \sigma(E, E^*) \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \ \forall \ x \in E^*.$$

$$(ii) \ \text{Se } x_n \rightarrow x \text{ fortemente, então } x_n \rightharpoonup x \text{ fracamente em } \sigma(E, E^*).$$

$$(iii) \ \text{Se } x_n \rightharpoonup x \text{ fracamente em } \sigma(E, E^*), \text{ então } (\|x_n\|) \text{ é limitada e } \|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

$$(iv) \ \text{Se } x_n \rightharpoonup x \text{ fracamente em } \sigma(E, E^*) \text{ e se } f_n \rightarrow f \text{ forte em } E^* \text{ (isto é, } \|f_n - f\|_{E^*} \rightarrow 0), \text{ então } \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 58. □

Definição 1.17. *Um espaço de Banach é dito uniformemente convexo se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Teorema 1.18. *Os espaços L^p são uniformemente convexos para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 96. □

Teorema 1.19 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Sejam $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), f_2 \in L^{p_2}(\Omega), \dots, f_n \in L^{p_n}(\Omega), n \in \mathbb{N}$, com $p_1, \dots, p_n > 1$ e $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$. Então $f_1 \cdot \dots \cdot f_n \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f_1 \cdot \dots \cdot f_n| \, dx \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{L^{p_n}}.$$

Demonstração. Ver H. Brézis [4], p. 92. □

Considere $p > 1$, então p' será o número real positivo que satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Representaremos por V o espaço normado $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|$ e V' o espaço $W^{-1,p'}(\Omega)$ com o par de dualidade dado por V' e V por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$. Definamos para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, a aplicação $Au : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx = \langle -\Delta_p u, v \rangle_{V', V}.$$

Como $|\nabla u|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$ e $\nabla u, \nabla v \in L^p(\Omega)$, então pela desigualdade de Hölder generalizada temos que $|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$, portanto a aplicação Au está

bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned} |\langle Au, v \rangle_{V', V}| &= \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |v| \, dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

o que implica, $Au \in V'$ com

$$\|Au\|_{V'} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}. \quad (1.2)$$

Portanto, $A : V \rightarrow V'$ está bem definido e

$$\langle Au, v \rangle_{V', V} = \langle -\Delta_p u, v \rangle, \quad \forall u, v \in V = W_0^{1,p}(\Omega).$$

Trabalharemos no seguinte espaço de Banach

$$W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$$

equipado com a norma:

$$\|(u, v)\|_W = \sqrt{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}$$

Note que se considerarmos $(u^*, v^*) \in W^{-1,p'}(\Omega) \oplus W^{-1,q'}(\Omega)$ vemos que $(u^*, v^*) \in W^*$ e podemos definir a seguinte aplicação

$$\langle (u^*, v^*), (u, v) \rangle = \langle u^*, u \rangle + \langle v^*, v \rangle.$$

Então temos $W^* \cong W^{-1,p'}(\Omega) \oplus W^{-1,q'}(\Omega)$ (isomorfismo isométrico) onde a norma em W^* é dada por:

$$\|(u^*, v^*)\|_{W^*} = \sqrt{\|u^*\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^2 + \|v^*\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}^2}.$$

Sabemos da teoria de funcionais lineares que

$$|\langle (u^*, v^*), (u, v) \rangle| \leq \|(u^*, v^*)\|_{W^*} \|(u, v)\|_W, \quad \forall (u, v) \in W. \quad (1.3)$$

Definição 1.20. *Sejam $1 \leq p < \infty$. Diremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotaremos por $f \in L_{loc}^p(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$ tivermos*

$$\int_K |f_1(x)|^p \, dx < \infty.$$

Teorema 1.21. *Sejam $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e seja $u \in L_{loc}^1(I)$ tal que*

$$\int_I u \varphi_x \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Então existe uma constante C tal que $u = C$ em quase todo ponto de I .

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 205. □

Definição 1.22. *Sejam $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido como sendo o conjunto*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists u_x \in L^p(I) ; \int_a^b u \varphi_x \, dx = - \int_a^b u_x \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}$$

O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u_x\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, denotamos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. O espaço $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u_x, v_x \rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u_x v_x) \, dx.$$

Proposição 1.23. *O espaço $W^{1,p}(I)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 203. □

Definição 1.24. *Dado um inteiro $m \geq 2$ e um número real $1 \leq p \leq \infty$ definimos, por indução, o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); D^1 u \in W^{m-1,p}(I)\},$$

com a notação $D^1 u = u_x$, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^m \|D^i u\|_{L^p}.$$

E também definimos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

equipado com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^m \langle D^i u, D^i v \rangle_{L^2} = \int_a^b uv \, dx + \sum_{i=1}^m \int_a^b D^i u D^i v \, dx.$$

Teorema 1.25. *Existe uma constante positiva C (que depende somente de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ continuamente para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, Se I é um intervalo limitado então

A imersão $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ é compacta para todo $1 < p \leq \infty$.

A imersão $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 212. □

Corolário 1.26. *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I)$$

e

$$(uv)_x = u_x v + u v_x.$$

Ademais, vale a formula de integração por partes

$$\int_y^z u_x v \, dx = u(z)v(z) - u(y)v(y) - \int_y^z uv_x \, dx, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 215. □

Corolário 1.27. *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, e seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)_x = (G_x \circ u)u_x.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 215. □

Teorema 1.28. (Teorema da convergência dominada). *Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis em Ω , convergente quase sempre para a função u . Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é integrável e tem-se*

$$\int_{\Omega} u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [4]. □

Teorema 1.29. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então toda aplicação contínua injetiva $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre sua imagem.*

Demonstração. Ver Elon [10], p. 24. □

Teorema 1.30. (Teorema do Valor Médio). *Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, se o segmento de reta $[a, a+v]$ estiver contido em U então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$\begin{aligned} f(a+v) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v) = \langle \text{grad } f(a + \theta v), v \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i \end{aligned}$$

onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Demonstração. Ver Elon [10], p. 61. □

Considere X e Y dois espaços vetoriais normados, U uma vizinhança de um ponto x_0 em X e F uma aplicação de U em Y .

Definição 1.31. Dizemos que F tem uma **derivada direcional** no ponto x_0 na direção h , se o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + \epsilon h) - F(x_0)}{\epsilon}$$

existe. Denotaremos por $DF(x_0).h$.

Definição 1.32. Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $DF(x_0).h$ na direção de h exista. A aplicação $\delta_+ F(x_0, \cdot) : X \rightarrow Y$ definida por $\delta_+ F(x_0, h) = DF(x_0).h$ é denominada a **primeira variação** da aplicação F no ponto x_0

Definição 1.33. Suponhamos que F possui uma primeira variação no ponto x_0 e que existe um operador linear contínuo $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\delta_+ F(x_0, h) = \Lambda h$. Então o operador Λ é denominado **derivada de Gâteaux** da aplicação F no ponto x_0 e denominamos por $DF(x_0).(\cdot)$.

Assim $DF(x_0).(\cdot)$ é um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $h \in X$ temos a relação

$$F(x_0 + \epsilon h) = F(x_0) + DF(x_0).h + o(\epsilon),$$

quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

1.2 Desigualdades importantes

Proposição 1.34. Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$. Então

$$(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned} (a + b)^p &\leq (2 \max\{a, b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p(a^p + b^p). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.35 (Desigualdade de Young). Se $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [3], p. 56. □

Uma variação da desigualdade de Young que será muito utilizado neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 1.36. *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ tem-se*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q,$$

onde $c(\varepsilon)$ é uma constante que depende de ε, p e q .

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} ab &= (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab \\ &= \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right) \left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young segue

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right)^p + \frac{1}{q} \left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right)^q \\ &= \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Tomando $c(\varepsilon) = \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$ temos,

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q \quad \forall \varepsilon > 0.$$

□

Teorema 1.37 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Então para todos $u, v \in V$ temos*

$$|\langle u, v \rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V;$$

a igualdade ocorre se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Demonstração. Ver Oliveira [12], p. 121. □

Definição 1.38. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$, equipado com a norma de $W^{1,p}(I)$.*

O espaço $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ é equipado com o produto escalar de $H^1(I)$.

Teorema 1.39. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I .*

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 217. $\square$

Teorema 1.40 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos I um intervalo limitado. Então existe uma constante $C_p \geq 0$, que depende apenas do comprimento do intervalo I , tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_p \|u_x\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Em outras palavras, em $W_0^{1,p}(I)$, $\|u_x\|_{L^p}$ é uma norma equivalente à norma de $W_0^{1,p}(I)$.

Demonstração. Ver H. Brezis [4], p. 218. $\square$

Teorema 1.41. *Seja $p > 1$. Existe uma constante $c_p > 0$ tal que para todo $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$,*

$$\langle |s_2|^{p-2}s_2 - |s_1|^{p-2}s_1, s_1 - s_2 \rangle \geq \begin{cases} c_p |s_2 - s_1|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ \frac{c_p |s_2 - s_1|^2}{(|s_2| + |s_1|)^{2-p}}, & \text{se } p \leq 2 \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [15]. $\square$

Proposição 1.42. *Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $p > 1$, então*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1) \nabla (u_2 - u_1) dx \geq \begin{cases} \bar{c}_p \int_{\Omega} |\nabla (u_2 - u_1)|^p dx; & p \leq 2 \\ \frac{\bar{c}_p (\int_{\Omega} |\nabla (u_2 - u_1)|^p dx)^{\frac{2}{p}}}{(\int_{\Omega} (|\nabla u_2| + |\nabla u_1|)^p dx)^{\frac{2-p}{p}}}; & p \geq 2. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [2], p. 73. $\square$

Observação 1.43. *A desigualdade acima pode se escrita em termos da norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, como*

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \| |\nabla u_1| + |\nabla u_2| \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

então

$$\frac{1}{\left(\int_{\Omega} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{\|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}.$$

Assim, se $p \leq 2$ vale

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1) \nabla (u_2 - u_1) dx \geq \bar{c}_p \|u_2 - u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p,$$

e se $p \geq 2$ vale

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1) \nabla(u_2 - u_1) dx \geq \frac{\bar{c}_p \|u_2 - u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2}{\left(\|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_1\|\right)^{2-p}}.$$

Defina a função $\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$. Observe que $\varphi_p \circ \varphi_q = id$ e $\varphi_q \circ \varphi_p = id$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.44. *Seja $p > 1$. Existe uma constante $c_p > 0$ tal que para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^n$,*

$$|\varphi_p(t_2) - \varphi_p(t_1)| \leq \begin{cases} \bar{c}_p |t_2 - t_1|^{p-1}, & \text{se } p \leq 2 \\ \bar{c}_p |t_2 - t_1| (|t_2| + |t_1|)^{p-2}, & \text{se } p \geq 2. \end{cases}$$

onde $\bar{c}_p = \min \left\{ \frac{1}{c_p}, \frac{1}{c_p^{p-1}} \right\}$.

Demonstração. Ver [2], p. 75. □

1.3 Gênero

As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [14]. Nesta seção consideraremos E um espaço de Banach.

Definição 1.45. *Denotaremos por Υ a família de conjuntos $A \subset E \setminus \{0\}$ tal que A é fechado em E e é simétrico, ou seja $A = -A$. Para $A \in \Upsilon$, definimos o gênero de A como o menor natural n tal que existe uma aplicação ímpar $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Nesse caso, denotaremos por $gen(A) = n$. Quando não existe n , escrevemos $gen(A) = \infty$ e $gen(\emptyset) = 0$*

Exemplo 1.46. *Seja $A = B \cup (-B)$, onde $B \subset E$ é fechado e $B \cap (-B) = \emptyset$. Então, $gen(A) = 1$, pois a função*

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ -1 & \text{se } x \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

pertence a $C^1(A, \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

De fato, sejam $x \in B$ e $(x_n) \subset A$ uma sequência em A tal que $x_n \rightarrow x$. Como $-B$ também é fechado e todas as subsequências de (x_n) convergem para x , o número de elementos dessa sequência em $-B$ é finito, pois caso contrário teríamos uma sequência em $-B$ que converge para x , que está em B . Assim

$\varphi(x_n) = 1 = \varphi(x)$ a partir de um certo índice e , então $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$. Logo φ é contínua em x . Analogamente, para $x \in -B$. Portanto, φ é contínua.

Observação 1.47. Se $A \in \Upsilon$ e $\text{gen}(A) > 1$ então A contém infinitos pontos.

Com efeito, se fosse finito, como A é simétrico e $A \subset E \setminus \{0\}$, podemos escrever $A = B \cup (-B)$, onde B é fechado (pois é finito) e $B \cap (-B) = \emptyset$. Mas pelo exemplo anterior teríamos $\text{gen}(A) = 1$.

Proposição 1.48. Sejam $A, B \in \Upsilon$ então:

1. Se $x \neq 0$, $\text{gen}(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$.
2. Se existe uma função ímpar $f \in C(A, B)$ então $\text{gen}(A) \leq \text{gen}(B)$.
3. Se $A \subset B$, $\text{gen}(A) \leq \text{gen}(B)$.
4. $\text{gen}(A \cup B) \leq \text{gen}(A) + \text{gen}(B)$.

Observação 1.49. Se $\text{gen}(B) < \infty$, $\text{gen}(\overline{A \setminus B}) \geq \text{gen}(A) - \text{gen}(B)$.

De fato, como $A \subset \overline{A \setminus B} \cup B$, temos

$$\begin{aligned} \text{gen}(A) &\leq \text{gen}(\overline{A \setminus B} \cup B), \text{ por (3)} \\ &\leq \text{gen}(\overline{A \setminus B}) + \text{gen}(B), \text{ por (4)}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\text{gen}(\overline{A \setminus B}) \geq \text{gen}(A) - \text{gen}(B).$$

Proposição 1.50. Se $A \subset E$, Ω é uma vizinhança limitada de $0 \in \mathbb{R}^k$ e existe um homeomorfismo ímpar $h \in C(A, \partial\Omega)$ então $\text{gen}(A) = k$.

Definição 1.51. Definimos por C_k , a classe dos conjuntos simétricos que tem gênero maior ou igual a k . Lembrando que um conjunto C é simétrico se $C = -C$.

