

RENNO SANTOS GUEDES

**CONJUNTOS DE SIMETRIAS DE CURVAS PLANAS
INVARIANTES POR TRANSFORMAÇÕES AFINS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

G924c
2014 Guedes, Renno Santos, 1990-
Conjuntos de simetrias de curvas planas invariantes por
transformações afins / Renno Santos Guedes. – Viçosa, MG,
2014.

x, 100f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Simone Maria de Moraes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 98-100.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Invariantes. 3. Singularidades
(Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento
de Matemática. Programa de Pos-graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 511.332

RENNO SANTOS GUEDES

**CONJUNTOS DE SIMETRIAS DE CURVAS PLANAS
INVARIANTES POR TRANSFORMAÇÕES AFINS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de fevereiro de 2014.

Laércio José dos Santos

Marcos Craizer

Simone Maria de Moraes
(Orientadora)

O mundo gira em torno de
simetria, desde o *spin* de
partículas subatômicas até a
beleza estonteante de um
arabesco.

Marcus du Sautoy

AGRADECIMENTOS

A Deus que sempre se fez presente em minha vida em todos os momentos.

Agradeço a minha família pelo apoio para essa nova conquista, especialmente meus pais, Onias e Delzair e minhas tias, Arleide, Adilza e Adilma que sempre me deram todo incentivo para seguir em frente.

Aos professores Élcio da Silveira, Hugo Costa, Fernando Guimarães e Ailton Vieira pelos incentivos a prosseguir nos estudos em Matemática.

Ao professor Ady pela ajuda na obtenção dos artigos que precisava.

Ao professor Peter Giblin da Universidade de Liverpool que gentilmente cedeu figuras e que esclareceu algumas dúvidas que surgiram no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a síndica do prédio, Irene, pelas conversas distraídas e principalmente pela ajuda quando cheguei em Viçosa-MG.

Aos meus amigos, àqueles que estiveram perto e me apoiaram em momentos difíceis, principalmente pelas conversas de incentivos e me fazer rir nas horas complicadas.

Aos colegas de mestrado, todos especiais, agradeço a amizade e alegria sempre contagiante nas reuniões da salinha de mestrado dando-me forças para continuar essa trajetória.

A minha orientadora, Prof. Simone Maria de Moraes, por me orientar, pelos valiosos momentos de discussão, pelas conversas engraçadas e principalmente pelos ensinamentos que contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal. Por ter sido a professora que me despertou o interesse pela área de Geometria Diferencial, e conseqüentemente fundamental para minha escolha como área de pesquisa.

Agradeço à coordenação de Pós-graduação da Matemática da UFV pelo estímulo e apoio, à secretaria de Pós pelo suporte técnico.

Finalmente agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

SUMÁRIO

Listas	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Introdução a Geometria Diferencial: Euclidiana e Afim	4
1.1 Geometria Diferencial de Curvas Planas	4
1.1.1 Contato entre Curvas Planas	9
1.1.2 Cônicas	12
1.1.3 Curvas Planas Fechadas e Convexas e Curvas Fechadas com Largura Constante	12
1.1.4 Envolvente de uma família de curvas	14
1.2 Transformações Afins do Plano no Plano	17
1.2.1 Transformações Afim do Plano	17
1.2.2 Grupo de Transformações Afins	21
1.3 Geometria Diferencial Afim de Curvas planas	23
1.3.1 Comprimento de Arco Afim	23
1.3.2 Tangente Afim e Normal Afim	27

1.3.3	Curvatura Afim	28
1.3.4	Evoluta Afim	34
1.3.5	Função Distância Afim	34
2	Conjunto de Simetria Central-$\mathcal{CSS}$	38
2.1	Construção do $\mathcal{CSS}$	38
2.1.1	Evoluta de Área- $\mathcal{AE}$	40
2.2	$\mathcal{CSS}$ como Envolvente de Retas	41
2.3	Singularidades do $\mathcal{CSS}$	47
2.3.1	Condição da Cúspide do $\mathcal{CSS}$	48
2.3.2	Inflexões e Tangentes Duplas	50
2.4	Transições no $\mathcal{CSS}$	57
3	Conjuntos de Simetria da Distância Afim-$\mathcal{ADSS}$	61
3.1	Conjunto de Simetria da Distância Afim	61
3.1.1	Propriedades do $\mathcal{ADSS}$	62
3.1.2	$\mathcal{ADSS}$ contendo uma reta	68
3.2	Teoria de Singularidade e $\mathcal{ADSS}$	72
4	Conjunto de Simetria da Envolvente Afim-$\mathcal{AESS}$	76
4.1	$\mathcal{AESS}$ por Centros de Cônicas	77
4.1.1	Contato duplo de ordem 3	80
4.1.2	Consequências da condição de contato duplo de ordem 3	81
4.2	$\mathcal{AESS}$ como Envoltentes de Retas	87
4.2.1	Lugar Geométrico das Tangentes Paralelas Médias- $\mathcal{MPTL}$	94
4.3	$\mathcal{AESS}$ contendo uma reta	95
	Conclusão	97
	Referências Bibliográficas	98

LISTA DE FIGURAS

1.1	Curva convexa à esquerda e curva não-convexa à direita	13
1.2	Formas com largura constante	13
1.3	Curva com largura constante	14
1.4	Envoltentes da família de círculos	15
1.5	Parábola como envolvente da família de curvas F	17
1.6	Paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$	23
2.1	Curva centralmente simétrica	39
2.2	Conjunto de simetria central de uma curva oval	39
2.3	A reta $\ell(t)$ em vermelho e reta $r(t)$ em azul	40
2.4	Coordenadas locais	41
2.5	O $\mathcal{CSS}$ da oval	44
2.6	Ponto (x, y) do $\mathcal{CSS}$	45
2.7	Posição do $\mathcal{CSS}$	52
2.8	Tangente dupla	52
2.9	Posição do $\mathcal{CSS}$ ao longo da tangente dupla.	54
2.10	Inflexão em uma curva plana	55
2.11	Inflexão da curva plana	55
2.12	Deformações da curva	56
2.13	Representação esquemática da transição do rabo de andorinha . .	60

3.1	A primeira linha a esquerda mostra o $\text{pre-}\mathcal{ADSS}$ e a direita mostra a oval juntamente com o $\mathcal{ADSS}$. A segunda linha mostra a curvatura euclidiana (esquerda) e a curvatura afim (direita)	66
3.2	A evoluta afim (cinza) e o conjunto de simetria da distância afim.	66
3.3	Os segmentos $\gamma_1(s) = (-\frac{s}{2}, 1 - s^2)$ (azul) e $\gamma_2 = (-\frac{s}{2} + 2(1 - s^2), -1 + s^2)$ (vermelho) estão relacionados por uma transformação afim e junto definem o $\mathcal{ADSS}$ sendo o <i>eixo</i> x	71
3.4	$\mathcal{ADSS}$ gerado por dois segmentos que não estão relacionados por uma transformação afim	72
3.5	Ilustração das singularidade do tipo A_k^n	73
4.1	Superior $\text{pre-}\mathcal{AESS}$. Inferior: $\mathcal{AESS}$	84
4.2	$\mathcal{AESS}$ junto com a evoluta afim, que é mostrada em cinza. Os três ramos quase reta do $\mathcal{AESS}$ indicam três eixos de simetria afim. .	84
4.3	Exemplo das retas usadas para a construção do $\mathcal{AESS}$ como envolvente de retas	88
4.4	O $\mathcal{AESS}$ representado por vermelho e o $\mathcal{MPTL}$ pelo preto. . . .	95

RESUMO

GUEDES, Renno Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro 2014.
Conjuntos de Simetrias de Curvas Planas Invariantes por Transformações Afins. Orientador: Simone Maria de Moraes.

No final dos anos 1990, os matemáticos *Peter Giblin* e *Guillermo Sapiro* introduziram a teoria sobre conjuntos de simetria de curvas planas invariantes por transformações afins. Esta dissertação é dedicada ao estudo de alguns destes conjuntos: o *conjunto de simetria central* ($\mathcal{CSS}$), o *conjunto de simetria da distância afim* ($\mathcal{ADSS}$) e o *conjunto de simetria da envolvente afim* ($\mathcal{AESS}$) de uma curva plana diferenciável fechada e convexa.

Estudamos os conjuntos de simetria através do local geométrico dos centros de cônicas e como envolvente de curvas. Analisamos as condições de singularidades de cada um, estudando algumas em particular. Também estudamos condições de contato da curva e das cônicas que definem conjuntos de simetria.

O estudo está baseado principalmente nos artigos [16] e [14].

ABSTRACT

GUEDES, Renno Santos, M.sc, Universidade Federal de Viçosa, February of 2014.
Symmetry sets of plane curves invariants under affine transformations.
Adiviser: Simone Maria de Moraes.

In the 1990s, mathematicians *Peter Giblin* and *Guillermo Sapiro* have introduced the theory of affine invariant symmetry sets of plane curves. This dissertation is devoted to the study of some of these symmetry sets: *centre symmetry sets* (CSS), *affine distance symmetry set* ($ADSS$) and *affine envelope symmetry set* ($AESS$) of a simple closed convex smooth curve.

We study these symmetry sets through the locus of centers of conics and as an envelope of curves. We analyze the conditions of singularities, studying some in particular. We also study conditions of contact of the curve and of the conics that defined this symmetry sets.

INTRODUÇÃO

No estudo de formas (*shapes*) planas um conjunto especial é o **conjunto de simetria**, este tem sido tratado na Matemática ao se estudar curvas planas fechadas, ou contornos de superfícies planas. Este conjunto também desempenha um papel importante na área de Reconstrução de Imagens da Computação Gráfica e passou a ser objeto de estudo das Ciências Biológicas após a publicação, em 1973, do trabalho *Biological Shape and Visual Science* de H. Blum ([4]).

O conjunto de simetria de uma curva plana é definido como o local geométrico de pontos equidistantes de, pelo menos, dois pontos diferentes sobre a curva, portanto são extremos locais das funções distância definidas sobre a curva. O fato das funções distâncias terem extremos locais significa que o conjunto dos pontos de simetria é obtido pela intersecção das normais (euclidiana) dos correspondentes pontos da curva. Isto leva a uma definição equivalente deste conjunto, como sendo o lugar geométrico dos centros de círculos bitangentes à curva.

Há subconjuntos importantes dos conjuntos de simetria, por exemplo o **eixo medial** ou **esqueleto**, é obtido pelos pontos correspondentes aos centros dos discos bitangentes completamente contidos na forma definida pela curva. O eixo medial é uma representação muito interessante da forma definida pela curva, por ser muito importante para representações invariantes de escala.

Os conjuntos de simetria e os eixos mediais aparecem em Reconstrução de Imagens na Computação Gráfica, em Visão Computacional e em outras áreas.

Na Biologia os conjuntos de simetria aparecem em sistemas visuais. Pelo fato de que, em geral, a simetria é uma característica atraente à visão humana, os sistemas visuais biológicos podem ter melhor desempenho quando se observa os pontos em determinadas posições no eixo medial, estas experiências baseiam-se, por exemplo, na medição da sensibilidade de detecção humana, o aumento de sensibilidade é encontrado em certos pontos no eixo medial da forma definida por uma dada curva fechada.

A determinação dos conjuntos de simetria, em geral, não é uma tarefa fácil, especialmente para formas complexas obtidas a partir de imagens reais, e têm sido o tema de extensas pesquisas, tais como [9], [11] e [17]. Nestas abordagens o conjunto de simetria pode ser originado na determinação de diagramas de Voronoi, na redefinição do eixo medial de formas distintas e em simulações de transformações.

Na pesquisa Matemática, o conjunto de simetria têm tido um papel de destaque, construções de diferentes simetrias foram introduzidas na literatura e a criação de novos tipos e variações sobre os modelos existentes fazem parte de uma área de pesquisa bastante ativa. Muitos trabalhos recentes referente ao conjunto de simetria tem sido realizados, tais como:

1. Representação formal do conjunto de simetria [9] e [31].
2. Estrutura diferencial do conjunto de simetria [6], [7], [9] e [5].
3. Estrutura topológica do conjunto de simetria [31].
4. Relação do conjunto de simetria com sua curvatura [2], [22], [25] e [31], e muitas outras propriedades matemáticas.
5. As relações entre a singularidade e a teoria da bifurcação de conjuntos de simetria (descritos, por exemplo, em [6]).

No final dos anos 1990, os matemáticos *Peter Giblin* e *Guillermo Sapiro* introduziram a teoria sobre conjuntos de simetria de curvas planas invariantes por transformações afins e produziram os primeiros trabalhos sobre essa teoria ([13], [16], [17] e [18]).

Em princípio, a determinação de conjuntos de simetria invariante afim para curvas planas afins foi feita partindo das construções de conjuntos de simetria euclidiano. Neste caso, diferentes construções dos conjuntos de simetrias resultam em conjuntos idênticos, mas os invariantes afins análogos a estas construções dão origem a distintos conjuntos de simetria. Este é o motivo da riqueza deste tema, pois não há um único conjunto de simetria invariante afim.

Nesta dissertação, estudamos três conjuntos de simetria, a saber: o *conjunto de simetria central* ($\mathcal{CSS}$), o *conjunto de simetria da distância afim* ($\mathcal{ADSS}$) e o *conjunto de simetria da envolvente afim* ($\mathcal{AESS}$) de uma curva plana. O estudo está baseado nos dos artigos [13], [14], [16] e [18].

O texto está dividido em quatro capítulos distribuídos como segue:

Iniciamos com um capítulo de conceitos e resultados preliminares da Geometria Diferencial e da Geometria Diferencial Afim para curvas planas, tais como: comprimento de arco, vetores tangentes e normais, curvaturas, evolutas, envolventes de curvas, função distância afim e transformações afins planas. Finalizamos o

capítulo introduzindo a noção de contato entre curvas planas que será utilizada nos capítulos subsequentes.

No capítulo 2 iniciamos apresentando o *conjunto de simetria central-CSS* para curvas planas. Dada $\mathcal{C}$ uma curva plana diferenciável, fechada e simples, para cada par de pontos distintos de $\mathcal{C}$ que têm tangentes paralelas traçamos uma reta passando por estes pontos, o *CSS* de $\mathcal{C}$ é a envolvente destas retas. Abordamos também a *Evoluta de Área-AE*. Em [23] encontramos uma outra definição para o *CSS* de uma curva de Jordan convexa, este é definido como sendo o conjunto de bifurcação da família de funções razão-da-distância.

Neste capítulo definimos o *CSS*, parametrizamos as retas que o define. Determinamos sob quais condições o *CSS* tem singularidades, para estudá-las fazemos primeiro uma análise da estrutura local do *CSS*. Na segunda parte do capítulo estudamos as inflexões e tangentes duplas do *CSS* e suas singularidades do tipo cúspide e rabo de andorinha.

No Capítulo 3 introduzimos o *conjunto de simetria da distância afim-ADSS* para curvas planas fechadas convexas. O *ADSS* de uma curva $\mathcal{C}$ diferenciável, fechada e convexa é definido através da distância afim, dada em [22], que é um invariante afim. O *ADSS* é o fecho do conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão em pelo menos dois normais afins e equidistantes afim dos pontos correspondentes da curva.

Assim, neste capítulo definimos o *ADSS*, apresentamos suas propriedades, estudamos o caso em que o *ADSS* contém uma reta. Concluimos o capítulo com o estudo das singularidades do *ADSS*, mostrando que este conjunto também pode ser obtido como o lugar geométrico dos centros de cônicas que têm contato de ordem 4 com pelo menos dois pontos distintos da curva.

No capítulo 4, estudamos o *conjunto de simetria da envolvente afim-AESS* de uma curva $\mathcal{C}$ diferenciável, fechada e convexa. Apresentamos duas maneiras de definir o *AESS*, uma semelhante à primeira definição do *CSS* e outra análoga à segunda definição do *ADSS*. Especificamente introduzimos o *AESS* como o lugar geométrico dos centros de cônicas que têm contato de ordem ≥ 3 com pelo menos dois pontos distintos da curva; e como a envolvente das retas que, em cada par de pontos da curva que não têm tangentes paralelas, passa pelo ponto de intersecção das tangentes correspondentes à curva e pelo ponto médio da corda que une os dois pontos da curva. Definimos um outro conjunto de simetria invariante afim o *MPTL*, a fim de compreender a estrutura do *AESS*.

Finalizamos o capítulo com a definição do *AESS*, de uma curva $\mathcal{C}$, através de cônica, apresentamos algumas propriedades do conjunto e estudamos as condições de contato entre curva e as cônicas que definem o *AESS*. Finalizamos relacionando o *ADSS* e *AESS*, mostrando que no caso em que estes conjuntos contém retas os arcos de curva que os definem não tem propriedades similares, para o *AESS* podemos garantir que há uma transformação afim que leva um arco da curva no outro, porém não podemos garantir essa propriedade para o *ADSS*.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO A GEOMETRIA DIFERENCIAL: EUCLIDIANA E AFIM

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições e resultados de Geometria Diferencial e Geometria Diferencial Afim para curvas planas que serão usados ao longo deste trabalho. Neste sentido, abordaremos alguns conceitos, como por exemplo, o conceito de curvatura afim, distância afim e envolvente de retas.

As principais referências para este capítulo são [8], [12], [1], [21], [24], [25], [27], [28] e [30].

As figuras deste capítulo foram produzidas com os aplicativos *LatexDraw* e *Maple*, exceto as figuras 2.1 e 1.3 que foram retiradas de [1] e [21], respectivamente.

1.1 Geometria Diferencial de Curvas Planas

Nesta seção, vamos introduzir os conceitos básicos de Geometria Diferencial.

As referências para esta seção e os resultados nela contidos são [1], [27] e [30].

Definição 1.1. *Uma curva plana parametrizada diferenciável é uma aplicação*

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t),\end{aligned}$$

*de classe C^∞ definida num intervalo aberto I da reta. A variável $t \in I$ é dita **parâmetro da curva** e $\gamma(I)$, o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\gamma(t)$ para $t \in I$, é chamado **traço da curva**.*

Definição 1.2. *Seja*

$$\begin{aligned}\gamma &: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),\end{aligned}$$

uma curva parametrizada diferenciável. O **vetor tangente** a γ em $t \in I$ é dado por:

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

E a **reta tangente** a γ em $t_0 \in I$, que passa por $\gamma(t_0)$ na direção $\gamma'(t_0)$, é dada por:

$$r_\gamma(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é preciso que **exista uma reta tangente** a uma curva γ para cada valor do parâmetro t ; para isso, é suficiente que o **vetor tangente a γ seja não nulo para todo t** . Portanto restringimos o estudo às curvas que satisfazem esta condição.

Definição 1.3. *Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **regular** se $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq \vec{0}$.*

Definição 1.4. *A **função comprimento de arco** de γ a partir de um ponto $t_0 \in I$, denotada por ℓ_{t_0} , é definida por*

$$\begin{aligned}\ell_{t_0} &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \ell_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du,\end{aligned}$$

esta função mede, a menos de sinal, o comprimento do arco de γ de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$.

Definição 1.5. *Uma curva regular $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está **parametrizada pelo comprimento de arco**, se e somente se, $\|\gamma'(s)\| = 1$.*

Notações 1.1. *Em geral indicaremos um parâmetro comprimento de arco por s .*

O nome da parametrização acima se justifica uma vez que o comprimento de arco a partir de s_0 para tal parametrização é dada por:

$$\ell = \int_{s_0}^s \|\gamma'(u)\| du = s - s_0.$$

Portanto, o comprimento de arco coincide, a menos de sinal e de uma constante, com o parâmetro da curva.

Exemplo 1.6. *A aplicação*

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

com $a \neq 0$, é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\left(-\sin \frac{s}{a}\right)^2 + \left(\cos \frac{s}{a}\right)^2} = 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.7. *Toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por uma
 $t \mapsto \gamma(t)$
 parâmetro arbitrário. Dado $t_0 \in I$, consideremos

$$\begin{aligned} s &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du, \end{aligned}$$

comprimento de arco de γ a partir de t_0 .

Como γ é regular, então $\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$ e portanto γ é injetiva. Assim, $s: I \rightarrow J = s(I)$ é uma bijeção, seja $t: J \rightarrow I$ a inversa de s .
 $t \mapsto s(t)$ $s \mapsto t(s)$

Afirmção : $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco.
 $s \mapsto \beta(s) = \gamma(t(s))$

$$\begin{aligned} \text{De fato, } \beta'(s) &= \gamma'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} \Rightarrow \|\beta'(s)\| = \|\gamma'(t(s))\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = \|\gamma'(t)\| \cdot \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \\ &= \|\gamma'(t)\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, β é reparametrização de γ pelo comprimento de arco. ■

Proposição 1.8 ([30]). *Sejam $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $\ell: I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$*
 $t \mapsto \gamma(t)$ $t \mapsto \ell(t)$
a função comprimento de arco de γ a partir de t_0 . Então existe a função inversa
 $\mathbf{h}: J \rightarrow I$ *de ℓ com $J = \ell(I)$ tal que*
 $s \mapsto \mathbf{h}(s)$

$$\begin{aligned} \beta &: J \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \beta(s) = \gamma \circ \mathbf{h}(s) \end{aligned}$$

é uma parametrização de γ pelo comprimento de arco.

Obsevação 1.9.

Uma parametrização β de γ pelo comprimento de arco não é única, pois depende da função comprimento de arco, que por sua vez depende do ponto t_0 fixado.

Seja

$$\begin{aligned} \gamma &: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)), \end{aligned}$$

uma curva plana diferenciável regular, dado $t \in I$ vamos considerar o vetor tangente unitário

$$\vec{\mathbf{t}}(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

O vetor normal unitário que consideramos é aquele que completa com $\vec{\mathbf{t}}$ uma base orientada positivamente de $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\vec{\mathbf{n}}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

A base ordenada $\{\vec{\mathbf{t}}(t), \vec{\mathbf{n}}(t)\}_{t \in I}$ é chamada **referencial de Frenet** da curva γ .

No caso em que γ está parametrizada pelo comprimento de arco temos:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{t}}(s) &= \gamma'(s), \\ \vec{\mathbf{n}}(s) &= (-y'(s), x'(s)). \end{cases}$$

Como $\vec{\mathbf{t}}(s)$ é unitário podemos escreve-lo:

$$\vec{\mathbf{t}}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)),$$

com $\theta(s)$ o ângulo entre o vetor $\vec{\mathbf{t}}$ e o *eixo* x positivo. Logo

$$\vec{\mathbf{n}}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{t}}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\vec{\mathbf{n}}(s),$$

sendo $\theta'(s)$ a variação do ângulo θ e portanto do vetor $\vec{\mathbf{t}}$, este número é chamado de **curvatura** de γ em s , e indicado por $\kappa_\gamma(s)$.

Logo, $\kappa_\gamma(s) = \theta'(s)$, e portanto

$$\vec{\mathbf{t}}'(s) = \kappa_\gamma(s)\vec{\mathbf{n}}(s). \quad (1.1)$$

Como $\vec{\mathbf{t}}$ é $\mathcal{C}^\infty$ podemos considerar a função

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \kappa_\gamma(s) = \theta'(s). \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\vec{\mathbf{t}}(s) \cdot \vec{\mathbf{n}}(s) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{t}}'(s) \cdot \vec{\mathbf{n}}(s) = -\vec{\mathbf{n}}'(s) \cdot \vec{\mathbf{t}}(s) = \kappa_\gamma(s),$$

dai que

$$\vec{\mathbf{n}}'(s) = \left(\vec{\mathbf{n}}'(s) \cdot \vec{\mathbf{t}}(s) \right) \vec{\mathbf{t}}(s) = -\kappa_\gamma(s)\vec{\mathbf{t}}(s) \quad (1.2)$$

As equações (1.1) e (1.2):

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{t}}'(s) &= \kappa_\gamma(s)\vec{\mathbf{n}}(s) \\ \vec{\mathbf{n}}'(s) &= -\kappa_\gamma(s)\vec{\mathbf{t}}(s) \end{cases}$$

são chamadas **Fórmulas de Frenet** da curva plana.

No caso em que γ não está parametrizada pelo comprimento de arco, estas equações são:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{t}}'(t) &= \kappa_\gamma(t)\|\gamma'(t)\| \vec{\mathbf{n}}(t) \\ \vec{\mathbf{n}}'(t) &= -\kappa_\gamma(t)\|\gamma'(t)\| \vec{\mathbf{t}}(t) \end{cases}$$

Definição 1.10. Seja γ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s_0) \neq 0$, $s_0 \in I$, o número

$$\rho(s_0) = \frac{1}{|\kappa(s_0)|} \text{ é chamado o } \mathbf{raio de curvatura} \text{ de } \gamma \text{ em } s_0,$$

e o ponto $C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \vec{n}(s_0)$ é chamado o **centro de curvatura** de γ em s_0 .

O **círculo osculador** de γ em s_0 é o círculo de centro $C(s_0)$ e raio $\rho(s_0)$.

Definição 1.11. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular tal que $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A medida que varia o parâmetro t , o centro de curvatura descreve uma curva $E : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, chamada **a evoluta de γ** , dada por

$$t \mapsto E(t)$$

$$E(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \vec{n}(t).$$

Obsevação 1.12.

A evoluta é uma curva que dá informações importantes quanto a geometria da curva. Por exemplo, os pontos singulares da evoluta são os vértices da curva que são os pontos em que $\kappa'(t) = 0$.

O teorema a seguir garante que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano.

Teorema 1.13. [30] (**Teorema fundamental das curvas planas**)

Seja $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^∞ , então:

$$s \mapsto h(s)$$

- (i) Existe uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que, a função curvatura κ_γ de γ satisfaz: $\kappa_\gamma \equiv h$.
- (ii) Se exigirmos que em s_0 a curva γ passe por p_0 com vetor velocidade v_0 , ou seja, $\begin{cases} \gamma(s_0) = p_0 \\ \gamma'(s_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$, com $\vec{v}_0$ vetor unitário de $\mathbb{R}^2$, então a curva γ do item (i) é única.
- (iii) Se γ e β são curvas que satisfazem o item (i), ou seja, $\kappa_\gamma \equiv h$ e $\kappa_\beta \equiv h$, existe um movimento rígido do plano que leva γ em β , ou seja, existem $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma rotação e $\mathcal{T}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um translação tais que

$$\beta = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ R(\gamma)$$

1.1.1 Contato entre Curvas Planas

Uma curva também pode ser dada de maneira implícita como imagem inversa de um valor regular de uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. O teorema a seguir dá essa garantia e será usado na seção 1.1.4 quando definimos envolventes.

Teorema 1.14 ([27]). *Sejam V um aberto de $\mathbb{R}^2$ e*

$$\begin{aligned} F : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y), \end{aligned}$$

uma função diferenciável.

Dado $(x_0, y_0) \in V$, com $F(x_0, y_0) = p$, se $\nabla F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, então existe $\mathcal{U}$ uma vizinhança de (x_0, y_0) em V , e $\gamma: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\delta > 0$, tais que:

$$t \longmapsto \gamma(t)$$

- i) $\gamma((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subset \mathcal{U}$, $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e $F(\gamma(t)) = p$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.*
- ii) Se $(x, y) \in \mathcal{U}$ e $F(x, y) = p$, então existe $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tal que $\gamma(t) = (x, y)$.*

Nos livros de Geometria Diferencial encontramos a seguinte definição de contato entre curvas.

Definição 1.15. *Sejam γ e β curvas regulares dadas por*

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta : J &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \gamma(s) & t &\longmapsto \beta(t). \end{aligned}$$

*Dizemos que γ e β **tem contato de ordem k** em $P = \gamma(t_0) = \beta(t_0)$ se, e somente se*

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma'(s_0) = \beta'(t_0) \\ \gamma''(s_0) = \beta''(t_0) \\ \vdots \\ \gamma^{(k)}(s_0) = \beta^{(k)}(t_0) \end{array} \right. \quad e \quad \gamma^{(k+1)}(s_0) \neq \beta^{(k+1)}(t_0).$$

No entanto, neste trabalho vamos considerar a definição que deriva da definição de contato entre duas variedades, uma dada como imagem inversa de uma submersão e outra como a imagem de uma imersão.

Definição 1.16. *Sejam*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) & t &\longmapsto \gamma(t), \end{aligned}$$

uma função diferenciável com 0 como valor regular e uma curva diferenciável regular, respectivamente. As curvas diferenciáveis $F^{-1}(\{0\})$ e $\gamma(I)$ têm **contato de ordem k** em $p = \gamma(t_0)$ se, e somente se, a função φ definida por

$$\begin{aligned}\varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = F \circ \gamma(t),\end{aligned}$$

satisfaz

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \cdots = \varphi^{(k-1)}(t_0) = 0, \quad \varphi^{(k)}(t_0) \neq 0. \quad (1.3)$$

Se em (1.3) não garantirmos a condição $\varphi^{(k)}(t_0) \neq 0$, dizemos que as curvas acima têm **contato de ordem $\geq k$** em p .

Proposição 1.17. *Seja $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada, então:*
 $s \longmapsto \gamma(s)$

- (i) γ tem contato de ordem ≥ 1 com uma reta no ponto $\gamma(s_0)$ se, e somente se, esta reta é a reta tangente a γ em $\gamma(s_0)$.
- (ii) γ tem contato de ordem ≥ 2 com um círculo em dado ponto se, e somente se, este é o círculo osculador a γ no referido ponto.

Demonstração.

- i) ($\Leftarrow$) Suponhamos que a curva γ é uma parametrização pelo comprimento de arco, e tomemos

$$\begin{aligned}r_{s_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto r_{s_0}(t) = \gamma(s_0) + t\gamma'(s_0)\end{aligned}$$

uma parametrização da reta tangente a γ em s_0 .

Observemos que $\gamma(s_0) = r_{s_0}(0)$ é o ponto de contato, e é claro que $\gamma'(s_0) = r'_{s_0}(0)$. Logo, γ e r_{s_0} tem contato de ordem ≥ 1 em $\gamma(s_0)$.

($\Rightarrow$) Sejam γ, β dadas por

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta : J &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \gamma(s) & t &\longmapsto \beta(t) = \gamma(s_0) + t\vec{u},\end{aligned} \quad \text{e}$$

com $\vec{u}$ é unitário. Como γ e β tem contato de ordem ≥ 1 em $\gamma(s_0)$, então $\gamma'(s_0) = \beta'(s_0) = \vec{u}$. Logo

$$\begin{aligned}\beta : J &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta(t) = \gamma(s_0) + t\gamma'(s_0),\end{aligned}$$

é a parametrização da reta tangente a γ em $\gamma(s_0)$.

- ii) Seja $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular parametrizada pelo comprimento de arco.
 $s \longmapsto \gamma(s)$

Suponhamos que γ tem contato de ordem ≥ 2 com o círculo $\mathcal{C}(C, r)$ em $p = \gamma(s_0)$, então

$$\gamma(s_0) \in \mathcal{C}(C, r) \quad \text{e portanto} \quad \|\gamma(s_0) - C\|^2 = r^2.$$

Consideremos a função diferenciável

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto F(X) = \|X - C\|^2 - r^2, \end{aligned}$$

então $\mathcal{C}(C, r) = F^{-1}(\{0\})$ e $\nabla F = 2(X - C) \neq 0$ para todo $X \in F^{-1}(\{0\})$, pois $F(C) = 0 \neq r^2$.

A função de contato entre γ e $\mathcal{C}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \varphi(s) = F \circ \gamma(s) = \|\gamma(s) - C\|^2 - r^2. \end{aligned}$$

Como γ e $\mathcal{C}$ tem contato de ordem ≥ 2 em $p = \gamma(s_0)$ devemos ter:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \varphi'(s_0) &= 0 \\ \varphi''(s_0) &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \gamma'(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - C) = 0 \\ \gamma''(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - C) + \gamma'(s_0) \cdot \gamma'(s_0) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \gamma(s_0) - C \parallel \vec{n}(s_0) \\ \kappa(s_0) \vec{n}(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - C) = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C = \gamma(s_0) - \lambda \vec{n}(s_0) \\ \lambda = -\frac{1}{\kappa(s_0)} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$C = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \vec{n}(s_0)$$

é o centro de curvatura de γ em s_0 e $\|\gamma(s_0) - C\|^2 = \rho(s_0)^2 = r^2 \Rightarrow r = \rho(s_0)$. Portanto, $\mathcal{C}$ é o círculo osculador a γ em s_0 .

($\Leftarrow$) Seja γ uma curva regular e $s_0 \in I$ o círculo osculador a γ em s_0 , denotado por $\mathcal{C}(C, r)$ é o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{C}(C, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 ; \|X - C\|^2 = r^2\},$$

com $C = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \vec{n}(s_0)$ e $r = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$.

Consideremos

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto F(X) = \|X - C\|^2 - r^2, \end{aligned}$$

com $\nabla F(X) = 2(X - C) \neq \vec{0}$. Definimos a função de contato

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \varphi(s) = F \circ \gamma(s) = \|\gamma(s) - C\|^2 - r^2. \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} \varphi(s_0) &= 0, \text{ pois } \gamma(s_0) \in \mathcal{C}(C, r) \\ \varphi'(s_0) &= 2\gamma'(s_0)(\gamma(s_0) - C) = 0, \text{ pois } (\gamma(s_0) - C) \parallel \vec{n}(s_0) \\ \varphi''(s_0) &= 2[\kappa(s_0)\vec{n}(s_0)(\gamma(s_0) - C) + 1] \end{aligned}$$

Portanto, o círculo osculador a γ em s_0 tem contato de ordem ≥ 2 .

■

1.1.2 Cônicas

Definição 1.18. Uma *cônica* $\mathcal{C}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0\} \quad (1.4)$$

onde $a, b, c, h, f, g \in \mathbb{R}$ e a, b são ambos não nulos, ou seja,

$$\mathcal{C} = \varphi^{-1}(\{0\}), \quad \text{com } \varphi(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

As cônicas são classificadas em:

Cônicas degeneradas: um ponto, uma reta, duas retas concorrentes e duas retas paralelas;

Cônicas não degeneradas: parábola, elipse e hipérbole.

As cônicas podem ser classificadas através do discriminante $\Delta = ab - h^2$, como segue:

- i) Se $\Delta > 0$, então $\mathcal{C}$ uma elipse ou um ponto;
- ii) Se $\Delta = 0$, então $\mathcal{C}$ é uma parábola ou uma reta ou um par de retas paralelas;
- iii) Se $\Delta < 0$, então $\mathcal{C}$ é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

O centro de uma cônica da definição 1.18 é uma solução (x, y) do sistema

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0 \end{cases}$$

1.1.3 Curvas Planas Fechadas e Convexas e Curvas Fechadas com Largura Constante

Dada uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dizemos que $\gamma(t_0)$ é um **ponto simples** de γ se, $t \mapsto \gamma(t)$ e somente se, para todo $t \in I$, com $t \neq t_0$ tivermos $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$. Caso contrário, dizemos que $\gamma(t)$ é **ponto múltiplo**.

Definição 1.19. Uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **simples** se, e somente se, γ é um aplicação *injetora*.

Definição 1.20. Uma curva parametrizada por $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **fechada** se, $t \mapsto \gamma(t)$ e somente se, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definição 1.21. Uma curva plana $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **curva de Jordan** se, e somente se, γ é fechada e $\gamma|_{[a, b]}$ é simples.

Definição 1.22. Uma curva regular $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **convexa**, se para cada $t_0 \in [a, b]$, o traço de γ está **inteiramente contido** em um dos semi-planos determinados pela reta tangente à γ em t_0 . A curva γ é dita **estritamente convexa** em t_0 , se o traço de γ , exceto pelo ponto $\gamma(t_0)$, está inteiramente contido no semi-plano aberto determinado pela reta tangente à curva γ em $\gamma(t_0)$.

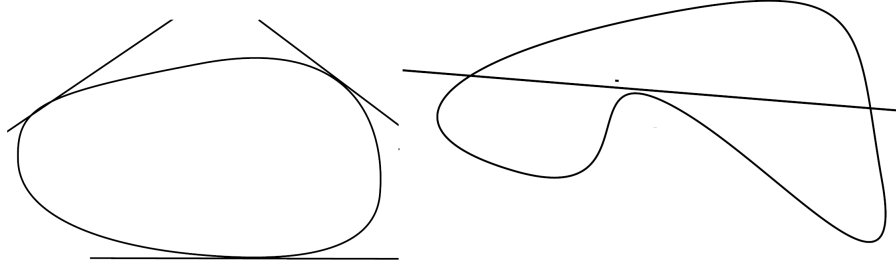


Figura 1.1: Curva convexa à esquerda e curva não-convexa à direita

Teorema 1.23 ([1]). Uma curva regular de Jordan $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa se, e somente se, sua curvatura não muda de sinal.

Definição 1.24. Dizemos que uma curva plana fechada convexa $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de **largura constante**, quando a distância entre os pontos de contatos das tangentes paralelas com a curva γ possui distâncias iguais.

Obsevação 1.25.

A curva mais conhecida de largura constante é o círculo, neste caso as distâncias de larguras constantes são os diâmetros.

Existem curvas não circulares que possuem largura constante, por exemplos, curvas que possuem as formas de moedas de 20 pences e 50 pences mostradas na figura 1.2.



Figura 1.2: Formas com largura constante

Ilustramos no exemplo abaixo uma curva que possui largura constante. Em [21] estas curvas são estudadas de maneira detalhada e há outros exemplos de tais curvas.

Exemplo 1.26. Considere a curva plana γ com a seguinte parametrização:

$$x = \left(\frac{a}{2} \cos 3t + \frac{a}{2} + b \right) \cos t + \frac{3a}{2} \sin 3t \sin t$$

$$y = \left(\frac{a}{2} \cos 3t + \frac{a}{2} + b \right) \sin t - \frac{3a}{2} \sin 3t \cos t$$

Para valores de $a = 2$ e $b = 8$, temos o gráfico

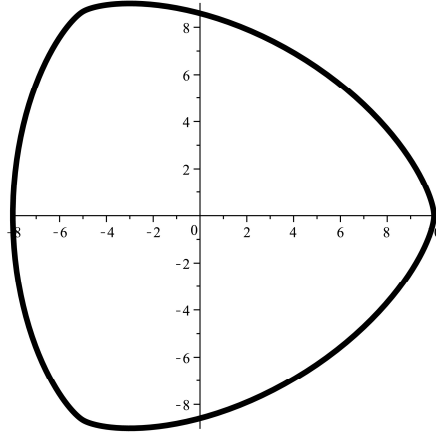


Figura 1.3: Curva com largura constante

1.1.4 Envoltente de uma família de curvas

Dada uma curva plana em que a curvatura não se anula, sua evoluta tem a propriedade de que a reta tangente à evoluta em um determinado ponto é a reta normal à curva no respectivo ponto. De fato, seja r_n a reta normal a γ em s_0 definida por

$$r_n := r(\lambda) = \gamma(s_0) + \lambda \vec{n}(s_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Observe que $E(s_0) \in r_n$, pois $E(s_0) = r\left(\frac{1}{\kappa(s_0)}\right)$.

$$\text{Como } E'(s) = \vec{t}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \vec{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} (-\kappa'(s)) \vec{t}(s) = -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \vec{n}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{t}_E(s) = \pm \vec{n}(s), \text{ então a reta tangente a evoluta em } s_0 \text{ é}$$

$$\begin{aligned} s_E := s(\alpha) &= E(s_0) + \alpha \vec{t}_E(s_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ &= E(s_0) + \alpha \vec{n}(s_0), \end{aligned}$$

Portanto, as retas r_n e s_E possuem a mesma direção.

Podemos pensar que as retas normais à curva original formam uma família de curvas, deste modo vamos encontrar uma curva que é tangente a uma família de curvas.

A família de curvas pode ser encontrada da seguinte maneira: A cada curva da família associamos ao número real α seu parâmetro e consideremos

$$\begin{aligned} F : V \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \beta) &\longmapsto F(x, y, \beta), \end{aligned}$$

uma função real diferenciável, tal que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(x, y, \beta) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2(x, y, \beta) \neq 0.$$

Esta função obtida fixando o parâmetro β , satisfaz as condições do teorema 1.14, logo existe uma curva D_β no plano cujos pontos p satisfazem $F(p, \beta) = 0$. Assim, as curvas D_β obtidas desta maneira formam uma família de curvas.

Definição 1.27. Dizemos que uma curva γ é uma **envolvente** de uma **família de curvas** D_β , se para cada t existe um parâmetro $\beta(t)$ tal que a curva γ seja **tangente à curva** $D_{\beta(t)}$ no ponto $\gamma(t)$, onde $\beta(t)$ é diferenciável e $\beta'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Exemplo 1.28. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x, y, \beta) = (x - \beta)^2 + y^2 - R^2,$$

onde R é uma constante. As curvas C_β , da família gerada por F , são círculos de raio R e centro $(\alpha, 0)$ no plano. Esta família tem duas envoltentes, as retas

$$y = R \quad \text{e} \quad y = -R.$$

A reta $\gamma(t) = (t, R)$ é tangente à curva C_{t_1} no ponto $\gamma(t_1) = (t_1, R)$. Logo, neste caso, $\beta(t) = t$ e $\beta'(t) = 1 \neq 0$.

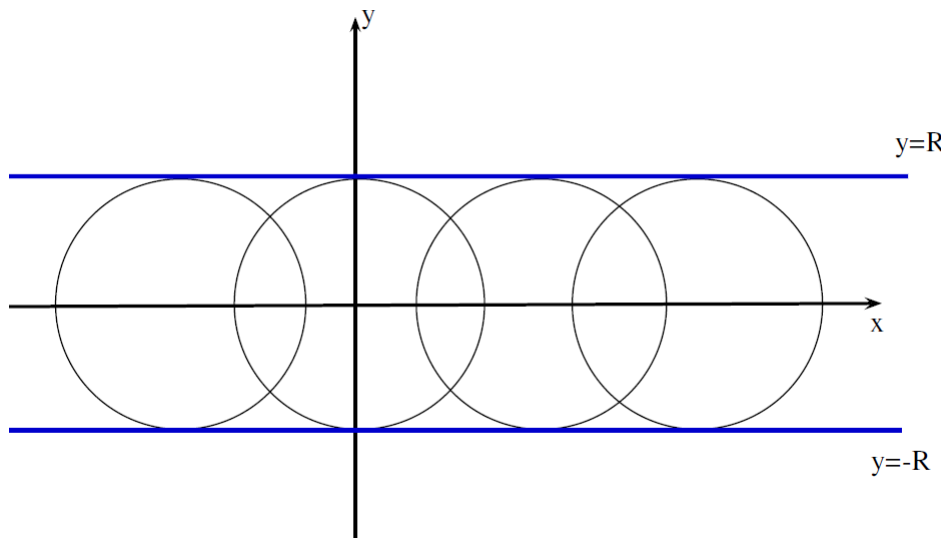


Figura 1.4: Envoltentes da família de círculos

Observe que, podemos reparametrizar a curva γ , usando o parâmetro β , pois $\beta' \neq 0$, ou seja definimos a reparametrização $\tilde{\gamma}$ pela equação $\tilde{\gamma}(\beta(t)) = \gamma(t)$.

O teorema abaixo nos dá condições para saber se um ponto pertence a envolvente da família de curvas.

Teorema 1.29 ([27]). *Um ponto da envolvente $\tilde{\gamma}(\beta)$ satisfaz as equações*

$$\begin{cases} F(\tilde{\gamma}(\beta), \beta) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \beta}(\tilde{\gamma}(\beta), \beta) = 0. \end{cases}$$

Inversamente, se uma curva $\tilde{\gamma}(\beta)$ satisfaz as equações acima, então $\tilde{\gamma}$ é a envolvente da família de curvas gerada por F .

Definição 1.30. *Seja*

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) \longmapsto F(x, y, t),$$

*uma função diferenciável. Dizemos que um ponto (x, y) é um **ponto de regressão** se satisfaz*

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.31. *Considere a família de curvas geradas por*

$$F(x, y, \alpha) = \alpha x - py - \frac{\alpha^2}{2},$$

sendo p uma constante não nula. As curvas D_α são linhas retas. Para encontrarmos a envolvente de D_α , precisamos resolver o sistema de equações dado pelo teorema (1.29), ou seja

$$\begin{cases} \alpha x - py - \frac{\alpha^2}{2} = 0 \\ x - \alpha = 0. \end{cases}$$

Substituindo $x = \alpha$ na equação $\alpha x - py - \frac{\alpha^2}{2} = 0$, obtemos:

$$y = \frac{\alpha^2}{2p}.$$

Assim, a envolvente da família de curvas F como mostra a figura 1.5 é uma parábola de $\mathbb{R}^2$.

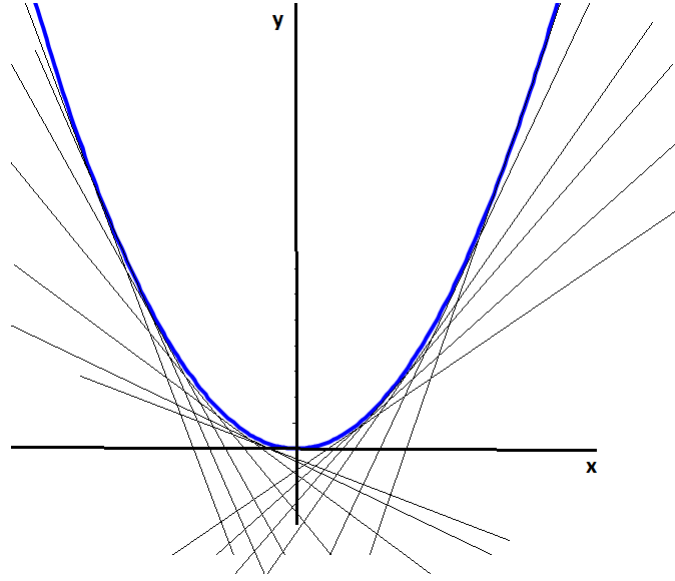


Figura 1.5: Parábola como envolvente da família de curvas F .

1.2 Transformações Afins do Plano no Plano

Nesta seção vamos introduzir as transformações afins do plano no plano, suas propriedades, o teorema fundamental da Geometria Afim e os grupos de transformações.

As referências para esta seção são: [12], [24], [25] e [28].

1.2.1 Transformações Afim do Plano

Definição 1.32. Uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **colinearização** se, e somente se,

- (i) T é uma bijeção.
- (ii) Dados P, Q e R pontos distintos em $\mathbb{R}^2$, então P, Q e R são colineares se, e somente se, $T(P), T(Q)$ e $T(R)$ são colineares

Definição 1.33. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **isometria** se, e somente se, $d(X, Y) = d(T(X), T(Y))$ para quaisquer X e Y em $\mathbb{R}^2$.

É fácil ver que toda isometria plana é uma bijeção (vide [28]). Sabemos da desigualdade triangular que dados X, Y e Z em $\mathbb{R}^2$.

$$d(X, Z) + d(Z, Y) = d(X, Y) \quad \text{se, e somente se, } X, Y \text{ e } Z \text{ são colineares.}$$

Consequentemente temos o seguinte resultado:

Proposição 1.34. Toda isometria é uma colinearização.

A recíproca deste resultado não é verdadeira.

Exemplo 1.35. *Seja*

$$\begin{aligned}\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\longmapsto \mathbf{T}(X) = A_k(X),\end{aligned}$$

com $A_k = kI_2$, $k \neq 0$, $\mathbf{T}$ é chamada uma dilatação de amplitude k .

Se $k = 1$, então $\mathbf{T}$ é a identidade. É fácil ver que:

$$d(\mathbf{T}(X), \mathbf{T}(Y)) = |k|d(X, Y),$$

logo se $k = \pm 1$, então $\mathbf{T}$ não é uma isometria.

Definição 1.36. Uma aplicação $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **transformação afim** se existem $\mathcal{A} \in GL_2(\mathbb{R})$ e $\vec{b}$ um vetor de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathbf{T}(X) = \mathcal{A}(X) + \vec{b}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2$$

Teorema 1.37. Toda transformação afim é uma colinearização.

Demonstração.

(i) $\mathbf{T}$ é sobrejetiva, dado $Y \in \mathbb{R}^2$, consideremos $X = \mathcal{A}^{-1}(Y - \vec{b})$, então:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(X) &= \mathcal{A}(X) + \vec{b}, \\ &= \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{-1}(Y - \vec{b})\right) + \vec{b}, \\ &= Y - \vec{b} + \vec{b} = Y.\end{aligned}\tag{1.5}$$

(ii) $\mathbf{T}$ é injetiva, pois dado X e Y em $\mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(X) = \mathbf{T}(Y) &\Leftrightarrow \mathcal{A}(X) + \vec{b} = \mathcal{A}(Y) + \vec{b} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Y) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}(X - Y) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}$ é invertível, então devemos ter $X - Y = \vec{0} \Leftrightarrow X = Y$. Logo, $\mathbf{T}$ é invertível e a inversa de $\mathbf{T}$ é dada por

$$\mathbf{T}^{-1}(X) = \mathcal{A}^{-1}(X) + \vec{b}_1, \text{ com } b_1 = -\mathcal{A}^{-1}(\vec{b}).$$

De fato:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(X)) &= \mathbf{T}^{-1}\left(\mathcal{A}(X) + \vec{b}\right) \\ &= \mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}(X) + \vec{b}\right) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(X)) + \mathcal{A}^{-1}(\vec{b}) + \left(-\mathcal{A}^{-1}(\vec{b})\right) \\ &= X.\end{aligned}$$

Observemos que P e Q são pontos distintos e a reta que passa por estes pontos pode ser parametrizada por:

$$r(t) = (1 - t)P + tQ, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

E a reta a imagem de $r(t)$ por $\mathbf{T}$ é dada por:

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathbf{T}((1 - t)P + tQ) \\ &= \mathcal{A}((1 - t)P + tQ) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A}P - t\mathcal{A}P + t\mathcal{A}Q + \vec{b} \\ &= (1 - t)(\mathcal{A}(P) + \vec{b}) + t(\mathcal{A}(Q) + \vec{b}) \\ &= (1 - t)\mathbf{T}(P) + t\mathbf{T}(Q) \end{aligned}$$

ou seja $s(t) = \mathbf{T}(r(t))$ é a reta que passa por $\mathbf{T}(P)$ e $\mathbf{T}(Q)$.

Como $\mathbf{T}$ é invertível segue que $\mathbf{T}^{-1}(s(t)) = r(t)$. Portanto, P, Q e R são colineares se, e somente se $\mathbf{T}(P), \mathbf{T}(Q)$ e $\mathbf{T}(R)$ também o são. ■

Obsevação 1.38. *A recíproca deste teorema também é válida, ou seja, toda colinearização é uma transformação afim. A demonstração pode ser encontrada no Apêndice E de [28].*

Corolário 1.39. *Seja $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação afim, então temos:*

- (i) ℓ é uma reta se, e somente se, $\mathbf{T}(\ell)$ é uma reta.
- (ii) ℓ e m são retas paralelas se, e somente se, $\mathbf{T}(\ell)$ e $\mathbf{T}(m)$ são retas paralelas.
- (iii) ℓ e m são retas concorrentes se, e somente se, $\mathbf{T}(\ell)$ e $\mathbf{T}(m)$ são retas concorrentes.
- (iv) Dados P e Q pontos distintos, M é ponto médio do segmento PQ se, e somente se $\mathbf{T}(M)$ é ponto médio do segmento $\mathbf{T}(P)\mathbf{T}(Q)$.

Demonstração.

- (i) Sejam $\ell = P + [\vec{v}]$ uma reta e

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\longmapsto \mathbf{T}(X) \end{aligned},$$

uma transformação afim. Dado $x \in \ell$, $x = P + t\vec{v}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x) &= \mathcal{A}(P + t\vec{v}) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A}(P) + t\mathcal{A}(\vec{v}) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A}(P) + \vec{b} + t\mathcal{A}(\vec{v}) \\ &= \mathbf{T}(P) + t\mathcal{A}(\vec{v}). \end{aligned}$$

Logo $\mathbf{T}(x)$ está na reta ℓ' que passa por $\mathbf{T}(P)$ e tem direção de $\mathcal{A}(\vec{v})$. Como $x \in \ell$ é arbitrário, segue que $\mathbf{T}(\ell) \subset \ell'$.

Dado $y \in \ell'$, sabemos que $y = \mathbf{T}(P) + \lambda \mathcal{A}(\vec{v})$, tomando $z = P + \lambda \vec{v}$ e desenvolvendo como acima, concluímos que $\mathbf{T}(z) = y$. Daí que $\ell' \subset \mathbf{T}(\ell)$.

Portanto $\mathbf{T}(\ell)$ é uma reta que passa por $\mathbf{T}(P)$ com direção $\mathcal{A}(\vec{v})$.

- (ii) Suponhamos que $\ell = P + [\vec{v}]$ e $m = Q + [\vec{u}]$. As retas ℓ e m são paralelas se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Mas pelo teorema acima, $\mathbf{T}(\ell)$ e $\mathbf{T}(m)$ tem as direções $\mathcal{A}(\vec{v})$ e $\mathcal{A}(\vec{u})$ respectivamente. Como $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, então

$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}(\lambda \vec{u}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{u}) \iff \mathcal{A}(\vec{v}) \parallel \mathcal{A}(\vec{u}) \iff \mathbf{T}(\ell) \parallel \mathbf{T}(m).$$

- (iii) Verifica-se de maneira análoga.

- (iv) Sejam P, Q pontos distintos e $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação afim.
 $X \longmapsto \mathbf{T}(X)$

Dado $M = \frac{P+Q}{2}$ ponto médio do segmento PQ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(M) &= \mathcal{A}(M) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A}\left(\frac{P+Q}{2}\right) + \vec{b} \\ &= \frac{\mathcal{A}(P)}{2} + \frac{\mathcal{A}(Q)}{2} + \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{T}(P)}{2} + \frac{\mathbf{T}(Q)}{2}. \end{aligned}$$

Logo $\mathbf{T}(M)$ é ponto médio do segmento $\mathbf{T}(P)\mathbf{T}(Q)$.

Como $\mathbf{T}(M) = \frac{\mathbf{T}(P) + \mathbf{T}(Q)}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(M) &= \frac{\mathcal{A}(P) + \vec{b} + \mathcal{A}(Q) + \vec{b}}{2} \\ &= \frac{\mathcal{A}(P+Q) + 2\vec{b}}{2} \\ &= \mathcal{A}\left(\frac{P+Q}{2}\right) + \vec{b}. \end{aligned}$$

Portanto, $M = \frac{P+Q}{2}$ é ponto médio do segmento PQ .

■

A principal característica de geometria afim plana é que ela depende apenas das propriedades de incidência e não depende de perpendicularismo nem de distâncias.

O teorema fundamental fornece um critério simples para a existência e unicidade de uma transformação afim.

Teorema 1.40 (Teorema Fundamental da Geometria Afim). *Dados $\{P, Q, R\}$ e $\{P', Q', R'\}$ ternas de pontos não colineares existe uma única transformação afim $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}', \quad \mathbf{T}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}', \quad \text{e} \quad \mathbf{T}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}'.$$

A demonstração deste teorema não será feita, pode ser encontrada em [28].

As isometrias planas, que são reflexões, translações, rotações e reflexões com deslizamentos, forma um grupo de transformações geométricas que dão ao plano a estrutura de geometria euclidiana, pois preservam distâncias entre dois pontos.

Dentre as transformações afins que não são isometrias há as reflexões afins, os cisalhamentos, as dilatações e as similaridades, estas transformações são estudadas detalhadamente em [28].

1.2.2 Grupo de Transformações Afins

Vimos na demonstração do teorema 1.37 que se $\mathbf{T}$ é uma transformação afim, então $\mathbf{T}^{-1}$ também o é.

É claro que a aplicação identidade $I_d: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação afim.

$$X \longmapsto I_d(X) = X$$

Além disso, se $\mathbf{T}$ e $\tilde{\mathbf{T}}$ são transformações afins, então $\mathbf{T} \circ \tilde{\mathbf{T}}$ também o são.

De fato: Suponhamos que $\mathbf{T}(X) = \mathcal{A}(X) + \vec{b}$ e $\tilde{\mathbf{T}}(X) = \tilde{\mathcal{A}}(X) + \vec{b}_1$, com $\mathcal{A}$ e $\tilde{\mathcal{A}}$ em $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, $\vec{b}$ e $\vec{b}_1$ vetores em $\mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \circ \tilde{\mathbf{T}}(X) &= \mathbf{T}(\tilde{\mathcal{A}}(X) + \vec{b}_1) \\ &= \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{A}}(X) + \vec{b}_1) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{A}}(X)) + \mathcal{A}(\vec{b}_1) + \vec{b} \\ &= \mathcal{A} \circ \tilde{\mathcal{A}}(X) + \mathcal{A}(\vec{b}_1) + \vec{b}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A} \circ \tilde{\mathcal{A}} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}(\vec{b}_1) + \vec{b}$ é vetor de $\mathbb{R}^2$, então $\mathbf{T} \circ \tilde{\mathbf{T}}$ é uma transformação afim.

Assim, denotando por $\mathbf{AF}(2)$ o conjunto de todas as transformações afins do plano no plano temos o seguinte resultado.

Teorema 1.41. *($\mathbf{AF}(2)$, $\circ$) é um grupo, chamado grupo das transformações afins do plano no plano.*

Cada elemento de $\mathbf{AF}(2)$ pode ser identificado com uma matriz de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$, de fato:

Dado $\mathbf{T} \in \mathbf{AF}(2)$, então $\mathbf{T}$ está totalmente determinada por $\mathcal{A} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ e $\vec{b}$ vetor de $\mathbb{R}^2$, tomando

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{2 \times 2} & b_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix},$$

temos $\det \tilde{A} = \det \mathcal{A} \neq 0$, portanto $\tilde{A} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$. Logo,

$$\mathbf{AF}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{2 \times 2} & b_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{A} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Assim, dada $\mathbf{T}$ transformação afim podemos escrever $\mathbf{T} = (A, b)$.

Proposição 1.42. $\mathbf{AF}(2)$ é um subgrupo de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$.

Demonstração.

Segue do fato que $\mathbf{AF}(2)$ é um grupo e pela identificação acima. ■

Neste trabalho vamos utilizar um subgrupo especial de $\mathbf{AF}(2)$, primeiro consideremos:

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) = \{\mathcal{A} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) ; \det \mathcal{A} = 1\}$$

o **grupo linear especial** de ordem 2.

O **grupo linear afim especial** de ordem 2, denotado por $\mathbf{ASL}_2(\mathbb{R})$, é o seguinte subgrupo de $\mathbf{AF}(2)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{ASL}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{A} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathcal{A} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{2 \times 2} & b_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{pmatrix} ; \det \mathcal{A} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Definição 1.43. Uma transformação afim $\mathbf{T} = (A, b) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada **transformação equi-afim** ou **unimodular** se, e somente se, $\tilde{A} \in \mathbf{ASL}_2(\mathbb{R})$.

Vamos entender o porque da denominação dada na definição 1.43.

No que segue, dados vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, vamos denotar por $[u, \vec{v}]$ o determinante da matriz $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, então a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado por estes vetores é dada por:

$$\text{área}_{\mathcal{P}} = \|\vec{u}\| \cdot h = \|\vec{u}\| \|\vec{v} - \vec{v}'\|, \quad (1.6)$$

com $\vec{v}'$ a projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$.

Do teorema de Pitágoras temos:

$$\|\vec{v} - \vec{v}'\|^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}'\|^2.$$

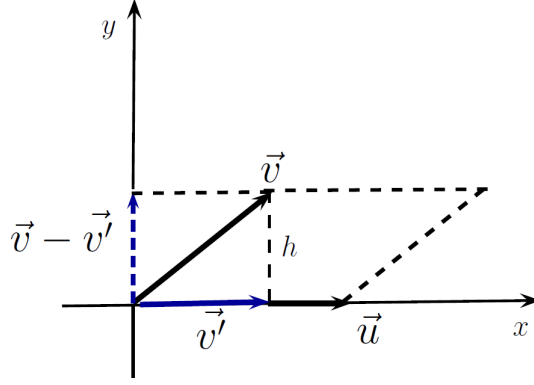


Figura 1.6: Paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Logo,

$$\begin{aligned}
 (\text{área}_{\mathcal{P}})^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v} - \vec{v}'\|^2 \\
 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}'\|^2 \\
 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^4} \|\vec{u}\|^2 \\
 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
 &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1^2 v_1^2 + 2u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_2^2) \\
 &= u_1^2 v_2^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_1^2 = [\vec{u}, \vec{v}]^2.
 \end{aligned}$$

Assim, se $\mathbf{T}$ é uma transformação equi-afim, então:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{T}(X), \mathbf{T}(Y)] &= [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] \\
 &= \det \mathcal{A}[X, Y] = [X, Y].
 \end{aligned}$$

Portanto, as transformações equi-afins são invariantes por área.

1.3 Geometria Diferencial Afim de Curvas planas

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos da geometria diferencial afim de curvas planas, que são análogas aos estabelecidos na seção 1.1.

As referências para este estudo são: [12], [24] e [25].

1.3.1 Comprimento de Arco Afim

A ideia básica aqui é ao considerarmos $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável $t \longmapsto \gamma(t)$ encontrar uma nova reparametrização, por um parâmetro s , que seja invariante afim.

Vimos na subseção 1.2.2 que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vetores do plano, é dada, a menos de sinal, por $[u, \vec{v}]$ e que as transformações equi-afins preservam esta área. Dai temos as seguintes definições:

Definição 1.44. Uma curva $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está **parametrizada pelo comprimento de arco afim** (p.p.c.a.a) se, e somente se,

$$[\gamma'(s), \gamma''(s)] = 1, \text{ para todo } s \in I.$$

Neste caso, o vetor $\gamma'(s)$ é chamado **vetor tangente afim** a γ em s e o vetor $\gamma''(s)$ é chamado **vetor normal afim** a γ em s .

Obsevação 1.45.

- 1) Reservaremos o parâmetro s para o parâmetro pelo comprimento de arco afim.
- 2) Indicaremos as derivadas de γ parametrizada pelo comprimento de arco afim por $\gamma', \gamma'', \gamma''', \text{ etc.}$ Enquanto que as derivadas de γ por um parâmetro arbitrário indicaremos por: $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \text{ etc.}$
- 3) A definição 1.44 só faz sentido se $\gamma'(s)$ e $\gamma''(s)$ são linearmente independentes.

Definição 1.46. Seja $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, dizemos que γ tem uma **inflexão** em t_0 ou que $\gamma(t_0)$ é um ponto de inflexão se, e somente se

$$[\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)] = 0$$

Obsevação 1.47. A definição de inflexão não depende da parametrização.

De fato, se $t: J \longrightarrow I$ é uma função mudança de parâmetro para γ , ou seja

$$\begin{aligned} \gamma &: J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \xi &\longmapsto \gamma(\xi) = \gamma(t(\xi)) \end{aligned}$$

é uma reparametrização, então:

$$\dot{\gamma}(\xi) = \dot{\gamma}(t(\xi)) \frac{dt}{d\xi} \quad e \quad \ddot{\gamma}(\xi) = \ddot{\gamma}(t(\xi)) \left(\frac{dt}{d\xi} \right)^2 + \dot{\gamma}(t(\xi)) \frac{d^2t}{d\xi^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\dot{\gamma}(\xi), \ddot{\gamma}(\xi)] &= \left(\frac{dt}{d\xi} \right)^3 [\dot{\gamma}(t(\xi)), \ddot{\gamma}(t(\xi))], \\ &= \left(\frac{dt}{d\xi} \right)^3 [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)]. \end{aligned}$$

Como t é função mudança de parâmetro, então $\frac{dt}{d\xi}$ não se anula, portanto

$$[\dot{\gamma}(\xi), \ddot{\gamma}(\xi)] = 0 \iff [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)] = 0$$

Assim, como toda curva plana admite uma parametrização pelo comprimento de arco (proposição 1.7) também admite uma parametrização pelo comprimento de arco afim.

A definição de função comprimento de arco afim é feita de maneira que sua inversa seja a mudança de parâmetro pelo comprimento de arco afim.

Definição 1.48. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva diferenciável, com o conjunto de pontos $t \mapsto \gamma(t)$ de inflexão de medida nula, a **função comprimento de arco afim** de γ a partir de t_0 , denotada por $\ell_{t_0}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned} \ell_{t_0} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ell_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t [\dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u)]^{\frac{1}{3}} du. \end{aligned}$$

Obsevação 1.49.

Se $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco afim, então a $t \mapsto \gamma(t)$ menos de uma constante e de sinal o parâmetro s mede o comprimento de arco afim.

Proposição 1.50. *Toda curva diferenciável sem pontos de inflexão admite uma reparametrização pelo comprimento de arco afim.*

Demonstração.

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva diferenciável sem pontos de inflexão por um parâmetro qualquer.

Dado $t_0 \in I$ consideremos

$$\begin{aligned} s : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t [\dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u)]^{\frac{1}{3}} du. \end{aligned}$$

função comprimento de arco afim a partir de t_0 , então $\frac{ds}{dt} = [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)]^{\frac{1}{3}}$ não se anula, pois γ não tem inflexões.

Logo s é injetiva e $s: I \rightarrow J = s(I)$ é uma bijeção.

Seja $t: J \rightarrow I$ a inversa de s .

Afirmação 1.

A curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é reparametrização de γ pelo comprimento de arco afim.

De fato:

$$\text{Como } \beta'(s) = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \text{ e } \beta''(s) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}, \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} [\beta'(s), \beta''(s)] &= \left[\frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right] \\ &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left[\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)] = \frac{1}{([\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)]^{\frac{1}{3}})^3} [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)] = 1 \end{aligned}$$

Portanto, β é reparametrização de γ pelo comprimento de arco afim. ■

Exemplo 1.51. Consideremos a curva $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$, cujo traço é a elipse centrada na origem, então:

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \sin t, b \cos t) \text{ e } \ddot{\gamma}(t) = (-a \cos t, -b \sin t),$$

e portanto $[\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)] = ab$. Logo a função comprimento de arco afim a partir de $t_0 = 0$ é dada por:

$$\ell(t) = \int_0^t \sqrt[3]{ab} \, d\xi = \sqrt[3]{abt}.$$

$$\text{Assim, } \ell(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ e } h = \ell^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longmapsto h(s) = \frac{s}{\sqrt[3]{ab}}$$

$$\text{Portando, } \gamma(s) = \gamma(h(s)): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt[3]{ab}}, b \sin \frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right),$$

é uma parametrização de γ pelo comprimento de arco afim.

Obsevação 1.52. A **curvatura euclidiana** de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim é sempre positiva. Basta notar que, a curvatura euclidiana de uma curva plana é:

$$\kappa(s) = \frac{[\gamma'(s), \gamma''(s)]}{\|\gamma'(s)\|^3}$$

Como $[\gamma'(s), \gamma''(s)] = 1$ para todo s , então

$$\kappa(s) = \|\gamma'(s)\|^{-3} > 0, \quad \forall \, s.$$

1.3.2 Tangente Afim e Normal Afim

Definição 1.53. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. O vetor $\gamma'(s_0)$ é chamado **vetor tangente afim** a γ em $\gamma(s_0)$. O vetor $\gamma''(s_0)$ é chamado de **vetor normal afim** a γ em $\gamma(s_0)$.

É interessante termos a expressão dos vetores tangente e normal afim quando a curva está parametrizada por um parâmetro arbitrário.

Proposição 1.54. [12] Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável sem pontos de inflexão parametrizada por parâmetro arbitrário. Então o vetor tangente afim e o vetor normal afim são dados, respectivamente:

$$\gamma' = \nu^{-\frac{1}{3}} \dot{\gamma} \quad e \quad \gamma'' = \nu^{-\frac{2}{3}} \ddot{\gamma} - \frac{1}{3} \nu(t)^{-\frac{5}{3}} \dot{\nu} \dot{\gamma}, \quad (1.7)$$

onde $\nu \equiv [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$ e $\dot{\nu} \equiv [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$

Obsevação 1.55. Se a curva γ estiver parametrizada pelo comprimento de arco (Euclidiano), os vetores tangente afim e normal afim, são dados por:

$$\gamma' = \kappa^{-\frac{1}{3}} \vec{t} \quad e \quad \gamma'' = \kappa^{\frac{1}{3}} \vec{n} - \frac{1}{3} \kappa^{-\frac{5}{3}} \dot{\kappa} \vec{t},$$

onde κ é curvatura euclidiana.

Definição 1.56. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim.

(i) A **reta tangente afim** a γ em $\gamma(t_0)$ é a reta paralela ao vetor $\gamma'(s(t_0))$ que passa por $\gamma(t_0)$. Isto é:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : [x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)] = 0\}.$$

(ii) A **reta normal afim** a γ em $\gamma(t_0)$ é a reta paralela ao vetor $\gamma''(s(t_0))$ que passa por $\gamma(t_0)$, onde $t_0 = \xi(s_0)$. Isto é:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : [x - \gamma(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)] = 0\}. \quad (1.8)$$

Proposição 1.57. Dada uma curva plana $\gamma = (X, Y)$ parametrizada por um parâmetro arbitrário t . A equação da reta normal afim de γ é dada pela seguinte equação:

$$(y - Y) \left(\dot{k} \ddot{X} - 3k \ddot{X} \right) + (x - X) \left(3k \ddot{Y} - \dot{k} \ddot{Y} \right) = 0.$$

Demonstração.

O vetor normal a $\gamma = (X, Y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= \kappa^{-\frac{2}{3}} \left(\ddot{X}, \ddot{Y} \right) - \frac{1}{3} \kappa^{-\frac{5}{3}} \dot{\kappa} \left(\dot{X}, \dot{Y} \right) \\ &= \frac{1}{3} \kappa^{-\frac{5}{3}} \left(3\kappa \ddot{X} - \dot{\kappa} \dot{X}, 3\kappa \ddot{Y} - \dot{\kappa} \dot{Y} \right). \end{aligned}$$

Pela equação (1.8) da reta normal, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= [(x, y) - (X, Y), \gamma''(s)] \\ &= \begin{vmatrix} 3\kappa\ddot{X} - \dot{\kappa}\dot{X} & 3\kappa\ddot{Y} - \dot{\kappa}\dot{Y} \\ x - X & y - Y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. ■

1.3.3 Curvatura Afim

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco afim, ou seja, $[\gamma'(s), \gamma''(s)] = 1$. Derivando esta equação em termos do comprimento de arco afim, obtemos:

$$\cancel{[\gamma''(s), \gamma''(s)]} + [\gamma'(s), \gamma'''(s)] = 0.$$

Assim, os vetores $\gamma'(s)$ e $\gamma'''(s)$ são paralelos, isto é, existe uma função $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\gamma'''(s) + \mu(s)\gamma'(s) = 0, \quad \forall s \in I. \quad (1.9)$$

Temos a seguinte definição:

Definição 1.58. A *curvatura afim* de uma curva plana γ sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim é a função real $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(s) = [\gamma''(s), \gamma'''(s)].$$

É interessante obter a curvatura afim de curvas planas que não estejam parametrizadas pelo comprimento de arco afim. Como segue:

Proposição 1.59. [12] Seja γ uma curva plana diferenciável sem pontos de inflexão parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Então a curvatura afim é dada por:

$$\mu = \frac{1}{9}(3\nu\ddot{\nu} - 5\dot{\nu}^2 + 9\nu[\ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}])\nu^{-\frac{8}{3}},$$

com $\nu \equiv [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$.

Corolário 1.60. [12] A curvatura afim de uma curva plana em termos da curvatura Euclidiana é:

$$\mu = \frac{1}{9}(3\kappa\ddot{\kappa} - 5\dot{\kappa}^2 + 9\kappa^4)\kappa^{-\frac{8}{3}}.$$

Exemplo 1.61. Considere a elipse dada pelo Exemplo 1.51.

$$\gamma(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right), b \sin \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) \right),$$

A curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco afim, pois:

$$\begin{aligned} [\gamma'(s), \gamma''(s)] &= \begin{bmatrix} -\frac{a}{\sqrt[3]{ab}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) & -\frac{a}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) \\ \frac{b}{\sqrt[3]{ab}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) & -\frac{b}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) \end{bmatrix} \\ &= \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Então, a curvatura afim de γ é:

$$\begin{aligned} \mu &= [\gamma''(s), \gamma'''(s)] \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{a}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) & \frac{1}{b} \sin\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) \\ -\frac{b}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) & -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}}\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}}. \end{aligned}$$

No exemplo acima, vimos que a elipse possui **curvatura afim** μ **constante positiva**. O teorema abaixo, mostra que as cônicas são as únicas curvas que possuem curvatura afim constante.

Teorema 1.62. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável sem pontos de inflexão. A curvatura afim μ é constante se, e somente se γ é uma cônica. Mais precisamente, temos:*

$$\begin{aligned} \mu > 0 & \text{ se, e somente se, } \gamma \text{ é uma } \textbf{elipse} \\ \mu = 0 & \text{ se, e somente se, } \gamma \text{ é uma } \textbf{parábola} \\ \mu < 0 & \text{ se, e somente se, } \gamma \text{ é uma } \textbf{hipérbole} \end{aligned}$$

Demonstração.

Suponha que a curva γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco afim e que a curvatura μ seja constante. Sabemos pela equação (1.9) que

$$\gamma'''(s) + \mu(s)\gamma'(s) = 0, \quad \forall s \in I$$

Como γ é uma curva plana em coordenadas $(x(s), y(s))$, então vamos resolver o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'''(s) + \mu x'(s) = 0 \\ y'''(s) + \mu y'(s) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Fazendo

$$X = x', \quad X' = x'', \quad X'' = x''', \quad Y = y', \quad Y' = y'', \quad Y'' = y''',$$

transformamos o sistema de equações de 3ª ordem (1.10) em um sistema de equações de 2ª ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} X''(s) + \mu X'(s) = 0 \\ Y''(s) + \mu Y'(s) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Para esse sistema, existem valores constantes de r tais que e^{rs} é uma solução de ambas as equações do sistema. Substituindo

$$X(s) = e^{rs} = Y(s), \quad X'(s) = re^{rs} = Y'(s), \quad X''(s) = r^2 e^{rs} = Y''(s)$$

nas equações correspondentes, obtemos a equação característica, dada por $r^2 + \mu = 0$, a qual possui as seguintes soluções

$$r = \sqrt{-\mu} \quad \text{e} \quad r = -\sqrt{-\mu}. \quad (1.12)$$

Assim X e Y são soluções do sistema (1.11) se, e somente se, r é solução da equação $r^2 + \mu = 0$, estas soluções podem ser obtidas de acordo com os seguintes casos:

1º caso: Curvatura afim positiva

A equação característica possui duas raízes complexas $r = i\sqrt{\mu}$ e $r = -i\sqrt{\mu}$. Logo, a solução geral das equações do sistema (1.11), é

$$\begin{aligned} X(s) &= a \cos \sqrt{\mu}s + b \sin \sqrt{\mu}s \\ Y(s) &= c \cos \sqrt{\mu}s + d \sin \sqrt{\mu}s. \end{aligned}$$

Assim, a solução geral das equações do sistema (1.10) para valores arbitrários $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}s - \frac{b}{\sqrt{\mu}} \cos \sqrt{\mu}s + e \\ y(s) &= \frac{c}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}s - \frac{d}{\sqrt{\mu}} \cos \sqrt{\mu}s + f \end{aligned}$$

Logo

$$\gamma(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}s - \frac{b}{\sqrt{\mu}} \cos \sqrt{\mu}s + e, \frac{c}{\sqrt{\mu}} \sin \sqrt{\mu}s - \frac{d}{\sqrt{\mu}} \cos \sqrt{\mu}s + f \right),$$

é uma parametrização de uma elipse.

2º caso: Curvatura afim nula

O sistema de equações (1.10) se torna:

$$\begin{cases} x'''(s) = 0 \\ y'''(s) = 0 \end{cases}$$

Assim $\gamma'''(s) = 0$, a partir do qual obtemos:

$$\gamma(s) = \frac{1}{2}s^2b + sa + c,$$

onde a, b e c são vetores constantes tais $[a, b] = 1$. Tomando como coordenadas (x, y) tais que $a = (a_1, 0)$, $b = (0, b_1)$ e $c = (c_1, c_2)$ vemos que a curva descreve uma parábola

$$\gamma(s) = \left(a_1s + c_1, \frac{1}{2}s^2b_1 + c_2 \right).$$

3º caso: Curvatura afim negativa

A equação característica possui duas raízes reais $r = \sqrt{-\mu}$ e $r = -\sqrt{-\mu}$. Logo, a solução geral das equações do sistema (1.11), é

$$\begin{aligned} X(s) &= ae^{\sqrt{-\mu}s} + be^{-\sqrt{-\mu}s} \\ Y(s) &= ce^{\sqrt{-\mu}s} + de^{-\sqrt{-\mu}s}. \end{aligned}$$

Assim, a solução geral das equações do sistema (1.10) para valores arbitrários $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{a}{\sqrt{-\mu}}e^{\sqrt{-\mu}s} - \frac{a}{\sqrt{-\mu}}e^{-\sqrt{-\mu}s} + e \\ y(s) &= \frac{c}{\sqrt{-\mu}}e^{\sqrt{-\mu}s} - \frac{d}{\sqrt{-\mu}}e^{-\sqrt{-\mu}s} + f. \end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-\mu}s} &= \cosh \sqrt{-\mu}s + \sinh \sqrt{-\mu}s \\ e^{-\sqrt{-\mu}s} &= \cosh \sqrt{-\mu}s - \sinh \sqrt{-\mu}s, \end{aligned}$$

obtemos a parametrização da hipérbole dada por

$$\gamma(s) = (p_1 \cosh \sqrt{-\mu}s + p_2 \sinh \sqrt{-\mu}s + e, q_1 \cosh \sqrt{-\mu}s + q_2 \sinh \sqrt{-\mu}s + f),$$

$$\text{onde } p_1 = \frac{a+b}{\sqrt{-\mu}}, p_2 = \frac{a-b}{\sqrt{-\mu}}, q_1 = \frac{c+d}{\sqrt{-\mu}}, q_2 = \frac{c-d}{\sqrt{-\mu}}.$$

Reciprocamente, suponhamos que γ é uma cônica não degenerada, então temos os seguintes casos:

1º caso: γ é uma elipse

A equação da elipse é da forma: $\frac{(x-c_1)^2}{a^2} + \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1$, a qual pode ser reparametrizar por:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (a \cos t + c_1, b \sin t + c_2) \end{aligned}$$

Esta não é uma parametrização pelo comprimento de arco afim, pois $[\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)] \neq 1$. Pelo exemplo (1.51), temos uma parametrização pelo comprimento de arco afim, dada por:

$$\gamma(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) + c_1, b \sin \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) + c_2 \right).$$

Logo, a curvatura afim da elipse é $\mu = \frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}}$ constante positiva.

2º caso: γ é uma hipérbole

A equação da hipérbole é da forma: $\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$, a qual pode ser reparametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (a \cosh t + c_1, b \sinh t + c_2) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (a \sinh t, b \cosh t) \\ \ddot{\gamma}(t) &= (a \cosh t, b \sinh t). \end{aligned}$$

Temos que: $[\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(s)] = -ab$. Logo a função comprimento de arco afim a partir de $t_0 = 0$ é dada por:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt[3]{-ab} \, d\xi = -\sqrt[3]{ab}t.$$

Logo, uma reparametrização pelo comprimento de arco afim da hipérbole é

$$\gamma(s) = \left(a \cosh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right), -b \sinh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) \right).$$

Portanto a curvatura afim é

$$\begin{aligned} \mu &= [\gamma'(s), \gamma''(s)] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) & -\frac{1}{\sqrt[3]{b}} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) \\ -\frac{b}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) & -\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \cosh^2 \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) + \frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \sinh^2 \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{(ab)^2}} \end{aligned}$$

3º caso: γ é uma parábola

A equação cartesiana da parábola é $(x - a)^2 = c(y - b)$, a qual pode ser reparametrizada por:

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \left(t + a, \frac{1}{c}t^2 + b\right)\end{aligned}$$

Então:

$$\dot{\gamma}(t) = \left(1, \frac{2}{c}t\right) \quad \text{e} \quad \ddot{\gamma}(t) = \left(0, \frac{2}{c}\right)$$

Temos que: $[\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(s)] = 2/c$. Assim a função comprimento de arco afim a partir de $t_0 = 0$ é dada por:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt[3]{\frac{2}{c}} \, d\xi = \sqrt[3]{2c^{-1}}t$$

Portanto, uma reparametrização pelo comprimento de arco afim da parábola pode ser dada por:

$$\gamma(s) = \left(\sqrt[3]{\frac{c}{2}}s + a, \frac{1}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{c}{2}\right)^2}s^2 + b\right).$$

Logo a curvatura afim é :

$$\begin{aligned}\mu &= [\gamma'(s), \gamma''(s)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{c}{2}\right)^2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Definição 1.63. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva plana diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco afim. A curva γ possui

- (i) **inflexão afim ou ponto parabólico** em $\gamma(t_0)$ se $\mu(s_0) = 0$. A inflexão ou ponto parabólico é chamada de **ordinária** se $\mu'(s_0) \neq 0$, e de **degenerada** se $\mu'(s_0) = 0$.
- (ii) **vértice afim ou ponto sextático** em $\gamma(s_0)$ se $\mu(s_0) \neq 0$ e $\mu'(s_0) = 0$. O vértice ou o ponto sextático é chamado de **ordinário** se $\mu''(s_0) \neq 0$ e de **degenerado** se $\mu''(s_0) = 0$.

1.3.4 Evoluta Afim

Podemos definir uma curva que possui as mesmas características da evoluta (euclidiana), mas ao invés de usarmos a curvatura e o vetor normal iremos usar a curvatura afim e o normal afim.

Definição 1.64. *Seja γ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco afim tal que $\mu(s_0) \neq 0$, $s_0 \in I$, o número*

$$\rho = \frac{1}{|\mu(s_0)|} \text{ é chamado o } \mathbf{raio \textit{de curvatura afim}} \text{ de } \gamma \text{ em } s_0,$$

e o ponto $C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma''(s_0)$ é chamado o **centro de curvatura afim** *de* γ *em* s_0 *. A* **cônica oscultriz** *de* γ *em* s_0 *é a cônica com centro de curvatura afim* $C(s_0)$ *e raio* $\rho(s_0)$ *.*

Obsevação 1.65. *A cônica oscultriz em um ponto da curva é uma hipérbole se $\mu < 0$ ou uma elipse se $\mu > 0$.*

Definição 1.66. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim tal que $\mu(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. A medida que varia o parâmetro s , o centro de curvatura afim da curva γ descreve uma curva $\mathcal{E} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, chamada a* **evoluta afim** *de* γ *, dada por*

$$\mathcal{E}(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\mu(s)}\gamma''(s).$$

1.3.5 Função Distância Afim

Nesta subseção iremos definir e estudar as propriedades de uma família de funções sobre uma curva plana. Esta função será de suma importância em nosso trabalho.

Vamos usar a notação de singularidade A_k dada por Arnold (veja [8]), para expressar o tipo de singularidade de uma determinada função.

Definição 1.67. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos $(x, t) \mapsto f(x, t)$ que a função f tem **singularidade** do tipo $A_{\geq k}$ em t_0 quando k **primeiras derivadas** de f em relação a t são nulas e $k + 1$ **derivadas** da função f é diferente de zero, isto é $f^{(s)}(x, t_0) = 0$ para $1 \leq s \leq k$.*

Notações 1.2. *No nosso contexto, iremos utilizar a derivada da função acima como:*

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x, t) &:= f_t(x, t) \\ f^{(2)}(x, t) &:= f_{tt}(x, t) \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x, t) &:= f_{t^k}(x, t) \end{aligned}$$

Definição 1.68. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco afim. A família de funções

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^2 \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{X}, s) &\longmapsto d(\mathbf{X}, s) = [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma'(s)] \end{aligned}$$

é chamada de **família de funções distância afim** da curva γ .

Obsevação 1.69. A família de funções da distância afim é claramente **invariante sobre transformações afins**, uma vez que a função é dada como um determinante.

Proposição 1.70. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Então a família de funções distância afim é dada por

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^2 \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{X}, t) &\longmapsto d(\mathbf{X}, t) = [\mathbf{X} - \gamma, \dot{\gamma}][\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Demonstração.

Como a curva γ está parametrizada por um parâmetro arbitrário, então o vetor $\gamma'(t) = \kappa^{-\frac{1}{3}}\dot{\gamma}$. Segue que a família da função distância afim é dada por:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{X}, t) &= [\mathbf{X} - \gamma(t), \gamma'(t)] \\ &= [\mathbf{X} - \gamma(t), \kappa^{-\frac{1}{3}}\dot{\gamma}] \\ &= [\mathbf{X} - \gamma, \dot{\gamma}] \kappa^{-\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

com $\kappa = [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$. ■

Definição 1.71. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco afim e $d : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções distância afim.

(i) Se existir $s_1 \in I$ tal que

$$d_s(\mathbf{X}, s_1) = d_{ss}(\mathbf{X}, s_1) = 0,$$

então a função correspondente $d(\mathbf{X}, s)$ tem uma singularidade degenerada em s_1 .

(ii) O conjunto

$$\mathcal{B}_d = \{X \in \mathbb{R}^2; d_s(\mathbf{X}, s_1) = d_{ss}(\mathbf{X}, s_1) = 0\}$$

é chamado **conjunto de bifurcação** da família de funções distâncias afim.

A proposição a seguir mostra propriedades da função distância afim e que serão úteis ao longo do trabalho.

Proposição 1.72. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. A função distância afim d da curva γ satisfaz as seguintes singularidades: d

- (i) $A_{\geq 1}$ se, e somente se, $\mathbf{X} - \gamma(s)$ é paralelo ao vetor normal afim $\gamma''(s)$, e $\mathbf{X}$ pertence a reta normal afim a γ em $\gamma(s)$.
- (ii) $A_{\geq 2}$ se, e somente se, $\mu \neq 0$ e $\mathbf{X} = \gamma(s) + (1/\mu(s))\gamma''(s)$, e $\mathbf{X}$ é então o centro de curvatura afim de γ em $\gamma(s)$, isto é, pertence a evoluta afim de γ .
- (iii) $A_{\geq 3}$ se, e somente se, $\mu(s) \neq 0$, $\mathbf{X} = \gamma(s) + (1/\mu(s))\gamma''(s)$ e $\mu'(s) = 0$: $\mathbf{X}$ é o vértice afim da evoluta afim de γ .
- (iv) γ é uma cônica e $\mathbf{X}$ é o centro se, e somente se, $d(\mathbf{X}, s)$ é constante.
- (v) $\mathbf{X} - \gamma(s) = \alpha\gamma'(s) - d(\mathbf{X}, s)\gamma''(s)$, para algum número real α .

Demonstração.

- (i) Para a singularidade do tipo $A_{\geq 1}$, temos que:

$$d_s(\mathbf{X}, s) = 0 \Leftrightarrow \cancel{[-\gamma'(s), \gamma'(s)]}^0 + [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma''(s)] = 0.$$

Logo o vetor $\mathbf{X} - \gamma(s)$ é paralelo ao vetor $\gamma''(s)$, isto é, existe um $\lambda(s)$ tal que

$$\mathbf{X} = \gamma(s) + \lambda(s)\gamma''(s)$$

- (ii) Para $A_{\geq 2}$, temos:

$$\begin{cases} d_s(\mathbf{X}, s) = 0 \\ d_{ss}(\mathbf{X}, s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma''(s)] = 0 \\ [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma'''(s)] = 1. \end{cases}$$

Substituindo $\mathbf{X} - \gamma(s) = \lambda(s)\gamma''(s)$ na segunda equação, obtemos:

$$1 = [\lambda(s)\gamma''(s), \gamma'''(s)] \Rightarrow \frac{1}{\mu(s)} = \lambda(s), \mu(s) \neq 0$$

Logo, o ponto $\mathbf{X} = \gamma(s) + \frac{1}{\mu(s)}\gamma''(s)$ pertence a evoluta.

- (iii) A singularidade do tipo $A_{\geq 3}$, vemos que

$$\begin{cases} d_s(\mathbf{X}, s) = 0 \\ d_{ss}(\mathbf{X}, s) = 0 \\ d_{sss}(\mathbf{X}, s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma''(s)] = 0 \\ [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma'''(s)] = 1 \\ [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma^{(4)}(s)] = 0. \end{cases}$$

Da duas primeira equações, obtemos $\mathbf{X} - \gamma(s) = (1/\mu(s))\gamma''(s)$. Substituindo este valor na terceira equação, vemos que:

$$[\gamma''(s), \gamma^{(4)}(s)] \Rightarrow \mu'(s) = 0.$$

Portanto;

$$\mathbf{X} = \gamma(s) + \frac{1}{\mu(s)}\gamma''(s), \quad \mu \neq 0 \text{ e } \mu'(s) = 0. \quad (1.13)$$

(iv) Suponha que a cônica seja uma elipse da forma $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ centrada na origem. Pela Proposição 1.70, vemos que:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{0}, t) &= [\mathbf{0} - \gamma(t), \dot{\gamma}(t)] [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)]^{-\frac{1}{3}} \\ &= \begin{bmatrix} -a \cos t & -a \sin t \\ -b \sin t & b \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \sin t & -a \cos t \\ b \cos t & -b \sin t \end{bmatrix}^{-\frac{1}{3}} \\ &= -(ab)^{\frac{2}{3}} \text{ é constante.} \end{aligned}$$

Supondo $d(\mathbf{X}, s) \equiv c$, temos $d_s(\mathbf{X}, s) = [\mathbf{X} - \gamma(s), \gamma''(s)] = 0$, ou seja

$$\mathbf{X} = \gamma(s) + \lambda \gamma''(s)$$

corresponde ao centro de uma cônica γ .

Considere agora a cônica sendo uma hipérbole da forma $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ centrada na origem. Utilizando novamente a proposição 1.70, vemos que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{0}, t) &= [\mathbf{0} - \gamma(t), \dot{\gamma}(t)] [\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)]^{-\frac{1}{3}} \\ &= \begin{bmatrix} -a \cosh t & a \sinh t \\ -b \sinh t & b \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \sinh t & a \cosh t \\ b \cosh t & b \sinh t \end{bmatrix}^{-\frac{1}{3}} \\ &= (ab)^{\frac{2}{3}} (\sinh^2 t - \cosh^2 t)^{\frac{2}{3}} \\ &= -(ab)^{\frac{2}{3}} \text{ é constante.} \end{aligned}$$

A recíproca é análoga ao da elipse.

(v) Como γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim, então $[\gamma'(s), \gamma''(s)] = 1$ para todo $s \in I$. Logo os vetores $\gamma'(s)$, $\gamma''(s)$ são linearmente independentes, e assim existem uma família de funções $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathbf{X} - \gamma(s) = \alpha \gamma'(s) + \beta \gamma''(s).$$

Substituindo esta equação na função distância afim $d(\mathbf{X}, s)$ da curva γ , obtemos $d(\mathbf{X}, s) = [\alpha \gamma'(s) + \beta \gamma''(s)] = -\beta$. Portanto

$$\mathbf{X} - \gamma(s) = \alpha \gamma'(s) - d(\mathbf{X}, s) \gamma''(s).$$

■

Obsevação 1.73. *Pelo item (ii) da proposição acima, o conjunto de bifurcação da família de funções distância afim $\mathcal{B}_d$ é precisamente a evoluta afim da curva γ .*

CAPÍTULO 2

CONJUNTO DE SIMETRIA CENTRAL- $\mathcal{CSS}$

Neste capítulo apresentaremos o Conjunto de Simetria Central- $\mathcal{CSS}$ de curvas planas, o qual mede a extensão em que uma curva plana é centralmente simétrica.

Vamos estudar a estrutura local do $\mathcal{CSS}$ para curvas planas genéricas, isto é, curvas que apresentam inflexões ao longo de segmentos de curvas.

As principais referências para este capítulo são: [14] e [21].

As figuras deste capítulo foram produzidas com o aplicativo *LatexDraw*, exceto a figura 2.5 que foi retirada de [21].

2.1 Construção do $\mathcal{CSS}$

Definição 2.1. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável fechada. A curva plana γ possui um **centro de simetria** C , se para todo ponto P em γ , o ponto $2C - P$ é também ponto de γ .*

A noção de centro de simetria para estas curvas é muito restritiva, pois existem curvas planas fechadas que não possuem um centro de simetria, uma ideia de generalização desse conceito clássico de simetria plana começou com o estudo do conjunto de simetria, observando que:

Dada uma curva plana γ centralmente simétrica sobre C , as tangentes em cada ponto P e $2C - P$ são paralelas. Se fossemos construir a corda que unem cada um dos pares das tangentes paralelas, notamos que a envolvente destas cordas corresponde ao centro C . Mais precisamente:

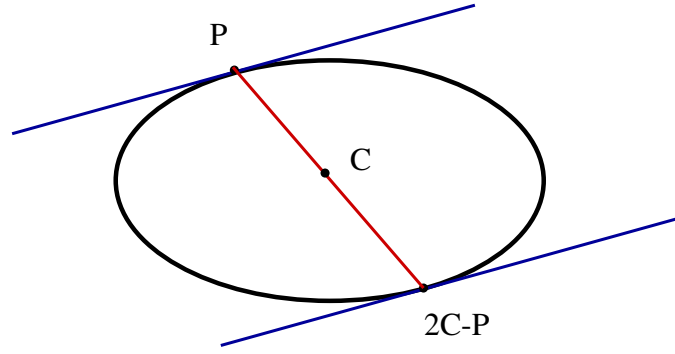


Figura 2.1: Curva centralmente simétrica

Definição 2.2. *O conjunto de simetria central denotado por CSS , do inglês Centre Symmetry Set, de uma curva plana estritamente convexa é a envolvente de segmentos que unem os pontos de contatos dos pares das tangentes paralelas.*

Podemos fazer uma construção simples do CSS para uma curva fechada estritamente convexa, da seguinte maneira:

- 1º passo:** Encontramos os pares de tangentes paralelas as quais são tangentes a curva considerada;
- 2º passo:** Unimos os pontos de contatos das tangentes paralelas da curva considerada;
- 3º passo:** Encontramos a envolvente destes segmentos.

Em vez de um único ponto como sendo o centro da curva plana, teremos um conjunto de pontos, o que nos leva a Definição 2.2 do conjunto de simetria central. Abaixo, a figura mostra o CSS de uma oval.

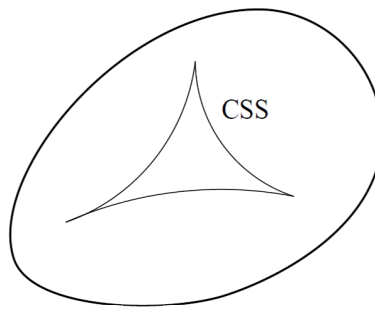


Figura 2.2: Conjunto de simetria central de uma curva oval

Obsevação 2.3. *A definição do CSS , depende apenas de conceitos que são invariantes por transformações afim, e assim podemos dizer que o CSS é um invariante afim.*

A primeira tentativa de criar uma generalização de simetria central foi dada por S. Janeczko [23] conjunto de simetria central de uma oval é definido conjunto

de bifurcação da família de funções razão-da-distâncias na curva parametrizada por pontos no plano.

Neste trabalho vamos usar a definição de envolvente de retas para estudar a estrutura do CSS.

2.1.1 Evoluta de Área- $\mathcal{AE}$

Na seção anterior, vimos que o CSS de uma curva plana convexa é a envolvente dos segmentos que unem os pontos de contatos das tangentes paralelas. Vamos definir um outro conjunto através dos pontos médios destes segmentos.

O leitor interessado em evoluta de área pode encontrar mais detalhes em: [10]

Considere a figura 2.3, com γ uma curva plana diferenciável convexa e parametrizada por uma parâmetro $t \in [0, 2\pi]$, $\ell(t)$ a reta que passa pelos pontos $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \pi)$ e a reta $r(t)$ que passa pelo ponto $\frac{1}{2}(\gamma(t) + \gamma(t + \pi))$ com vetor diretor $\gamma'(t)$.

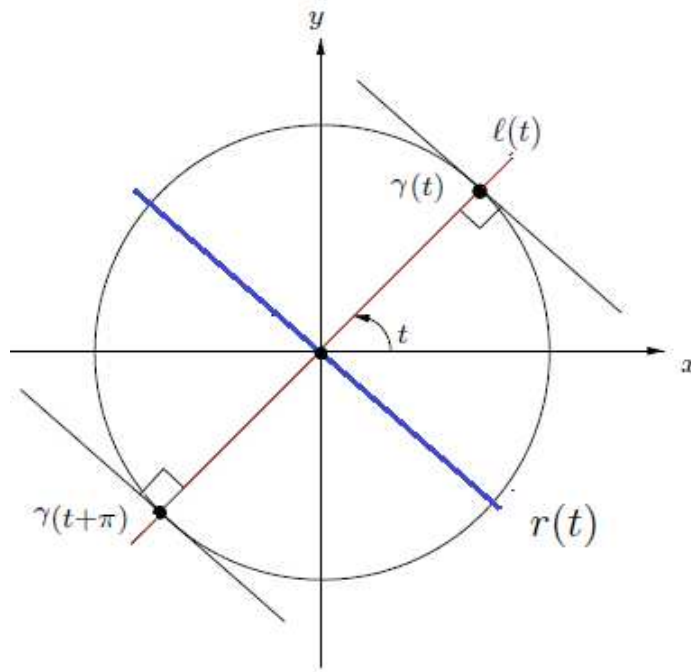


Figura 2.3: A reta $\ell(t)$ em vermelho e reta $r(t)$ em azul

Definição 2.4. A *Evoluta de Área- $\mathcal{AE}$* é a envolvente da reta paralela ao vetor $\gamma'(t)$ que passa pelos pontos médios dos segmentos que unem os pontos de contatos das tangente paralelas.