1.4 Uma Caracterização Variacional

Consideremos o seguinte problema unidimensional em $\Omega = (0, L)$,

$$-(|u'|^{s-2}u')' = \Lambda|u|^{s-2}u \tag{1.4}$$

com condição de fronteira de Dirichlet,

$$u(0) = u(L) = 0.$$

Sabemos que autovalores deste problema são dados por;

$$\Lambda_k(s) = \inf_{C \in C_k} \sup_{u \in C} \frac{\int_0^L |u'|^s dx}{\int_0^L |u|^s dx},$$

onde $u \in W_0^{1,s}(0, L)$ e C_k se refere a Definição (1.51). Assim todos os seus autovalores e as autofunções podem ser encontradas explicitamente, e este resultado pode ser visto em [5] e [9] (veja que a notação é diferente em ambas as referências). Chamaremos de $\sin_s(x)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} -(|u'|^{s-2}u')' &= (s-1)|u|^{s-2}u \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 1 \end{aligned}$$

e por integração podemos ver que esta solução está definida implicitamente como

$$x = \int_0^{\sin_s(x)} \frac{dt}{(1-t^s)^{\frac{1}{s}}}.$$

Denote por π_s o primeiro zero de $\sin_s(x)$, dado por

$$\pi_s = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^s)^{\frac{1}{s}}}.$$

Observe que $\sin_s(x)$ e $\sin'_s(x)$ satisfazem

$$|\sin_s(x)| \leq 1, \quad |\sin'_s(x)| \leq 1$$

e também temos pela identidade de Pitágoras que

$$|\sin_s(x)|^s + |\sin'_s(x)|^s = 1.$$

O principal resultado é o seguinte Teorema;

Teorema 1.52. *Os autovalores $\Lambda_k(s)$ e as autofunções $u_{s,k}$ do problema de Dirichlet (1.4) no intervalo $[0, L]$ são dados por*

$$\begin{aligned} \Lambda_k(s) &= (s-1) \frac{\pi_s^s k^s}{L^s} \\ u_{s,k}(s) &= \sin_s \left(\frac{\pi_s k x}{L} \right) \end{aligned}$$

Demonstração. Ver Del Pino, Drabek e Manásevich, [5]. □

Observação 1.53. *Notemos que o k -ésimo autovalor é simples, e associado a autofunção $u_{s,k}$ tem k domínios nodais. Equivalentemente, $u_{s,k}$ tem $k+1$ zeros simples em $[0, L]$. Mais ainda, observamos que*

$$K_s = \int_0^{\pi_s} \sin_s^s(t) dt$$

é uma constante fixada dependendo apenas de s .

Considere o seguinte problema de autovalor para o p -Laplaciano em (a, b) :

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda w(x)|u|^{p-2}u, \tag{1.5}$$

com condição de fronteira de Dirichlet

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (1.6)$$

onde o peso $w(x) \in L^1(a, b)$ é uma função positiva, e o parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ é o autovalor.

Para este problema temos o seguinte resultado:

Teorema 1.54. *Seja $\{\lambda_k\}_k$ uma sequência de autovalores do problema (1.5) com a condição (1.6). Então:*

1. *Toda autofunção correspondente ao k -autovalor λ_k tem exatamente $k+1$ zeros em $[a, b]$.*
2. *Para cada k , λ_k é simples.*
3. *Se $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, a única solução do problema (1.5) com a condição (1.6) é $u \equiv 0$.*

Demonstração. A demonstração por ser encontrada em [8]. □

Capítulo 2

Existência de Autovalores Generalizados

Considere o seguinte sistema elíptico quase linear do tipo ressonante,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \alpha r(x) |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta; \text{ em } \Omega \\ -\Delta_q v &= \mu \beta r(x) |u|^\alpha v |v|^{\beta-2}; \text{ em } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde as funções u e v satisfazem a condição de fronteira de Dirichlet

$$u(x) = v(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega,$$

$1 < p, q < \infty$ satisfazem

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1, \quad (2.2)$$

e $r \in L^\infty(\Omega)$.

Neste capítulo mostraremos a existência dos autovalores generalizados do sistema (2.1) sobre a reta $\mu = t\lambda$, e também exibiremos uma caracterização para estes autovalores.

2.1 Existência de Autovalores Generalizados

Relembrando que para $C \in C_k$ o gênero Krasnoselskii $gen(C)$ é definido como o número inteiro n mínimo de tal modo que existe uma função $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contínua ímpar. No entanto quando consideramos $\mu = t\lambda$ não sabemos se este conjunto de autovalores esgota o espectro.

Apresentaremos agora um Teorema que será muito importante para mostrar a existência dos autovalores assim como as autofunções.

Teorema 2.1. *Suponha que as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

(i) X é um espaço de Banach real de dimensão infinita, uniformemente convexo.

(ii) $A : X \longrightarrow X^*$ é um operador potencial ímpar (isto é A é, a derivada de Gateaux de $\mathcal{A} : X \longrightarrow \mathbb{R}$) que é uniformemente contínua em conjuntos limitados e satisfaz a condição

$(S)_1$: Se $u_j \longrightarrow u$ (fracamente em X) e $A(u_j) \longrightarrow v$, então $u_j \longrightarrow u$ (fortemente em X).

(iii) Para uma dada constante $m > 0$ o conjunto de nível

$$M_m = \{u \in X / \mathcal{A}(u) = m\}$$

é limitado e cada raio que passa pela origem cruza M_m . Além disso para cada $u \neq 0$, $\langle A(u), u \rangle > 0$ e existe uma constante $\rho_m > 0$ tal que

$$\langle A(u), u \rangle \geq \rho_m \text{ em } M_m.$$

(iv) A função $B : X \longrightarrow X^*$ é um operador potencial ímpar fortemente sequencial contínua (com potencial $\mathcal{B}$, de modo que $\mathcal{B}(u) \neq 0$ implica que $B(u) \neq 0$). Seja

$$\beta_k = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_k \\ C \subset M_m}} \inf_{u \in C} \mathcal{B}(u)$$

onde $\mathcal{C}_k$ é a classe dos conjuntos compactos simétricos ($C = -C$) de subconjuntos do espaço $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ de gênero maior ou igual a k .

Se $\beta_k > 0$, existe uma autofunção $u_k \in M_m$ com

$$\mathcal{B}(u_k) = \beta_k = \frac{m}{\lambda_k}.$$

Dizemos que $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é o conjunto de autovalores variacionais.

Mais ainda, se

$$\gamma(\{u \in M_m / \mathcal{B}(u) \neq 0\}) = \infty \quad (2.3)$$

onde o gênero sobre conjuntos compactos é definido por

$$\gamma(S) = \sup\{gen(C) : C \subset S; C \in \mathcal{C}; C \text{ compacto}\},$$

em que $\mathcal{C}$ é a classe dos conjuntos simétricos, ou seja $C = -C$. Então existem uma infinidade de autofunções.

Demonstração. Ver H.Amann [1]. □

Relembrando, estamos trabalhando no seguinte espaço de Banach

$$W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$$

equipado com a norma:

$$\|(u, v)\|_W = \sqrt{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}$$

Dado $(u^*, v^*) \in W^{-1,p'}(\Omega) \oplus W^{-1,q'}(\Omega)$ podemos pensá-lo como um elemento de

W^* :

$$\langle (u^*, v^*), (u, v) \rangle = \langle u^*, u \rangle + \langle v^*, v \rangle.$$

Então temos $W^* \cong W^{-1,p'}(\Omega) \oplus W^{-1,q'}(\Omega)$ (isomorfismo isométrico) onde a norma em W^* é dada por:

$$\|(u^*, v^*)\|_{W^*} = \sqrt{\|u^*\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^2 + \|v^*\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}^2}.$$

Com a notação do Teorema 2.1, considere os seguintes funcionais

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t(u, v) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q, \\ A_t(u, v) &= (-\Delta_p u, -\frac{1}{t} \Delta_q v), \\ \mathcal{B}(u, v) &= \int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha |v|^\beta, \\ B(u, v) &= (r(x) \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, r(x) |u|^\beta \beta |v|^{\beta-2} v). \end{aligned} \tag{2.4}$$

O principal teorema deste capítulo é o seguinte,

Teorema 2.2. *Considere o problema de autovalor (2.1) sobre a reta $\mu = t\lambda$ com $r \in L^\infty(\Omega)$. Seja*

$$\beta_k = \sup_{\substack{C \in C_k \\ C \subset M_m}} \inf_{(u,v) \in C} \int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha |v|^\beta,$$

em que a classe dos conjuntos C_k foi mencionado Definição 1.51, e M_m é dado por

$$M_m = \left\{ (u, v) \in W; \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q = m \right\}.$$

O problema (2.1) tem infinitos autovalores variacionais caracterizados por

$$\lambda_k = \frac{m}{\beta_k}.$$

E mais, quando $\Omega = (a, b)$ cada autovalor λ_k tem infinitas autofunções associadas.

Demonstração. Dividiremos a prova em várias etapas. Observe que W é um espaço de Banach de dimensão infinita e pelo Teorema 1.18 garantimos que W é uniformemente convexo. Verificaremos agora que estas funções estão nas hipóteses do Teorema 2.1.

Etapa 1

Primeiramente, mostraremos que a derivada de Gateaux de

$$\mathcal{A}_t(u, v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q,$$

é o operador dado por

$$A_t(u, v) = (-\Delta_p u, -\frac{1}{t}\Delta_q v).$$

Para isso faremos alguns cálculos e observações.

Observação 2.3. *A derivada da função $|u|^p$ é dada por*

$$\frac{d}{du}|u|^p = p|u|^{p-2}u.$$

Com efeito, se $u \geq 0$ temos que $|u|^p = u^p$ daí

$$\frac{d}{du}|u|^p = pu^{p-1} = pu^{p-2}u = p|u|^{p-2}u.$$

Agora se $u \leq 0$ temos que $|u|^p = (-u)^p$, logo

$$\frac{d}{du}|u|^p = -p(-u)^{p-1} = -p(-u)^{p-2}(-u) = p(-u)^{p-2}u = p|u|^{p-2}u.$$

Portanto

$$\frac{d}{du}|u|^p = p|u|^{p-2}u.$$

Observação 2.4. *Defina a aplicação $\phi : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\phi(s) = |\nabla u + s\nabla z|^p.$$

Podemos reescrever esta aplicação de forma conveniente para obtermos a sua derivada, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi(s) &= |\nabla u + s\nabla z|^p \\ &= (|\nabla u + s\nabla z|^2)^{\frac{p}{2}} \\ &= (|\nabla u|^2 + 2s\langle \nabla u, \nabla z \rangle + s^2|\nabla z|^2)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Então calculando sua derivada teremos

$$\begin{aligned} \phi'(s) &= \frac{p}{2} (|\nabla u + s\nabla z|^2)^{\frac{p}{2}-1} \cdot (2\langle \nabla u, \nabla z \rangle + 2s|\nabla z|^2) \\ &= \frac{p}{2} |\nabla u + s\nabla z|^{p-2} \cdot 2\langle \nabla u + s\nabla z, \nabla z \rangle \\ &= p|\nabla u + s\nabla z|^{p-2} \cdot \langle \nabla u + s\nabla z, \nabla z \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que a derivada de Gateaux de $\mathcal{A}_t(u, v)$ na direção de $(z, w) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ pela definição é o seguinte limite

$$D\mathcal{A}_t(u, v) \cdot (z, w) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}_t((u, v) + s(z, w)) - \mathcal{A}_t(u, v)}{s}.$$

Agora usando a definição de $\mathcal{A}_t$ temos que

$$\begin{aligned}
D\mathcal{A}_t(u, v).(z, w) &= \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{p} \cdot \int_{\Omega} (|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p) + \frac{1}{tq} \cdot \int_{\Omega} (|\nabla(v + sw)|^q - |\nabla v|^q)}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} \frac{|\nabla(v + sw)|^q - |\nabla v|^q}{s} \right).
\end{aligned}$$

Note que podemos passar o limite para dentro das integrais. De fato, os integrandos estão nas condições do Teorema 1.28 pois, usando o Teorema 1.30 para a função ϕ definida na Observação 2.4 concluímos que existe $\theta \in [0, 1]$ de modo que para $s > 0$ vale

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} &= \frac{\phi(s) - \phi(0)}{s} \\
&= \frac{\phi'(0 + \theta s) \cdot s}{s} \\
&= \phi'(\theta s).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} = p|\nabla(u + s\theta z)|^{p-2} \langle \nabla(u + s\theta z), \nabla z \rangle.$$

Assim, se $s \rightarrow 0^+$ temos que

$$\frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} \rightarrow p|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla z, \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Os mesmos cálculos podem ser feitos para o quociente da segunda integral permitindo concluir que

$$\frac{|\nabla(v + sw)|^q - |\nabla v|^q}{s} \rightarrow q|\nabla v|^{q-2} \nabla v \cdot \nabla w, \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

quando $s \rightarrow 0^+$.

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} \right| &\leq p|\nabla(u + s\theta z)|^{p-2} |\nabla(u + s\theta z)| |\nabla z| \\
&= p|\nabla u + \theta s \nabla z|^{p-1} |\nabla z| \\
&\leq p(|\nabla u| + \theta s |\nabla z|)^{p-1} |\nabla z|,
\end{aligned}$$

como estamos interessados quando $s \rightarrow 0^+$, podemos dizer que s é

suficientemente pequeno de modo que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|s| \leq c_0.$$

Além disso, podemos usar a desigualdade (1.34) e concluir que

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} \right| &\leq p (|\nabla u| + \theta s |\nabla z|)^{p-1} |\nabla z| \\ &\leq 2^{p-1} p (|\nabla u|^{p-1} + \theta^{p-1} s^{p-1} |\nabla z|^{p-1}) |\nabla z| \\ &\leq 2^{p-1} p (|\nabla u|^{p-1} + c_0^{p-1} |\nabla z|^{p-1}) |\nabla z| \\ &= 2^{p-1} p (|\nabla u|^{p-1} |\nabla z| + c_0^{p-1} |\nabla z|^p). \end{aligned}$$

Como $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $|\nabla z| \in L^p(\Omega)$, $|\nabla z|^p \in L^1(\Omega)$ e ainda

$$\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1,$$

concluimos, pelo Teorema 1.19, que

$$2^{p-1} p (|\nabla u|^{p-1} |\nabla z| + c_0^{p-1} |\nabla z|^p) \in L^1(\Omega).$$

Logo obtemos que o quociente

$$\frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s}$$

é limitado por uma função integrável, ao qual não depende de s . Os mesmos cálculos podem ser feitos para o segundo quociente que aparece no limite, e concluiremos que este também é limitado por uma função integrável que não depende de s . Portanto, podemos passar o limite para dentro das integrais usando

o Teorema 1.28, daí

$$\begin{aligned}
D\mathcal{A}_t(u, v).(z, w) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\nabla(u + sz)|^p - |\nabla u|^p}{s} + \\
&+ \frac{1}{tq} \int_{\Omega} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\nabla(v + sw)|^q - |\nabla v|^q}{s} \\
&= \frac{1}{p} \int_{\Omega} p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla z + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} q |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla z + \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w \\
&= \langle -\Delta_p u, z \rangle + \left\langle -\frac{1}{t} \Delta_q v, w \right\rangle \\
&= \left\langle \left(-\Delta_p u, -\frac{1}{t} \Delta_q v \right), (z, w) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$D\mathcal{A}_t(u, v).(\cdot, \cdot) = \left\langle \left(-\Delta_p u, -\frac{1}{t} \Delta_q v \right), (\cdot, \cdot) \right\rangle.$$

Agora mostraremos que o operador

$$A_t(u, v) = \left(-\Delta_p u, -\frac{1}{t} \Delta_q v \right),$$

é uniformemente contínuo em conjuntos limitados. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}
|\langle -\Delta_p w - (-\Delta_p u), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} (|\nabla w|^{p-2} \nabla w - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} ||\nabla w|^{p-2} \nabla w - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| |\nabla v| dx,
\end{aligned}$$

e se $1 < p \leq 2$, o Teorema 1.44 nos garante que existe uma constante $\tilde{c}_p$ tal que

$$\begin{aligned}
|\langle -\Delta_p w - (-\Delta_p u), v \rangle| &\leq \int_{\Omega} ||\nabla w|^{p-2} \nabla w - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| |\nabla v| dx \\
&\leq \tilde{c}_p \int_{\Omega} |\nabla w - \nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 1.19 para $|\nabla w - \nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e $\nabla v \in L^p$ obteremos:

$$\begin{aligned}
|\langle -\Delta_p w - (-\Delta_p u), v \rangle| &\leq \tilde{c}_p \int_{\Omega} |\nabla w - \nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx \\
&\leq \tilde{c}_p \left(\int_{\Omega} (|\nabla w - \nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \tilde{c}_p \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Daí então obtemos a seguinte desigualdade

$$\| -\Delta_p w - (-\Delta_p u) \|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \tilde{c}_p \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}.$$

Portanto, chegamos que o funcional $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ é Hölder contínuo e, logo uniformemente contínuo.