Definição 2.5. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas planas diferenciáveis convexas. A curva β é **equidistante** a γ quando a reta $\ell(t)$ e a reta $r(t)$ coincidem.

Obsevação 2.6. A própria evoluta de área é equidistante à curva γ .

2.2 CSS como Envolverte de Retas

Nesta seção, vamos encontrar a parametrização da família de retas que unem os pares de pontos de contatos das tangentes paralelas.

Consideremos o sistema de coordenadas locais ilustrado na figura 2.4, com as seguintes parametrizações dos segmentos de uma curva plana diferenciável fechada e convexa

$$\begin{aligned} \gamma_1 : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma_1(t) = (t, f(t)) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \gamma_2 : J &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto \gamma_2(u) = (c - u, d + g(u)), \end{aligned}$$

sendo f e g funções diferenciáveis tais que:

$$f(0) = f'(0) = 0 = g'(0) = g(0) \quad \text{e} \quad (c, d) \neq (0, 0)$$

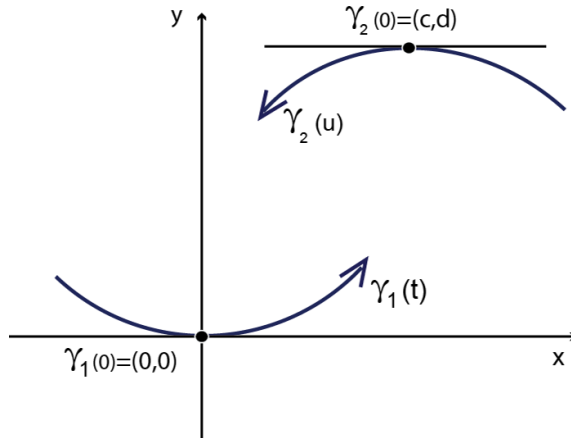


Figura 2.4: Coordenadas locais

Através da construção do conjunto de simetria central, podemos observar que uma condição para que os pares de contatos de tangentes sejam paralelas é que:

$$f'(t) = -g'(u), \quad (2.1)$$

sendo ' a derivada com respeito aos parâmetros correspondentes. Assumimos que não temos inflexões nos segmentos da curva. E vamos resolver a condição das tangentes paralelas para $u = U(t)$.

Observemos que a reta que passa pelos segmentos γ_1 e γ_2 , é paralela ao vetor

$$\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2} = (t - c + U(t), f(t) - d - g(U(t))),$$

e ortogonal a

$$N = (d + g(U(t)) - f(t), t - c + U(t)).$$

Logo, um ponto $p = (x, y)$ do plano pertence a reta que passa pelos pontos $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(U(t))$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} ((x, y) - \gamma_1(t)) \cdot N(t) &= 0 \\ \implies (x - t)(d + g(U(t)) - f(t)) - (y - f(t))(c - U(t) - t) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir uma família de retas

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\longmapsto F(x, y, t), \end{aligned}$$

definida por:

$$\mathcal{F}(t, x, y) = (x - t)(d + g(U(t)) - f(t)) - (y - f(t))(c - U(t) - t) \quad (2.2)$$

Para encontrarmos o CSS, devemos encontrar a envolvente da família de retas acima. Segue pelo (1.29) que: a envolvente desta família de retas satisfaz as equações:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, t) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, t) = & -(d + g(U(t)) - f(t)) + (x - t)(g'(U(t))U'(t) - f'(t)) + \\ & + f'(t)(c - U(t) - t) + (y - f(t))(U'(t) + 1) \end{aligned}$$

Para encontrarmos a solução do sistema, utilizamos o aplicativo computacional *Maple*, devido há expressões grandes envolvidas. Assim, encontramos a parametrização da envolvente da família de retas $\mathcal{F}$, dada por

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{A(t)}{B(t)}, \frac{C(t)}{D(t)} \right), \quad (2.4)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A(t) = & cf - fU + f'c^2 + f'U^2 - g(U)(U)c + g(U)(U)U - dc + dU - \\ & - 2f'cU - cf't + f'Ut + fU't + t^2g'(U)(U)U' - tU'g(U)(U) \\ & - U'td - tg'(U)(U)U'c + tg'(U)(U)U'U. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(t) = & -g'(U)U'c + g'(U)U'U + tg'(U)U' + f'c - f'U - f't - \\ = & -U'd - U'g(U) + fU' - d - g(U) + f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t) = & cf g'(U)U' - cg(U)f' - cdf' - ftg'(U)U' - f^2U' + g(U)f't - \\ = & fUg'(U)U' + d^2 + df't + 2dg(U) + (g(U))^2 - g(U)f + g(U)f'U + \\ = & fU'd - df + df'U + fU'g(U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t) = & -g'(U)U'c + g'(U)U'U + tg'(U)U' + f'c - f'U - f't - U'd - \\ = & U'g(U) + fU' - d - g(U) + f. \end{aligned}$$

Calculando em $t = U(0) = 0$ em (2.3), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} xd - yc = 0 \\ -d + y(U'(0) + 1) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Substituindo $u = U(t)$ na equação (2.1), e calculando a derivada, obtemos

$$f''(t) = -g''(U(t))U'(t) \xrightarrow{t=U(0)=0} f''(0) = -g''(0)U'(0).$$

Calculando os vetores tangentes e normais de ambos os segmentos em $t = u = 0$ obtemos

$$\vec{t}_1(0) = \gamma'_1(0), \quad \vec{n}_1(0) = (-f(0), 1) \quad \text{e} \quad \vec{t}_2(0) = \gamma'_2(0), \quad \vec{n}_2(0) = (-g'(0), -1).$$

Segue que as curvaturas de γ_1 em $\gamma(0)$ e γ_2 em $\gamma(0)$ são respectivamente

$$\kappa_1(0) = f''(0) \quad \text{e} \quad \kappa_2(0) = -g''(0)$$

Assim, $f''(0) = -g''(0)U'(0)$ é

$$U'(0) = \frac{\kappa_1(0)}{\kappa_2(0)}$$

Portanto, resolvendo o sistema (2.5), encontramos um ponto do CSS ao longo da reta $\mathcal{F}$ que passa pelos pontos $(0, 0)$, (c, d) dado por:

$$(x, y) = \left(\frac{c\kappa_2(0)}{\kappa_1(0) + \kappa_2(0)}, \frac{d\kappa_2(0)}{\kappa_1(0) + \kappa_2(0)} \right), \quad (2.6)$$

com o pressuposto de que $\kappa_1(0) + \kappa_2(0) \neq 0$

Obsevação 2.7. Se $d = 0$, então todo o eixo x é solução do sistema (2.5), assim no caso de uma tangente dupla, a própria tangente é parte do CSS. Caso $\kappa_1(0) + \kappa_2(0) \rightarrow 0$, então o ponto CSS está no infinito.

Uma solução das equações (2.3) para pontos $(x_1, y_1) \in \gamma_1$ e $(x_2, y_2) \in \gamma_2$ quaisquer, é dado por resolver o sistema

$$\begin{cases} (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) &= 0 \\ -(y_2 - y_1) + (y - y_1)(U'(0) + 1) &= 0 \end{cases},$$

ou seja, o ponto do CSS dado por:

$$(x, y) = \left(\frac{x_1\kappa_1(0) + x_2\kappa_2(0)}{\kappa_1(0) + \kappa_2(0)}, \frac{y_1\kappa_1(0) + y_2\kappa_2(0)}{\kappa_1(0) + \kappa_2(0)} \right)$$

Obsevação 2.8. Se as orientações dos segmentos de curva são os mesmos, o sinal da curvatura κ_i é invertido.

Exemplo 2.9. Considere a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{a}{2} \cos(5t) + \frac{a}{2} + b \right) \cos(t) + \frac{5a}{2} \sin(5t) \sin(t) \\ y(t) &= \left(\frac{a}{2} \cos(5t) + \frac{a}{2} + b \right) \sin(t) - \frac{5a}{2} \sin(5t) \cos(t) \end{aligned}$$

A parametrização do CSS é

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{5}{2} \sin(5t) \sin(t) + \frac{25}{2} \cos(5t) \cos(t), \\ Y(t) &= -\frac{5}{2} \sin(5t) \cos(t) + \frac{25}{2} \cos(5t) \sin(t) \end{aligned}$$

A figura 2.5 representa o CSS da curva oval.

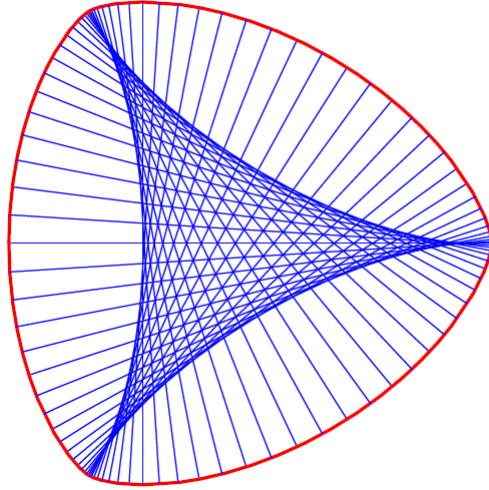


Figura 2.5: O CSS da oval

Teorema 2.10. *O ponto (x, y) do CSS, divide o segmento que une os pontos de contatos dos pares de tangentes paralelas na razão*

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1},$$

onde v_i é a distância a partir do ponto de orientação da envolvente para o segmento de curva.

Demonstração.

Seja $r = v_1 : v_2$ a razão, como os três pontos são conhecidos, então a razão dos três pontos é:

Pelas projeções no eixo x :

$$r = \frac{\frac{c\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} - 0}{c - \frac{c\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}} = \frac{c\kappa_2}{c\kappa_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}.$$

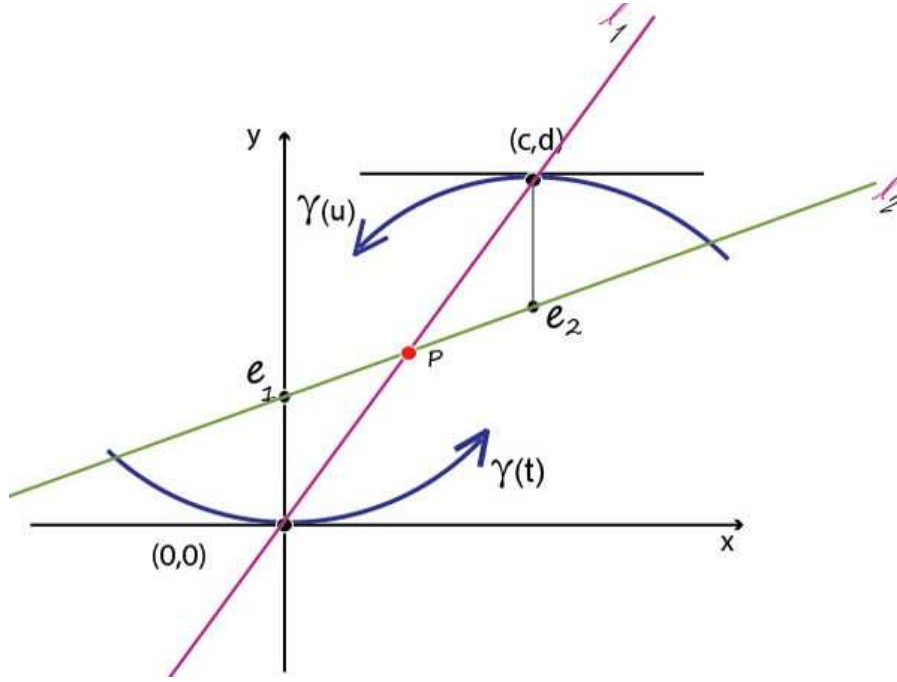
Pelas projeções no eixo y

$$r = \frac{\frac{d\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} - 0}{d - \frac{d\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}} = \frac{d\kappa_2}{d\kappa_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}.$$

Portanto, o ponto (x, y) divide o segmento na razão $\kappa_2 : \kappa_1$. ■

Obsevação 2.11. *A definição do CSS por meio da envolvente de retas e por meio da razão-de-distâncias são idênticas no caso de curvas planas estritamente convexas. (ver [23]).*

Corolário 2.12. *Sejam l_1 uma reta que passa pelos pontos $(0, 0)$, (c, d) e l_2 uma reta que passa pelos centros de curvaturas e_1 e e_2 . A interseção das retas l_1 e l_2 , é o ponto correspondente $P = (x, y)$ do CSS.*

Figura 2.6: Ponto (x, y) do CSS

O exemplo abaixo, mostra que o CSS de uma curva plana γ diferenciável fechada com largura constante é a evoluta da curva γ .

Exemplo 2.13. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável fechada com largura constante.*

Suponhamos que a curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco, com parâmetro t . A reta normal a γ em t_0 é dada por $\mathcal{F}^{-1}(0)$, onde $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\mathcal{F}(x, y) = ((x, y) - \gamma(s_0)) \cdot \vec{t}(t_0)$$

Variando o parâmetro t no intervalo, obtemos o conjunto de retas normais a γ , dada por $\mathcal{F}^{-1}(0)$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \times I &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\mapsto \mathcal{F}(x, y, t) = ((x, y) - \gamma(t)) \cdot \vec{t}(t). \end{aligned}$$

Seja $\beta(t) = (x(t), y(t))$ uma curva plana diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco. Pelo Teorema 1.29, β é a envolvente da família de retas normais a γ se, e somente se $\beta(t)$ satisfaz a equações:

$$\mathcal{F}(\beta(t), t) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(\beta(t), t) = 0,$$

ou seja

$$(\beta(t) - \gamma(t)) \cdot \vec{t}(t) = (\beta'(t) - \gamma'(t)) \cdot \vec{t}(t) + (\beta(t) - \gamma(t)) \cdot \vec{t}'(t) = 0$$

O primeiro termo da equação acima, $\beta(t) - \gamma(t)$ é paralelo $\vec{t}(t)$. Assim, existe $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\beta(t) - \gamma(t) = \lambda(t) \vec{n}(t).$$

Substituindo o vetor $\beta(t) - \gamma(t)$ no segundo termos obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\beta'(t) - \gamma'(t)) \cdot \vec{t}(t) + \lambda(t) \vec{n}(t) \cdot \vec{t}(t) \\ &= \beta'(t) \vec{t}(t) - 1 + \lambda(t) \kappa_\gamma(t), \end{aligned}$$

Como a curva β é a envolvente, ou seja, β é tangente a essa família de retas normais, então o vetor $\beta'(t)$ é paralelo ao vetor normal a curva γ . Assim, obtemos que

$$\lambda(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

Logo, a evoluta

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \vec{n}(t)$$

é a envolvente das retas normais a γ .

Portanto, o CSS é a evoluta da curva plana γ . Mais precisamente, a evoluta é uma cobertura dupla do CSS.

Obsevação 2.14. Vimos na seção 2.1, que a definição do CSS para um curva plana estritamente convexa é a envolvente dos segmentos que unem os pontos de contatos das tangentes paralelas.

Qual a definição do CSS para uma curva genérica? A definição é exatamente a mesma: envolvente dos segmentos que unem os pontos de contatos das tangentes paralelas.

A forma mais geral de pensar nisso é como uma família de dois parâmetros de retas que unem os pontos $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(u)$ de uma curva parametrizada γ . Dizemos que $\mathcal{F}(t, u, x, y) = 0$ é uma equação geral desta família. Assim, para o CSS impomos duas condições:

- $\mathcal{G}(u, t) = 0$ é a condição da tangente paralela,
- $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u}$ é a condição da envolvente.

Quando $\mathcal{G}(u, t) = 0$ pode ser resolvido por t como função de u (no caso convexo, excluimos a solução trivial $u = s$), então este se reduz a família a 1-parâmetro e a condição da envolvente.

Na verdade localmente sempre podemos fazer isso: ou u é uma função diferenciável de t ou t é uma função diferenciável de u , próximo de (u_0, t_0) , exceto quando a curva tem inflexões em ambas u_0 e t_0 . Mesmo, se em uma vizinhança de um ponto de inflexão onde $u_0 = t_0$ e u_0 é uma inflexão, excluindo a solução $u = t$ podemos resolver localmente t em função de u .

Então, em uma vizinhança de qualquer par de tangentes paralelas de uma curva plana genérica, podemos usar a definição local da envolvente, onde temos uma família a 1 parâmetro de retas $\mathcal{F}(u, x, y) = 0$ e a envolvente é daqueles x, y para o qual $\mathcal{F} = \mathcal{F}_u = 0$.

2.3 Singularidades do CSS

Nesta seção, iremos estudar estrutura local do conjunto de simetria central de uma curva plana genérica, não assumiremos que a curva seja convexa, pois estamos preocupados com propriedades locais do conjunto.

Vamos pensar na equação $\mathcal{F}$ como função de t em parâmetros x e y , e neste contexto o CSS é o diagrama de bifurcação dos zeros da equação $\mathcal{F}$, ou seja, pontos (x, y) para os quais:

$$\mathcal{F}(x, y, t) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, t) = 0,$$

para algum t .

Vamos encontrar condições sob quais $\mathcal{F}$ tem singularidade do tipo $A_{\geq k}$ com $k \geq 2$, ou seja: $A_{\geq 2}$ em $t = U(0) = 0$, obtemos:

$$\mathcal{F}(x, y, 0) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}(x, y, 0) = 0$$

o que é equivalente:

$$\begin{cases} xd - yc &= 0 \\ -d + y(U'(0) + 1) &= 0 \\ x(g''(0)U'(0)^2 - f''(0)) + cf''(0) + y.U''(0) &= 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

As duas primeiras equações do sistema acima, nos fornece o ponto (x, y) do CSS, como definido em (2.6). Substituindo este ponto na terceira equação, e lembrando que $f''(0) = \kappa_1(0)$, $g''(0) = -\kappa_2(0)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \left[-\kappa_2 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 - \kappa_1 \right] + c\kappa_1 + \frac{d\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} U''(0) \\ &= \frac{-c\kappa_1^2 - c\kappa_2\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} + c\kappa_1 + \frac{d\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} U''(0) \\ &= \frac{d\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} U''(0) \Rightarrow d\kappa_2 U''(0) = 0 \end{aligned}$$

Assumindo que o segmento superior γ_2 não possua inflexão, obtemos que: $d = 0$ ou $U''(0) = 0$. Como

$$f'''(t) = -g'''(U(t))U'(t)^2 - g''(U(t))U''(t).$$

então, em $t = U(0) = 0$ o valor de $U''(0)$ é

$$U''(0) = \frac{\kappa_1'(0)\kappa_2^2(0) - \kappa_2'(0)\kappa_1^2(0)}{\kappa_2^3(0)}. \quad (2.8)$$

Assim, temos o teorema:

Teorema 2.15. *O CSS é singular se, e somente se, a reta tangente é a mesma em ambos os pontos ($d=0$), ou*

$$\kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa'_2 = 0 \quad (2.9)$$

Obsevação 2.16. *Podemos também verificar se o CSS é singular da seguinte maneira: Derivando a parametrização (2.4) do CSS calculados em $t = U(0) = 0$ (usando o MaPle), temos*

$$(x'(0), y'(0)) = 0 \iff \begin{cases} d(-g''U'^2c - U''d - f''U'c) = 0 \\ d^2[-cU'f'' - g''U'^2 - U''d] = 0 \end{cases}$$

Assim, as equações acima são nulas se, e somente se

$$d = 0 \quad \text{ou} \quad -g''U'^2c - U''d - f''U'c = 0$$

Supondo $d \neq 0$ e substituindo $U' = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, $f'' = \kappa_1$ e $g'' = -\kappa_2$ e usando o valor de U'' obtemos

$$-g''U'^2c - U''d - f''U'c = \kappa_2 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 c - U''d - \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} c = 0 \iff \kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_2' \kappa_1^2 = 0.$$

Portanto o CSS é singular se, e somente se $d = 0$ ou $\kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_2' \kappa_1^2 = 0$.

2.3.1 Condição da Cúspide do CSS

Concentraremos na segunda condição do Teorema 2.15, ou seja, $\kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa'_2 = 0$, que veremos tratar da condição de cúspide e posteriormente vamos considerar inflexões e tangentes duplas ($d = 0$).

Considere $\rho_i = 1/\kappa_i$ o raio de curvatura do segmento da curva $\gamma_i (i = 1, 2)$, a condição (2.9) para que o CSS seja não diferenciável (longe de $d = 0$) pode ser escrita como

$$\rho'_1 = \rho'_2.$$

Observemos que estamos considerando κ_1 com parâmetro t e κ_2 com parâmetro u , parametrizando $u = U(t)$ e usando o fato de que $dU/dt = \kappa_1/\kappa_2$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) = \frac{\kappa'_2 \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} - \kappa_2 \kappa'_1}{\kappa_1^2} = \frac{\kappa'_2 \kappa_1^2 - \kappa_2^2 \kappa'_1}{\kappa_2 \kappa_1^2} = 0 \iff \kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa'_2 = 0$$

Pelo Teorema 2.10, o ponto (x, y) da envolvente, divide a reta que une os pontos de contatos dos pares das tangentes paralelas na proporção

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}.$$

Assim a cúspide aparece no $\mathcal{CSS}$, se a função razão de distância v_1/v_2 tem um ponto crítico. Isso nos leva de volta mais uma vez a definição original do $\mathcal{CSS}$, como conjunto de bifurcação da família da função razão de distância (ver [23]), e verifica-se que estas duas definições são idênticas para curvas estritamente convexas.

Obsevação 2.17. *Podemos escrever a condição $\kappa'_1\kappa_2^2 - \kappa_1^2\kappa'_2 = 0$ de uma forma invariante afim.*

Vamos utilizar a segunda equação da proposição (1.54), denotando por $\cdot$ como sendo a derivada com respeito ao parâmetro arbitrário, e $\cdot$ como sendo a derivada ao parâmetro comprimento de arco afim.

Supondo que o parâmetro t seja o parâmetro comprimento de arco, o vetor normal pode ser expresso por

$$\ddot{\gamma} = \kappa^{-\frac{2}{3}}\gamma'' - \frac{1}{3}\kappa'\kappa(t)^{-\frac{5}{3}}\gamma',$$

onde $\kappa = [\gamma', \gamma''] = \nu$, $\kappa' = [\gamma', \gamma'''] = \nu'$. Segue que vetor normal afim de γ_1 e γ_2 calculados em $t = u = 0$, são respectivamente:

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}_1(0) &= f''(0)^{-\frac{2}{3}}(0, f''(0)) - \frac{1}{3}f'''(0)f''(0)^{-\frac{5}{3}}(1, 0) \\ &= \frac{1}{3}f''(0)^{-\frac{5}{3}}(-f'''(0), 3f''(0)^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}_2(0) &= g''(0)^{-\frac{2}{3}}(0, g''(0)) + \frac{1}{3}g'''(0) - g''(0)^{-\frac{5}{3}}(-1, 0) \\ &= \frac{1}{3}g''(0)^{-\frac{5}{3}}(g'''(0), 3g''(0)^2)\end{aligned}$$

O que mostra que normal afim ao segmento γ_1 tem direção $(-f'''(0), 3(f''(0))^2)$ e o normal afim ao segmento γ_2 tem direção $(g'''(0), 3(g''(0))^2)$. Logo pela condição da cúspide, vemos que:

$$\begin{aligned}0 &= \kappa'_1\kappa_2^2 - \kappa_1^2\kappa'_2 \\ &= -g'''(0)f''(0)^2 - g''(0)^2f'''(0) \iff \frac{f'''(0)}{f''(0)^2} = -\frac{g'''(0)}{g''(0)^2}.\end{aligned}$$

Isso mostra que os normais afim em $(0, 0)$ e (c, d) são paralelos.

Comparando a razão dois normais afim, vemos que a condição afim necessária e suficiente para $\mathcal{CSS}$ apresentar uma cúspide é que:

$$\ddot{\gamma}_1(0) + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\frac{1}{3}} \ddot{\gamma}_2(0) = 0.$$

2.3.2 Inflexões e Tangentes Duplas

Inflexões em um segmento de curva

Suponha que exista uma inflexão no seguimento γ_1 da figura (2.4), ou seja $\kappa_1(0) = 0$, e que não tenhamos tangente dupla ($d \neq 0$). Pelo Teorema 2.10, o ponto (x, y) do CSS intersecta o segmento da curva γ_2 no ponto em que temos a tangente paralela e a tangente inflexional do segmento γ_1 , que corresponde ao ponto

$$(x, y) = \left(\frac{c\kappa_2(0)}{\kappa_2(0)}, \frac{d\kappa_2(0)}{\kappa_2(0)} \right) = (c, d).$$

Além disso, pelo Teorema 2.15, o CSS é diferenciável no ponto (c, d) se, somente se,

$$\kappa_1'(0)\kappa_2(0)^2 \neq 0,$$

ou seja: se, e somente se, o segmento inferior γ_1 tem uma inflexão ordinária e o segmento γ_2 superior não possui inflexão. Isso nos dá o seguinte teorema:

Teorema 2.18. *Sejam γ_1 e γ_2 segmentos de uma curva plana diferenciável γ e $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(U(t))$ pontos sobre os segmentos correspondentes. Suponhamos que*

- (i) *existe uma inflexão ordinária em um ponto $\gamma_1(t)$,*
- (ii) *não existe inflexão correspondente ao ponto $\gamma_2(U(t))$ para qual existe uma tangente paralela,*
- (iii) *$\gamma_2(U(t))$ não se encontra na tangente inflexional em $\gamma_1(t)$ (isto é $d \neq 0$).*

Então o CSS é diferenciável e passa por $\gamma_2(U(t))$.

Podemos perceber que próximo de $\gamma_2(U(t))$, o CSS encontra-se inteiramente em um dos semi planos determinado pela reta que une $\gamma_1(t)$ a $\gamma_2(U(t))$, uma vez que: o CSS é a envolvente da família de retas $\mathcal{F}$, ou seja o CSS tangencia a família de retas.

Vamos determinar em qual o semi-plano o CSS se encontra. Para isso, considere sistema de coordenada da figura (2.4), mas com o segmento γ_1 possui inflexão em $t = 0$, e o segmento γ_2 sem inflexão em $u = 0$.

Utilizando a expansão de $f(t)$ e $g(u)$ em séries de Taylor, em torno de $t_0 = 0$ e $u_0 = 0$ respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + f'(0)(t) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{3!}f'''(0) + \frac{t^4}{4!}f^{(4)}(0) + \dots \\ &= a_3t^3 + a_4t^4 + \dots, \text{ com } a_3 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(u) &= g(0) + g'(0)(u) + \frac{u^2}{2}g''(0) + \frac{u^3}{3!}g'''(0) + \dots \\ &= b_2u^2 + b_3u^3 + \dots, \text{ com } b_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Considere a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma parametrização do CSS, que suponhamos parametrizada pelo comprimento de arco. A equação da reta que tangencia o CSS no ponto (c, d) é o subconjunto

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - \alpha(0), N_\alpha(0) \rangle = 0\},$$

com $N_\alpha(0) = (d, -c)$ é o vetor ortogonal a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$, (c, d) . Esta reta divide o espaço $\mathbb{R}^2$ em dois semi-planos abertos:

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : (X - \alpha(0)) \cdot N_\alpha(0) > 0\} \quad \text{e} \quad \{X \in \mathbb{R}^2 : (X - \alpha(0)) \cdot N_\alpha(0) < 0\}$$

Usando o desenvolvimento de Taylor localmente em s_0 na curva α temos:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \alpha'(s_0)(s - s_0) + \alpha''(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2} + R(s),$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_0} R(s)/(s - s_0)^2 = 0$. Portanto localmente em s_0 , temos

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot N_\alpha(s_0) &= \left[\alpha'(s_0)(s - s_0) + \alpha''(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2} \right] N_\alpha(s_0) \\ &= \alpha''(s_0)N_\alpha(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2} = \kappa_\alpha(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Utilizando as coordenadas da envolvente (2.4) e calculando a curvatura do CSS, encontramos que $\kappa_\alpha = 2a_3/b_2$. Portanto, o CSS se encontra no semi-plano positivo se $a_3/b_2 > 0$ e no semi-plano negativo se $a_3/b_2 < 0$. A figura 2.7 dá uma ilustração esquemática dos resultados, o qual o CSS é a linha pontilhada.

Tangentes Duplas

Agora vamos considerar a existência de uma tangente dupla na curva plana γ , como mostra a figura 2.8. Considere os seguimentos de curvas dados por

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (-c + t, a_2t^2 + a_3t^3 + \dots) \\ \gamma_2(u) &= (c + u, b_2u^2 + b_3u^3 + \dots). \end{aligned}$$

Assumimos que pelo menos um a_2 , $b_2 \neq 0$ e que $c \neq 0$.

Pelo Teorema 2.15, sabemos que o CSS é não regular em uma tangente dupla, e podemos observar que o CSS sempre inflexiona na tangente dupla, uma vez que a curvatura do CSS é zero quando $t = 0$ como é mostrado abaixo.

Como CSS é a envolvente da família de retas $\mathcal{F}$, o vetor tangente ao CSS é paralelo ao vetor $\overrightarrow{\gamma_1(0)\gamma_2(0)}$, e o vetor ortogonal a reta $\mathcal{F}$ é paralelo ao vetor normal a CSS em $t = 0$, isto é

$$\begin{aligned} T_{CSS}(0) &= H(0)\overrightarrow{\gamma_1(0)\gamma_2(0)} = H(0)(-2c, 0) \\ N_{CSS}(0) &= J(0)N_{\gamma_1\gamma_2} = J(0)(0, -2c) \\ T'_{CSS}(0) &= H'(0)(-2c, 0) + H(0)(1 - U'(0), 0), \end{aligned}$$

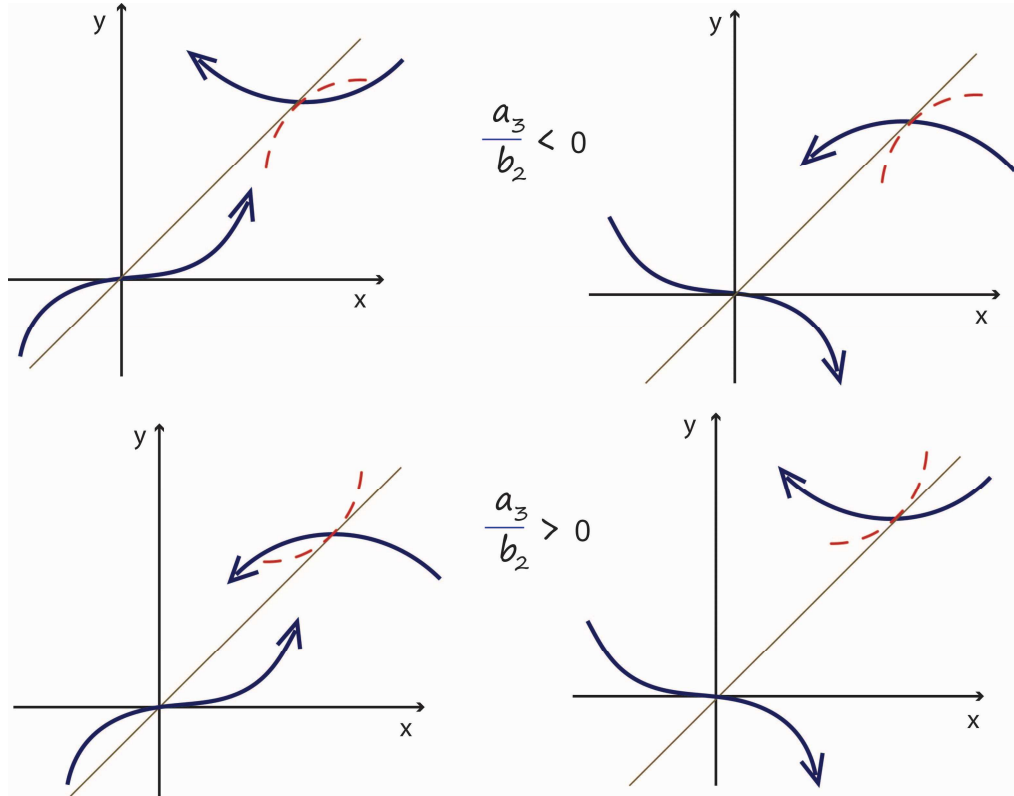


Figura 2.7: Posição do CSS

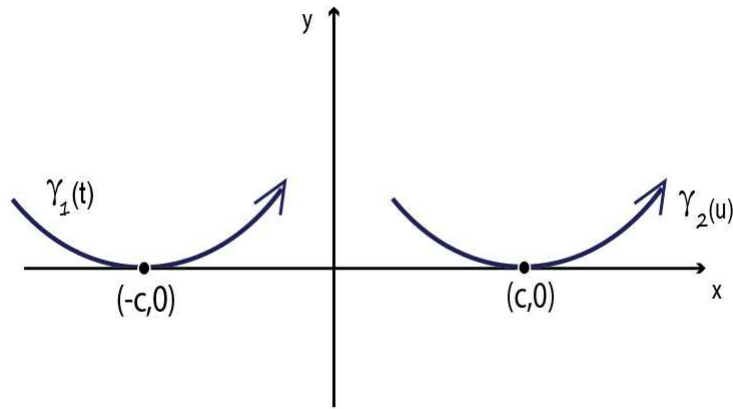


Figura 2.8: Tangente dupla

com T_{CSS} , N_{CSS} , o vetor tangente e o vetor normal do CSS. Logo, a curvatura do CSS em $t = 0$ é

$$\begin{aligned}
 \kappa_{CSS}(0) &= T'_{CSS}(0) \cdot N_{\gamma_1\gamma_2}(0) \\
 &= H(0)J(0) (1 - U'(0), 0) \cdot (0, -2c) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Podemos determinar a posição em que correm as inflexões ao longo da tangente dupla, utilizando o corolário (2.12). A equação da reta l_1 que passa pelos pontos $(-c, 0)$, $(c, 0)$, é dada por:

$$y = 0.$$

O centro de curvatura de ambos os segmentos são respectivamente:

$$\begin{aligned} e_1(0) &= \gamma_1(0) + \frac{1}{\kappa_1(0)}N_1(0) = \left(-c, \frac{1}{\kappa_1(0)}\right), \\ e_2(0) &= \gamma_2(0) + \frac{1}{\kappa_2(0)}N_2(0) = \left(c, \frac{1}{\kappa_2(0)}\right). \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta l_2 e dada por:

$$(x + c) \left(\frac{1}{\kappa_1(0)} - \frac{1}{\kappa_2(0)} \right) + 2cy = 0$$

Fazendo a interseção das retas l_1 e l_2 , obtemos:

$$x = c \frac{\kappa_1(0) + \kappa_2(0)}{\kappa_2(0) - \kappa_1(0)} \quad (2.10)$$

Portanto, pela equação (2.10), se

- (i) $\kappa_1(0) = -\kappa_2(0)$, então o ponto de inflexão do CSS está na origem.
- (ii) $\kappa_1(0)\kappa_2(0) > 0$, temos duas situações:
 - $0 < \kappa_1(0) < \kappa_2(0)$ ou $\kappa_1(0) < \kappa_2(0) < 0$, o ponto de inflexão do CSS se encontra na tangente dupla em $x > c$.
 - $0 < \kappa_2(0) < \kappa_1(0)$ ou $\kappa_1(0) < \kappa_2(0) < 0$, o ponto de inflexão do CSS se encontra na tangente dupla em $x < -c$.
- (iii) $\kappa_1(0)\kappa_2(0) < 0$
 - $\kappa_1(0) < 0 < \kappa_2(0)$ ou $\kappa_2(0) < 0 < \kappa_1(0)$, com $|\kappa_1(0)| < |\kappa_2(0)|$, o ponto de inflexão do CSS se encontra em $0 < x < c$. Mas se $|\kappa_2(0)| < |\kappa_1(0)|$ o ponto do conjunto inflexiona em $-c < x < 0$.