Se $p > 2$, também pelo Teorema 1.44 garantimos a existência de uma constante $\tilde{c}_p$ tal que

$$\begin{aligned}
|\langle -\Delta_p w - (-\Delta_p u), v \rangle| &\leq \int_{\Omega} ||\nabla w|^{p-2} \nabla w - |\nabla u|^{p-2} \nabla u| |\nabla v| dx \\
&\leq \tilde{c}_p \int_{\Omega} |\nabla w - \nabla u| (|\nabla w| + |\nabla u|)^{p-2} |\nabla v| dx.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla w - \nabla u| \in L^p(\Omega)$, $(|\nabla w| + |\nabla u|)^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$, $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{p-2}{p} + \frac{1}{p} = 1$$

podemos usar o Teorema 1.19 e concluir

$$\begin{aligned}
|\langle -\Delta_p w - (-\Delta_p u), v \rangle| &\leq \tilde{c}_p \int_{\Omega} |\nabla w - \nabla u| (|\nabla w| + |\nabla u|)^{p-2} |\nabla v| dx \\
&\leq \tilde{c}_p \left(\int_{\Omega} |\nabla w - \nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (|\nabla w| + |\nabla u|)^{\frac{(p-2)p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \tilde{c}_p \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} (|\nabla w| + |\nabla u|)^p dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \tilde{c}_p 2^{p-2} \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} (|\nabla w|^p + |\nabla u|^p) dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&= \tilde{c}_p 2^{p-2} \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{p-2}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Denotando $c = \tilde{c}_p \cdot 2^{p-2}$, obtemos

$$\| -\Delta_p w - (-\Delta_p u) \|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq c \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left(\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{p-2}{p}},$$

que restrito a um conjunto limitado, $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, se existe $M > 0$ tal que

$$\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M \quad \text{e} \quad \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall w, u \in A$$

temos;

$$\| -\Delta_p w - (-\Delta_p u) \|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq c(2M^p)^{\frac{p-2}{p}} \|w - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

ou seja, restrito ao conjunto limitado A , o operador $-\Delta_p : A \subset W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ é lipschitz, portanto, é uniformemente contínuo. Mostramos então que o operador p-Laplaciano é uniformemente contínuo em conjuntos limitados.

Etapa 2:

Agora mostraremos que o operador $A_t(u, v)$ satisfaz a condição (S_1) , isto é, satisfaz

- Se $(u_j, v_j) \rightharpoonup (u, v)$ em W e $A_t(u_j, v_j) \longrightarrow (z, w)$ em W então $(u_j, v_j) \longrightarrow (u, v)$ em W , onde $W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.

De fato, se $(u_j, v_j) \rightharpoonup (u, v)$ em W , então pela Proposição 1.16 a sequência $\{(u_j, v_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada em W , e se $A_t(u_j, v_j) \longrightarrow (z, w)$ em W , temos que $A_t(u_j, v_j)$ é de Cauchy em W . Note que,

$$\begin{aligned} & \langle A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k), (u_j, v_j) - (u_k, v_k) \rangle_{W^*, W} = \\ & = \langle -\Delta_p u_j - (-\Delta_p u_k), u_j - u_k \rangle + \frac{1}{t} \langle -\Delta_q v_j - (-\Delta_q v_k), v_j - v_k \rangle \\ & = \int_{\Omega} (|\nabla u_j|^{p-2} \nabla u_j - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k) \cdot \nabla (u_j - u_k) dx \\ & \quad + \frac{1}{t} \int_{\Omega} (|\nabla v_j|^{q-2} \nabla v_j - |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k) \cdot \nabla (v_j - v_k) dx. \end{aligned}$$

Agora teremos que considerar dois casos:

$$1 < p \leq 2$$

e

$$p \geq 2.$$

Pela Observação 1.43 garantimos a existência de constantes c_p e c_q tais que

$$\begin{aligned}
& \langle A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k), (u_j, v_j) - (u_k, v_k) \rangle_{W^*, W} = \\
& = \int_{\Omega} (|\nabla u_j|^{p-2} \nabla u_j - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k) \cdot \nabla (u_j - u_k) dx \\
& + \frac{1}{t} \int_{\Omega} (|\nabla v_j|^{q-2} \nabla v_j - |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k) \cdot \nabla (v_j - v_k) dx \\
& \geq \begin{cases} c_p \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{c_q}{t} \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q, p \geq 2 \\ \frac{c_p \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2}{(\|u_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{2-p}} + \frac{c_q \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}{t(\|v_j\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} + \|v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)})^{2-q}}, p \leq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, considerando $p \geq 2$ e usando a desigualdade (1.3) teremos

$$\begin{aligned}
& c_p \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{c_q \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q}{t} \\
& \leq \langle A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k), (u_j - u_k, v_j - v_k) \rangle_{W^*, W} \\
& \leq \|A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k)\|_{W^*} \|(u_j - u_k, v_j - v_k)\|_W.
\end{aligned}$$

Como $(A_t(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada podemos concluir que

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} c_p \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{t} c_q \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q = 0.$$

Como temos que as constantes c_p e c_q são positivas e estamos considerando $t > 0$, concluímos que

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0,$$

e

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} = 0.$$

Ou seja, as sequências $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são de cauchy em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)$ respectivamente, e como estes espaços são completos tem-se que a sequência $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge forte em W , mas já temos que esta sequência converge fraco em W com limite fraco $(u, v) \in W$. Pela unicidade do limite concluímos que

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ em } W$$

como queríamos.

Se $1 < p \leq 2$ teremos:

$$\begin{aligned}
& \langle A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k), (u_j, v_j) - (u_k, v_k) \rangle_{W^*, W} = \\
& = \int_{\Omega} (|\nabla u_j|^{p-2} \nabla u_j - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k) \cdot \nabla (u_j - u_k) dx \\
& + \frac{1}{t} \int_{\Omega} (|\nabla v_j|^{q-2} \nabla v_j - |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k) \cdot \nabla (v_j - v_k) dx \\
& \geq c_p \frac{\|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2}{(\|u_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{2-p}} + \frac{1}{t} c_q \frac{\|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}{(\|v_j\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} + \|v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)})^{2-q}}
\end{aligned}$$

como a sequência $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em W , segue que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|u_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M \text{ e}$$

$$\|v_j\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq M$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí

$$(\|u_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})^{2-p} \leq (2M)^{2-p}$$

e

$$(\|v_j\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} + \|v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)})^{2-q} \leq (2M)^{2-p}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
& \langle A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k), (u_j, v_j) - (u_k, v_k) \rangle_{W^*, W} = \\
& = \int_{\Omega} (|\nabla u_j|^{p-2} \nabla u_j - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k) \cdot \nabla (u_j - u_k) dx \\
& + \frac{1}{t} \int_{\Omega} (|\nabla v_j|^{q-2} \nabla v_j - |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k) \cdot \nabla (v_j - v_k) dx \\
& \geq c_p \frac{\|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2}{(2M)^{2-p}} + \frac{1}{t} c_q \frac{\|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}{(2M)^{2-p}},
\end{aligned}$$

assim reescrevendo a desigualdade acima e usando a desigualdade (1.3) teremos

$$\begin{aligned}
& \frac{c_p \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2}{(2M)^{2-p}} + \frac{c_q \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}{t(2M)^{2-p}} \\
& \leq \langle A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k), (u_j, v_j) - (u_k, v_k) \rangle_{W^*, W} \\
& \leq \|A_t(u_j, v_j) - A_t(u_k, v_k)\|_{W^*} \|(u_j - u_k, v_j - v_k)\|_W,
\end{aligned}$$

e, novamente por $(A_t(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma sequência de Cauchy, e $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser

limitada podemos concluir que

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} c_p \frac{\|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2}{(2M)^{2-p}} + \frac{1}{t} c_q \frac{\|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2}{(2M)^{2-p}} = 0.$$

Daí obtemos que

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \|u_j - u_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$$

e

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \|v_j - v_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} = 0,$$

ou seja a sequência $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em W , que é um espaço completo, logo converge em W . Por esta sequência já possuir limite fraco $(u, v) \in W$ concluimos pela unicidade do limite que

$$(u_j, v_j) \longrightarrow (u, v) \text{ em } W$$

como queríamos.

Etapla 3:

Mostraremos agora a terceira condição, que é a seguinte;

- Dado uma constante $m > 0$ o conjunto

$$M_m = \{(u, v) \in W / \mathcal{A}_t(u, v) = m\}$$

é limitado, e cada raio que passa pela origem intersecta M_m . Mais ainda, para todo $(u, v) \neq 0$ temos que $\langle A_t(u, v), (u, v) \rangle > 0$ e existe uma constante $\rho_m > 0$ tal que $\langle A_t(u, v), (u, v) \rangle \geq \rho_m$.

Lembremos que

$$\|(u, v)\|_W = \left(\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e se $(u, v) \in M_m$, então

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q = m$$

ou seja,

$$\frac{1}{p} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{tq} \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q = m,$$

logo

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &= p \left(m - \frac{1}{tq} \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q \right) \\ &\leq pm. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}^2 \leq (pm)^{\frac{2}{p}},$$

com o mesmo raciocínio conseguimos limitar $\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}^2$, pois

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q &= tq \left(m - \frac{1}{p} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \right) \\ &\leq tqm. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^2 \leq (tqm)^{\frac{2}{q}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_W &= \left(\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2 + \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left((pm)^{\frac{2}{p}} + (tqm)^{\frac{2}{q}} \right)^{\frac{1}{2}} = C(t). \end{aligned}$$

Como estamos fixando $t > 0$ segue que o conjunto M_m é limitado.

Mostremos agora que todo raio $c(u, v)$, $c \in \mathbb{R}$ com $(u, v) \neq 0$ intersecta M_m . De fato, considere $(u, v) \in W \setminus \{(0, 0)\}$ e a seguinte função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto \mathcal{A}_t(c(u, v)), \end{aligned}$$

observe que $f(0) = 0$ e

$$f(c) = \frac{c^p}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{c^q}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q.$$

Assim, se t é fixado e fazemos $c \rightarrow +\infty$ vemos que $f(c) \rightarrow +\infty$. Pela continuidade de f segue que existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(d) = m$, portanto o raio $c(u, v)$ intersecta M_m .

Agora considere $(u, v) \in W \setminus \{(0, 0)\}$. Daí temos

$$\begin{aligned} \langle A_t(u, v), (u, v) \rangle &= \langle (-\Delta_p u, -\frac{1}{t} \Delta_q v), (u, v) \rangle \\ &= \langle -\Delta_p u, u \rangle + \frac{1}{t} \langle -\Delta_q v, v \rangle \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u + \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \cdot \nabla v \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla v|^q \\ &= \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{t} \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q > 0. \end{aligned}$$

Note que estamos considerando $p, q > 1$ e se $(u, v) \in M_m$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle A_t(u, v), (u, v) \rangle &= p \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + q \frac{1}{qt} \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q \\
&\geq \min\{p, q\} \left(\frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{qt} \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q \right) \\
&= \min\{p, q\} \mathcal{A}_t(u, v) \\
&= \min\{p, q\} m
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle A_t(u, v), (u, v) \rangle \geq \rho_m$$

tal que $\rho_m = \min\{p, q\}m > 0$. Logo concluímos a terceira condição do Teorema.

Etapla 4:

Por fim, mostremos a última condição, que é a seguinte;

- A função $B : W \longrightarrow W^*$ é um operador potencial ímpar (com potencial $\mathcal{B}$) contínuo no sentido da norma (fortemente), tal que $\mathcal{B}(u, v) \neq 0$ implica $B(u, v) \neq 0$.

De fato, por definição, a derivada de Gateaux de $\mathcal{B}$ na direção de $(z, w) \in W$ é o limite:

$$\begin{aligned}
D\mathcal{B}(u, v).(z, w) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{B}((u, v) + s(z, w)) - \mathcal{B}(u, v)}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\Omega} r(x) |u + sz|^{\alpha} |v + sw|^{\beta} - \int_{\Omega} r(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta}}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} r(x) \left[\frac{|u + sz|^{\alpha} |v + sw|^{\beta} - |u|^{\alpha} |v|^{\beta}}{s} \right].
\end{aligned}$$

Note que podemos trocar o limite de lugar com a integral. Com efeito, defina a função:

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto |u + sz|^{\alpha} |v + sw|^{\beta}.$$

Observe que φ é derivável, daí usando (2.3) e a regra da cadeia obtemos que;

$$\varphi'(s) = \alpha |u + sz|^{\alpha-2} (u + sz) z |v + sw|^{\beta} + |u + sz|^{\alpha} \beta |v + sw|^{\beta-2} (v + sw) w,$$

assim, pelo Teorema 1.30, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que;

$$\varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(\theta s) s$$

ou seja, para $s > 0$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} &= \alpha |u + \theta sz|^{\alpha-2} (u + \theta sz) z |v + \theta sw|^\beta + \\ &+ |u + \theta sz|^\alpha \beta |v + \theta sw|^{\beta-2} (v + \theta sw) w. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} = \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta z + |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v w. \quad (2.6)$$

Voltando em (2.5) observamos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right| &\leq \alpha |u + \theta sz|^{\alpha-1} |v + \theta sw|^\beta |z| + \\ &+ |u + \theta sz|^\alpha \beta |v + \theta sw|^{\beta-1} |w|, \end{aligned}$$

e usando a Proposição (1.34) temos:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right| \\ &\leq \alpha 2^{\alpha+\beta-1} (|u|^{\alpha-1} + (s\theta)^{\alpha-1} |z|^{\alpha-1}) (|v|^\beta + (\theta s)^\beta |w|^\beta) |z| + \\ &+ \beta 2^{\alpha+\beta-1} (|u|^\alpha + (\theta s)^\alpha |z|^\alpha) (|v|^{\beta-1} + (\theta s)^{\beta-1} |w|^{\beta-1}) |w|. \end{aligned}$$

Como $\theta \in (0, 1)$ e estamos interessados quando $s \rightarrow 0^+$ podemos tomar uma constante $c > 0$ tal que $|s| \leq c$ e, portanto obtemos a seguinte desigualdade

$$\theta s \leq c.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &r(x) \left[\frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right] \\ &\leq r(x) \left[\alpha 2^{\alpha+\beta-1} (|u|^{\alpha-1} + c^{\alpha-1} |z|^{\alpha-1}) (|v|^\beta + c^\beta |w|^\beta) |z| + \right. \\ &\left. + \beta 2^{\alpha+\beta-1} (|u|^\alpha + c^\alpha |z|^\alpha) (|v|^{\beta-1} + c^{\beta-1} |w|^{\beta-1}) |w| \right]. \end{aligned}$$

Observe que $(|u|^{\alpha-1} + c^{\alpha-1} |z|^{\alpha-1}) \in L^{\frac{p}{\alpha-1}}(\Omega)$, $(|v|^\beta + c^\beta |w|^\beta) \in L^{\frac{q}{\beta}}(\Omega)$, $|z| \in L^p(\Omega)$, $(|u|^\alpha + c^\alpha |z|^\alpha) \in L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega)$, $(|v|^{\beta-1} + c^{\beta-1} |w|^{\beta-1}) \in L^{\frac{q}{\beta-1}}(\Omega)$, $|w| \in L^q(\Omega)$, e de (4) obtemos

$$\frac{\alpha-1}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

e

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta-1}{q} + \frac{1}{q} = 1.$$

Assim, pelo Teorema 1.19 concluímos que a soma entre colchetes é uma função integrável. Como $r \in L^\infty(\Omega)$, se $M = \sup_{x \in \Omega} |r(x)|$ temos que

$$r(x) \leq M, \text{ q.t.p em } \Omega,$$

logo

$$\begin{aligned} & r(x) \left[\frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right] \\ & \leq M \left[\alpha 2^{\alpha+\beta-1} (|u|^{\alpha-1} + c^{\alpha-1} |z|^{\alpha-1}) (|v|^\beta + c^\beta |w|^\beta) |z| + \right. \\ & \quad \left. + \beta 2^{\alpha+\beta-1} (|u|^\alpha + c^\alpha |z|^\alpha) (|v|^{\beta-1} + c^{\beta-1} |w|^{\beta-1}) |w| \right], \text{ q.t.p em } \Omega, \end{aligned}$$

portanto $r(x) \left[\frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right]$ é limitado por uma função integrável em quase todo ponto de Ω , assim pelo Teorema 1.28 podemos trocar o limite de lugar com a integral, ou seja

$$\begin{aligned} D\mathcal{B}(u, v).(z, w) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} r(x) \left[\frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right] \\ &= \int_{\Omega} \lim_{s \rightarrow 0^+} r(x) \left[\frac{|u + sz|^\alpha |v + sw|^\beta - |u|^\alpha |v|^\beta}{s} \right] \end{aligned}$$

e por (2.6) concluímos que

$$\begin{aligned} D\mathcal{B}(u, v).(z, w) &= \int_{\Omega} r(x) [\alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta z + |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v w] \\ &= \int_{\Omega} r(x) \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta z + \int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v w. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D\mathcal{B}(u, v).(z, w) &= \int_{\Omega} r(x) \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta z + \int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v w \\ &= \langle r(x) \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, z \rangle + \langle r(x) |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v, w \rangle \\ &= \langle (r(x) \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, r(x) |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v), (z, w) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja

$$D\mathcal{B}(u, v).(\cdot, \cdot) = \langle (r(x) \alpha |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, r(x) |u|^\alpha \beta |v|^{\beta-2} v), (\cdot, \cdot) \rangle$$

com queríamos.

Agora observe que o operador B é contínuo pois suas funções coordenadas são

contínuas, e ainda se temos $B(u, v) = (0, 0)$ então,

$$(r(x)\alpha|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta, r(x)|u|^\alpha\beta|v|^{\beta-2}v) = (0, 0),$$

daí

$$\begin{cases} |u|^{\alpha-1}|v|^\beta &= 0 \\ |u|^\alpha|v|^{\beta-1} &= 0 \end{cases}$$

e multiplicando a primeira equação por $|u|$ e a segunda por $|v|$ obteremos

$$|u|^\alpha|v|^\beta = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

portanto segue que

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_{\Omega} r(x)|u|^\alpha|v|^\beta dx = 0.$$

Assim concluímos a afirmação, e pelo Teorema 2.1, se $\beta_k > 0$, existe uma autofunção $(u_k, v_k) \in M_m$ com

$$\mathcal{B}(u_k, v_k) = \beta_k.$$

Etapa 5

Supondo $\Omega = (a, b)$ demonstraremos que

- $\gamma(\{(u, v) \in M_m / \mathcal{B}(u, v) \neq 0\}) = \infty$.

De fato, considere em $\mathbb{R}^k$ a norma

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e defina o conjunto $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k / |x|_p = 1\}$. Agora considere ϕ_k a autofunção correspondente ao autovalor λ_k do problema

$$\begin{cases} (|\phi'|^{p-2}\phi')' &= \lambda|\phi|^{p-2}\phi, \text{ em } (a, b) \\ \phi(a) &= \phi(b) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.52 e a Observação 1.53, a autofunção ϕ_k tem $k+1$ zeros em $\{s_i\}_{i=0}^k$, $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$. Defina a seguinte função

$$w_i(s) = \begin{cases} \phi_k(s) & \text{se } s \in (s_{i-1}, s_i) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $i \in \{1, \dots, k\}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\|w_i\|_{W^{1,p}(a,b)} = 1$, $i = 1, \dots, k-1$ e $\|w_k\|_{W^{1,q}(a,b)} = 1$, onde usamos que

$W^{1,p}(a, b) \subset W^{1,q}(a, b)$. Considere o conjunto

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i w_i, c_k w_k \right) \in W \right\} \\ &= [w_1, \dots, w_{k-1}, w_k]. \end{aligned}$$

Defina a função

$$\begin{aligned} h : S^{k-1} &\rightarrow B \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto \left((p\alpha)^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{k-1} x_i w_i(s), (q\alpha)^{\frac{1}{q}} |x_k|^{\frac{p}{q}-1} x_k w_k(s) \right). \end{aligned}$$

Afirmção 2.5. $h(S^{k-1}) \subset M_m$

Relembrando, $M_m = \{(u, v) \in W / \mathcal{A}_t(u, v) = m\}$ onde

$$\mathcal{A}_t(u, v) = \frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{qt} \int_a^b |v'|^q,$$

em que estamos considerando o caso unidimensional onde $\Omega = (a, b)$. Para $(x_1, \dots, x_k) \in S^{k-1}$ arbitrário temos;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t(h(x_1, \dots, x_{k-1})) &= \mathcal{A}_t \left((pm)^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{k-1} x_i w_i(s), (qtm)^{\frac{1}{q}} |x_k|^{\frac{1}{q}-1} x_k w_k(s) \right) \\ &= \frac{1}{p} \left\| (pm)^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{k-1} x_i w_i(\cdot) \right\|_{W_0^{1,p}(a,b)}^p + \frac{1}{qt} \left\| (qtm)^{\frac{1}{q}} |x_k|^{\frac{1}{q}-1} x_k w_k(\cdot) \right\|_{W_0^{1,q}(a,b)}^q \\ &= m \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{k-1} x_i w'_i(s) \right|^p ds + m \int_a^b |x_k|^p |w'_k(s)|^q ds \\ &= m \left[\sum_{i=1}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i-1}} |x_i|^p |w'_i(s)|^p ds + |x_k|^p \|w_k(\cdot)\|_{W_0^{1,q}(a,b)}^q \right] \\ &= m \left[\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^p \int_a^b |w'_i(s)|^p ds + |x_k|^p \right] = m \left[\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^p \|w_i(\cdot)\|_{W_0^{1,p}(a,b)}^p + |x_k|^p \right] \\ &= m \left[\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^p + |x_k|^p \right] = m \left[\sum_{i=1}^k |x_i|^p \right] = m |x|_p^p = m. \end{aligned}$$

Portanto, $h(S^{k-1}) \subset M_m$, e concluímos a afirmação.

Agora observe que h é contínua e injetora. Com efeito, h é contínua, pois suas

funções coordenadas são contínuas e se

$$h(x_1, \dots, x_k) = h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k),$$

sabemos que para $s \in (s_{i-1}, s_i)$, $i = 1, \dots, k$ tem-se

$$w_i(s) \neq 0 \text{ e } w_j(s) = 0, \forall j \neq i.$$

Logo, se

$$h(x_1, \dots, x_k)(s) = h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)(s),$$

temos que

$$(pm)^{\frac{1}{p}} x_i w_i(s) = (pm)^{\frac{1}{p}} \bar{x}_i w_i(s), \quad i = 1, \dots, k-1$$

e

$$(qtm)^{\frac{1}{q}} |x_k|^{\frac{1}{q}-1} x_k w_k(s) = (qtm)^{\frac{1}{q}} |\bar{x}_k|^{\frac{1}{q}-1} \bar{x}_k w_k(s).$$

Portanto,

$$x_i = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, k-1$$

e

$$|x_k|^{\frac{p}{q}-1} x_k = |\bar{x}_k|^{\frac{p}{q}-1} \bar{x}_k,$$

ou, equivalentemente,

$$|x_k|^p = |\bar{x}_k|^p$$

e assim temos

$$x_k = \bar{x}_k.$$

Concluimos então que $(x_1, \dots, x_k) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$, portanto h é injetora.

Observe que h é uma função ímpar e S^{k-1} é compacto. Pelo Teorema 1.29 obtemos que $h : S^{k-1} \rightarrow h(S^{k-1}) \subset M_m$ é um homeomorfismo ímpar, ou seja se $g = h^{-1}$, então $g : h(S^{k-1}) \rightarrow S^{k-1}$ é um homeomorfismo ímpar, e pela Proposição 1.50 concluímos que

$$\text{gen}(h(S^{k-1})) = k.$$

Como $h(S^{k-1}) \subset M_m$ segue que

$$\text{gen}(M_m) \geq k.$$

Visto que k é um natural arbitrário chegamos que

$$\gamma(\{(u, v) \in M_m / \mathcal{B}(u, v) \neq 0\}) = \infty,$$

pois $h(S^{k-1}) \subset S = \{(u, v) \in M_m / \mathcal{B}(u, v) \neq 0\} = M_m \setminus \{(0, 0)\}$ e temos que $h(S^{k-1})$ é compacto, visto que S^{k-1} é compacto e h é uma função contínua. Além disso, como a função h é ímpar e S^{k-1} é um conjunto simétrico segue que

$$-(h(S^{k-1})) = h(-S^{k-1}) = h(S^{k-1}).$$

Assim concluímos que $h(S^{k-1})$ é um conjunto compacto e simétrico. Como $\text{gen}(h(S^{k-1})) = k$ segue que

$$\gamma(S) = \sup\{\text{gen}(C) / C \subset S, C \in \mathcal{C}, C \text{ compacto}\} \geq k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\gamma(S) = +\infty.$$

Mostramos então que os funcionais apresentados para nosso problema estão nas condições do Teorema 2.1, logo garantimos existência e a caracterização dos autovalores do problema (2.1) sobre a reta $\mu = t\lambda$. Mais ainda, garantimos que existe uma infinidade de autofunções associadas a cada autovalor quando $\Omega = (a, b)$.

□

Do teorema anterior garantimos para cada t a existência de uma sequência $\beta_k(t)$ dada por:

$$\beta_k(t) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_k \\ C \in M_m(t)}} \inf_{(u,v) \in C} \mathcal{B}(u, v)$$

onde

$$M_m(t) = \{(u, v) \in W / \mathcal{A}_t(u, v) = m\}$$

e o k -ésimo autovalor variacional do problema (2.1) sobre a reta $\mu = t\lambda$ é dado por

$$\lambda_k(t) = \frac{m}{\beta_k(t)}.$$

No entanto, apresentaremos uma caracterização diferente dos autovalores, com os conjuntos de nível do funcional B em vez do funcional $\mathcal{A}_t$. Assim, definiremos uma sequência de autovalores $\hat{\lambda}_k(t)$ pelo quociente de Rayleigh,

$$\hat{\lambda}_k(t) = \inf_{C \in \mathcal{C}_k} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha |v|^\beta}.$$

Lema 2.6. $\hat{\lambda}_k(t) = \lambda_k(t)$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que

$$\frac{\beta_k}{m} \leq \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_k \\ C \subset W \setminus \{0\}}} \inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)}.$$

Se $C \subset W \setminus \{(0, 0)\}$, construímos um conjunto $\tilde{C}$ em M_m tomando a imagem de C pela retração:

$$h : C \longrightarrow \tilde{C}$$

$$(u, v) \longmapsto \left(\frac{um^{1/p}}{\mathcal{A}_t^{1/p}(u, v)}, \frac{vm^{1/q}}{\mathcal{A}_t^{1/q}(u, v)} \right).$$

Por h ser uma função ímpar obtemos pela Proposição 1.48 que $gen(C) \leq gen(\tilde{C})$.