A figura 2.9, ilustra o resultado acima, sendo que κ_i denota a curvatura correspondente ao segmento de curva γ_i calculados em $t = u = 0$.

Obsevação 2.19. Se $\kappa_1 = \kappa_2$ o ponto de inflexão do CSS está no infinito ao longo da tangente dupla.

O próximo teorema afirma um resultado global relativo sobre a estrutura do conjunto de simetria central para uma curva plana. Ele nos diz que o número de inflexão no CSS de uma curva plana γ é igual ao número de tangentes duplas de curva γ .

Teorema 2.20. O conjunto de simetria central tem apenas uma inflexão em uma tangente dupla da curva.

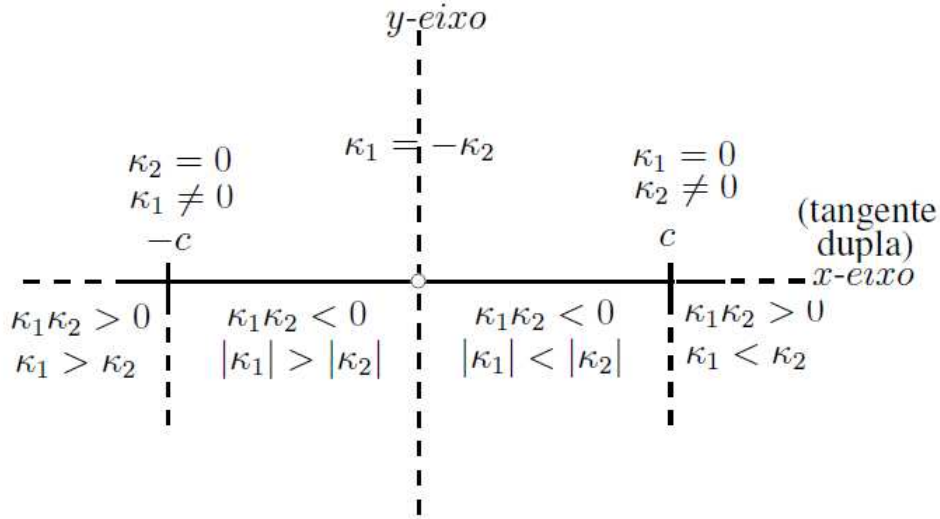


Figura 2.9: Posição do CSS ao longo da tangente dupla.

Demonstração.

Considere o dual do CSS sendo o conjunto das tangentes ao CSS que é definido como o conjunto original das cordas que unem os pontos de contatos das tangentes paralelas. Vamos considerar cada corda como um ponto no plano dual, e o lugar geométrico desses pontos é então o dual-CSS.

Agora sabemos que as inflexões no CSS correspondem as cúspides no dual-CSS, e portanto podemos usar o dual para encontrar inflexões no CSS encontrando as condições sob as quais o dual tem uma cúspide.

O dual-CSS é não diferenciável se, e somente, se $d = 0$, que corresponde no caso da reta bitangente. Assim as inflexões ocorrem no CSS apenas na tangente dupla, caso em que sabemos que há sempre uma e somente uma inflexão. ■

Inflexão na curva plana

Consideremos agora, a estrutura local do CSS em uma outra situação que podemos encontrar numa curva plana, ou se um inflexão na curva como é mostrado na figura 2.10, onde temos uma inflexão ordinária na origem e iremos considerar a seguinte parametrização da curva por

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots, \quad a_3 \neq 0$$

Os pares de pontos de contatos das tangentes paralelas, estão em lados opostos do ponto de inflexão, e por conseguinte contribui para a inflexão do CSS.

O ponto limitante do CSS como os pares de pontos das tangentes paralelas que aproximam da inflexão é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.21. ([14]) *Em um segmento de curva tendo inflexão ordinária o ponto limite do CSS está na inflexão, e o CSS é tangente a curva.*

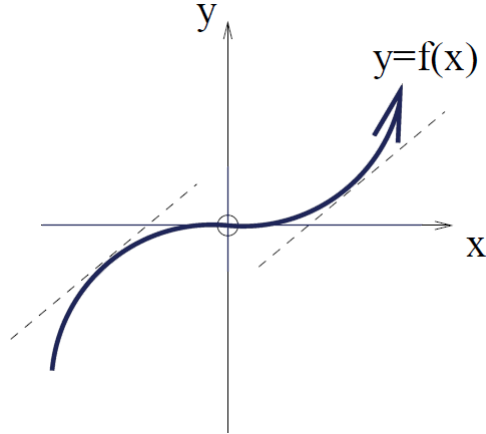


Figura 2.10: Inflexão em uma curva plana

A figura 2.11 ilustra a direção em que o CSS aproxima da inflexão.

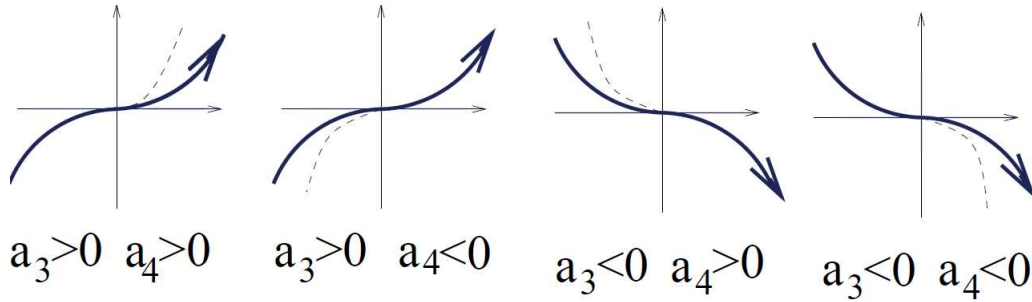


Figura 2.11: Inflexão da curva plana

Obsevação 2.22. *Existe uma bifurcação do CSS quando $a_4 = 0$ (mesmo quando temos $a_3 \neq 0$): neste caso o CSS é ainda uma parábola semi-cúbica, com ponto de extremidade na inflexão e tangente à curva. Porém a direção do CSS a medida que se aproxima da inflexão depende agora dos sinais de a_3 e a_6 . Os diagramas locais são os mesmos apresentados na figura (2.11), substituindo a_4 por a_6 .*

O seguinte resultado é outro exemplo da utilização da definição da envolvente para deduzir o resultado global a respeito da estrutura do CSS de uma oval:

Teorema 2.23. *O número de cúspides do CSS de uma curva oval é ímpar e ≥ 3*

Demonstração.

Seja Γ uma curva plana oval. Como a oval não possui tangentes duplas, o CSS de Γ é uma curva fechada contínua. Assim, pelo teorema (2.20), o CSS de Γ não possui inflexões.

Consideremos as cordas que unem os pares de pontos de Γ que tem tangentes paralelas, que por definição, estas cordas são tangentes ao CSS.

O CSS de uma oval tem sempre número de rotação $1/2$: assim há um número ímpar de cúspides no CSS de uma oval. Como não existe uma curva fechada contínua de número de rotação $1/2$ contendo apenas uma única cúspide e nenhuma inflexão, então o número ímpar de cúspides no CSS de uma oval deve ser pelo menos 3. ■

A figura (2.12) mostra um exemplo que resume todos os fenômenos que ocorrem no CSS até o momento.

Iniciemos com o círculo, com centro c ; em seguida deformamos este círculo numa curva não centralmente simétrica com curvatura não nula, e oval; deformamos mais até que esta curva apresente curvatura zero, e que o CSS toca a curva no ponto correspondente a tangente paralela; procedendo com mais deformações chegamos ao resultado da curva final, tendo duas inflexões e uma tangente dupla: note que o CSS flexiona a tangente dupla, com pontos finais na inflexão da curva, e tende para o infinito ao longo da assintótica (mostrado pontilhado).

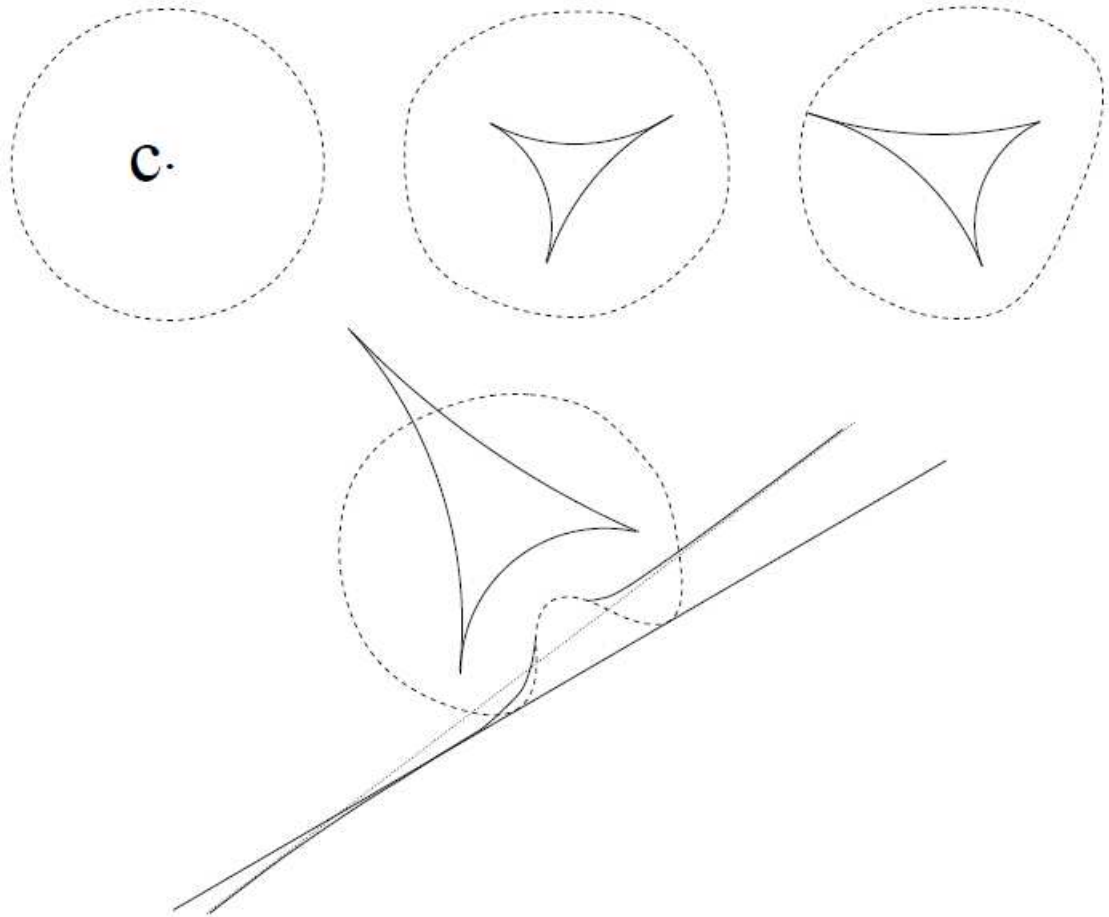


Figura 2.12: Deformações da curva

2.4 Transições no CSS

Vamos analisar as possíveis transições que podem ocorrer no CSS de curvas planas, em que é deformado por meio de uma família a 1-parâmetro.

Utilizando o mesmo sistema de coordenadas ilustrado na figura 2.4, e com referência a Seção 2.3, estamos procurando condições para $\mathcal{F}$ (ver (2.2)) ter singularidade $A_{\geq 3}$ no seu nível nulo. Assim obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.24. *Seja*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\longmapsto F(x, y, t), \end{aligned}$$

definida por:

$$\mathcal{F}(t, x, y) = (x - t)(d + g(U(t)) - f(t)) - (y - f(t))(c - U(t) - t),$$

com f, g funções diferenciáveis, tais que: $f(0) = f'(0) = 0$ e $g(0) = g'(0) = 0$. A aplicação $\mathcal{F}$ possui um ponto $A_{\geq 3}$ no seu nível zero nas seguintes situações:

- (i)
 - $(c, d) = (0, 0)$: ambos os segmentos de curvas passam pela origem e são tangentes neste ponto.
 - $\kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa'_2 = d = 0$: a condição da cúspide é satisfeita ao longo da tangente dupla.
 - $\kappa_1 = d = 0$: temos uma tangente dupla onde existe uma inflexão sobre um dos segmentos de curva.

(ii) $d \neq 0$ e ambos

- $\kappa'_1 \kappa_2^2 = \kappa_1^2 \kappa'_2$
- $\kappa''_1 \kappa_2^3 = \kappa_1^3 \kappa''_2$

ocorrem simultaneamente.

Demonstração.

Das condições $A_{\geq 3}$, temos:

$$\mathcal{F}(x, y, 0) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}(x, y, 0) = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t^3}(x, y, 0) = 0, \quad (2.11)$$

que é equivalente à

$$\begin{aligned} xd - yc &= 0 \\ -d + y(U' + 1) &= 0 \\ x(g''(U')^2 - f'') + f''c + yU''' &= 0 \\ x(g'''(U')^3 + 3g''U'U'' - f''') - y.U''' + f'''c - 3U'(g''U' + f'') &= 0 \end{aligned}$$

- (i) Agora suponhamos a existência de tangente dupla, ou seja $d = 0$. Assim, $y = 0$ e as equações (2.11) se tornam

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x(g''(U')^2 - f'') + f''c &= 0 \\ x(g'''(U')^3 + 3g''U'U'' - f''') - f'''c - 3U'(g''U' + f'') &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de x e as derivas das funções f e g , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\kappa'_2\kappa_1^3}{(\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_2^2} - 3c\frac{\kappa_2\kappa_1U''}{\kappa_1 + \kappa_2} - c\frac{\kappa_2\kappa'_1}{\kappa_1 + \kappa_2} + c\kappa'_1 \\ &= c\kappa_1(-\kappa'_2\kappa_1^2 + \kappa_2^2\kappa'_1 - 3(\kappa'_1\kappa_2^2 - \kappa'_2\kappa_1^2)) \\ &= c\kappa_1(\kappa_1^2\kappa'_1 - \kappa'_2\kappa_1^2). \end{aligned}$$

Portanto:

$$c = 0 \quad \text{ou} \quad \kappa_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \kappa_2^2\kappa'_1 - \kappa'_2\kappa_1^2 = 0$$

- (ii) Primeiro suponhamos que não temos tangente dupla, ou seja $d \neq 0$. Pelas três primeiras equações (2.11), encontramos

$$U''(0) = \frac{\kappa'_1(0)\kappa_2^2(0) - \kappa'_2(0)\kappa_1^2(0)}{\kappa_2^3(0)} = 0.$$

Assim a quarta equação se torna:

$$x(g'''(U')^3 - f''') - yU''' + f'''c - 3U'(g''U' + f'') = 0. \quad (2.12)$$

Substituindo

$$\begin{aligned} x &= c\frac{\kappa_2(0)}{\kappa_1(0) + \kappa_2(0)}, \quad U'(0) = \frac{\kappa_1(0)}{\kappa_2(0)}, \quad g''(0) = -\kappa_2(0) \\ f''(0) &= \kappa_1(0), \quad g'''(0) = -\kappa'_2(0) \quad \text{e} \quad f'''(0) = \kappa_1(0), \end{aligned}$$

na equação (2.12), obtemos

$$c\kappa_1\frac{\kappa_2^2\kappa'_1 - \kappa'_2\kappa_1^2}{\kappa_1\kappa_2^2 + \kappa_2^3} - yU'''(0) = 0$$

Pelo Teorema 2.15, $\kappa_2^2\kappa'_1 - \kappa'_2\kappa_1^2 = 0$, e portanto:

$$yU'''(0) = 0.$$

Como $y \neq 0$, temos $U''' = 0$. Assim

$$0 = U'''(0) = \frac{\kappa_1''\kappa_2^3 - \kappa_2''\kappa_1^3}{\kappa_2^4} \implies \kappa_1''\kappa_2^3 - \kappa_2''\kappa_1^3 = 0$$

Portanto:

$$d \neq 0 \quad \text{e} \quad \kappa_1'\kappa_2^2 = \kappa_2'\kappa_1^2, \quad \kappa_1''\kappa_2^3 = \kappa_2''\kappa_1^3$$

ocorrem simultaneamente.



Os três primeiros casos são situações simples em que nós encontramos algum grau maior de degeneração de $\mathcal{F}$. A última situação é o que nos interessa mais: esta é a condição para o ponto da rabo de andorinha aparecer no nosso conjunto de simetria. Esperamos observar a rabo da andorinha na transição na família a 1-parâmetro do CSS.

Obsevação 2.25. *Podemos reescrever a condição do rabo da andorinha em termos do raio de curvatura dos segmentos da curva, da seguinte forma*

$$\rho'_1 = \rho'_2 \quad \rho_1 \rho''_1 = \rho_2 \rho''_2,$$

onde $\rho_i = 1/\kappa_i$ é o raio de curvatura do segmentos de curva γ_i .

Parametrizando ambas as curvas pelo mesmo parâmetro t , obtemos

$$\rho'_1 = \rho'_2 \quad \Rightarrow \quad \kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa'_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) = 0$$

$$\rho_1 \rho''_1 = \rho_2 \rho''_2 \quad \Rightarrow \quad \kappa''_1 \kappa_2^3 - \kappa_1^3 \kappa''_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) = 0.$$

Logo um ponto do rabo de andorinha no CSS quando se tem um ponto crítico degenerado da função raio de curvatura κ_2/κ_1 .

A figura 2.13, apresenta as transições do rabo de andorinha que ocorrem no CSS.

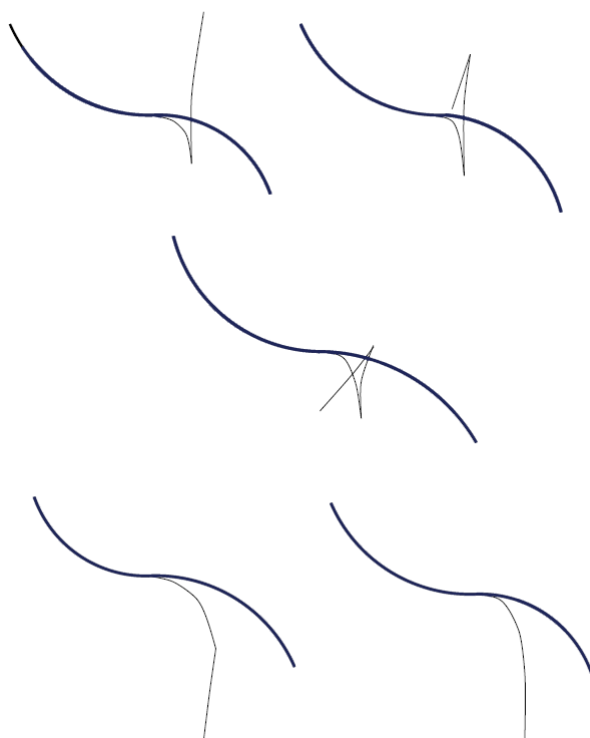


Figura 2.13: Representação esquemática da transição do rabo de andorinha

CAPÍTULO 3

CONJUNTOS DE SIMETRIA DA DISTÂNCIA AFIM- $\mathcal{ADSS}$

Neste capítulo iremos apresentar um conjunto de simetria invariante afim chamado de Conjunto de Simetria da Distância Afim- $\mathcal{ADSS}$ para curvas planas fechadas convexas sobre duas abordagens diferentes, a primeira baseia-se em distâncias invariantes afim e a segunda em cônicas bitangentes afim. Veremos também que se o $\mathcal{ADSS}$ é uma reta, não implicará diretamente que a curva que gera o $\mathcal{ADSS}$ seja simétrica afim.

As principais referências para este capítulo são [13] e [16].

As figuras deste capítulo foram gentilmente cedidas por Peter Giblin.

3.1 Conjunto de Simetria da Distância Afim

Para obtermos uma definição análoga ao conjunto de simetria euclidiano, iremos considerar a família de funções distância afim (que foi definida em 1.3.5). Esta família de funções nos permitirá obter um conjunto de simetria que seja um invariante afim.

Definição 3.1. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana convexa, o **conjunto de simetria da distância afim** indicado por $\mathcal{ADSS}$, do inglês *affine distance symmetry set*, de $\gamma(s)$ é o fecho do conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão em pelo menos dois normais afins e equidistantes afim dos pontos correspondentes da curva.*

A definição acima, diz que: $\mathbf{X}$ pertence ao $\mathcal{ADSS}$ se, e somente se, existem dois pontos diferentes s_1, s_2 tais que

$$d(\mathbf{X}, s_1) = d(\mathbf{X}, s_2) \quad \text{e} \quad d_s(\mathbf{X}, s_1) = d_s(\mathbf{X}, s_2) = 0, \quad (3.1)$$

ou $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ é um limite de tais pontos.

Obsevação 3.2.

A equação (3.1), nos diz que a função distância afim, tem **extremos locais** em dois pontos de γ .

A definição 3.1 é análoga ao caso euclidiano, em que função distância-ao-quadrado deve ter extremos locais em dois pontos de γ , ou seja $\mathbf{X}$ encontra-se em dois **normais euclidianos**, e que as **distâncias euclidianas** de $\mathbf{X}$ destes dois pontos da curva **são iguais**. Isto significa, que existe um **círculo tangente a γ nos dois pontos**.

3.1.1 Propriedades do $\mathcal{ADSS}$

Proposição 3.3. *Seja $\mathbf{X}(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um segmento do $\mathcal{ADSS}$ e $s_1(v), s_2(v)$ pontos correspondentes em uma curva plana γ diferenciável, sendo s o parâmetro comprimento de arco afim em γ . Temos*

(1) *O tangente ao segmento $\mathbf{X}(v)$ é paralelo a $\gamma'(s_1(v)) - \gamma'(s_2(v))$.*

(2) *O $\mathcal{ADSS}$ tem um ponto de inflexão se*

$$(1 - [\gamma_2(s_2), \gamma''(s_1)])^2 (1 - \mu_1 d(\mathbf{X})) = (1 - [\gamma_2(s_1), \gamma''(s_2)])^2 (1 - \mu_2 d(\mathbf{X})),$$

onde $d(\mathbf{X})$ é a distância afim e μ_1, μ_2 são curvaturas afim.

(3) *O tangente ao $\mathcal{ADSS}$ e dois tangentes a γ em pontos correspondentes s_1 e s_2 , intersectam em um ponto.*

Demonstração.

(1) Sejam s_1 e s_2 pontos correspondentes em γ para $\mathbf{X}(v) \in \mathcal{ADSS}$, e v o comprimento de arco euclidiano. Por definição do conjunto de simetria, temos

$$[\mathbf{X}(v) - \gamma(s_1), \gamma'(s_1)] = [\mathbf{X}(v) - \gamma(s_2), \gamma'(s_2)] \quad \text{e} \quad (3.2)$$

$$[\mathbf{X}(v) - \gamma(s_1), \gamma''(s_1)] = [\mathbf{X}(v) - \gamma(s_1), \gamma''(s_1)] = 0 \quad (3.3)$$

Definindo $h(s) := ds/dv$ e derivando a (3.2) com respeito ao parâmetro v , obtemos:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{X}_v(v) - h(s_1)\gamma'(s_1), \gamma'(s_1)] + [\mathbf{X}(v) - \gamma(s_1), h(s_1)\gamma''(s_1)] = \\ & [\mathbf{X}_v(v) - h(s_2)\gamma'(s_2), \gamma'(s_2)] + [\mathbf{X}(v) - \gamma(s_2), h(s_2)\gamma''(s_1)] \end{aligned}$$

Pela equação (3.3), a igualdade acima se torna:

$$[\mathbf{X}_v(v), \gamma'(s_1)] = [\mathbf{X}_v(v), \gamma'(s_2)] \Rightarrow [\mathbf{X}_v(v), \gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)] = 0$$

Portanto, existe uma função real $f(v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathbf{X}_v(v) = f(v) (\gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)).$$

- (2) Uma condição para um ponto de inflexão no $\mathcal{ADSS}$ é que a curvatura euclidiana $\kappa_{\mathbf{X}}(v) = [\mathbf{X}_v(v), \mathbf{X}_{vv}(v)] = 0$.

Derivando o vetor $\mathbf{X}_v(v)$, obtemos:

$$X_{vv}(v) = f_v(v) (\gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)) + f(v) (h(s_1)\gamma''(s_1) - h(s_2)\gamma''(s_2)).$$

Segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathbf{X}_v(v), \mathbf{X}_{vv}(v)] \\ &= h(s_1) - h(s_2) [\gamma'(s_1), \gamma''(s_2)] - h(s_1) [\gamma'(s_2), \gamma''(s_1)] + h(s_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vamos calcular a função de h , como $\mathbf{X}(v) \in \mathcal{ADSS}$, então $d_s(\mathbf{X}, s_1) = d_s(\mathbf{X}, s_2) = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}(v) - \gamma(s_1(v)), \gamma''(s_1)] &= 0 \\ [\mathbf{X}(v) - \gamma(s_1(v)), \gamma''(s_1)] &= 0 \end{aligned}$$

Derivando ambas as equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} h(s_1) - [\mathbf{X}_v(v), \gamma''(s_1)] + h(s_1) [\gamma(s_1) - \mathbf{X}(v), \gamma'''(s_1)] &= 0 \\ h(s_2) - [\mathbf{X}_v(v), \gamma''(s_2)] + h(s_2) [\gamma(s_2) - \mathbf{X}(v), \gamma'''(s_2)] &= 0. \end{aligned}$$

Como $\gamma(s_i) - \mathbf{X}(v) \parallel \gamma''(s_i)$, para $i = 1, 2$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dv} (1 - d\mu_1) &= [\mathbf{X}_v(v), \gamma''(s_1)] \\ \frac{ds_2}{dv} (1 - d\mu_2) &= [\mathbf{X}_v(v), \gamma''(s_2)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $d = [\gamma(s_i) - \mathbf{X}, \gamma'(s_i)]$ é a distância afim e μ_i curvatura afim de $\gamma(s_i)$, para $i = 1, 2$. Substituindo ambas equações (3.6) na equação (3.4), obtemos:

$$(1 - [\gamma_2(s_2), \gamma''(s_1)])^2 (1 - \mu_1 d(\mathbf{X})) = (1 - [\gamma_2(s_1), \gamma''(s_2)])^2 (1 - \mu_2 d(\mathbf{X})),$$

- (3) Vamos, mostrar que o vetor $\mathbf{X}_v(v)$ e dois vetores tangentes a curva γ em pontos correspondentes se intersectam em um ponto. Para isso, assumimos que $\mathbf{X}_v(v)$ seja o *eixo x*. Vamos denotar o vetor $\mathbf{X}_v(v)$ pelo par

$$(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) \in \gamma(s).$$

Pelo item (2), $\mathbf{X}_v(v)$ é paralelo ao vetor $\gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)$, assim:

$$(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) = (1, 0)^T = f(v) (\gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)).$$

Logo;

$$\gamma'(s_2) = \gamma'(s_1) - \left(\frac{1}{f(v)}, 0 \right)^T. \quad (3.7)$$

Escrevendo a igualdade acima, em coordenadas explícitas do ponto em $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$, ou seja

$$(X'(s_2), Y'(s_2)) = (X'(s_1), Y'(s_1)) - \left(\frac{1}{f(v)}, 0 \right)^T,$$

obtemos:

$$\Rightarrow \begin{cases} X'(s_2) &= X'(s_1) - \frac{1}{f(v)} \\ Y'(s_2) &= Y'(s_1) \end{cases}$$

As interseções do *eixo* x com $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ são dados por:

$$\frac{X(s_1)Y'(s_1) - Y(s_1)X'(s_1)}{Y'(s_1)} = \frac{[\gamma(s_1), \gamma'(s_1)]}{Y'(s_1)},$$

$$\frac{X(s_2)Y'(s_2) - Y(s_2)X'(s_2)}{Y'(s_2)} = \frac{[\gamma(s_2), \gamma'(s_2)]}{Y'(s_2)}.$$

Vamos provar que ambas as interseções acima são as mesmas:

$$\frac{[\gamma(s_1), \gamma'(s_1)]}{Y'(s_1)} = \frac{[\gamma(s_2), \gamma'(s_2)]}{Y'(s_2)}.$$

Como $\gamma'(s_2) = \gamma'(s_1) - (1/f(v), 0)^T$ e $Y'(s_2) = Y'(s_1)$, temos:

$$\frac{[\gamma(s_1), \gamma'(s_1)]}{Y'(s_1)} = \frac{[\gamma(s_2), \gamma'(s_1) - (1/f(v), 0)^T]}{Y'(s_1)},$$

que é equivalente a provarmos que:

$$[\gamma(s_1), \gamma'(s_1)] = [\gamma(s_2), \gamma'(s_1)] - [\gamma(s_2), (1/f(v), 0)^T].$$

Temos que $\gamma(s_1)$ está em função de $\gamma(s_2)$. Com isso, usamos o fato que estes pontos definem certamente um ponto no $\mathcal{ADSS}$. Observe que, o ponto no conjunto de simetria, tem coordenadas $\mathbf{X} = (p, 0)^T$. Assim, a condição na definição do $\mathcal{ADSS}$, que corresponde a distância afim iguais, e usando a equação (3.7), obtemos:

$$[\mathbf{X} - \gamma(s_1), \gamma'(s_1)] = [\mathbf{X} - \gamma(s_2), \gamma'(s_1) - (1/f(v), 0)^T].$$

Simplificando esta igualdade, sabendo que

$$\mathbf{X} = (p, 0)^T \quad \text{e} \quad \left[(p, 0)^T, \left(\frac{1}{f(v)}, 0 \right) \right] = 0 \quad (3.8)$$

obtemos:

$$[\gamma(s_1), \gamma'(s_1)] = [\gamma(s_2), \gamma'(s_1)] - [\gamma(s_2), (1/f(v), 0)^T]$$

Portanto, o tangente ao $\mathcal{ADSS}$ e os dois tangentes a curva oval se intersectam em um ponto. ■

Proposição 3.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva oval parametrizada pelo comprimento de arco afim. Uma condição necessária e suficiente para valores de parâmetros s_1, s_2 distintos de um ponto no $\mathcal{ADSS}$ é*

$$[\gamma(s_1) - \gamma(s_2), \gamma''(s_1) - \gamma''(s_2)] = 0. \quad (3.9)$$

Demonstração.

Se os parâmetros s_1 e s_2 contribuem para um ponto $X \in \mathcal{ADSS}$, então

$$d(X, s_1) = d(X, s_2) \quad \text{e} \quad d_s(X, s_1) = d_s(X, s_2) = 0.$$

Da segunda igualdade acima, obtemos:

$$X - \gamma(s_1) = \lambda_1 \gamma''(s_1) \quad \text{e} \quad X - \gamma(s_2) = \lambda_2 \gamma''(s_2), \quad (3.10)$$

para números reais λ_1 e λ_2 . Das distâncias iguais, temos

$$[X - \gamma(s_1), \gamma'(s_1)] = [X - \gamma(s_2), \gamma'(s_2)].$$

Substituindo ambas as equações (3.10), vemos

$$[\lambda_1 \gamma''(s_1), \gamma'(s_1)] = [\lambda_2 \gamma''(s_2), \gamma'(s_2)] \implies \lambda_1 = \lambda_2.$$

Portanto, a partir das equações (3.10), vemos que:

$$\begin{aligned} X - \gamma(s_1) + \lambda_1 \gamma''(s_1) &= X - \gamma(s_2) + \lambda_1 \gamma''(s_2) \\ \implies \gamma(s_1) - \gamma(s_2) &= \lambda (\gamma''(s_1) - \gamma''(s_2)) \\ \implies [\gamma(s_1) - \gamma(s_2), \gamma''(s_1) - \gamma''(s_2)] &= 0. \end{aligned}$$

■

A proposição acima, nos proporciona desenhar um subconjunto do $\mathcal{ADSS}$, chamado de *pre- $\mathcal{ADSS}$* , que é o conjunto de pontos no parâmetro (s_1, s_2) -espaço. O resultado da proposição também nos proporciona extrair um invariante afim equivalente do lugar geométrico dos pontos médios, o leitor interessado pode encontrar mais detalhes em [19], onde o ponto médio da corda unindo $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$ é tomado preferencialmente no ponto **X**.

Obsevação 3.5. *Podemos reescrever a equação (3.9) em termos da parametrização da curva γ , como segue.*

Seja $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ uma parametrização arbitrária de γ . Pela segunda equação da Proposição 1.54, temos

$$\gamma'' = \nu^{-\frac{2}{3}} \ddot{\gamma} - \frac{1}{3} \dot{\nu} \nu^{-\frac{5}{3}} \dot{\gamma}, \quad \nu(t) = \dot{X}(t) \ddot{Y}(t) - \ddot{X}(t) \dot{Y}(t).$$

A condição do $\mathcal{AESS}$ se torna:

$$\left[\gamma_1 - \gamma_2, \nu_1^{-\frac{2}{3}} \ddot{\gamma}_1 - \frac{1}{3} \dot{\nu}_1 \nu_1^{-\frac{5}{3}} \dot{\gamma}_1 - \nu_2^{-\frac{2}{3}} \ddot{\gamma}_2 + \frac{1}{3} \dot{\nu}_2 \nu_2^{-\frac{5}{3}} \dot{\gamma}_2 \right] = 0,$$

onde os índices denotam os parâmetros correspondentes a s_1 e a s_2 .

As Figuras 3.1 e 3.2 mostram exemplos do $\mathcal{ADSS}$ e outras características invariantes afim da curva.

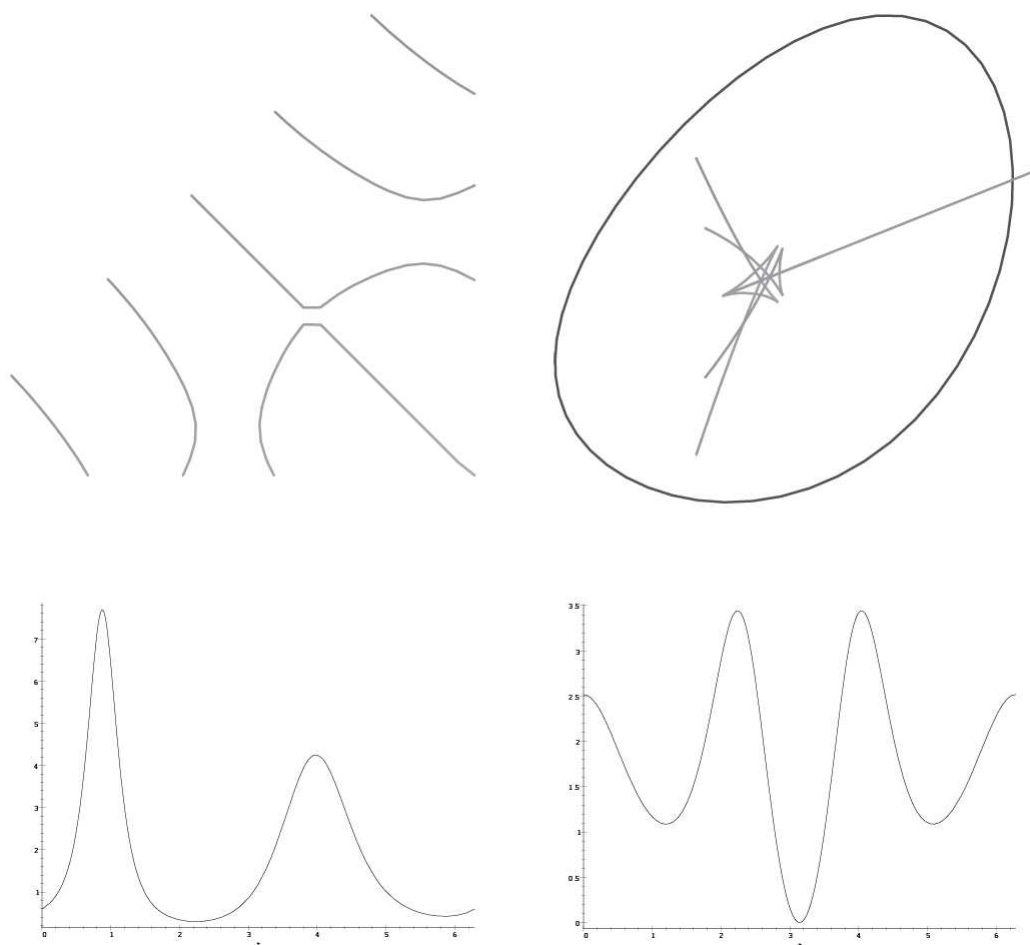


Figura 3.1: A primeira linha a esquerda mostra o pre- $\mathcal{ADSS}$ e a direita mostra a oval juntamente com o $\mathcal{ADSS}$. A segunda linha mostra a curvatura euclidiana (esquerda) e a curvatura afim (direita)

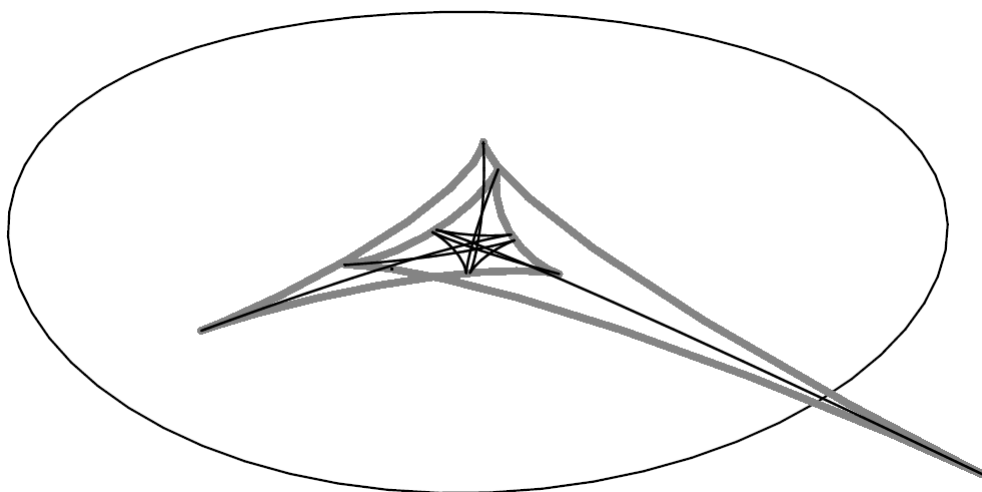


Figura 3.2: A evoluta afim (cinza) e o conjunto de simetria da distância afim.

Teorema 3.6. *Seja $\gamma(s)$ uma curva plana fechada estritamente convexa. Para cada ponto não-sextático $\gamma(s_0)$, existe um ponto $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ e pelo menos um segundo*

ponto $\gamma(s_1)$ tal que $\mathbf{X}$ pertence ao $\mathcal{ADSS}$. Excepcionalmente o ponto $\mathbf{X}$ está no infinito, quando os normais afim que passam por $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ são paralelos.

Demonstração.

Dado o sistema de coordenadas (x, y) , podemos assumir que

$$\gamma(s_0) = (0, 0), \quad \gamma'(s_0) = (\alpha, 0) \quad \text{e} \quad \gamma''(s_0) = (0, \beta),$$

sendo α e β números reais. A orientação dos vetores tangente afim e normal afim em s_0 pode ser escolhida, uma vez que é sempre possível encontrar uma transformação afim que transforma vetores linearmente independentes em vetores ortogonais e uma isometria que leve o ponto da origem com vetor tangente paralelo ao eixo x .

Pela Observação 1.55, vemos que

$$\gamma'(s_0) = (\alpha, 0) = (\kappa^{-\frac{1}{3}}, 0),$$

sendo κ é a curvatura euclidiana em $\gamma(s_0)$.

Desde que a distância afim $d(\mathbf{X}, s_0)$ é mínima e o ponto $\mathbf{X}$ está no vetor normal afim $\gamma''(s_0)$, então

$$\mathbf{X} = (0, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Para encontrarmos um segundo ponto $\gamma(s_1)$, que tenha a mesma distância afim de $\mathbf{X}$ para $\gamma(s_0)$, temos que mostrar que existe um s_1 tal que

$$\begin{cases} d(\mathbf{X}, s_0) &= d(\mathbf{X}, s_1) \\ d_s(\mathbf{X}, s_0) &= d_s(\mathbf{X}, s_1) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

A primeira condição é proveniente da distância afim ser igual enquanto o segundo vem do facto que $\mathbf{X}$ pertence aos vetores normais afim correspondentes em s_0 e s_1 .

Substituindo os valores de X , $\gamma(s_0)$, $\gamma(s_1)$, $\gamma'(s_0)$, $\gamma''(s_0)$, $\gamma(s_1)$, $\gamma'(s_1)$ e $\gamma''(s_1)$ nas equações 3.12, temos

$$\begin{cases} [(0, \lambda), (\kappa^{-\frac{1}{3}}, 0)] &= [(0, \lambda) - (x(s_1), y(s_1)), (x'(s_1), y'(s_1))], \\ [(0, \lambda), (x''(s_0), y''(s_0))] &= [(0, \lambda) - (x(s_1), y(s_1)), (x''(s_1), y''(s_1))]. \end{cases}$$

Calculando o determinante acima, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda \left(-\kappa(s_0)^{-\frac{1}{3}} + x'(s_1) \right) &= -x(s_1)y'(s_1) + x'(s_1)y(s_1) \\ x(s_1)y''(s_1) + x''(s_1)y(s_1) &= x''(s_1)\lambda \end{cases}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} 0 &= x(s_1)y''(s_1) - x''(s_1)y(s_1) - x(s_1)\kappa(s_0)^{\frac{1}{3}}[\gamma'(s_1), \gamma''(s_1)] \\ &= x(s_1)y''(s_1) - x''(s_1)y(s_1) - x(s_1)\kappa(s_0)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, uma condição necessária e suficiente para a existência do segundo ponto s_1 é

$$h(s) = x(s)y''(s) - x''(s)y(s) - x(s)\kappa^{\frac{1}{3}},$$

tendo um zero quando $s_1 \neq s_0$. Isto nos dá um ponto finito para $\mathbf{X}$, desde que os normais afim em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ não sejam paralelos, ou seja devemos ter $x''(s_1) \neq 0$. Caso os vetores normais afim sejam paralelos, o nosso conjunto de simetria da distância afim "vai para o infinito".

Escrevendo h , como

$$h(s) = [g(s), \gamma''(s)] - [\gamma(s), \vec{v}],$$

onde $\vec{v} = (0, \kappa^2(s_0))$, vemos que se $\gamma(s_0)$ não é um ponto sextático, então a função h tem um 0 de ordem 2 em $(0, 0)$, pois

$$\begin{aligned} h'(s_0) &= [\gamma'(s_0), \gamma''(s_0)] + [\gamma(s_0), \gamma'''(s_0)] - [\gamma'(s_0), \vec{v}] = 0 \\ h''(s_0) &= 2[\gamma'(s_0), \gamma'''(s_0)] + [\gamma(s_0), \gamma^{(4)}] - [\gamma''(s_0), \vec{v}] = 0, \end{aligned}$$

e desde que h é diferenciável e periódica, ela deve ter outro zero. ■

O resultado acima significa que (praticamente) todos os pontos da curva γ possuem um segundo ponto associado, de tal maneira que o par define um ponto no $\mathcal{ADSS}$. Os pontos sextáticos, vão definir as extremidades do $\mathcal{ADSS}$, que consequentemente se torna igual a s_1 , no limite como veremos na seção seguinte.

Obsevação 3.7. *Pode se reforçar o resultado do teorema (3.6) para mostrar que: se o ponto $\gamma(s_0)$ não é sextático, então existem pelo menos dois outros pontos $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ que geram pontos no $\mathcal{ADSS}$. Esse assunto não será abordado neste trabalho, o leitor interessado pode encontrar uma abordagem detalhada em [29].*

3.1.2 $\mathcal{ADSS}$ contendo uma reta

Definição 3.8.

- (i) Uma **reflexão afim** com eixo z é uma transformação afim de ordem 2, que deixa o eixo z fixo.
- (ii) Uma forma planar é **simétrica afim** sobre o eixo z , se existe uma reflexão afim com eixo z que aplica a forma planar em si mesma.

Obsevação 3.9. *Uma curva γ simétrica afim, é composta por dois arcos ligados por uma transformação afim, tal que*

$$|\mu_1| = |\mu_2|,$$

com μ_i é curvatura afim correspondentes aos arcos γ_i , para $i = 1, 2$.

No caso euclidiano, temos:

Se o conjunto de simetria contém uma reta, então a curva γ consiste em dois segmentos que são simétricos por uma reflexão por uma reta.

Se o $\mathcal{ADSS}$ contém uma reta, então a curva é simétrica afim?. Veremos que $\mathcal{ADSS}$ não possui esta característica equivalente ao conjunto de simetria (euclidiano). Considere a seguinte construção:

Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável sem pontos de inflexão e

$$\gamma_1(s) = (X(s), Y(s)) \quad \text{e} \quad \gamma_2(s) = (U(s), V(s))$$

parametrizações dos segmentos da curva γ que definem o $\mathcal{ADSS}$ como uma linha reta, que iremos considerar ser o *eixo x*.

Seja a reta normal de γ_1 intersectar o *eixo x* em $(a(s), 0)$ e a reta tangente intersectar o *eixo x* em $(b(s), 0)$. Vamos assumir que o segmento γ_1 está parametrizado pelo comprimento de arco afim, mas não podemos assumir que γ_2 também esteja parametrizado pelo comprimento de arco afim, pois não podemos garantir que o comprimento de arco afim é transferido de uma segmento para outro. Temos o seguinte:

- (i) Os tangentes dos segmentos $\gamma_1(s)$ e $\gamma_2(s)$ se encontram no *eixo x*, uma vez que este é tangente ao $\mathcal{ADSS}$ em cada ponto. Seja o ponto do *x-eixo*, onde eles se encontram em $(b(s), 0)$, tal que

$$b(s) = \frac{X(s)Y'(s) - X'(s)Y(s)}{Y'(s)} = \frac{U(s)V'(s) - U'(s)V(s)}{V'(s)} \quad (3.13)$$

- (ii) Pela Proposição 3.3, vemos que

$$X_v = f(v) \left((X'(s), Y'(s)) - \kappa^{\frac{1}{3}} (U'(s), V'(s)) \right),$$

onde $\kappa(s) = U'(s)V''(s) - U''(s)V'(s)$, lembrando que s é o comprimento de arco afim em γ_1 mas não necessariamente em γ_2 .

Esperamos que, ao variarmos o parâmetro s , induzindo uma orientação no sentido anti-horário de γ_1 , então a transformação afim irá induzir a orientação no sentido horário em γ_2 , isto é, que κ vai ser negativa).

- (iii) Os normais afim dos segmentos γ_1 e γ_2 se encontram no *eixo x* em digamos $(a(s), 0)$;
- (iv) A distância afim de $(a(s), 0)$ aos dois segmentos γ_1 e γ_2 são iguais.

Vamos utilizar os dois primeiros itens para deduzir as relações entre os segmentos $\gamma_1(s)$ e $\gamma_2(s)$. Desde que γ_1 está parametrizado pelo comprimento de arco afim, temos

$$X'(s)Y''(s) - X''(s)Y'(s) = 1 \quad \forall s.$$

Os itens acima mencionados podem ser reescritos na forma

$$\begin{cases} V'(s)^3 &= (U'(s)V''(s) - V'(s)U''(s)) f(s) \\ V'(s)g(s) &= U(s)V'(s) - U'(s)V(s), \end{cases} \quad (3.14)$$

sendo

$$f(s) = Y'(s)^3 \quad \text{e} \quad g(s) = \frac{X(s)Y'(s) - X'(s)Y(s)}{Y'(s)}. \quad (3.15)$$

Pela primeira equação de (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{U'(s)}{V'(s)} \right) &= -\frac{V'(s)}{f(s)} \\ \Rightarrow \quad U'(s) &= -V'(s) \int \frac{V'(s)}{f(s)} ds + c_1 V'(s), \end{aligned}$$

com c_1 =constante. Por outro lado a partir da segunda equação de (3.14), deduzimos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{U(s)}{V(s)} \right) &= -\frac{V'(s)g(s)}{V(s)^2} \\ \Rightarrow \quad U(s) &= -V(s) \int \frac{V'(s)g(s)}{V(s)^2} ds + c_2 V(s), \end{aligned}$$

para uma constante c_2 .

Diferenciando a última equação acima e igualando com a expressão $U'(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} - \int \frac{V'(s)}{f} ds + (c_1 - c_2) &= - \int \frac{V'(s)g(s)}{V^2(s)} ds - \frac{g(s)}{V(s)} \\ \Rightarrow \quad V(s)V'(s) &= f(s)g'(s). \end{aligned}$$

De (3.15), vemos que $V(s)V'(s) = f(s)g'(s) = Y(s)Y'(s)$, e portanto podemos deduzir que

$$Y(s)^2 = V(s)^2 + c, \quad c = \text{constante} \quad (3.16)$$

Primeiro, vamos supor que a constante c seja nula, substituindo $Y(s)^2 = V(s)^2$ e $V'(s) = Y'(s)Y(s)/V(s)$ na equação (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{X(s)Y'(s) - X'(s)Y(s)}{Y'(s)} &= \frac{U(s)Y'(s)Y(s) - U'(s)V(s)^2}{Y'(s)Y(s)} \\ \Rightarrow \quad (X(s) - U(s))Y'(s) &= (X'(s) - U'(s))Y(s) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{X(s) - U(s)}{Y(s)} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Segue da equação acima e de $Y(s)^2 = V(s)^2$ que:

$$\begin{cases} U(s) &= X(s) + pY(s), \quad \text{com } p \text{ constante} \\ V(s) &= \pm Y(s) \end{cases}$$

Assim, os dois segmentos da curva estão relacionados por uma transformação afim. Temos também que $\kappa = \pm 1$, ou seja, o parâmetro s é o comprimento de arco afim em γ_2 . Quando $\kappa < 0$ os dois segmentos estão em lados oposto do *eixo* x .

O exemplo abaixo mostra dois segmentos que estão relacionados por uma transformação afim.

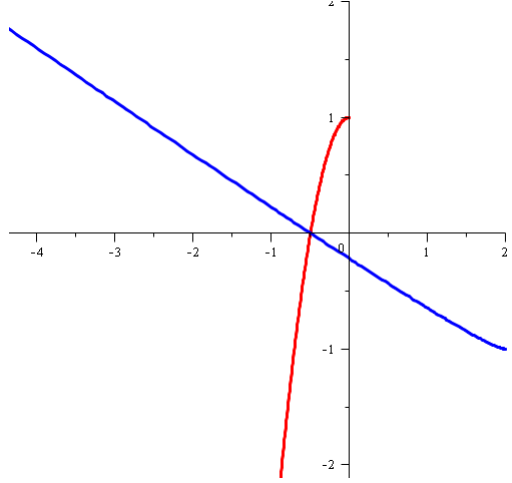


Figura 3.3: Os segmentos $\gamma_1(s) = (-\frac{s}{2}, 1 - s^2)$ (azul) e $\gamma_2(s) = (-\frac{s}{2} + 2(1 - s^2), -1 + s^2)$ (vermelho) estão relacionados por uma transformação afim e junto definem o $\mathcal{ADSS}$ sendo o *eixo* x .

Podemos construir exemplos em que os dois segmentos da curva não estão relacionados por uma transformação afim. Para isso, considere $c \neq 0$ na equação (3.16), obtém-se:

$$(X - U)Y'Y = Y^2(X' - U') + U'c.$$

Para um exemplo ilustrativo, consideremos a constante $c = 1$ e o segmento $\gamma_2(s) = (-\frac{s}{2}, 1 - s^2)$, ou seja

$$\begin{aligned} U'(s) + U(s) \left(\frac{s^2}{c - (1 - s^2)^2} \right) &= s^2 - \frac{5}{2}s^4 + 2s^6 - \frac{1}{2}s^8 - s^5 + \frac{1}{2}s^7 \\ V(s) &= \pm \sqrt{(1 - s^2) - c} \end{aligned}$$

Resolvendo a EDO, obtemos

$$\begin{aligned} U(s) &= \left(\int \left(-\frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2} \arctan\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)}{2} s^2 (-2 + s^2)(1 - 2s^2 + s^4 - s^3)} ds \right) e^{-\frac{\sqrt{2} \arctan\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)}{2}} \right) \\ V(s) &= \pm \sqrt{(1 - s^2) - 1} \end{aligned}$$

Exemplo 3.10. *Os segmentos*

$$\gamma_1(s) = (-s/2, 1 - s^2) \quad e \quad \gamma_2(s) = (U(s), V(s))$$

definem o $\mathcal{ADSS}$ como sendo o eixo x , mas γ_1 e γ_2 não estão relacionados por uma transformação afim.

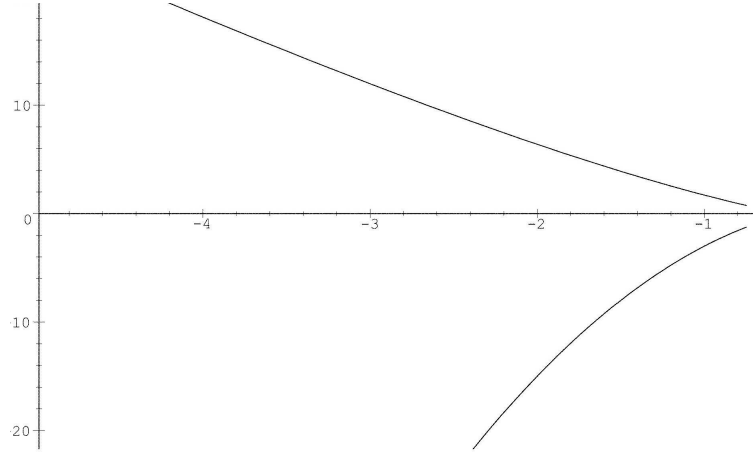


Figura 3.4: $\mathcal{ADSS}$ gerado por dois segmentos que não estão relacionados por uma transformação afim

Obsevação 3.11.

Pela Proposição 3.3, se a curva γ é simétrica afim ($\mu_1 = \mu_2$), vemos que a condição de inflexão do $\mathcal{ADSS}$ se torna:

$$[\gamma'(s_2), \gamma''(s_1)] = [\gamma'(s_1), \gamma''(s_2)].$$

e portanto ainda se mantém. Esta segunda condição é o mesmo que requerer que o tangente ao $\mathcal{ADSS}$ passe através do ponto médio da corda que une $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$.

Se considerarmos a constante $c \neq 0$, então o tangente ao $\mathcal{ADSS}$ (eixo x) não passa através do ponto médio da corda que une $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$. Então

$$(1 - [\gamma_s(s_2), \gamma_{ss}(s_1)])^2 \neq (1 - [\gamma_s(s_1), \gamma_{ss}(s_2)])^2,$$

e desde que a igualdade é válida (o $\mathcal{ADSS}$ é uma reta), $\mu_1 \neq \mu_2$ e a forma não é simétrica afim.

Assim, para que a forma seja simétrica afim, supondo que $\mathcal{ADSS}$ contém uma reta, o ponto médio da corda que une os dois pontos correspondentes da curva γ tem que estar sobre o $\mathcal{ADSS}$.

3.2 Teoria de Singularidade e $\mathcal{ADSS}$

Apresentamos aqui as singularidades da estrutura local do $\mathcal{ADSS}$ para curvas planas convexas e uma definição equivalente a Definição 3.1, que se baseia em cônicas bitangentes.

Usaremos a Definição 1.67 descrita no capítulo 1, para expressar os tipos de singularidades de cada estrutura local do $\mathcal{ADSS}$, denotando o tipo de singularidade que é apresentado na função distância afim $d: \mathbb{R}^2 \times I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(\mathbf{X}, s) \longmapsto d(\mathbf{X}, s)$$

Por exemplo, a função distância afim tem singularidade do tipo:

- i) A_1^2 , quando existem dois tipos de singularidade do tipo A_1 em s_1 e s_2 , isto é

$$d_s(\mathbf{X}, s_1) = 0$$

$$d_s(\mathbf{X}, s_2) = 0.$$

- ii) A_1A_2 , quando d possui uma singularidade do tipo A_1 em um ponto e outra do tipo A_2 em outro ponto, isto é

$$d_s(\mathbf{X}, s_1) = 0$$

$$d_s(\mathbf{X}, s_2) = 0$$

$$d_{ss}(\mathbf{X}, s_2) = 0$$

A figura abaixo ilustra os tipos de singularidade do A_k^n .

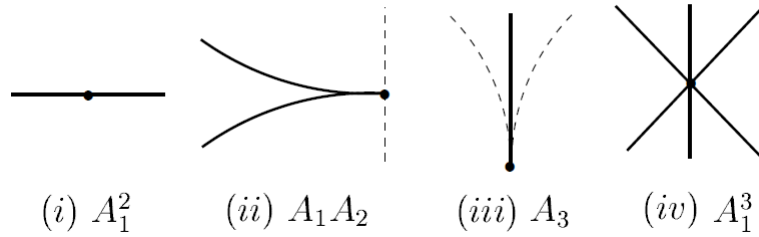


Figura 3.5: Ilustração das singularidade do tipo A_k^n

Pela proposição 1.72 o conjunto de bifurcação da família de funções distância afim é precisamente a evoluta afim. Isto faz com que a função d seja completamente análoga a função distância-quadrado da geometria diferencial, cujo conjunto de bifurcação é a evoluta de γ .

Vamos incluir o $\mathcal{ADSS}$ no conjunto de bifurcação da família de funções distância afim, para obtermos o conjunto completo de bifurcação ou conjunto de bifurcação de níveis que inclui todas as funções que tem singularidade degenerada ou tem duas singularidades em que a função tem o mesmo valor.

Pela Definição 3.1, temos que um ponto $\mathbf{X}$ pertence ao $\mathcal{ADSS}$ se, e somente se, existirem parâmetros s_1, s_2 tais que

$$d(\mathbf{X}, s_1) = d(\mathbf{X}, s_2) \quad \text{e} \quad d_s(\mathbf{X}, s_1) = d_s(\mathbf{X}, s_2) = 0.$$

A última igualdade, nos diz que existem duas cônicas centradas em $\mathbf{X}$ com contato de ordem 4 com a curva γ em $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$. Em contraste com o conjunto de simetria que existe um único círculo tendo contato de ordem 4 com a curva. Assim, geometricamente a Definição 3.1 do $\mathcal{ADSS}$ é equivalente a:

Definição 3.12. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana convexa, o ADSS é o lugar geométrico dos centros de cônicas tendo contato de ordem 4 com dois ou mais pontos distintos na curva.*

A definição acima é equivalente dizer que a cônica e a curva, possuem nos pontos de contato, o mesmo tangente afim ou o mesmo tangente euclidiano e a curvatura.

Observemos que no conjunto de simetria o círculo bitangente pode ser obrigado a ser totalmente dentro de uma curva, enquanto que no ADSS uma cônica que tem contato de ordem 4 em $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$, não há, nenhum conceito de ser cônica dentro ou fora da curva.

Em termos da Definição 3.12, e usando a estrutura do conjunto de bifurcação como em [7], encontramos a estrutura local do conjunto de simetria da distância afim.

Teorema 3.13. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva oval, localmente, o conjunto de simetria da distância afim é*

- i) diferenciável quando ambas as cônicas tem exatamente contato de ordem 4 com γ . (A_1^2)*
- ii) uma cúspide ordinária quando uma cônica tem contato de ordem 5 com γ , isto é $\mathbf{X}$ está em um ponto diferenciável da evoluta afim. (A_1A_2)*
- iii) um ponto final quando $\mathbf{X}$ é o centro da cônica com contato de ordem 6 com a curva γ , isto é a cônica tangencia a curva γ em um ponto sextático: o ponto $\mathbf{X}$ está na cúspide da evoluta afim. (A_3)*
- iv) um cruzamento triplo quando há três cônicas centradas em $\mathbf{X}$ com distância afim igual e com contato de ordem 4 com γ . (A_1^3)*

Esboço da demonstração do teorema 3.13

A singularidade do tipo A_1^2 da função distância afim temos que o ponto $\mathbf{X}$ é o centro de duas cônicas tendo contato de ordem 4 com a curva, pois

$$d_s(\mathbf{X}, s_1) = 0, \quad d_s(\mathbf{X}, s_2) = 0 \quad \text{e} \quad d(\mathbf{X}, s_1) = d(\mathbf{X}, s_2),$$

é equivalente

$$\mathbf{X} = \gamma(s_1) + \lambda_1 \gamma''(s_1) \quad \mathbf{X} = \gamma(s_2) + \lambda_2 \gamma''(s_2) \quad \text{e} \quad d(\mathbf{X}, s_1) = d(\mathbf{X}, s_2)$$

O segundo tipo de singularidade A_1A_2 a função distância afim, vemos que o ponto $\mathbf{X}$ pertence a evoluta afim e é o centro de uma cônica com contato de ordem 5 com a curva γ , pois

$$d_s(\mathbf{X}, s_1) = 0, \quad d_s(\mathbf{X}, s_2) = d_{ss}(\mathbf{X}, s_2) = 0 \quad \text{e} \quad d(\mathbf{X}, s_1) = d(\mathbf{X}, s_2),$$

é equivalente

$$\mathbf{X} = \gamma(s_1) + \lambda_1 \gamma''(s_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \gamma(s_2) + \frac{1}{\mu(s_1)} \gamma''(s_2), \quad \mu(s_1) \neq 0.$$

A singularidade do tipo A_3 da função distância afim obtemos que o ponto $\mathbf{X}$ pertence a evoluta afim, mas $\mathbf{X}$ está na cúspide da evoluta afim e é o centro de um cônica com contato de ordem 6 com a curva γ , pois

$$d_s(\mathbf{X}, s_2) = d_{ss}(\mathbf{X}, s_2) = d_{sss}(\mathbf{X}, s_2) = 0$$

o que é equivalente a $\mathbf{X} = \gamma(s_2) + \frac{1}{\mu(s_1)} \gamma''(s_2) \quad \mu'(s_2) = 0$,

E por último a singularidade tipo A_1^3 , o ponto $\mathbf{X}$ corresponde ao centro de três cônicas tendo contato de ordem 4 com a curva γ , pois

$$d_s(\mathbf{X}, s_1) = d_s(\mathbf{X}, s_2) = d_s(\mathbf{X}, s_3) = 0 \quad \text{e} \quad d(\mathbf{X}, s_1) = d(\mathbf{X}, s_2) = d(\mathbf{X}, s_3)$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \gamma(s_1) + \frac{1}{\mu(s_1)} \gamma''(s_1), \quad \mu(s_1) \neq 0 \\ \mathbf{X} &= \gamma(s_2) + \frac{1}{\mu(s_2)} \gamma''(s_2), \quad \mu(s_2) \neq 0 \\ \mathbf{X} &= \gamma(s_3) + \frac{1}{\mu(s_3)} \gamma''(s_3), \quad \mu(s_3) \neq 0. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

CONJUNTO DE SIMETRIA DA ENVOLVENTE AFIM- $\mathcal{AESS}$

Neste capítulo estudaremos o **Conjunto de Simetria da Envolvente Afim** indicado por $\mathcal{AESS}$, do inglês *affine envelope symmetry set*, para curvas planas por meio de uma definição que se baseia em cônicas tendo contado de ordem 3 com a curva em pelo menos dois pontos e outra que se baseia em envolvente retas. Estas definições no contexto afim não parecem ser duas construções alternativas, como ocorre no conjunto de simetria que ambas as definições baseadas em distâncias e envolvente de retas se reduzem a mesma definição, de tal forma que só existe uma definição razoável com base em círculos bitangentes.