Se definirmos a seguinte função

$$\tilde{h} : \tilde{C} \longrightarrow C$$

$$\left(\frac{um^{1/p}}{\mathcal{A}_t^{1/p}(u,v)}, \frac{vm^{1/q}}{\mathcal{A}_t^{1/q}(u,v)} \right) \longmapsto (u,v),$$

vemos que $\tilde{h}$ também é ímpar, logo, pela Proposição 1.48, obtemos que $\text{gen}(\tilde{C}) \leq \text{gen}(C)$. Assim concluímos que $\text{gen}(C) = \text{gen}(\tilde{C})$. Agora observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t \left(\frac{um^{1/p}}{\mathcal{A}_t^{1/p}(u,v)}, \frac{vm^{1/q}}{\mathcal{A}_t^{1/q}(u,v)} \right) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{u.m^{1/p}}{\mathcal{A}_t^{1/p}(u,v)} \right) \right|^p + \\ &+ \frac{1}{tq} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{v.m^{1/q}}{\mathcal{A}_t^{1/q}(u,v)} \right) \right|^q \\ &= \frac{m}{p \cdot \mathcal{A}_t(u,v)} \int_{\Omega} |\nabla(u)|^p + \frac{m}{qt \cdot \mathcal{A}_t(u,v)} \int_{\Omega} |\nabla v|^q \\ &= \frac{m}{\mathcal{A}_t(u,v)} \underbrace{\left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q \right)}_{\mathcal{A}_t(u,v)} = m. \end{aligned}$$

Portanto temos que $\tilde{C} \subset M_m$. Seja $(u,v) \in C$, pela condição (2.2) teremos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}(u,v)}{\mathcal{A}_t(u,v)} &= \frac{\int_{\Omega} r(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta} dx}{\mathcal{A}_t(u,v)} \\ &= \frac{m^{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}}}{m} \int_{\Omega} \frac{r(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta}}{(\mathcal{A}_t(u,v))^{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}}} dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} r(x) \left| \frac{um^{1/p}}{(\mathcal{A}_t(u,v))^{1/p}} \right|^{\alpha} \left| \frac{vm^{1/q}}{(\mathcal{A}_t(u,v))^{1/q}} \right|^{\beta} dx \\ &\geq \frac{1}{m} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u,v), \quad \forall (u,v) \in C, \end{aligned}$$

pois

$$\left(\frac{um^{1/p}}{(\mathcal{A}_t(u,v))^{1/p}}, \frac{vm^{1/q}}{(\mathcal{A}_t(u,v))^{1/q}} \right) \in \tilde{C}, \quad \forall (u,v) \in C.$$

Assim,

$$\inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u,v)}{\mathcal{A}_t(u,v)} \geq \frac{1}{m} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u,v). \quad (2.7)$$

Por outro lado, se $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{C}$, sabemos que $\mathcal{A}_t(\tilde{u}, \tilde{v}) = m$. Como $\tilde{C}$ é a imagem direta de C pela retração h , segue da sobrejetividade de h que existe $(u, v) \in C$ tal que

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\frac{um^{1/p}}{(\mathcal{A}_t(u, v))^{1/p}}, \frac{vm^{1/q}}{(\mathcal{A}_t(u, v))^{1/q}} \right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}(\tilde{u}, \tilde{v})}{m} &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} r(x) \left| \frac{um^{1/p}}{(\mathcal{A}_t(u, v))^{1/p}} \right|^{\alpha} \left| \frac{vm^{1/q}}{(\mathcal{A}_t(u, v))^{1/q}} \right|^{\beta} dx \\ &= \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)}, \text{ para algum } (u, v) \in C. \end{aligned}$$

Logo

$$\inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)} \leq \frac{\mathcal{B}(\tilde{u}, \tilde{v})}{m}, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{C},$$

daí segue que

$$\inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)} \leq \frac{1}{m} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u, v). \quad (2.8)$$

Assim, de (2.7) e (2.8) temos a igualdade

$$\inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)} = \frac{1}{m} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u, v).$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_k \\ C \subset W \setminus \{0\}}} \inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)} &= \frac{1}{m} \cdot \sup_{\substack{\tilde{C} \in \mathcal{C}_k \\ \tilde{C} \subset W \setminus \{0\}}} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u, v) \\ &\geq \frac{1}{m} \cdot \sup_{\substack{\tilde{C} \in \mathcal{C}_k \\ \tilde{C} \subset M_m}} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u, v) = \frac{\beta_k}{m}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)} \leq \frac{1}{m} \cdot \sup_{\substack{\tilde{C} \in \mathcal{C}_k \\ \tilde{C} \subset M_m}} \inf_{(u,v) \in \tilde{C}} \mathcal{B}(u, v) = \frac{\beta_k}{m}, \quad \forall C \in W \setminus \{(0, 0)\},$$

ou seja,

$$\frac{\beta_k}{m} \geq \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_k \\ C \subset W \setminus \{0\}}} \inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)}.$$

Consequentemente

$$\frac{\beta_k(t)}{m} = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_k \\ C \subset W \setminus \{0\}}} \inf_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\mathcal{A}_t(u, v)}.$$

E segue que

$$\frac{m}{\beta_k(t)} = \inf_{\substack{C \in C_k \\ C \subset W \setminus \{0\}}} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\mathcal{A}_t(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)}.$$

Enfim concluimos que

$$\lambda_k(t) = \hat{\lambda}_k(t)$$

□

Temos o seguinte teorema

Teorema 2.7. *Existe uma sequência de curvas contínuas $(\lambda_k(t), \mu_k(t))$ que emanam de (λ_k, λ_k) , onde λ_k é o k -autovalor variacional do problema (2.1) quando $\mu = t\lambda$, e é dado por*

$$\lambda_k = \inf_{C \in C_k} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha |v|^\beta}.$$

Claramente já mostramos a existência pois os funcionais que aparecem no sistema considerado satisfazem as condições do Teorema 2.1. Mostremos agora a continuidade do autovalor com respeito a curva em t , afim de concluir a prova do Teorema 2.7.

Lema 2.8. *A curva $(\lambda_k(t), \mu_k(t))$ é contínua. Mais ainda $\lambda_k(t)$ (respectivamente $\mu_k(t)$) é não crescente (respectivamente não decrescente) em t .*

Demonstração. Desde que

$$\lambda_k(t) = \inf_{C \in C_k} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{tq} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x) |u|^\alpha |v|^\beta}$$

e $1/qt$ é decrescente, temos que $\lambda_k(t)$ é não crescente. Agora mostremos a continuidade de $\lambda_k(t)$. Fixemos t_0 , pela definição de ínfimo temos que para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto simétrico que depende deste ε , digamos C_ε tal que:

$$\sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \leq \lambda_k(t_0) + \varepsilon \quad (2.9)$$

Consideremos agora t_1 , logo

$$\begin{aligned}
\lambda_k(t_1) &\leq \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \frac{\mathcal{A}_{t_1}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \\
&= \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \left| \frac{\mathcal{A}_{t_1}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} - \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} + \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \right| \\
&\leq \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \left(\left| \frac{\mathcal{A}_{t_1}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} - \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \right| + \left| \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \right| \right) \\
&\leq \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \left| \frac{\mathcal{A}_{t_1}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} - \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \right| + \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \\
&\leq \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \left| \frac{\mathcal{A}_{t_1}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} - \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \right| + \lambda_k(t_0) + \varepsilon, \text{ por (2.9)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

E lembrando que

$$\begin{aligned}
\sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} &= \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \frac{\left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{t_0 q} \int_{\Omega} |\nabla v|^q \right)}{\mathcal{B}(u,v)} \\
&\geq \sup_{(u,v) \in C_\varepsilon} \frac{\frac{1}{t_0 q} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\mathcal{B}(u,v)} \\
&\geq \frac{\frac{1}{t_0 q} \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^q}{\mathcal{B}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)},
\end{aligned}$$

onde $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C_\varepsilon$ é o ponto ocorre o máximo da função

$$(u,v) \mapsto \frac{\frac{1}{t_0 q} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\mathcal{B}(u,v)}$$

que é atingido devido esta função ser contínua e estamos sobre um conjunto compacto C_ε . Somando-se isto e a desigualdade (2.9) temos que

$$\frac{\frac{1}{t_0 q} \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^q}{\mathcal{B}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)} \leq \lambda_k(t_0) + \varepsilon. \tag{2.11}$$

Usando as definições de $\mathcal{A}_{t_0}$ e $\mathcal{A}_{t_1}$ teremos

$$\left| \frac{\mathcal{A}_{t_1}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} - \frac{\mathcal{A}_{t_0}(u,v)}{\mathcal{B}(u,v)} \right| = \frac{|t_1 - t_0|}{t_1 t_0 q} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon|^q}{\mathcal{B}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)}.$$

Disto e das desigualdades (2.10) e (2.11) obtemos

$$\lambda_k(t_1) \leq \frac{|t_1 - t_0|}{t_1} (\lambda_k(t_0) + \varepsilon) + \lambda_k(t_0) + \varepsilon. \quad (2.12)$$

Logo,

$$\lambda_k(t_1) - \lambda_k(t_0) \leq \frac{|t_1 - t_0|}{t_1} (\lambda_k(t_0) + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Trocando t_0 por t_1 , e vice-versa teremos

$$\lambda_k(t_0) - \lambda_k(t_1) \leq \frac{|t_0 - t_1|}{t_0} (\lambda_k(t_1) + \varepsilon) + \varepsilon$$

Assim

$$|\lambda_k(t_0) - \lambda_k(t_1)| \leq \max \left\{ \frac{|t_0 - t_1|}{t_1} (\lambda_k(t_0) + \varepsilon) + \varepsilon, \frac{|t_0 - t_1|}{t_0} (\lambda_k(t_1) + \varepsilon) + \varepsilon \right\}.$$

Usando a desigualdade (2.12) temos:

$$\begin{aligned} & |\lambda_k(t_0) - \lambda_k(t_1)| \\ & \leq \max \left\{ \frac{|t_0 - t_1|}{t_1} (\lambda_k(t_0) + \varepsilon) + \varepsilon, \frac{|t_0 - t_1|}{t_0} (\lambda_k(t_0) + \varepsilon) \left[1 + \varepsilon + \frac{|t_0 - t_1|}{t_1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo $t_1 \rightarrow t_0$ e usando a desigualdade acima concluímos que:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} |\lambda_k(t_0) - \lambda_k(t_1)| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ou seja

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} |\lambda_k(t_0) - \lambda_k(t_1)| = 0.$$

Portanto temos que $\lambda_k(t)$ é contínua. □

Capítulo 3

Estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase lineares na reta

Neste capítulo obteremos estimativas para autovalores do seguinte problema

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' &= \lambda\alpha r(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta, \quad x \in (a,b), \\ -(|v'(x)|^{q-2}v'(x))' &= \mu\beta r(x)|u|^\alpha v|v|^{\beta-2}, \quad x \in (a,b), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde as funções u e v satisfazem a condição homogênea de fronteira de Dirichlet

$$u(a) = v(b) = 0,$$

os expoentes satisfazem $1 < p, q < \infty$, com

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1, \quad (3.2)$$

e $r \in L^\infty(\Omega)$.

Os resultados deste capítulo seguem do artigo [6] publicado em 2006.

Ao fixar uma reta $\mu = t\lambda$, como provado na Seção 2.1, encontramos um conjunto de autovalores variacionais $\{\lambda_k(t), \mu_k(t)\}_k$ do espectro generalizado, e a continuidade variando o parâmetro t foi provado no Teorema 2.7.

3.1 Limites máximos para autovalores generalizados

Nesta seção, obteremos limitantes superiores para todos os autovalores variacionais do espectro S no caso unidimensional, isto é, considerando o sistema (3.1) em um intervalo (a,b) com condição na fronteira de Dirichlet

obteremos limitantes superiores para todos os seus autovalores variacionais. Esta generalização é possível devido à estrutura de domínio nodal de um k -ésimo autovalor de uma equação.

Teorema 3.1. *Sejam $p > q$ e $r \in L^\infty(a, b)$ tal que $r(x) \geq m > 0$. Então o k -ésimo autovalor variacional do problema (3.1) sobre a reta $\mu = t\lambda$ satisfaz*

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\Lambda_k}{p} + \frac{m^{-1+q/p}}{qt} \left(\frac{p}{q}\right)^q \Lambda_k^{q/p},$$

onde Λ_k é o k -ésimo autovalor variacional do problema de Dirichlet

$$-(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' = \lambda r(x)|u|^{p-2}u \quad (3.3)$$

em algum intervalo (a, b) .

Demonstração. Apresentaremos um limitante superior para o k -autovalor variacional $(\lambda_k(t), t\lambda_k(t))$ sobre uma reta fixa $\mu = t\lambda$.

De fato, sejam Λ_k o k autovalor variacional de

$$-(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' = \lambda r(x)|u|^{p-2}u,$$

e φ_k a correspondente autofunção. Então, pelo Teorema de Sturm-Liouville para o p -Laplaciano [16], φ_k tem $k + 1$ zeros em $\{x_j\}_{j=0}^k$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$. Seja $w_i(x) = \varphi_k(x)$ se $x \in (x_{i-1}, x_i)$ e $w_i(x) = 0$ caso contrário. Agora considere S_m a esfera em $W^{1,p}(\Omega)$ de raio m , então o conjunto

$$C^k = \{(u, |u|^{p/q-1}u) / u \in \text{span}\{w_1, \dots, w_k\} \cap S_m\}$$

tem gênero k , (a demonstração desta afirmação segue as mesmas linhas da demonstração de etapa 5 da Seção 2.1) e é admissível na caracterização variacional de $(\lambda_k(t), t\lambda_k(t))$. Por esta caracterização variacional temos:

$$\begin{aligned} \lambda_k(t) &= \inf_{C \in C^k} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{tq} \int_a^b |v'|^q}{\int_a^b r(x)|u|^\alpha |v|^\beta} \\ &\leq \sup_{(u,v) \in C^k} \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{tq} \int_a^b |v'|^q}{\int_a^b r(x)|u|^\alpha |v|^\beta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Agora resta escolhermos adequadamente o par de funções $(u, v) \in C^k$ para obtermos a cota desejada. De fato, consideremos as funções

$$v = |u|^{p/q-1}u$$

e

$$u = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_k w_k.$$

Agora faremos alguns cálculos. Com estas escolhas temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b r(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx &= \int_a^b r(x) \left| \sum_{i=1}^k t_i w_i \right|^\alpha ||u|^{p/q-1} u|^\beta dx \\
&= \int_a^b r(x) \left| \sum_{i=1}^k t_i w_i \right|^\alpha |u|^{\frac{p\beta}{q}} dx \\
&= \int_a^b r(x) \left| \sum_{i=1}^k t_i w_i \right|^\alpha \left| \sum_{j=1}^k t_j w_j \right|^{\frac{p\beta}{q}} dx \\
&= \int_a^b r(x) \sum_{i=1}^k |t_i|^\alpha |w_i|^\alpha \sum_{j=1}^k |t_j|^{\frac{p\beta}{q}} |w_j|^{\frac{p\beta}{q}} dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) |t_i|^{\alpha + \frac{p\beta}{q}} |w_i|^{\alpha + \frac{p\beta}{q}} dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) |t_i|^p |w_i|^p dx \\
&= \int_a^b r(x) \sum_{i=1}^k |t_i|^p |w_i|^p dx \\
&= \int_a^b r(x) |u|^p dx.
\end{aligned}$$

Então com estas escolhas concluimos que

$$\int_a^b r(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx = \int_a^b r(x) |u|^p dx. \quad (3.5)$$

Agora observe que se $v = |u|^{p/q-1} u$ então $v' = \frac{p}{q} |u|^{p/q-1} u'$. Somando-se isto a

equação (3.5) e o Teorema 1.19 obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{tq} \int_a^b |v'|^q}{\int_a^b r(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx} = \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_a^b |u|^{p-q} |u'|^q}{\int_a^b r(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx} \\ & \leq \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p}{\int_a^b r(x) |u|^p dx} + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q \frac{\left(\int_a^b |u|^p\right)^{1-\frac{q}{p}}}{\int_a^b r(x) |u|^p dx} \left(\int_a^b |u'|^p\right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora, se Λ_k e φ_k são o k autovalor e a correspondente autofunção do problema

$$- \left(|w(x)'|^{p-2} w'(x) \right)' = \Lambda_k r(x) |w(x)|^{p-2} w(x) \text{ com } x \in (a, b)$$

e sabemos que para $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $\varphi_k = w_i$ temos que:

$$- \left(|w_i(x)'|^{p-2} w_i'(x) \right)' = \Lambda_k r(x) |w_i(x)|^{p-2} w_i(x); x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Multiplicando a equação acima por w_i e integrando por partes de x_{i-1} até x_i obtemos:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |w_i'|^p dx = \Lambda_k \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) |w_i|^p dx; \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Multiplicando esta última equação por $|t_i|^p$ obtemos:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |t_i w_i'|^p dx = \Lambda_k \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) |t_i w_i|^p dx; \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Daí temos

$$\sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |t_i w_i'|^p dx = \Lambda_k \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) |t_i w_i|^p dx.$$