Abordaremos um outro conjunto de simetria invariante afim, o **Lugar Geométrico das Tangentes Paralelas Médias** indicado por $\mathcal{MPTL}$, do inglês *Mid-Parallel Tangents Locus*, a fim de compreender a estrutura do $\mathcal{AESS}$.

As curvas aqui consideradas serão curvas fechadas convexas.

Veremos que as propriedades do $\mathcal{AESS}$ podem ser obtidas considerando ambas as definições, e ambas nos darão diferentes percepções sobre o $\mathcal{AESS}$. A abordagem por meio da envolvente de retas será adotado como em [19] para o caso euclidiano.

Iremos mostrar que se o $\mathcal{AESS}$ é uma reta, então um arco da curva pode ser obtido através do outro por uma transformação afim de determinante igual a -1, em contraste com o $\mathcal{ADSS}$ que não podemos garantir que um arco é levado ao outro por uma transformação afim.

As principais referências são: [13] e [16].

As figuras deste capítulo foram retiradas de [16], exceto a figura 4.3 que foi produzida no *LatexDraw*.

4.1 $\mathcal{AESS}$ por Centros de Cônicas

Definição 4.1. Dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva simples fechada diferenciável, o **conjunto de simetria da envolvente afim- $\mathcal{AESS}$** é o lugar geométrico dos centros das cônicas com pelo menos contato de ordem 3 com a curva em dois ou mais pontos diferentes.

A definição acima, é equivalente a dizer que a curva e a cônica tem o mesmo **tangente afim em pelo menos dois pontos**.

Pelo Capítulo 3, vimos que na definição do $\mathcal{ADSS}$ duas distintas cônicas tendo contato de ordem 4 são envolvidas na construção, enquanto que no $\mathcal{AESS}$ veremos que apenas uma cônica com pelo menos contato duplo de ordem 3 é necessária. O centro da cônica pela proposição 1.72 será igual para ambos os pontos da curva envolvidos no $\mathcal{AESS}$.

Obsevação 4.2. Em contraste com o $\mathcal{ADSS}$, a distância afim não precisa ser um **extremo local**, e o centro $\mathbf{X}$ da cônica não tem que corresponder aos **normais afim**. Mais adiante, mostraremos o que acontece com o $\mathcal{AESS}$, quando o centro está em pelos menos um dos normais afim.

Vamos mostrar que o $\mathcal{AESS}$ pode ser descrito como o conjunto de pontos de regressão sobre envolvente de cônicas. Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo parâmetro t , e suponhamos que γ seja tangente ao eixo x na origem. Queremos encontrar uma cônica tendo contato de ordem 3 com γ na origem e que passe por um segundo ponto.

Inicialmente, consideremos cônicas tendo contato de ordem 3 com γ na origem e que passa através de um segundo ponto, digamos $(X(t), Y(t)) \neq (0, 0)$. Pela definição (1.18) a equação de uma cônica $\mathcal{C}$ é

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0. \quad (4.1)$$

Substituindo $x = X + p$ e $y = Y + q$ na equação acima, vemos

$$\begin{aligned} 0 &= a(X + p)^2 + b(Y + q)^2 + 2h(X + p)(Y + q) + 2g(X + p) + 2f(Y + q) + c \\ &= aX^2 + bY^2 + 2hXY + 2(ap + hq + g)X + 2(hp + bq + f)Y + 2hpq + 2gq + p^2 + q^2. \end{aligned}$$

Para anular os coeficientes dos termos lineares, as coordenadas (p, q) do centro satisfazem

$$\begin{cases} ap + hq + g = 0 \\ hp + bq + f = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Se $g = f = 0$, significa que a origem é o centro da cônica $\mathcal{C}$. Suponhamos que a curva γ possui uma parametrização local na forma

$$\gamma(t) = (t, \alpha t^2 + \beta t^3 + \dots)$$

próxima da origem, e podemos supor que o coeficiente α é positivo. Como

$$\gamma'(t) = (1, 2\alpha t + 3\beta t^2 + \cdots) \quad \text{e} \quad \gamma''(t) = (0, 2\alpha + 6\beta t + \cdots),$$

então a curvatura euclidiana calculada na origem é

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= -x''(0)y'(0) + x'(0)y''(0) \\ &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Vamos utilizar a Definição 1.16, para encontrar a cônica que tem contato de ordem 3 com a curva γ no ponto $(0, 0)$ e $(X(t), Y(t))$. Considere a função de contato

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \mathcal{C} \circ \gamma(t), \end{aligned}$$

dada por

$$\varphi(t) = \varphi \circ \gamma(t) = ax(t)^2 + by(t)^2 + 2hx(t)y(t) + 2gx(t) + 2fy(t) + c.$$

Assim, $\mathcal{C}$ e γ tem contato de ordem 3 na origem se, e somente se,

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi'''(t_0) \neq 0,$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ g &= 0 \\ a + 2f\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Se $a = 0$, então pela equação acima $f = 0$, e portanto $\mathcal{C}$ é uma cônica degenerada consistindo do tangente em γ na origem juntamente com a corda que une a origem ao ponto $\gamma(t)$. Se $a \neq 0$, então podemos tomar $a = 1$, e assim f é determinada pela condição de contato de ordem 3:

$$f = -\frac{1}{2\alpha} = -\frac{1}{\kappa(0)}.$$

Note que $f < 0$, quando assumimos o $\alpha > 0$.

Estamos interessado no processo inverso, ou seja, na obtenção dos coeficientes de $\mathcal{C}$ em termos de p, q , para encontrar a cônica que tem contato de ordem 3 com γ . Resolvendo o sistema de equações (4.2), obtemos

$$p = -\frac{fh}{h^2 - ab}, \quad q = \frac{af}{h^2 - ab}.$$

Supondo $a = 1$, então

$$h = -\frac{p}{q}, \quad b = \frac{qh^2 - f}{q} = \frac{p^2 - fq}{q^2}.$$

Logo a cônica que tem contato de ordem 3 com a curva γ na origem tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + \left(\frac{p^2 - fq}{q^2} \right) y^2 - \frac{p}{q} xy + 2fy \\ &= q^2 x^2 + (p^2 - fq)y^2 - 2pqxy + 2yfq^2. \end{aligned}$$

Substituindo x, y pelas coordenadas do segundo ponto, obtemos:

$$q^2 X(t)^2 + (p^2 - fq)Y(t)^2 - 2pqX(t)Y(t) + 2Y(t)fq^2 = 0, \quad (4.3)$$

corresponde a cônica $\mathcal{C}$ que passa através do ponto $(X(t), Y(t))$. Assim, obtemos algumas informações importantes:

Obsevação 4.3.

i) Fixando o parâmetro t na equação 4.3, obtemos uma equação de grau 2 nas variáveis p, q , e portanto o lugar geométrico dos centros (p, q) das cônicas $\mathcal{C}$ tendo contato de ordem 3 com a curva γ em $(0, 0)$ e $(X(t), Y(t))$ é exatamente uma cônica. Vamos denotar a cônica 4.3 para um t fixo por $\mathcal{D}(t)$, e o valor de parâmetro t_0 que corresponde a origem em γ .

A cônica 4.3 corresponde a cônica degenerada $\mathcal{C}$ consistindo pela tangente em γ na origem, juntamente com a corda que une a origem ao ponto $\gamma(t)$: o "centro" desta cônica está na origem $p = q = 0$ (para $a = 0$, temos $f = 0$).

ii) Calculando o discriminante da cônica, obtemos

$$\Delta = Y^2 (X^2 + 2Yf) - (-XY)^2 = 2fY^3.$$

Com $f < 0$ e a curva γ está contida na região $y \geq 0$, temos que a cônica $\mathcal{D}(t)$ é uma hipérbole.

iii) Podemos reescrever a equação (4.3) da seguinte forma

$$(pY - qX)^2 = fqY(Y - 2q).$$

Em coordenadas p, q , temos:

- $pY - qX = 0$ é a equação da reta $\mathcal{L}$ que une a origem ao ponto $(X(t), Y(t))$;
- $q = 0$ é a equação da tangente $\mathcal{T}$ na origem;
- $2q = Y(t)$ é equação da reta $\mathcal{M}$ paralela a $\mathcal{T}$ passando através do ponto médio do segmento que une a origem ao ponto $(X(t), Y(t))$.

Assim, com uma escolha das equações para estas retas (multiplicando por constantes), a cônica $\mathcal{D}(t)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$(pY - qX)^2 = fqY(Y - 2q),$$

que vamos indicar por: $\mathcal{L}^2 = \mathcal{M}\mathcal{T}$.

iv) Substituindo $p = X/2$ e $q = Y/2$ na equação (4.3), obtemos

$$\frac{X^2Y^2}{2} \xrightarrow{0} \frac{X^2Y^2}{2} + \frac{fY^3}{2} \xrightarrow{0} \frac{fY^3}{2} = 0,$$

ou seja, a cônica $\mathcal{D}(t)$ passa através do ponto médio do segmento que une a origem ao ponto $(X(t), Y(t))$. Substituindo a equação da reta $\mathcal{M}$ em (4.3), vemos que a cônica $\mathcal{D}(t)$ é tangente a reta $\mathcal{M}$ neste ponto. Logo um ramo da hipérbole tem contato de ordem 3 com a curva γ na origem, e o outro ramo é tangente a reta $\mathcal{M}$ no ponto $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

A equação (4.3) é uma família a 1-parâmetro de cônicas, em coordenadas (p, q) , parametrizada pelo parâmetro t , assim podemos encontrar a envolvente desta família de cônicas, utilizando o Teorema 1.29, que nos diz que a envolvente desta família de cônicas é obtida por resolver o sistema

$$\begin{cases} q^2X^2 + (p^2 - fq)Y^2 - 2pqXY + 2Yfq^2 = 0 \\ q^2XX' + (p^2 - fq)YY' - pq(XY' + X'Y) + fq^2Y' = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Multiplicando Y' pela primeira equação do sistema (4.4) e subtraindo por Y vezes a segunda equação do sistema (4.4), obtém-se

$$-pY(XY' - X'Y) + q(fYY' + X(XY' - X'Y)) = 0. \quad (4.5)$$

Quando assumimos $t \neq t_0$, de modo que $Y \neq 0$, podemos recuperar a segunda equação do sistema (4.4) a partir das equações (4.6) e (4.5). Segue-se que o ponto da envolvente da família das cônicas (4.3) é a intersecção única de (4.3) para um t particular com a equação da reta (4.5), desconsiderando a intersecção na origem $\gamma(t_0)$.

Obsevação 4.4. A segunda equação do sistema (4.4), é a mesmo que a condição adicional necessária para que a cônica $\mathcal{C}$ seja tangente em γ no ponto (X, Y) . Assim, a envolvente da família de cônicas (4.3) é o lugar geométrico dos centros das cônicas $\mathcal{C}$ com contato de ordem 3 com γ na origem e tangente a curva γ em outro ponto.

4.1.1 Contato duplo de ordem 3

Vamos derivar a condição para a cônica $\mathcal{C}$ ter contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t)$ e em $\gamma(t_0)$. Isto é equivalente a diferenciarmos a segunda equação do sistema (4.4) novamente, que corresponde a pontos de regressão sobre a envolventes da família de cônicas (4.3), temos:

$$\begin{cases} q^2X^2 + (p^2 - fq)Y^2 - 2pqXY + 2Yfq^2 = 0 \\ q^2XX' + (p^2 - fq)YY' - pq(XY' + X'Y) + fq^2Y' = 0. \\ q^2(X'^2 + XX'') + (p^2 - fq)(Y'^2 + YY'') + fq^2Y'' - \\ -pq(2X'Y' + X''Y + XY'') = 0 \end{cases}$$

Existem outras formas de calcular a condição em t (e t_0). Uma maneira é diferenciarmos a equação (4.3) novamente, e para obter uma segunda reta que passa através da origem e que satisfaz $\mathcal{D}(t)$ na interseção de $\mathcal{D}(t)$ com esta segunda derivada. Segue que:

$$p(-2XY'Y'^2 - XY^2Y'' + 2X'Y^2Y' + X''Y^3) + q(X^2Y'^2 + X^2YY'' + 2fYY'^2 + fY^2Y'' - XX''Y^2 - X'^2Y^2) = 0.$$

Vamos calcular a condição para que a equação acima coincida com a equação (4.5). Pela equação (4.5), temos:

$$p = \frac{q(fYY' + X(XY' - X'Y))}{Y(XY' - X'Y)}.$$

Substituindo este valor na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & q(fYY' + X(XY' - X'Y))(-2XY'Y'^2 - XY^2Y'' + 2X'Y^2Y' + X''Y^3) + \\ & + qY(XY' - X'Y)(X^2Y'^2 + X^2YY'' + 2fYY'^2 + fY^2Y'' - XX''Y^2) + \\ & + qY(XY' - X'Y)(-X'^2Y^2). \end{aligned}$$

Efetuando as multiplicações acima, temos

$$fY^3(X''Y' - X'Y'') = (XY' - X'Y)^3. \quad (4.6)$$

Obsevação 4.5. *O coeficiente f não irá ser igual a zero, desde que $t \neq t_0$, temos que $Y \neq 0$ a curva está em um dos semi-plano determinado pela reta que é tangente na origem. A expressão $X''Y' - X'Y'' \neq 0$ é a curvatura que é diferente de zero.*

4.1.2 Consequências da condição de contato duplo de ordem 3

Vamos apresentar algumas consequências interessantes da condição (4.6), que corresponde a cônica $\mathcal{C}$ ter contato de ordem 3 com $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$.

Teorema 4.6. *A condição (euclidiana) para a cônica ter contato de ordem 3 com a curva γ em ambos os pontos $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$ é*

$$\left(\frac{\kappa(t)}{\kappa(t_0)} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\text{distância de } \gamma(t_0) \text{ ao tangente em } \gamma(t)}{\text{distância de } \gamma(t) \text{ ao tangente em } \gamma(t_0)}$$

Demonstração.

Suponha que o parâmetro t da curva γ seja o parâmetro comprimento de arco. A distância perpendicular do ponto $\gamma(t)$ ao tangente a $\gamma(t_0)$ que corresponde ao eixo x é Y , e a distância perpendicular do ponto $\gamma(t_0)$ para o tangente a γ em

$\gamma(t)$ é $XY' - X'Y$. Logo, substituindo esses valores na equação (4.6) e sabendo que $\kappa(t) = X''Y' - X'Y''$, vemos que:

$$\begin{aligned} fY^3(X''Y' - X'Y'') &= (XY' - X'Y)^3. \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\kappa(t_0)}\right)^{1/3} \kappa(t)^{1/3} &= \frac{\text{distância de } \gamma(t_0) \text{ ao tangente em } \gamma(t)}{\text{distância de } \gamma(t) \text{ ao tangente em } \gamma(t_0)} \\ \Rightarrow \left(\frac{\kappa(t)}{\kappa(t_0)}\right)^{\frac{1}{3}} &= \frac{\text{distância de } \gamma(t_0) \text{ ao tangente em } \gamma(t)}{\text{distância de } \gamma(t) \text{ ao tangente em } \gamma(t_0)}. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.7. *Se γ é uma cônica, então $[\gamma(s) - \gamma(s_0), \gamma'(s) + \gamma'(s_0)] = 0$ é satisfeita para dois pontos na curva γ .*

Demonstração.

Vamos assumir que a curva γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco afim s . Seja $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ pontos sobre a curva considerada. Quando

1º caso: γ é uma elipse

Desde que as transformações afim preservam paralelismo, será suficientes mostrarmos a prova para um círculo. Devemos provar que a equação (4.7) é válida para quaisquer dois pontos em um círculo.

Podemos seguir duas abordagens diferentes para a prova, como segue: A primeira é mais geométrica: Desenhe dois vetores tangentes em dois pontos arbitrários do círculo. Observe que o segmento $\gamma(s_0) - \gamma(s_1)$ é paralelo $\gamma'(s_0) + \gamma'(s_1)$.

A segunda alternativa é considerar a parametrização $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ com o parâmetro $s \in [0, 2\pi]$. Temos

$$\begin{aligned} [\gamma(s_1) - \gamma(s_0), \gamma'(s_1) + \gamma'(s_0)] &= \begin{bmatrix} \cos s_0 - \cos s_1 & -(\sin s_1 + \sin s_0) \\ \sin s_0 - \sin s_1 & \cos s_1 + \cos s_0 \end{bmatrix} \\ &= \cos^2 s_0 - \cos^2 s_1 + \sin^2 s_0 - \sin^2 s_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto a equação (4.7) é satisfeita para dois pontos quaisquer no círculo e conseqüentemente para a elipse.

2º caso: γ é uma parábola

Pelo Teorema 1.62, temos que a curvatura afim da parábola é constante igual a zero. Assim, consideremos a parametrização da parábola da seguinte forma

$$\gamma(s) = \left(a_1 s + c_1, \frac{1}{2} s^2 b_1 + c_2\right).$$

Logo:

$$[\gamma(s_1) - \gamma(s_0), \gamma'(s_1) + \gamma'(s_0)] = \begin{bmatrix} a_1(s_0 - s_1) & 2a_1 \\ \frac{b_1}{2}(s_0^2 - s_1^2) & b_1(s_1 + s_0) \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, a equação (4.7) é satisfeita para dois pontos quaisquer na parábola.

3º caso: γ é uma hipérbole

Considere a seguinte parametrização da hipérbole

$$\gamma(s) = \left(a \cosh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right), -b \sinh \left(\frac{s}{\sqrt[3]{ab}} \right) \right),$$

Calculando o determinante da equação (4.7), vemos que:

$$\begin{bmatrix} a \left(\cosh \frac{s_0}{\sqrt[3]{ab}} - \cosh \frac{s_1}{\sqrt[3]{ab}} \right) & \frac{a}{\sqrt[3]{ab}} \left(\sinh \frac{s_0}{\sqrt[3]{ab}} + \sinh \frac{s_1}{\sqrt[3]{ab}} \right) \\ -b \left(\sinh \frac{s_0}{\sqrt[3]{ab}} - \sinh \frac{s_1}{\sqrt[3]{ab}} \right) & -\frac{b}{\sqrt[3]{ab}} \left(\cosh \frac{s_0}{\sqrt[3]{ab}} + \cosh \frac{s_1}{\sqrt[3]{ab}} \right) \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, a equação (4.7) é satisfeita para dois pontos quaisquer na hipérbole. ■

Teorema 4.8 (Condição do $\mathcal{AESS}$). *Seja γ uma curva oval parametrizada pelo comprimento de arco afim. A condição afim para a cônica ter contato de ordem 3 com γ em pontos distintos $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s)$ é*

$$[\gamma(s) - \gamma(s_0), \gamma'(s) + \gamma'(s_0)] = 0 \quad (4.7)$$

Demonstração.

Vamos mostrar a condição afim para a cônica ter contato de ordem 3 com γ em $\gamma(s)$ e $\gamma(s_0) = (0,0)$. Suponha que a curva γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco afim. Usaremos o parâmetro comprimento de arco afim ds em vez de um parâmetro t arbitrário.

Sabemos que a condição para uma cônica ter contato de ordem 3 com γ em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s)$ é dada pela equação (4.6). Temos também que a condição para a cônica ter contato de ordem 3 com $\gamma(s_0)$ é $f = -1/\kappa(s_0)$. Logo, usando a Observação 1.52, vemos que

$$f = -\frac{1}{\kappa(s_0)} = -\frac{1}{\frac{1}{\|\gamma'(s_0)\|^3}} = -\|\gamma'(s_0)\|^3 = -X'(s_0)^3.$$

Substituindo o valor de f na equação (4.6), vemos que:

$$\begin{aligned} & -X'(s)Y(s) = X(s)Y'(s) - X'(s_0)Y(s) \\ \Rightarrow & X'(s_0)Y(s) = X(s)Y'(s) - X'(s)Y(s), \\ \Rightarrow & \begin{vmatrix} X(s) & X'(s) + X'(s_0) \\ Y(s) & Y'(s) + Y'(s_0) \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

desde que $Y'(s_0) = 0$, obtemos o resultado. ■

Ao se analisar a estrutura local do $\mathcal{AESS}$, começamos por analisar pares de pontos de uma dada curva γ que contribuem para $\mathcal{AESS}$, os pares de valores de parâmetros para estes pontos é chamado de *pre- $\mathcal{AESS}$* . A relação (4.7) define o *pre- $\mathcal{AESS}$* , ou seja, o conjunto de pontos no espaço de pares de parâmetros (s_0, s) para os quais existe uma cônica tendo contato de ordem 3 com γ em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s)$.

As figuras abaixo, ilustram exemplos do $\mathcal{AESS}$ para uma curva oval.

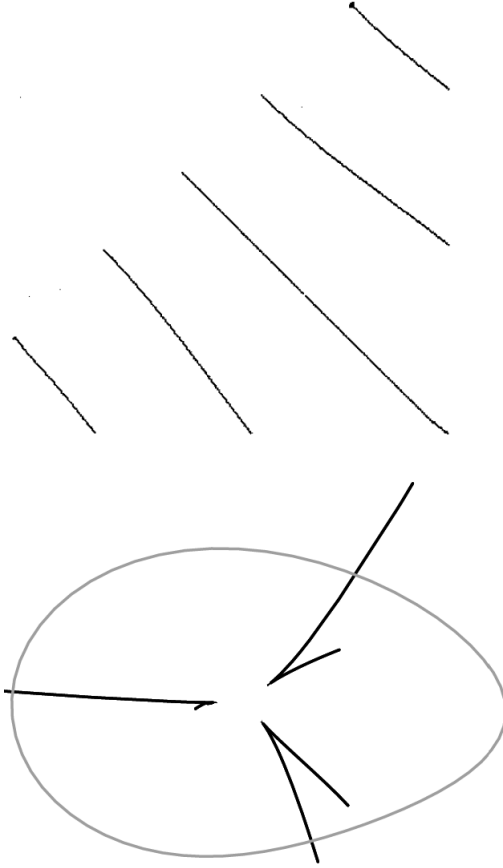


Figura 4.1: Superior *pre- $\mathcal{AESS}$* . Inferior: $\mathcal{AESS}$

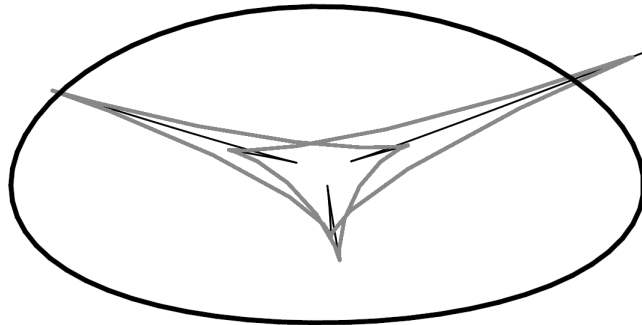


Figura 4.2: $\mathcal{AESS}$ junto com a evoluta afim, que é mostrada em cinza. Os três ramos quase reta do $\mathcal{AESS}$ indicam três eixos de simetria afim.

Obsevação 4.9. A condição do $\mathcal{AESS}$ é exatamente análoga ao caso euclidiano, onde a condição para um círculo bitangente pode ser escrito como a equação (4.7)

usando o comprimento de arco, tal que $\gamma'(s) + \gamma'(s_0)$ é ao longo da bissetriz do ângulo formado pelas duas tangentes orientadas da curva γ em $\gamma(s)$ e $\gamma(s_0)$.

Uma importante consequência da equação (4.6) é que sempre iremos encontrar uma cônica tendo contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t_0)$ e em outro ponto. De fato: escrevendo a curva γ localmente com

$$\gamma(t) = (t, \alpha t^2 + \beta t^3 + \dots)$$

e substituindo na equação (4.6), obtemos:

$$\begin{aligned} -f(\alpha t^2 + \beta t^3 + \dots)(2\alpha + 6\beta t + \dots) &= (\alpha t^2 + 2\beta t^3 + \dots)^3 \\ \Rightarrow f(\alpha + \beta t + \dots)^3(2\alpha + 2\beta t + \dots) &= (\alpha + 2\beta t + \dots)^3 \end{aligned}$$

Calculando o limite para $t \mapsto t_0$, encontramos

$$f = -\frac{1}{2\alpha}$$

Observe que temos realmente escolhido o coeficiente f de tal modo que este mantém, a fim de fazer com que a cônica $\mathcal{C}$ tenha contato de ordem 3 com γ na origem. Assim a equação (4.6) pode ser considerada como uma equação de t , tendo uma solução em $t = t_0$. Na verdade, há pelo menos, uma tripla nula em t_0 . Para vermos isso, tomemos $t_0 = 0$ e usamos

$$X = t, \quad Y = \alpha t^2 + \beta t^3 + \delta t^4 + \dots,$$

na equação (4.6), ou seja

$$\begin{aligned} -f(\alpha t^2 + \beta t^3 + \delta t^4 + \dots)(2\alpha + 6\beta t + 12\delta t^2 + \dots) &= (\alpha t^2 + 2\beta t^3 + 3\delta t^4 + \dots)^3 \\ \Rightarrow f(\alpha + t(\beta + c\delta t + \dots))^3(2\alpha + t(6\beta + 12\delta t \dots)) &= (\alpha + t(2\beta + 3\delta t + \dots))^3 \end{aligned}$$

Expandindo as potências, obtemos que os coeficientes de t em ambos os lados são $6\alpha^2\beta$, de t^2 são $12\alpha\beta^2 + 9\alpha^2\delta$, mas que os coeficientes de t^3 sejam os mesmo em ambos lados, devemos ter $\alpha^2\delta - 3\alpha\beta\delta + 2\beta^3 = 0 = 0$

Se partirmos do princípio de que γ não tem um ponto sextático em $\gamma(t_0)$, então (4.6) nos fornece uma função de t numa oval que tem exatamente um 0 de ordem 3 em $t = t_0$. Por conseguinte, deve ter outro zero em outro lugar. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 4.10. *Desde que a curva γ não tem um ponto sextático em $\gamma(t_0)$, há sempre uma cônica com contato de ordem 3 em $\gamma(t_0)$ e em algum outro ponto $\gamma(t)$, $t \neq t_0$. Se existe um ponto sextático em $\gamma(t_0)$, então existe uma cônica com contato de ordem 6 em $\gamma(t_0)$, o qual pode ser considerado como um caso limite do contato duplo de ordem 3.*

Demonstração.

Suponhamos que a curva γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco afim. Consideremos a seguinte função

$$\begin{aligned} h : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = [\gamma(t) - \gamma(t_0), \gamma'(t) + \gamma'(t_0)]. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que h apresenta valor 0 de ordem 4 em $t = t_0$. Com efeito, derivado h até a quarta ordem, vemos que

$$\begin{aligned} h(t_0) &= [\gamma(t_0) - \gamma(t_0), \gamma'(t_0) + \gamma'(t_0)] = 0 \\ h'(t_0) &= [\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)] + [\gamma(t_0) - \gamma(t_0), \gamma''(t_0)] = 0 \\ h''(t_0) &= [\gamma''(t_0), \gamma'(t_0)] + [\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)] + [\gamma(t_0) - \gamma(t_0), \gamma'''(t_0)] = 0 \\ h'''(t_0) &= [\gamma'''(t_0), \gamma'(t_0)] + 2[\gamma'(t_0), \gamma'''(t_0)] + [\gamma(t_0) - \gamma(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)] = 0 \\ h^{(4)}(t_0) &= [\gamma^{(4)}(t_0), \gamma'(t_0)] + 2[\gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)] + 3[\gamma'(t_0), \gamma^{(4)}(t_0)] + \\ &\quad + [\gamma(t_0) - \gamma(t_0), \gamma^{(5)}(t_0)] = 0. \end{aligned}$$

Observemos que a derivada de quinta ordem será nula se, e somente se, $\mu'(t_0) = 0$ (μ curvatura afim). De fato, derivando $h^{(4)}$, e substituindo

$$\mu'(t) = [\gamma''(t), \gamma'''(t)] \quad \text{e} \quad [\gamma'(t), \gamma^{(5)}(t)] = -2\mu'(t) \quad (4.8)$$

na derivada, obtemos

$$h^{(5)}(t) = [\gamma^{(5)}(t), \gamma'(t_0)] - 3\mu'(t) + [\gamma(t) - \gamma(t_0), \gamma^{(6)}(t)]$$

Logo,

$$h^{(5)}(t_0) = 0 \iff \mu'(t_0) = 0,$$

isto é se, e somente se, $\gamma(t_0)$ é um ponto sextático da curva γ . Desde que h é periódica, isto mostra que há pelo menos um outro zero quando $\mu' \neq 0$. ■

Centro da cônica $\mathcal{C}$ de contato duplo de ordem 3

Queremos encontrar o centro da cônica $\mathcal{C}$ que tem contato de ordem 3 com a curva γ em $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$. Para isso, suponhamos que dois pontos da curva γ satisfazem a equação (4.7).

Pela Observação 4.4, o centro da cônica se encontra ao longo da reta (4.5) e vetor ao longo desta reta é

$$(fYY' + X(X'Y - XY'), Y(X'Y - XY')).$$

Vamos usar aqui o comprimento de arco afim. Pela equação (4.7), temos

$$f = -X'(t_0)^3 \quad \text{e} \quad X'(t_0)Y(t) = X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t),$$

de modo que o vetor acima é paralelo ao vetor

$$(\gamma(t) - \gamma(t_0)) - [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] \gamma'(t_0),$$

onde $[\gamma'(t_0), \gamma(t)] = X'(t_0)Y'(t)$ desde $Y'(t_0) = 0$. Este vetor é ao longo da reta que une o ponto $\gamma(t_0)$ ao centro da cônica, e o centro da cônica pode ser expresso por

$$\begin{cases} c &= \gamma(t_0) + \lambda_1 (\gamma(t) - \gamma(t_0) - [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] \gamma'(t_0)) \\ c &= \gamma(t) + \lambda_2 (\gamma(t_0) - \gamma(t) - [\gamma'(t), \gamma'(t_0)] \gamma'(t)) \end{cases} \quad (4.9)$$

para números reais λ_1, λ_2 . Igualando as duas expressões, temos

$$(\lambda_1 \gamma'(t_0) + \lambda_2 \gamma'(t)) [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) (\gamma(t) - \gamma(t_0)). \quad (4.10)$$

Pela equação (4.7), existe ν tal que:

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \nu \gamma'(t_0) + \gamma'(t).$$

Calculando o determinante por $\gamma'(t_0) + \gamma'(t)$ em ambos os lados da equação (4.10), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= [(\lambda_1 \gamma'(t_0) + \lambda_2 \gamma'(t)) [\gamma'(t_0), \gamma'(t)], \gamma'(t) + \gamma'(t_0)] \\ &= \lambda_1 [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] + \lambda_2 [\gamma'(t), \gamma'(t_0)] \\ &= \lambda_1 - \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Assim, pela equação do centro (4.9) o valor de $\lambda_1 = \lambda_2$ é dado por

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 \gamma'(t_0) + \lambda_2 \gamma'(t)) [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \\ \Rightarrow &\lambda_1 (\gamma'(t_0) + \gamma'(t)) [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] = (2\lambda_1 - 1) (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \\ \Rightarrow &\lambda_1 = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{2(\gamma(t) - \gamma(t_0)) - (\gamma'(t_0) + \gamma'(t)) [\gamma'(t_0), \gamma'(t)]} \\ \Rightarrow &\lambda_1 = \frac{1}{2 - \nu [\gamma'(t_0), \gamma'(t)]}. \end{aligned}$$

Portanto, o centro da cônica $\mathcal{C}$ com contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$ é dado por:

$$\gamma(t_0) + \frac{(\gamma(t) - \gamma(t_0) - [\gamma'(t_0), \gamma'(t)] \gamma'(t_0))}{2 - \nu [\gamma'(t_0), \gamma'(t)]}.$$

Obsevação 4.11. *Se o denominador da expressão acima é nulo, então a cônica $\mathcal{C}$ é uma parábola, com centro no infinito. As duas retas que passam através de $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$ devem também ser paralelas.*

4.2 $\mathcal{AESS}$ como Envolventes de Retas

Nesta seção, vamos descrever o $\mathcal{AESS}$ em termos de envolventes de retas em vez de envolventes de cônicas como mostrado anteriormente. Veremos que

o $\mathcal{AESS}$ é a partir do ponto de vista da teoria de singularidades do dual do discriminante ao contrário do $\mathcal{ADSS}$ que é conjunto completo de bifurcação.