Pela caracterização da função w_i , concluímos da equação acima que:

$$\int_a^b \left| \sum_{i=1}^k t_i w_i' \right|^p dx = \Lambda_k \int_a^b r(x) \left| \sum_{i=1}^k t_i w_i \right|^p dx.$$

Da caracterização da função u escolhida, e da equação acima chegamos na seguinte equação:

$$\int_a^b |u'|^p dx = \Lambda_k \int_a^b r(x) |u|^p dx. \quad (3.7)$$

Como por hipótese temos que $r(x) \geq m > 0$, usando a equação (3.7) obtemos:

$$\int_a^b |u'|^p dx \geq \Lambda_k m \int_a^b |u|^p dx,$$

ou seja,

$$\int_a^b |u|^p dx \leq (\Lambda_k m)^{-1} \int_a^b |u'|^p dx. \quad (3.8)$$

Voltando na equação (3.6) e usando as equações (3.7) e (3.8) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{tq} \int_a^b |v'|^q}{\int_a^b r(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx} = \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q \int_a^b |u|^{p-q} |u'|^q}{\int_a^b r(x) |u|^\alpha |v|^\beta dx} \\ & \leq \frac{\frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p}{\int_a^b r(x) |u|^p dx} + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q \frac{\left(\int_a^b |u|^p\right)^{1-\frac{q}{p}}}{\int_a^b r(x) |u|^p dx} \left(\int_a^b |u'|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\ & \leq \frac{1}{p} \Lambda_k + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q \frac{\left((\Lambda_k m)^{-1} \int_a^b |u'|^p\right)^{1-\frac{q}{p}}}{\int_a^b r(x) |u|^p dx} \left(\int_a^b |u'|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\ & = \frac{1}{p} \Lambda_k + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q m^{-1+q/p} \Lambda_k^{-1+q/p} \left(\frac{\int_a^b |u'|^p}{\int_a^b r(x) |u|^p dx}\right) \\ & = \frac{1}{p} \Lambda_k + \frac{1}{tq} \left(\frac{p}{q}\right)^q m^{-1+q/p} \Lambda_k^{q/p}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.2. Não é difícil verificar que o resultado é verdadeiro quando $p = q$ e neste caso, vale a seguinte desigualdade,

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\Lambda_k}{p} + \frac{\Lambda_k}{tp} = \frac{\Lambda_k}{p} \left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

3.2 A desigualdade de Lyapunov e limites inferiores

Uma vez que os valores próprios de (3.3) foram calculados por Drabek e explicitados por Manásevich [9] quando $r(x) = 1$,

$$\Lambda_k = \left(\frac{k\pi_p}{b-a}\right)^p,$$

obtemos um limite superior explícito no caso do sistema unidimensional quando $r(x) \geq m > 0$. Finalmente em [6] foi estendido os resultados de Protter [13] para o sistema unidimensional (3.1), e melhorando os limites inferiores dos autovalores. Em vez de uma bola, foi encontrada uma curva envolvente tipo hipérbole e que contém os autovalores na região.

Agora mostraremos a seguinte desigualdade de Lyapunov, que será útil para encontrar a curva que limita os autovalores.

Teorema 3.3. *Suponha que exista uma solução positiva para o sistema*

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' &= f(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta, \quad x \in (a, b) \\ -(|v'(x)|^{q-2}v'(x))' &= g(x)|u|^\alpha v|v|^{\beta-2}, \quad x \in (a, b) \end{cases}$$

em um intervalo (a, b) , com condição de fronteira homogênea de Dirichlet. Então temos que

$$2^{\alpha+\beta} \leq (b-a)^{\alpha/p'+\beta/q'} \left(\int_a^b f(x)dx \right)^{\alpha/p} \cdot \left(\int_a^b g(x)dx \right)^{\beta/q}. \quad (3.9)$$

Demonstração. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' &= f(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta, \quad x \in (a, b) \\ -(|v'(x)|^{q-2}v'(x))' &= g(x)|u|^\alpha v|v|^{\beta-2}, \quad x \in (a, b) \end{cases}$$

com condição homogênea de fronteira de Dirichlet

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$$

e

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1. \quad (3.10)$$

Observe que para qualquer $c \in [a, b]$, temos:

$$\begin{aligned} 2|u(c)| &= \left| \int_a^c u'(x)dx \right| + \left| \int_c^b u'(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^c |u'(x)|dx + \int_c^b |u'(x)|dx \\ &= \int_a^b |u'(x)|dx. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder obtemos:

$$2|u(c)| \leq (b-a)^{1/p'} \left(\int_a^b |u'(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Multiplicando a primeira equação do sistema por u e integrando por partes o lado esquerdo de a até b obtemos que:

$$\int_a^b |u'(x)|^p dx = \int_a^b f(x) |u(x)|^\alpha |v(x)|^\beta dx.$$

Escolhendo um ponto $c \in [a, b]$ onde $|u(x)|$ é máximo, e $d \in [a, b]$ como um ponto onde $|v(x)|$ é máximo, teremos:

$$\begin{aligned} 2|u(c)| &\leq (b-a)^{1/p'} \left(\int_a^b f(x) |u(x)|^\alpha |v(x)|^\beta dx \right)^{1/p} \\ &\leq (b-a)^{1/p'} |u(c)|^{\alpha/p} |v(d)|^{\beta/p} \left(\int_a^b f(x) dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Fazendo os mesmos cálculos mas considerando a função v primeiro obteremos:

$$\begin{aligned} 2|v(d)| &\leq (b-a)^{1/q'} \left(\int_a^b f(x) |u(x)|^\alpha |v(x)|^\beta dx \right)^{1/p} \\ &\leq (b-a)^{1/q'} |u(c)|^{\alpha/q} |v(d)|^{\beta/q} \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sejam e_1 e e_2 constantes a serem encontradas. Elevando as equações (3.11) e (3.12) por estas constantes e_1 e e_2 respectivamente, obteremos:

$$2^{e_1} \leq (b-a)^{e_1/p'} |u(c)|^{(\alpha/p-1)e_1} |v(d)|^{(\beta/p)e_1} \left(\int_a^b f(x) dx \right)^{e_1/p}$$

e

$$2^{e_2} \leq (b-a)^{e_2/q'} |u(c)|^{(\alpha/q)e_2} |v(d)|^{(\beta/q-1)e_2} \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{e_2/q}.$$

Agora multiplicando estas equações obteremos:

$$\begin{aligned} 2^{e_1+e_2} &\leq (b-a)^{\frac{e_1}{p'} + \frac{e_2}{q'}} |u(c)|^{(\frac{\alpha}{p}-1)e_1 + \frac{\alpha}{q}e_2} |v(d)|^{(\frac{\beta}{p})e_1 + (\frac{\beta}{q}-1)e_2} \times \\ &\times \left(\int_a^b f(x) dx \right)^{\frac{e_1}{p}} \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{\frac{e_2}{q}}. \end{aligned}$$

Para obter o resultado nos resta acharmos condições para que os expoentes de $|u(c)|$ e $|v(d)|$ se anulem, isto é, e_1 e e_2 são soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha}{p} - 1 \right) e_1 + \frac{\alpha}{q} e_2 = 0 \\ \frac{\beta}{p} e_1 + \left(\frac{\beta}{q} - 1 \right) e_2 = 0. \end{cases}$$

Usando a condição (3.10) vemos que este sistema possui solução não trivial, ao

qual se resumem a equação:

$$e_1\beta = e_2\alpha.$$

Portanto, tomando $e_1 = \alpha$ e $e_2 = \beta$ teremos:

$$2^{\alpha+\beta} \leq (b-a)^{\frac{\alpha}{p'}+\frac{\beta}{q'}} \left(\int_a^b f(x)dx \right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_a^b g(x)dx \right)^{\frac{\beta}{p}},$$

o que prova o Teorema. $\square$

Agora usaremos esta desigualdade para provar o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *Existe uma função $h(\lambda)$ tal que $\mu \geq h(\lambda)$ para cada autovalor generalizado (λ, μ) do problema 3.1, onde $h(\lambda)$ é dada por*

$$h(\lambda) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{C}{\lambda^{\alpha/p} \int_a^b r(x)dx} \right)^{q/\beta},$$

onde a constante C é dada por

$$C = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha/p} (b-a)^{\alpha/p'+\beta/q'}}.$$

Demonstração. Seja (λ, μ) o par de autovalores generalizados e (u, v) o par correspondente que é solução não trivial do sistema:

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' &= \lambda\alpha r(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta, \quad x \in (a, b) \\ -(|v'(x)|^{q-2}v'(x))' &= \mu\beta r(x)|u|^\alpha v|v|^{\beta-2}, \quad x \in (a, b). \end{cases}$$

Consideremos agora a constante:

$$M = \frac{2^{\alpha+\beta}}{(b-a)^{\frac{\alpha}{p'}+\frac{\beta}{q'}}}.$$

Assim, substituindo as funções a seguir, na desigualdade de Lyapunov (3.9),

$$f(x) = \lambda\alpha r(x), g(x) = \mu\beta r(x)$$

teremos:

$$M \leq \left(\int_a^b \lambda\alpha r(x)dx \right)^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \left(\int_a^b \mu\beta r(x)dx \right)^{\frac{\beta}{q}}.$$

Rearranjando os termos e usando a condição 3.10, obtemos:

$$M \leq (\lambda\alpha)^{\alpha/p} (\mu\beta)^{\beta/q} \int_a^b r(x)dx,$$

que nos dá:

$$\left(\frac{M}{(\lambda\alpha)^{\alpha/p} \int_a^b r(x)dx} \right)^{q/\beta} \leq \mu\beta.$$

Portanto,

$$\mu \geq \frac{1}{\beta} \left(\frac{C}{\lambda^{\alpha/p} \int_a^b r(x)dx} \right)^{q/\beta},$$

onde $C = \frac{M}{\alpha^{\alpha/p}}$, e isto termina a prova do Teorema. □

Capítulo 4

Estimativas para autovalores de sistemas elípticos quase lineares no $\mathbb{R}^n$

Considere o seguinte sistema elíptico quase linear

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \alpha r(x) |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, \quad x \in \Omega \\ -\Delta_q v &= \mu \beta r(x) |u|^\alpha |v|^{\beta-2}, \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde as funções u e v satisfazem a condição de fronteira de Dirichlet

$$u(x) = v(x) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega,$$

os expoentes satisfazem $1 < p, q < \infty$,

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1, \quad (4.2)$$

e $r \in L^\infty(\Omega)$.

Neste capítulo daremos uma cota superior para o primeiro autovalor variacional $\{\lambda_1(t), \mu_1(t)\}$ do sistema (4.1). Quando Ω é arbitrário, este resultado foi provado em [6].

Mas um dos objetivos principais deste capítulo é mostrar que, em domínios especiais, neste caso anéis em $\mathbb{R}^n$, é possível estender o resultado de [6] para todos os autovalores generalizados, sobre a reta $\mu = t\lambda$, mas considerando $p = q$, e desta forma podemos obter resultados semelhantes aos obtidos no Capítulo 3, fato este que foi conjecturado pelos autores em [6].

Desta forma, os resultados da Seção 4.3 deste capítulo são novos e originais, pois não os encontramos ainda na literatura vigente.

4.1 Estimativas para o primeiro autovalor em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção daremos uma cota superior para o primeiro autovalor variacional $\{\lambda_1(t), \mu_1(t)\}$ do sistema (4.1), quando Ω é arbitrário, este resultado foi provado por [6].

Teorema 4.1. [Nápoli e Pinasco [6]]. *Seja $p > q, r(x) \geq m > 0$. Então, o primeiro autovalor variacional do problema (4.1) sobre a reta $\mu = t\lambda$ satisfaz*

$$\lambda_1 \leq \frac{\Lambda_1}{p} + \frac{m^{-1+q/p}}{qt} \left(\frac{p}{q}\right)^q \Lambda_1^{q/p}$$

onde Λ_1 é o primeiro autovalor variacional do problema de Dirichlet

$$-\Delta_p u = \lambda r(x)|u|^{p-2}u$$

em algum domínio Ω .

Demonstração. Considere o conjunto $A = \{(u, v)\} \cup \{-(u, v)\}$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$. Pela Proposição 1.48 temos que $gen(A) = 1$, além disso A é um conjunto compacto simétrico, ou seja A é um conjunto admissível na caracterização dos autovalores, daí temos,

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \inf_{C \in C_1} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{qt} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}} \\ &\leq \sup_{(u,v) \in A} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{qt} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}} \\ &= \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{1}{qt} \int_{\Omega} |\nabla v|^q}{\int_{\Omega} r(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}}. \end{aligned}$$

Visto que $(u, v) \neq (0, 0)$ é arbitrário, a desigualdade acima vale para todo $(u, v) \in W \setminus \{(0, 0)\}$. Agora considere $u = \varphi_1$ e $v = \varphi_1^{p/q}$, onde φ_1 denota a primeira autofunção do problema de Dirichlet

$$-\Delta_p w = \lambda r(x)|w|^{p-2}w$$

em Ω .