Sejam $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva simples fechada convexa, pontos $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$
 $t \mapsto \gamma(t)$

e a cônica $\mathcal{C}$ dada pela Definição 1.18.

Consideremos inicialmente, cônicas $\mathcal{C}$ que são tangentes em γ nestes dois pontos, estas formam um feixe de cônicas. De fato, se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são as retas tangentes a γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ e $\mathcal{L}$ é a reta que une esses dois pontos, então cada cônica do feixe é dada por:

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \lambda\mathcal{L}^2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O lugar geométrico dos centros destas cônicas é a reta $\mathcal{M}$ passando através da interseção de $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ e do ponto médio da corda que une $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$. A figura 4.3 dá uma ilustração destas retas.

Obsevação 4.12. *Existe uma outro componente degenerado do lugar geométrico dos centros, ou seja, a reta $\mathcal{L}$, que corresponde ao par de retas $\mathcal{L}^2$ do feixe, cujo centro é indeterminado em $\mathcal{L}$.*

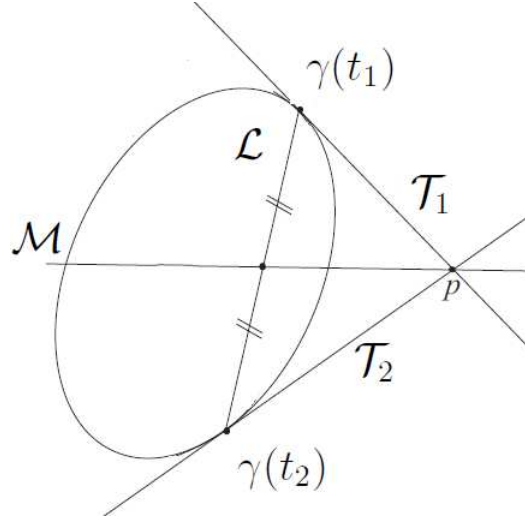


Figura 4.3: Exemplo das retas usadas para a construção do $\mathcal{AESS}$ como envolvente de retas

Para medirmos o contato entre $\mathcal{C}$ e γ em $\gamma(t_1) = (X(t_1), Y(t_1))$ e $\gamma(t_2) = (X(t_2), Y(t_2))$, vamos substituir as coordenadas destes pontos na equação da cônica, ou seja

$$\mathcal{C}(t_1) := aX(t_1)^2 + bY(t_1)^2 + 2hX(t_1)Y(t_1) + 2gX(t_1) + 2fY(t_1) + c = 0$$

$$\mathcal{C}(t_2) := aX(t_2)^2 + bY(t_2)^2 + 2hX(t_2)Y(t_2) + 2gX(t_2) + 2fY(t_2) + c = 0$$

A fim de denotarmos a condição determinante resultante, introduzimos algumas abreviações, para escrever os resultados mais tarde de forma sucinta. Por $\mathcal{C}(t_1)$ escrevemos o vetor

$$(X^2, Y^2, 2XY, 2X, 2Y, 1),$$

avaliada em $t = t_1$, sendo um vetor em $\mathbb{R}^6$ tal que

$$\mathcal{C}(t_1) \cdot (a, b, h, g, f, c)^T = 0,$$

que nos dá condição para que a cônica $\mathcal{C}$ passe através do ponto $(X(t_1), Y(t_1))$. Da mesma forma, o vetor $\mathcal{C}(t_2)$ é similarmente definido. Por $\mathcal{C}_t(t)$ escrevemos

$$(2XX', 2YY', 2(X'Y + XY'), 2X', 2Y', 0),$$

avaliado em $t = t_1$. Assim

$$\mathcal{C}_t(t_1) \cdot (a, b, h, g, f, c)^T = 0$$

é uma condição adicional para $\mathcal{C}$ ser tangente a curva γ em $(X(t_1), Y(t_1))$. Similarmente, as equações

$$\mathcal{C}(t_2) \cdot (a, b, h, g, f, c)^T = 0$$

$$\mathcal{C}_t(t_2) \cdot (a, b, h, g, f, c)^T = 0$$

nos dá a condição para que $\mathcal{C}$ seja tangente a γ em $\gamma(t_2)$. Também introduzimos $\mathcal{C}_x(p, q)$ e $\mathcal{C}_y(p, q)$ para denotar os vetores obtidos por diferenciar a equação da cônica com respeito a x e y respectivamente, substituindo os valor de x, y por p, q , ou seja:

$$\mathcal{C}_x(p, q) = (2p, 0, 2q, 2, 0, 0) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_y(p, q) = (0, 2q, 2p, 0, 2, 0).$$

As seis equações acima mencionas nos assegura que a cônica $\mathcal{C}$ terá contato de ordem 2 com γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ e a condição determinante de que deve existir uma cônica como na Definição 1.18 (coeficientes não todos nulos) tangente a curva γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ e com o centro (p, q) é

$$\mathcal{G}(t_1 t_2, p, q) := \begin{vmatrix} \mathcal{C}(t_1) \\ \mathcal{C}_t(t_1) \\ \mathcal{C}(t_2) \\ \mathcal{C}_t(t_2) \\ \mathcal{C}_x(p, q) \\ \mathcal{C}_y(pq) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Esta expressão é uma equação em coordenadas (p, q) , do lugar geométrico dos centros de cônicas $\mathcal{C}$. Escrevendo

$$\mathcal{M}(t_1, t_2, p, q) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(t_1, t_2, p, q) = 0 \quad (4.12)$$

sendo primeira uma equação da reta $\mathcal{M}$ (usando novamente (p, q) como coordenadas atuais) e $\mathcal{L}$ a equação da corda que unem os pontos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$, devemos ter que o lugar geométrico dos centros é

$$\mathcal{G} = \mathcal{M}\mathcal{L} \quad (4.13)$$

Seja $\mathcal{G}(t_1, t_2, p, q) = 0$, tal que, (p, q) é o centro da cônica tangente a γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$. Contanto que (p, q) não é o centro da corda, onde $\mathcal{M}$ satisfaz $\mathcal{L}$, isto é, $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$, podemos deduzir que

$$\mathcal{L}(t_1, t_2, p, q) \neq 0.$$

Obsevação 4.13. *O único caso que nos dará um problema é o lugar onde as tangentes a γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ são paralelas, desde que os tangentes a uma cônica em extremidades opostas do diâmetro são paralelas*

Temos também que os zeros de $\mathcal{G}$ coincidem com aqueles de $\mathcal{M}$ e o mesmo vale para as derivadas: por exemplo, calculando a derivada de $\mathcal{G}$ em função do parâmetro t , vemos que

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{M}_t \mathcal{L} + \mathcal{M} \mathcal{L}_t,$$

tal que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_t = 0$ é equivalente (longe de $\mathcal{L} = 0$) a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_t = 0$.

A função $\mathcal{M}$ define uma família a 2-parâmetro de retas no plano, parametrizada por pares de pontos distintos de γ . Podemos perguntar se: $\mathcal{M}$ pode ser estendida diferenciavelmente para todos os pares de pontos de γ ?.

A resposta é sim, desde que se define $\mathcal{M}(t, t, p, q)$ é uma equação do normal afim a γ em $\gamma(t)$. A razão geométrica para isso é o seguinte:

Para t_1, t_2 fixo, a reta $\mathcal{M}$ é o lugar geométrico de centros de cônicas tendo (pelo menos) contato de ordem 2 com γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$. Quando $t_2 \rightarrow t_1$ iremos obter o lugar geométrico de centros de cônicas tendo pelo menos contato de ordem 4 com γ em $\gamma(t_1)$, que é o normal afim neste ponto. Na verdade $\mathcal{M}$ dá origem a seguinte aplicação

$$\mathcal{B} : \gamma \times \gamma \longrightarrow \mathcal{DL},$$

, onde $\mathcal{B}$ é uma reta cuja equação em coordenadas atuais (p, q) é $\mathcal{M}(t_1, t_2, p, q) = 0$ e $\mathcal{DL}$ o plano dual ou o conjunto de retas no plano ordinário $\mathbb{R}^2$.

Vamos considerar $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{M}$ como a definição de duas envolventes de retas, um por fixando t_1 e a outra por fixando t_2 . Vamos usar a função $\mathcal{G}$ para medir o contato entre a cônica $\mathcal{C}$ e γ e usar a relação $\mathcal{G} = \mathcal{M}\mathcal{L}$, para comparar este contato com propriedades de duas envolventes.

Apresentamos os principais resultados abaixo, e logo após, esboçamos o método da demonstração, o que equivale apenas por diferenciar as funções $\mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ sucessivamente.

Definimos o $\mathcal{AESS}$ da curva γ como o lugar geométrico de centros de cônicas que tem contato de ordem 3 com γ em dois diferentes lugares (ou no limite, os centros de cônicas sextáticos). A cônica $\mathcal{C}$ considerada aqui será uma cônica tangente γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$, e com centro (p, q) .

Vamos encontrar então o conjunto de simetria da envolvente afim por meio de envolvente de retas.

Teorema 4.14. *Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{G}$ e $\mathcal{B}$ como definidos em na seção 4.2, temos:*

- (1) *Considere a família a 1-parâmetro de retas $\mathcal{M}(t_1, t_2, p, q) = 0$ onde t_2 é fixo. Um ponto (p, q) pertence a envolvente desta família de retas se, e somente se, a cônica $\mathcal{C}$ tem (pelo menos) contato de ordem 3 com a curva γ em $\gamma(t_1)$.*

- (2) Fixando t_2, p, q , a função $\mathcal{G}$ é nula e tem singularidade do tipo A_k em t_1 se, e somente se, a cônica $\mathcal{C}$ tem contato de ordem $k+2$ com γ em $\gamma(t_1)$. O resultado anterior é o caso em que $k=1$ neste. As funções $\mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ possuem o mesmo tipo de singularidade desde que (p, q) não está na reta $\mathcal{L}$.
- (3) O ponto (t_1, t_2) é um ponto crítico de $\mathcal{B}$ se, e somente se, houver uma cônica com contato de ordem 3 em ambos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$.
- (4) Em pontos onde $\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_2} = 0$, temos $\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial t_1 \partial t_2} = 0$. (Não é óbvio para nós, o que esta condição significa geometricamente).
- (5) A reta $\mathcal{M}$ é tangente ao $\mathcal{AESS}$, quando existe uma cônica $\mathcal{C}$ tendo contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$. Isso diz que o tangente ao $\mathcal{AESS}$ passa através do ponto médio do segmento que une dois pontos de γ e através da interseção dos tangentes a γ neste dois pontos.
- De uma maneira mais formal: A imagem do conjunto crítico de $\mathcal{B}$ é o conjunto das retas tangentes ao $\mathcal{AESS}$ de γ , que é o dual ao $\mathcal{AESS}$ de γ . Este é completamente análogo a situação estudada em [19].
- (6) Se a cônica $\mathcal{C}$ tem contato de ordem k ($k \geq 4$) com γ em $\gamma(t_1)$, então o dual do $\mathcal{AESS}$ de γ tem uma inflexão de ordem $k-3$. Uma inflexão de ordem 1 é uma inflexão ordinária-corresponde ao uma cúspide ordinária no $\mathcal{AESS}$, e surge quando a cônica $\mathcal{C}$ tem contato de ordem 4.

Preliminares à Demonstração:

Sem perda de generalidade, fixemos o ponto $\gamma(t_2)$ na origem e consideremos o tangente ser o eixo x , e o outro ponto $\gamma(t_1)$ ser o ponto $\gamma(t)$ (renomeando t_1 por t). Segue que a cônica $\mathcal{C}$ tem a seguinte forma:

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2fy = 0,$$

com quatro coeficientes(homogêneos).

Sabemos que a reta $\mathcal{M}$ passa através do ponto médio da corda que une $\gamma(t_2)$ a $\gamma(t)$ e do ponto de interseção do eixo x com a reta tangente no ponto $\gamma(t)$ e que $\mathcal{G}$ será dada agora pelo determinante 4×4

$$\mathcal{G}(t, p, q) := \begin{vmatrix} \mathcal{C}(t) \\ \mathcal{C}_t(t) \\ \mathcal{C}_x(p, q) \\ \mathcal{C}_y(p, q) \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

tal que, em coordenadas (p, q) , $\mathcal{G} = 0$ é a equação do lugar geométrico de centros de cônicas tangente a γ em $\gamma(t)$ e tangente ao eixo x na origem. Escrevendo

$\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, a equação da reta $\mathcal{L}$ é dada por $Xq - Yp$ e portanto devemos ter que o lugar geométrico dos centro é

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \mathcal{M}\mathcal{L} \\ &= \mathcal{M}(X(t)q - Y(t)p)\end{aligned}\tag{4.15}$$

para uma equação adequada $\mathcal{M} = 0$ da reta $\mathcal{M}$. Como anteriormente, iremos usar as seguintes notações:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(t) &:= (X^2, Y^2, 2XY, 2Y) \\ \mathcal{C}_t(t) &:= (2XX', 2YY', 2X'Y + 2XY', 2Y') \\ \mathcal{C}_x(p, q) &:= (2p, 0, 2q, 0) \\ \mathcal{C}_y(p, q) &:= (0, 2q, 2p, 2)\end{aligned}$$

Obsevação 4.15. *Vamos assumir que o segundo fator da equação acima é não nulo, isto é que o ponto (p, q) não é o ponto médio do segmento, o que é equivalente a dizer que o tangente a γ em $\gamma(t)$ não é paralelo ao eixo x . Então $\mathcal{G}$ e a primeira k derivadas com respeito ao parâmetro t se anula em (t, p, q) se, e somente se, o mesmo se aplica a $\mathcal{M}$, ou seja*

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{M}(Xq - Yp) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M} = 0 \\ \mathcal{G}_t = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{M}_t(Xq - Yp) + \mathcal{M}(X'q - Y'p) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_t = 0\end{aligned}$$

Esquema da Demonstração do Teorema 4.14

- (1) Pela observação acima, vamos conectar o número de derivadas de $\mathcal{G}$ que se anulam com a ordem de contato da cônica $\mathcal{C}$ com γ em $\gamma(t)$ e assim ,iremos concluir que se aplica a $\mathcal{M}$

A envolvente da família de retas $\mathcal{M}(t_1, t_2, p, q) = 0$ é dada por resolver o sistema

$$\begin{cases} \mathcal{M}(t, t_2, p, q) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}(t, t_2, p, q) = 0 \end{cases}\tag{4.16}$$

Derivando a equação (4.14), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(t, p, q) = \begin{vmatrix} \mathcal{C}_t(t) \\ \mathcal{C}_t(t) \\ \mathcal{C}_x(p, q) \\ \mathcal{C}_y(p, q) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathcal{C}(t) \\ \mathcal{C}_{tt}(t) \\ \mathcal{C}_x(p, q) \\ \mathcal{C}_y(p, q) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{C}(t) \\ \mathcal{C}_{tt}(t) \\ \mathcal{C}_x(p, q) \\ \mathcal{C}_y(p, q) \end{vmatrix}.\tag{4.17}$$

Suponhamos que $\mathcal{G}(t, p, q) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(t, p, q) = 0$, então:

- $\mathcal{G} = 0 \rightarrow \mathcal{C}_t(t)$ é uma combinação linear de vetores linearmente independentes $\mathcal{C}(t), \mathcal{C}_x(p, q)$ e $\mathcal{C}_y(p, q)$ (equação (4.14)).

- $\mathcal{G}_t = 0 \rightarrow \mathcal{C}_{tt}$ é uma combinação linear de $\mathcal{C}(t)$, $\mathcal{C}_x(p, q)$ e $\mathcal{C}_y(p, q)$ (equação (4.17)).

Assim a condição para $\mathcal{C}$ ter contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t)$ é que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{tt} = 0,$$

ou seja, a matriz

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(t) \\ \mathcal{C}_t(t) \\ \mathcal{C}_{tt}(t) \\ \mathcal{C}_x(p, q) \\ \mathcal{C}_y(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 & Y^2 & 2XY & 2Y \\ 2XX' & 2YY' & 2(X'Y + XY') & 2Y' \\ 2(X'^2 + 2XX'') & 2(Y'^2 + YY'') & 2(X''Y + 2X'Y' + XY'') & 2Y'' \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & q & p & 2 \end{pmatrix}$$

tem posto < 4 . Observemos que as três linhas da matriz acima são linearmente independentes, a menos que uma das seguintes situações ocorram:

- i)* $p = q = 0$: o centro da cônica $\mathcal{C}$ está em um ponto fixo de γ . Este é excluído, porque assumimos que o centro está em $\mathcal{M}$.
- ii)* $Y = q = 0$: este é certamente excluído por γ por ser uma oval, uma vez que o único ponto de γ no eixo x será a origem.
- iii)* $X = Y = 0$: esse ponto é excluído, porque $\gamma(t)$ não é a origem.
- iv)* $(p, q) = \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$: o centro da cônica $\mathcal{C}$ está no ponto médio do segmento, o que implica que o tangente de γ em $\gamma(t)$ é paralelo ao tangente na origem. Excluimos este caso acima.

Portanto a matriz tem posto 3, o que significa que a cônica tem contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t)$ quando

$$\mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0.$$

o que é equivalente a $\mathcal{M}(t, t_2, p, q) = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}(t, t_2, p, q) = 0$,

- (2) Segue repetindo o mesmo argumento do item (1) com mais derivadas de $\mathcal{G}$.
- (3) Dizer que (t_1, t_2) é um ponto crítico de $\mathcal{B}$ é equivalente dizer que (p, q) é um ponto da envolvente de ambas as famílias de retas dada por $\mathcal{M}$, mantendo t_1 constante assim como t_2 , ou seja

$$(t_1, t_2) \text{ tal que } \mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_2} = 0 \text{ para algum } p, q.$$

Portanto, pelo item (1) a cônica $\mathcal{C}$ tem contato de ordem 3 com γ em $\gamma(t_1)$ e também em $\gamma(t_2)$.

- (4) Segue imediatamente dos item (1), (2), (3), mas utilizando a forma geral de $\mathcal{G}$ em (4.11).

(5) Decorre do fato de que, o conjunto crítico de $\mathcal{B}$ é o conjunto

$$(t_1, t_2) \text{ tal que } \mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_2} = 0 \text{ para algum } p, q.$$

Considere o fato do conjunto $\mathcal{S}$ consistindo de pontos

$$(t_1, t_2, p, q) \text{ tal que } \mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_2} = 0.$$

O $\mathcal{AESS}$ é a projeção desse conjunto ao (p, q) -plano. A reta tangente a $\mathcal{S}$ projeta a reta $\mathcal{M}$ para si mesma, que é por conseguinte tangente ao $\mathcal{AESS}$. (Isto é análogo, ao fato de que, o tangente ao envolvente da família a 1-parâmetro de retas é sempre a reta atual da família; ver por exemplo [8]).

(6) Este resultado é obtido do item (2), usando a interpretação do item (5).

Obsevação 4.16. No Teorema 4.14 (4), para o caso euclidiano, $\mathcal{M}$ é substituído pela mediatriz do segmento que une os pontos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$, a fórmula $\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial t_1 \partial t_2} = 0$ mantém idêntica, uma vez que $\mathcal{M}$ é a soma das funções de t_1 e t_2 . Mas no presente caso, não é assim: precisamos $\mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_2} = 0$. O leitor interessado pode ver mais detalhes em [19].

4.2.1 Lugar Geométrico das Tangentes Paralelas Médias- $\mathcal{MPTL}$

Definição 4.17. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável convexa. O **lugar geométrico das tangentes paralelas médias** da curva γ é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas que unem os pontos de contatos das tangentes paralelas.

Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ (t_1, t_2, p, q) \text{ tal que } \mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_1} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_2} = 0 \right\}.$$

Na projeção do conjunto $\mathcal{S}$ aparece um outro conjunto de simetria invariante afim, o $\mathcal{MPTL}$. Isso deve-se ao fato de que, embora as três condições que definem o conjunto $\mathcal{S}$ são geralmente suficientes para garantir que há uma cônica tendo contato de ordem 3 em dois pontos distintos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$, descobrimos que quando as tangentes são paralelas, então as três condições são automaticamente satisfeitas pelo ponto médio do segmento que unem os pontos de contatos das tangentes paralelas.

Obsevação 4.18. Pode existir uma cônica tendo contato de ordem 3 em pontos onde as tangentes são paralelas, e neste caso, o ponto médio da corda é o centro de tal cônica.

O $\mathcal{MPTL}$ é um conjunto interessante, o seu verdadeiro valor aqui está na relação com $\mathcal{AESS}$, ao estudar o $\mathcal{AESS}$ e o $\mathcal{MPTL}$, pode se deduzir ou explicar fatos sobre o $\mathcal{AESS}$ com referência ao $\mathcal{MPTL}$.

A figura 4.4 ilustra o $\mathcal{AESS}$ junto com o $\mathcal{MPTL}$ de uma curva oval.

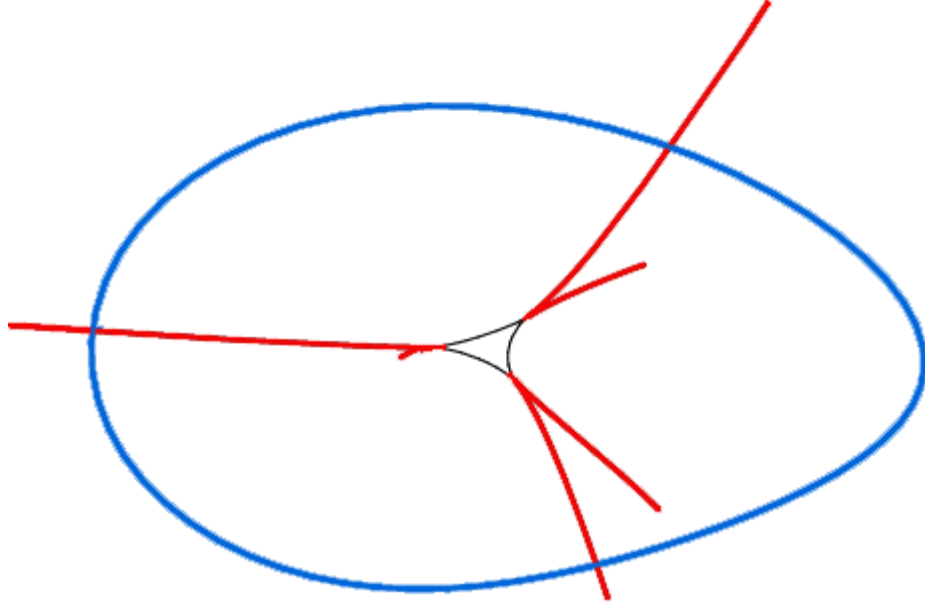


Figura 4.4: O $\mathcal{AESS}$ representado por vermelho e o $\mathcal{MPTL}$ pelo preto.

4.3 $\mathcal{AESS}$ contendo uma reta

Vimos que, o $\mathcal{ADSS}$ sendo uma reta não significa necessariamente que a curva dada é simétrica afim. Para o $\mathcal{AESS}$ a situação é diferente como segue.

Teorema 4.19. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva oval, e suponhamos que o $\mathcal{AESS}$ gerado por dois arcos de γ seja uma reta. Então, qualquer um desses arcos é obtido a partir do outro por uma transformação afim de determinante igual a -1.*

Demonstração. Tomemos o $\mathcal{AESS}$ como sendo o eixo x , e considere os arcos da oval γ , com as seguintes parametrizações

$$\gamma_1(t) = (X(t), Y(t)) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (U(t), V(t)),$$

com γ_1 parametrizada pelo comprimento de arco.

Pelo item (5) do Teorema 4.14, o tangente ao $\mathcal{AESS}$ num ponto que corresponde a dois valores de parâmetros (t_1, t_2) , sempre passa por dois pontos:

- a) do ponto médio do segmento da união desses dois pontos da curva;
- b) da interseção de dois tangentes destes dois pontos da curva.

Segue-se para este caso, todos estes pontos médios e todas as interseções dos tangentes correspondentes estão sobre o *eixo x*.

O tangente ao arco γ_1 que se encontra no *eixo x* no ponto com coordenada x é

$$\frac{XY' - X'Y}{V'}.$$

O outro tangente à forma oval por este ponto encontra a oval, em digamos γ_2 , e portanto temos

$$\frac{XY' - X'Y}{V'} = \frac{UV' - U'V}{Y'}, \quad (4.18)$$

para todos valores de t .

O ponto médio do segmento também reside no *eixo x*, de modo que

$$Y + V = 0, \quad \forall t \implies Y' + V' = 0, \quad \forall t.$$

Substituindo as igualdades acima na equação (4.18), e assumindo que Y e Y' seja não nulos, obtemos

$$XY' - X'Y = UV' - U'V \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{X}{Y} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{V} \right),$$

que dá

$$X = U + \lambda Y, \quad \text{para uma constante } \lambda.$$

(Com pressuposto de que $Y \neq 0$ é inofensivo, uma vez que a oval só irá encontrar o *eixo x* em dois pontos, e a condição $Y' \neq 0$ apenas evita que tangentes sejam paralelas ao *eixo x*. Claramente estes não prejudicam os resultado).

Assim o arco $\gamma_2(t) = (U(t), V(t))$ é obtido a partir do arco $\gamma_1(t) = (X(t), Y(t))$ por uma transformação afim com matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

com determinante igual a -1. ■

CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos e estudamos detalhadamente o *conjunto de simetria central* ($\mathcal{CSS}$), o *conjunto de simetria da distância afim* ($\mathcal{ADSS}$) e o *conjunto de simetria da envolvente afim* ($\mathcal{AESS}$) de uma curva plana diferenciável, fechada e convexa, assim como suas propriedades.

No desenvolvimento e na condução do trabalho foram abordados temas de Geometria Diferencial, Geometria Diferencial Afim e Teoria de Singularidades e estudados vários artigos científicos recentes sobre conjuntos de simetria como invariantes afins, dos quais destacamos [14] e [16].

Esta dissertação fornece um material para quem deseja ter um primeiro contato com os conjuntos de simetria de curvas planas invariantes por transformações afins.

Além disso, aborda um tema de vanguarda da interface da Geometria Diferencial Afim com a Teoria de Singularidades. De fato, no últimos 20 anos vários artigos foram escritos sobre conjuntos de simetrias afins, alguns originários de teses desenvolvidas nessa área, das quais destacamos:

- a) *Paul Andrew Holtom* apresenta em [20] o estudo dos conjuntos de simetria invariante afim, onde introduz a estrutura local dos conjuntos de simetria invariante afim para curvas não-ovais e curvas não simples, estudando também as transições dos conjuntos por uma família a 1-parâmetro de curvas.
- b) Em [26], *Anthony James Pollit* apresenta conjuntos de simetria invariante afim e Eixo medial, onde estuda dois tipos diferentes de conjunto de simetria e eixo medial, no plano e no espaço tridimensional.

Uma perspectiva futura nessa vertente seria estudar conjuntos de simetria afim de superfícies ou variedades, na tese [26] são apresentados alguns problemas em aberto sobre essa tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H.ALENCAR e W.SANTOS, **Geometria Diferencial das Curvas Planas**, *Rio de Janeiro, IMPA*, 2003
- [2] A. Z. J. ALGHANEMI, **Geometry of Skeletal Structures and Symmetry Sets**, *Thesis University of Liverpool*, 2012.
- [3] T. F. BANCHOFF e P. J. GIBLIN, **Global theorems for symmetry sets of smooth curves and polygons in the plane**, *Proc. Royal Soc. Edinburgh I06A*, 221-231, 1987.
- [4] H. BLUM, **J. Theor. Biology** Cambridge University Press, 38, pp. 205-287, 1973.
- [5] S. A. BRASSETT e P. J. GIBLIN, **Local symmetry of plane curvess**, *Amer. Math. Monthly*, 92, 698-706, 1985.
- [6] J. W. BRUCE, P. J. GIBLIN e G. SAPIRO, **Symmetry Sets**, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 163-186, 1985.
- [7] J. W. BRUCE e P. J. GIBLIN, **Growth, motion and 1-parameter families of symmetry sets**, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 104, 179-204, 1986.
- [8] J. W. BRUCE e P. J. GIBLIN, **Curves and Singularities**, *Cambridge University Press*, 2th edition, 1992.
- [9] L. CALABI e W. E. HERNETT, **Shape recognition, prairie fires, convex deficiencies and skeletons**, *Amer. Math. Monthly*, 75, pp. 335-342, 1968.
- [10] M.CRAIZER, **Affine Evolutes and Symmetry of Convex Planar Curves**, *Mathematics Subject Classification*, 2013
- [11] D. DAVIS, **Generic affine differential geometry of curves in $\mathbb{R}^n$** , *Proceeding: of the Edinburgh Mathematical Society*, 136A, 1195-1205, 2006.

- [12] D. DAVIS, **Affine Differential Geometry and Singularity Theory**, *Thesis University of Liverpool*, 2008.
- [13] P. J. GIBLIN, **Affinely invariant symmetry sets**, *Department of Mathematical Sciences*, The University of Liverpool.
- [14] P. J. GIBLIN e P. HOLTOM, **The Centre Symmetry Set**, *Geometry and Topology of Caustics: 98 Banach Center Publications*, Volume 50, 91-105, Institute Of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa 1999.
- [15] P. J. GIBLIN e P. A. HOLTOM, **Affine-Distance Symmetry Sets**, *Math. Scandinavica* 93, 247-267, 2003.
- [16] P. J. GIBLIN e G. SAPIRO, **Affine Invariant Distances, Envelopes and Symmetry Sets**, *Computer Peripherals Laboratory*, HPL-96-93, 1996.
- [17] P. J. GIBLIN e G. SAPIRO, **Affine invariant medial axis and skew symmetry**, *Computer Vision, Sixth International Conference on*, 833-838, 1998.
- [18] P. J. GIBLIN e G. SAPIRO **Affine versions of the symmetry sets**, *Real and Complex Singularities*, ed J. W. Bruce and F. Tari, Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics 412, 173-187, 1999.
- [19] P. J. GIBLIN e F. TARI, **Perpendicular bisectors, duality and local symmetry of plane curves**, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 125A, pp. 181-194, 1995.
- [20] P. A. HOLTOM, **Affine-invariant symmetry sets**, PhD, Thesis, *University of Liverpool*, 2000.
- [21] A. D. IRVING, **Curves of Constant Width & Centre Symmetry Sets**, *MSc mini-dissertation*, 2006.
- [22] S. IZUMIYA e T. SANO, **Generic Affine Differential Geometry of Plane Curves**, *Proceeding: of the Edinburgh Mathematical Society*, 128A, 301-314, 1998.
- [23] S. JANECKO, **Bifurcations of the center of symmetry**, *Geometriae Dedicata* 60,9-16, 1996.
- [24] P. S. MONDENOV, A. S. PARKHOMENKO, **Geometric Transformations: Euclidean and Affine Transformations**, *University of Chicago*, Vol1 1965.
- [25] K. NOMIZU e T. SASAKI, **Affine Differential Geometry**, *Cambridge University Press*, 1994.
- [26] A. J. POLLIT, Thesis **Euclidean and Affine Symmetry Sets and Medial Axes**, *University of Liverpool*, 2004.

- [27] L. RODRIGUEZ, **Introdução à Geometria Diferencial**, *Rio de Janeiro, IMPA, 1977.*
- [28] P. J. RYAN, **Euclidean and Non-Euclidean Geometry-An analytic approach**, *Cambridge University Press*, 2 39-43, 1986.
- [29] S. TABACHNIKOV, **Parametrized plane curves, Minkowski caustics, Minkovski vertices and conservative line fields**, *Max Planck Institute Technical Report, Bonn, Germany*, 1996.
- [30] K. TENENBLAT, **Introdução a Geometria Diferencial**, *Brasília, Editora Universidade de Brasília*, 1988.
- [31] J. P. WARDER, **Symmetries of curves and surface**, *Thesis University of Liverpool*, 2009.