Observe que podemos considerar

$$\int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^p = 1,$$

pois caso $\int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^p \neq 1$ consideramos a função

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1}{\left(\int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^p\right)^{1/p}}.$$

Assim obteremos:

$$\int_{\Omega} r(x)|\tilde{\varphi}_1|^p = 1.$$

Com isso, multiplicando a equação $-\Delta_p w = \Lambda r(x)|w|^{p-2}w$ por w e integrando por partes teremos:

$$\int_{\Omega} |w'|^{p-2}(w')^2 = \Lambda \int_{\Omega} r(x)|w|^p.$$

Assim, considerando a normalização, obteremos que o primeiro autovalor do problema de Dirichlet é dado por:

$$\Lambda_1 = \int_{\Omega} |\varphi'_1|^p. \quad (4.3)$$

Agora observe que:

$$v' = (\varphi'_1)^{p/q} = \frac{p}{q} \varphi_1^{p/q-1} \varphi'_1,$$

daí

$$\int_{\Omega} r(x)|u|^{\alpha} \cdot |v|^{\beta} = \int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^{\alpha} \cdot |\varphi_1^{p/q}|^{\beta} = \int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^{\alpha + \frac{\beta p}{q}}.$$

Como $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1$ temos que $\alpha + \frac{\beta p}{q} = p$, daí:

$$\int_{\Omega} r(x)|u|^{\alpha} \cdot |v|^{\beta} = \int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^p = 1.$$

Pela desigualdade de Hölder temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v'|^q &= \int_{\Omega} \left(\frac{p}{q}\right)^q |\varphi_1^{p/q-1} \cdot \varphi'_1|^q \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{p}{q}\right)^p |\varphi_1|^{p-q} \cdot |\varphi'_1|^q \\ &\leq \left(\frac{p}{q}\right)^p \left(\int_{\Omega} |\varphi'_1|^p\right)^{1/s} \left(\int_{\Omega} |\varphi_1|^p\right)^{1/s'}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $s = \frac{p}{q}$ e $s' = \frac{p}{p-q}$. Como $\int_{\Omega} r(x)|\varphi_1|^p = 1$ e por hipótese temos que

$r(x) \geq m > 0$ segue que:

$$1 = \int_{\Omega} r(x) |\varphi_1|^p \geq \int_{\Omega} m |\varphi_1|^p = m \int_{\Omega} |\varphi_1|^p.$$

Assim

$$\int_{\Omega} |\varphi_1|^p \leq \frac{1}{m}. \quad (4.5)$$

Logo das equações (4.3), (4.4) e (4.5) concluímos que:

$$\lambda_1(t) \leq \frac{\Lambda_1}{p} + \frac{m^{-1+q/p}}{qt} \left(\frac{p}{q}\right)^q \Lambda_1^{q/p}.$$

□

4.2 Transformação radial do p-Laplaciano

Seja $r(x) = r(|x|)$, ou seja, r é uma função radial. Mostremos que a mudança de variável $\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ transforma a equação

$$-\Delta_p u = \lambda r(x) |u|^{p-2} u; \quad x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; R < |x| < \bar{R}\}$$

na equação

$$(\rho^{n-1} |v'(\rho)|^{p-1} v'(\rho))' = -\lambda r(\rho) \rho^{n-1} |v(\rho)|^{p-2} v(\rho)$$

onde $v(\rho) = u(|x|) = u(\rho)$; $\rho \in (R, \bar{R})$. Esta é chamada transformação radial do p -Laplaciano. De fato, lembremos que

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

e, se $v(\rho) = u(x)$, teremos:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial v(\rho)}{\partial x_i} = \frac{d}{d\rho} v(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = v'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

e como $\rho = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{\rho}.$$

Portanto $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = v'(\rho) \frac{x_i}{\rho}$, daí temos:

$$\nabla u(x) = v'(\rho) \cdot \frac{x}{|x|}.$$

Assim,

$$|\nabla u(x)|^{p-2} = |v'(\rho)|^{p-2},$$

e então

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -\operatorname{div} \left(|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \cdot \frac{x}{\rho} \right).$$

Como

$$-\operatorname{div} \left(|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \cdot \frac{x}{\rho} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \cdot \frac{x_i}{\rho} \right)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \cdot \frac{x_i}{\rho} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho)) \cdot \frac{x_i}{\rho} + |v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{\rho} \right) \\ &= (|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho))' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{\rho} + |v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \left[\frac{\rho - x_i \frac{x_i}{\rho}}{\rho^2} \right] \\ &= (|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho))' \cdot \frac{x_i^2}{\rho^2} + |v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \left[\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3} \right], \end{aligned}$$

temos

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = (|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho))' \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\rho^2} + (|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho)) \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3} \right]$$

e, como $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \rho^2$, a segunda soma nos resta $\frac{n-1}{\rho}$, e multiplicando e dividindo por ρ^{n-1} obteremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) &= \left[(|v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho))' + |v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho) \left(\frac{n-1}{\rho} \right) \right] \cdot \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-1}} \\ &= (\rho^{n-1} \cdot |v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho))' \cdot \rho^{1-n}. \end{aligned}$$

Portanto, nossa mudança de variável nos dá a equação:

$$(\rho^{n-1} \cdot |v'(\rho)|^{p-2} \cdot v'(\rho))' = -\lambda r(\rho) \rho^{n-1} |v(\rho)|^{p-2} v(\rho).$$

4.3 Estimativas para Autovalores em Anéis

Nesta seção, consideraremos $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; R < |x| < \bar{R}\}$ e $p = q$.

Com o mesmo raciocínio da seção anterior podemos mostrar que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \alpha r(x) |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, & x \in \Omega \\ -\Delta_p v = \mu \beta r(x) |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v, & x \in \Omega \\ u(x) = v(x) = 0; & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

pode ser transformado em:

$$\begin{cases} (\rho^{n-1} |u'(\rho)|^{p-2} u'(\rho))' = -\lambda \alpha \rho^{n-1} r(\rho) |u(\rho)|^{\alpha-2} u(\rho) |v(\rho)|^\beta, & \rho \in (R, \bar{R}) \\ (\rho^{n-1} |v'(\rho)|^{p-2} v'(\rho))' = -\mu \beta \rho^{n-1} r(\rho) |u(\rho)|^\alpha |v(\rho)|^{\beta-2} v(\rho), & \rho \in (R, \bar{R}) \\ u(R) = u(\bar{R}) = v(R) = v(\bar{R}) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Observe que consideramos as mesmas funções u e v , mas não há perigo de confusão, pois já mostramos a mudança de variável que transforma o sistema inicial neste último. Sobre este último sistema vamos fazer uma nova mudança de variável. Note que n e q são números e podem ser comparados. Esta comparação está diretamente relacionada com a mudança de variável escolhida. A nossa mudança de variável funciona em um único caso que é o seguinte:

$$n > p. \quad (4.8)$$

Antes de enunciar o teorema principal faremos algumas mudanças no sistema (4.7) que serão fundamentais para a demonstração.

Nas equações do sistema (4.7) faça a mudança:

$$\rho = \rho_p = \left(\frac{A_p}{B_p - s} \right)^{\frac{p-1}{n-p}}, \text{ tal que } \bar{u}(s) = u(\rho_p) \text{ e } \bar{v}(s) = v(\rho_p)$$

onde

$$A_p = \frac{(R\bar{R})^{\frac{n-p}{p-1}}}{\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}}} \text{ e } B_p = \frac{(\bar{R})^{\frac{n-p}{p-1}}}{\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}}}. \quad (4.9)$$

Observe que podemos obter s em função de ρ_p por

$$s = \frac{-A_p}{\rho_p^{\frac{n-p}{p-1}}} + B_p$$

Com estas mudanças mostraremos que podemos chegar no seguinte sistema:

$$\begin{cases} -(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \bar{u}'(s))' = \lambda \alpha r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^{\alpha-2} \bar{u}(s) |\bar{v}(s)|^\beta, & s \in (0, 1) \\ -(|\bar{v}'(s)|^{p-2} \bar{v}'(s))' = \mu \beta r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^\alpha |\bar{v}(s)|^{\beta-2} \bar{v}(s), & s \in (0, 1) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = \bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde

$$q_1(s) = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p \cdot \frac{A_p^{\frac{(p-1)p}{n-p}}}{(B_p - s)^{\frac{(n-1)p}{n-p}}}, \quad (4.11)$$

e

$$\rho_p(s) = \left(\frac{A_p}{B_p - s} \right)^{\frac{p-1}{n-p}}. \quad (4.12)$$

Notemos que s é uma função de ρ_p derivável e

$$s'(\rho_p) = \left(\frac{n-p}{p-1} \right) A_p \rho_p^{-\frac{n-p}{p-1}-1} > 0, \quad \forall \rho_p \in [R, \bar{R}],$$

portanto s é uma função crescente, logo o mínimo e o máximo de s ocorrem quando $\rho_p = R$ e $\rho_p = \bar{R}$, respectivamente. Como

$$\begin{aligned} s(R) &= \frac{-A_p}{R^{\frac{n-p}{p-1}}} + B_p = \frac{(R\bar{R})^{\frac{n-p}{p-1}}}{\left(\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}} \right) R^{\frac{n-p}{p-1}}} + \frac{(\bar{R})^{\frac{n-p}{p-1}}}{\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}}} = 0 \\ s(\bar{R}) &= \frac{(R\bar{R})^{\frac{n-p}{p-1}}}{\left(\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}} \right) R^{\frac{n-p}{p-1}}} + \frac{(\bar{R})^{\frac{n-p}{p-1}}}{\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}}} = 1 \end{aligned}$$

concluimos que $s \in [0, 1]$.

Agora, considere a mudança apresentada. Como $\bar{u}(s) = u(\rho_p)$ temos que,

$$\bar{u}'(s) = u'(\rho_p) \frac{d\rho_p}{ds},$$

mas de (4.12) temos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\left(\frac{A_p}{B_p - s} \right)^{\frac{p-1}{n-p}} \right) \\ &= A_p^{\frac{p-1}{n-p}} \cdot \frac{d}{ds} \left((B_p - s)^{-\frac{(p-1)}{n-p}} \right) \\ &= A_p^{\frac{p-1}{n-p}} \left(\frac{p-1}{n-p} \right) (B_p - s)^{-\frac{(p-1)}{n-p}-1} \\ &= A_p^{\frac{p-1}{n-p}} \cdot \left(\frac{p-1}{n-p} \right) \cdot (B_p - s)^{\frac{-p+1-(n-p)}{n-p}} \\ &= A_p^{\frac{p-1}{n-p}} \cdot \left(\frac{p-1}{n-p} \right) (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p}}. \end{aligned}$$

Observe que $s \in [0, 1]$, $p > 1$, $\bar{R} > R > 0$, $n > p$ e $B_p > 1$. Com isso podemos

concluir que $\frac{d\rho_p}{ds} > 0$, daí

$$\begin{aligned}
 (|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' &= \left(\left| u'(\rho_p) \cdot \frac{d\rho_p}{ds} \right|^{p-2} \cdot u'(\rho_p) \cdot \frac{d\rho_p}{ds} \right)' \\
 &= \left(|u'(\rho_p)|^{p-2} \cdot u'(\rho_p) \cdot \left| \frac{d\rho_p}{ds} \right|^{p-2} \cdot \frac{d\rho_p}{ds} \right)' \quad (4.13) \\
 &= \left(\rho_p^{n-1} |u'(\rho_p)|^{p-2} u'(\rho_p) \cdot \frac{1}{\rho_p^{n-1}} \cdot \left(\frac{d\rho_p}{ds} \right)^{p-1} \right)'.
 \end{aligned}$$

Antes de derivarmos, vamos simplificar o termo $\frac{1}{\rho_p^{n-1}} \cdot \left(\frac{d\rho_p}{ds} \right)^{p-1}$ e ver que este não depende de s . De fato, pelas definições de ρ_p e $\frac{d\rho_p}{ds}$ temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho_p^{n-1}} \cdot \left(\frac{d\rho_p}{ds} \right)^{p-1} &= \left(\frac{A_p}{B_p - s} \right)^{\frac{(p-1)(1-n)}{n-p}} \cdot \left(A_p^{\frac{p-1}{n-p}} \cdot \left(\frac{p-1}{n-p} \right) (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p}} \right)^{p-1} \\
 &= \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} \cdot A_p^{\frac{(p-1)(1-n)}{n-p} + \frac{(p-1)^2}{n-p}} \cdot (B_p - s)^{\frac{(1-n)(p-1)}{n-p} - \frac{(p-1)(1-n)}{n-p}} \\
 &= \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} \cdot A_p^{1-p}.
 \end{aligned}$$

Assim, voltando na equação (4.13) teremos

$$\begin{aligned}
 (|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' &= \frac{d}{ds} \left[\rho_p^{n-1} |u'(\rho_p)|^{p-2} u'(\rho_p) \cdot \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} \cdot A_p^{1-p} \right] \\
 &= \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} \cdot A_p^{1-p} \left(\rho_p^{n-1} |u'(\rho_p)|^{p-2} u'(\rho_p) \right)' \cdot \frac{d\rho_p}{ds} \\
 &= \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} \cdot A_p^{1-p} \cdot \frac{d\rho_p}{ds} \left(\rho_p^{n-1} |u'(\rho_p)|^{p-2} u'(\rho_p) \right)'.
 \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $\frac{d\rho_p}{ds}$ e notando que no sistema considerado $(\rho_p^{n-1} \cdot |u'(\rho_p)|^{p-2} \cdot u'(\rho_p))' = -\lambda \alpha \rho_p^{n-1} r(\rho_p) |u(\rho_p)|^{\alpha-2} u(\rho_p) |v(\rho_p)|^\beta$ teremos:

$$\begin{aligned}
& (|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' = \\
& = - \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} A_p^{1-p} A_p^{\frac{p-1}{n-p}} (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p}} \lambda \alpha \rho_p^{n-1} r(\rho_p) |u(\rho_p)|^{\alpha-2} u(\rho_p) |v(\rho_p)|^\beta \\
& = - \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} A_p^{1-p+\frac{p-1}{n-p}} \rho_p^{n-1} \frac{p-1}{n-p} (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p}} \lambda \alpha r(\rho_p) |u(\rho_p)|^{\alpha-2} u(\rho_p) |v(\rho_p)|^\beta.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{p-1} A_p^{1-p+\frac{p-1}{n-p}} \rho_p^{n-1} \frac{p-1}{n-p} (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p}} = \\
& = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p A_p^{\frac{(p-1)(-n+p+1)}{n-p}} \left(\frac{A_p}{B_p - s} \right)^{\frac{(p-1)(n-1)}{n-p}} (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p}} \\
& = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p A_p^{\frac{(p-1)(-n+p+1)}{n-p} + \frac{(p-1)(n-1)}{n-p}} (B_p - s)^{\frac{1-n}{n-p} - \frac{(p-1)(n-1)}{n-p}} \\
& = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p A_p^{\frac{(p-1)p}{n-p}} (B_p - s)^{\frac{(1-n)p}{n-p}} \\
& = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p \frac{A_p^{\frac{(p-1)p}{n-p}}}{(B_p - s)^{\frac{(n-1)p}{n-p}}},
\end{aligned}$$

e esta expressão é a que chamamos anteriormente de $q_1(s)$. Assim obtemos:

$$(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' = -q_1(s) \lambda \alpha r(\rho_p) |u(\rho_p)|^{\alpha-2} u(\rho_p) |v(\rho_p)|^\beta$$

e, como fizemos a substituição $u(\rho_p) = \bar{u}(s)$ e $v(\rho_p) = \bar{v}(s)$ concluimos que:

$$(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' = -\lambda \alpha r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^{\alpha-2} \bar{u}(s) |\bar{v}(s)|^\beta,$$

que é a equação que queríamos chegar.

Observe que para a segunda equação os cálculos seguem de modo análogo aos da primeira equação. Portanto considerando a segunda equação do sistema e fazendo a substituição teremos

$$(|\bar{v}'(s)|^{q-2} \cdot \bar{v}'(s))' = -\mu \beta r(\rho_q) q_2(s) |\bar{u}(s)|^\alpha \bar{v}(s) |\bar{v}(s)|^{\beta-2}.$$

Daremos um enfoque agora na função $q_1(s)$. Primeiramente note que

$$q_1'(s) = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p A_p^{\frac{(p-1)p}{n-p}} \frac{(n-1)p}{n-p} (B_p - s)^{-\frac{(n-1)p}{n-p}-1},$$

como $B_p > 1$ e temos que $s \in [0, 1]$, segue que $B_p - s > 0$. Logo $q_1'(s) > 0$ daí concluimos que $q_1(s)$ é uma função crescente e portanto obtemos

$$q_1(s) \geq q_1(0) \quad \forall s \in [0, 1].$$

Pela definição de $q_1(s)$ temos,

$$q_1(0) = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p \frac{A_p^{\frac{(p-1)p}{n-p}}}{B_p^{\frac{(n-1)p}{n-p}}}.$$

Por simplicidade chamaremos de D o número tal que

$$D = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p.$$

Queremos encontrar condições sobre R e $\bar{R}$ de tal que forma que

$$q_1(0) \geq 1,$$

pois assim estaremos nas condições do Teorema 3.1 quando $p = q$.

Como $A_p = R^{\frac{n-p}{p-1}} \cdot B_p$ temos que,

$$q_1(0) = D \cdot \frac{\left(R^{\frac{n-p}{p-1}} \cdot B_p \right)^{\frac{(p-1)p}{n-p}}}{B_p^{\frac{(n-1)p}{n-p}}} = DR^p B_p^{\frac{(p-1)p}{n-p} - \frac{(n-1)p}{n-p}} = DR^p B_p^{-p} = D \left(\frac{R}{B_p} \right)^p.$$

Substituindo a expressão de B_p obtemos que

$$q_1(0) = D \left[R \frac{(\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}})}{\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}}} \right]^p.$$

Assim, $q_1(0) \geq 1$ se, e somente se, vale

$$D^{\frac{1}{p}} \cdot R \left(\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} - R^{\frac{n-p}{p-1}} \right) \geq \bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} \Leftrightarrow \bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} \left(D^{\frac{1}{p}} \cdot R - 1 \right) \geq D^{\frac{1}{p}} \cdot R^{\frac{n-p}{p-1}+1}.$$

Então uma primeira condição aparece sobre R , visto que o termo do lado direito da última desigualdade é positivo e $\bar{R}$ também é, obrigaremos que o termo $(D^{\frac{1}{p}} \cdot R - 1)$ seja positivo, ou seja:

$$R > \frac{1}{D^{\frac{1}{p}}}. \quad (4.14)$$

Considerando isto, acharemos uma condição para $\bar{R}$ envolvendo R . De fato voltando na desigualdade e isolando $\bar{R}$ teremos

$$\bar{R}^{\frac{n-p}{p-1}} \geq \frac{D^{\frac{1}{p}} \cdot R^{\frac{n-p}{p-1}+1}}{D^{\frac{1}{p}} \cdot R - 1} \Leftrightarrow \bar{R} \geq \left[\frac{D^{\frac{1}{p}} \cdot R^{\frac{n-p}{p-1}+1}}{D^{\frac{1}{p}} \cdot R - 1} \right]^{\frac{p-1}{n-p}}. \quad (4.15)$$

Portanto para que tenhamos $q_1(t) \geq 1$ devemos tomar

$$R > \frac{1}{D^{\frac{1}{p}}}$$

e

$$\bar{R} > \max \left\{ R, \left[\frac{D^{\frac{1}{p}} \cdot R^{\frac{n-p}{p-1} + 1}}{D^{\frac{1}{p}} \cdot R - 1} \right]^{\frac{p-1}{n-p}} \right\}. \quad (4.16)$$

Como já vimos, à equação

$$-\Delta_p u = \lambda r(x) |u|^{p-2} u \quad (4.17)$$

é equivalente a equação

$$(\rho_p^{n-1} |v'(\rho_p)|^{p-1} v'(\rho_p))' = -\lambda r(\rho_p) \rho_p^{n-1} |v(\rho_p)|^{p-2} v(\rho_p)$$

por meio da transformação radial. Sobre esta equação fazendo, as mesmas mudanças apresentadas acima obtemos uma equação diferencial equivalente dada por

$$-(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' = \lambda r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^{p-2} \bar{u}(s), \quad s \in [0, 1]. \quad (4.18)$$

Agora podemos enunciar o principal teorema desta seção:

Teorema 4.2. *Considere $r \in L^\infty(\Omega)$ tal que $r(x) \geq m > 0$ e $r(x) = r(|x|)$, ou seja, r é uma função radial. Considere R e $\bar{R}$ satisfazendo as condições (4.14) e (4.16) respectivamente. Então, o k -ésimo autovalor variacional do problema (4.6) sobre a reta*

$$\mu = t\lambda,$$

satisfaz

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\Lambda_k}{p} + \frac{\Lambda_k}{pt},$$

onde Λ_k é o k -ésimo autovalor variacional do problema de Dirichlet

$$-\Delta_p u = \lambda r(x) |u|^{p-2} u; \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

e

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / R \leq |x| \leq \bar{R}\}.$$

Demonstração. A demonstração segue por meio das mudanças de variáveis já apresentadas. De fato, já vimos por mudanças de variáveis que o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \alpha r(x) |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, \quad x \in \Omega \\ -\Delta_p v &= \mu \beta r(x) |u|^\alpha v |v|^{\beta-2}, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' &= \lambda \alpha r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^{\alpha-2} \bar{u}(s) |\bar{v}(s)|^\beta, \quad s \in (0, 1) \\ -(|\bar{v}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{v}'(s))' &= \mu \beta r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^\alpha |\bar{v}(s)|^{\beta-2} \bar{v}(s), \quad s \in (0, 1) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(1) &= \bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0. \end{cases}$$

Portanto, os autovalores destes sistemas são os mesmos. Já vimos também que a equação

$$-\Delta_p u = \lambda r(x) |u|^{p-2} u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

é equivalente a equação

$$-(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' = \lambda r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^{p-2} \bar{u}(s), \quad s \in [0, 1].$$

Portanto nosso teorema está nas condições do Teorema 3.1 quando $p = q$. De fato, considere

$$\mu = t\lambda,$$

e

$$\bar{r}(s) = r(\rho_p) q_1(s),$$

assim temos o sistema

$$\begin{cases} -(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{u}'(s))' &= \lambda \alpha \bar{r}(s) |\bar{u}(s)|^{\alpha-2} \bar{u}(s) |\bar{v}(s)|^\beta, \quad s \in (0, 1) \\ -(|\bar{v}'(s)|^{p-2} \cdot \bar{v}'(s))' &= \mu \beta \bar{r}(s) |\bar{u}(s)|^\alpha |\bar{v}(s)|^{\beta-2} \bar{v}(s), \quad s \in (0, 1) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(1) &= \bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0. \end{cases}$$

onde $\rho_p = |x|$, $s = \frac{-A_p}{\frac{n-p}{p-1}} + B_p$, e $q_1(s)$ é dada por (4.11). Observe que

$$\bar{r}(s) = r(\rho) q_1(s) \geq r(\rho) \geq m,$$

pois já mostramos que $q_1(s) \geq 1$ nas condições de R e $\bar{R}$. Logo, sob estas condições, nosso sistema considerado é equivalente a um sistema do tipo

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p-2} u'(x))' &= \lambda \alpha r(x) |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta, \quad \text{em } \Omega, \\ -(|v'(x)|^{p-2} v'(x))' &= \mu \beta r(x) |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v, \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e a equação

$$-\Delta_p u = \lambda r(x) |u|^{p-2} u; \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

é equivalente a uma equação do tipo

$$-(|u'(x)|^{p-2} u'(x))' = \lambda r(x) |u|^{p-2} u.$$

Assim, pelo Teorema 3.1, quando $p = q$, concluímos o resultado, ou seja:

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\Lambda_k}{p} + \frac{m^{-1+q/p}}{qt} \left(\frac{p}{q}\right)^q \Lambda_k^{q/p} = \frac{\Lambda_k}{p} + \frac{\Lambda_k}{pt}.$$

□

Observação 4.3. *O caso quando $p > q$, continua em aberto.*

Também conseguimos uma limitação dos autovalores por uma curva que é o seguinte Teorema:

Teorema 4.4. *Existe uma função $h(\lambda)$ tal que $\mu \geq h(\lambda)$ para cada autovalor generalizado (λ, μ) do problema (4.6), onde $h(\lambda)$ é dada por*

$$h(\lambda) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{C}{\lambda^{\frac{\alpha}{p}} \int_0^1 r(\rho_p(s)) ds} \right)^{\frac{p}{\beta}},$$

onde

$$C = \frac{2^p}{\alpha^{\alpha/p} q_1(1)},$$

$$q_1(1) = \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^p \cdot \frac{A_p^{\frac{(p-1)p}{n-p}}}{(B_p - 1)^{\frac{(n-1)p}{n-p}}},$$

A_p e B_p são dadas por (4.9) e $\rho_p(s)$ é dada por (4.12).

Demonstração. De fato, como já mostramos que o problema (4.6) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -(|\bar{u}'(s)|^{p-2} \bar{u}'(s))' &= \lambda \alpha r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^{\alpha-2} \bar{u}(s) |\bar{v}(s)|^\beta, \quad s \in (0, 1) \\ -(|\bar{v}'(s)|^{p-2} \bar{v}'(s))' &= \mu \beta r(\rho_p) q_1(s) |\bar{u}(s)|^\alpha |\bar{v}(s)|^{\beta-2} \bar{v}(s), \quad s \in (0, 1) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(1) &= \bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0. \end{cases}$$

Podemos usar o Teorema 3.3 para as funções

$$f(s) = \lambda \alpha r(\rho_p) q_1(s) \text{ e } g(s) = \mu \beta r(\rho_p) q_1(s).$$

Como $s \in [0, 1]$ e estamos considerando $p = q$ segue que

$$2^{\alpha+\beta} = 2^p.$$

Assim

$$\begin{aligned}
2^p &\leq \left(\int_0^1 \lambda \alpha r(\rho_p(s)) q_1(s) ds \right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_0^1 \mu \beta r(\rho_p(s)) q_1(s) ds \right)^{\frac{\beta}{p}} \\
&\leq (\lambda \alpha q_1(1))^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_0^1 r(\rho_p(s)) ds \right)^{\frac{\alpha}{p}} (\mu \beta q_1(1))^{\frac{\beta}{p}} \left(\int_0^1 r(\rho_p(s)) ds \right)^{\frac{\beta}{p}} \\
&= (\lambda \alpha)^{\frac{\alpha}{p}} (\mu \beta)^{\frac{\beta}{p}} (q_1(1))^{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p}} \left(\int_0^1 r(\rho_p(s)) ds \right)^{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p}} \\
&= (\lambda \alpha)^{\frac{\alpha}{p}} (\mu \beta)^{\frac{\beta}{p}} q_1(1) \int_0^1 r(\rho_p(s)) ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mu \beta &\geq \left(\frac{2^p}{(\lambda \alpha)^{\frac{\alpha}{p}} q_1(1) \int_0^1 r(\rho_p(s)) ds} \right)^{\frac{p}{\beta}} \\
&= \left(\frac{C}{\lambda^{\frac{\alpha}{p}} \int_0^1 r(\rho_p(s)) ds} \right)^{\frac{p}{\beta}},
\end{aligned}$$

onde $C = \frac{2^p}{\alpha^{\frac{\alpha}{p}} q_1(1)}$.

Conclusão,

$$\mu \geq \frac{1}{\beta} \left(\frac{C}{\lambda^{\frac{\alpha}{p}} \int_0^1 r(\rho_p(s)) ds} \right)^{\frac{q}{\beta}}.$$

□

Considerações Finais

Neste trabalho consideramos um sistema elíptico quase linear, a princípio no $\mathbb{R}^n$. Para o sistema em $\mathbb{R}$ obtemos uma estimativa para todos os seus autovalores, em que $\Omega \subset \mathbb{R}$ é qualquer e estamos sobre a reta $\mu = t\lambda$. Ainda conseguimos uma curva do tipo hipérbole que limita os autovalores por baixo. Para o sistema em $\mathbb{R}^n$ a mesma estimativa é válida somente para uma classe de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, isto quando estamos sobre uma reta $\mu = t\lambda$, e também encontramos uma curva do tipo hipérbole que limita por baixo os autovalores. Estas conclusões se deram por meio de mudanças de variáveis no sistema considerado e o uso de métodos variacionais para a caracterização dos autovalores variacionais do sistema.

Na prova do Teorema 1.3 de [6] foi encontrado um erro de grafia. Desta forma, gostaríamos de fazer um agradecimento ao Professor Juan Pablo Pinasco por ter respondido nossa correspondência sobre tal erro e sugeriu a correção na escolha do conjunto C_k , usado na prova do Teorema 3.1 desta dissertação.

Referências Bibliográficas

- [1] Amann, H. **Lusternik-Schnirelmann theory and nonlinear eigenvalue problems**. Math. Ann. 199 (1972) 55-72.
- [2] Arrázola Iriarte, E. A. **Sobre um par de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o p-Laplaciano**. Tese de Doutorado, Campinas [S.P.:s.n.], 2004
- [3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.
- [4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**. Paris: Springer, 2011.
- [5] Del Pino, M.; Drabek, P.; Manásevich, R. **The Fredholm alternative at the first eigenvalue for the one-dimensional p-Laplacian**. J. Differential Equations, 151(2), (1999), 386 - 419.
- [6] De Nápoli, P.L.; Pinasco, J.P. **Estimates for eigenvalues of quasilinear elliptic systems**. J. Differential Equations 227 (2006) 102-115
- [7] De Nápoli, P.; Marianni, C. **Quasilinear elliptic systems of resonant type and nonlinear eigenvalue problems**. Abstr. Appl. Anal. 7 (3) (2002) 155-167.
- [8] Dosly, O.; Rehak, P. **Half-Linear Differential Equations**. Volume 202 North-Holland Mathematics Studies. North Holland (2005)
- [9] Drabek, P.; Manásevich, R. **On the closed solutions to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p- Laplacian**. Differential Integral Equations 12 (6) (1999) 773-788.
- [10] LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA, Vol. 2, 2006.
- [11] MEDEIROS, L. A. da J.; MIRANDA, M. A. M. **Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000
- [12] OLIVEIRA, CÉSAR R. DE. **Introdução À Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

- [13] Protter, M. **The generalized spectrum of second order elliptic systems**. Rocky Mountain J. Math. 9 (3) (1979) 503-518.
- [14] Rabinowitz, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. Miami: CBMS Regional Conference, 1984.
- [15] SIMON, J. **Regularité de la solution d'une équation non linéaire dans $\mathbb{R}^N$** . J. d'Analyse non linéaire. Proceedings, Besançon, France, 1977, Lecture Notes in Mathematics, 665, Springer-Verlag, Berlin.
- [16] Weinberger, H. **Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods**. Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956) 613-623.