UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CABIBBO-FERRARI-SALAM

Thadeu Dos Santos Dias
Magister Scientiae

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2024

THADEU DOS SANTOS DIAS

A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CABIBBO-FERRARI-SALAM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T
D541e
2024

Dias, Thadeu dos Santos, 2000-
A eletrodinâmica quântica de Cabibbo-Ferrari-Salam / Thadeu dos Santos Dias. – Viçosa, MG, 2024.
1 dissertação eletrônica (68 f.): il.

Inclui apêndices.
Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Física, 2024.
Referências bibliográficas: f. 58-62.
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2024.773
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Eletrodinâmica quântica. 2. Monopólos magnéticos. 3. Cabibbo-Ferrari-Salam, Modelo de. I. Del Cima, Oswaldo Monteiro, 1965-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDD 22. ed. 530.1433

Bibliotecário(a) responsável: Alice Regina Pinto Pires CRB-6/2523

THADEU DOS SANTOS DIAS

A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CABIBBO-FERRARI-SALAM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de agosto de 2024.

Assentimento:

Thadeu Dos Santos Dias
Autor

Oswaldo Monteiro Del Cima
Orientador

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria e Luis, e meu irmão Thiago.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, a minha família em especial, com amor, meus pais Maria e Luis pelo apoio, compreensão, carinho, e também ao meu irmão, Thiago, nos bons e maus momentos sempre incentivando.

Gostaria também de agradecer as pessoas que me receberam bem e me ajudaram na montagem desse trabalho, e que sem eles não haveria tal estudo, Oswaldo Monteiro Del Cima, também conhecido como Wado, meu orientador que me acolheu, sempre contando suas histórias para nos apoiar e ensinar não apenas o conteúdo acadêmico que reside neste trabalho, mas também algo muito valioso que é a sua sabedoria.

Esse trabalho também é fruto da constante ajuda de Daniel O.R. Azevedo e Emílio D. Pereira, cuja companhia, produziu um ambiente saudável para este trabalho nascer.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica. Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Federal de Viçosa, pela oportunidade da realização do Mestrado em Física.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"One would be surprised if Nature had made no use of it."

(P.A.M. Dirac)

RESUMO

DIAS, Thadeu Dos Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2024. **A Eletrodinâmica Quântica de Cabibbo-Ferrari-Salam**. Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Neste trabalho, definimos o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam, que construímos através dos trabalhos de N. Cabibbo e E. Ferrari em 1962, e A. Salam em 1966, que apresentam formas alternativas para descrever o problema da carga magnética, na qual fazemos uso das suas ideias. O monopolo magnético foi palco para Paul Dirac discutir a sua concepção e pela mecânica quântica forneceu indícios para sustentar a sua existência, implicando na quantização da carga elétrica. N. Cabibbo e E. Ferrari em seu trabalho, concebem uma ampliação do grupo de *gauge* U(1) usual da QED. Ao invés disso, temos agora o grupo U(1)xU(1), que serve como correção da singularidade do potencial vetor usual, A_μ redefinindo o *field strength* agora descrito por dois 4-potenciais, A_μ e B_μ. A. Salam discute sobre duas alternativas de descrever monopolos, e também sobre abandonar a relação entre a carga elétrica e magnética, esta hipótese abre uma nova possibilidade para estudar em teoria de perturbação. Nesse intuito o presente trabalho discute a validade de uma teoria para *dyons*, fornecendo uma revisitada nos monopolos, seguido de uma breve introdução a simetria BRS e o procedimento de renormalização algébrica sendo este o cerne para a quantização do modelo, prosseguindo com a construção do modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam tais como suas simetrias contínuas e discretas e estudar seus aspectos a *tree-level*. Enfim, uma análise no nível quântico em ordem de obter uma resposta se o modelo é renormalizável a todas as ordens em teoria de perturbação, finalizando com apresentação de algumas perspectivas futuras para o modelo.

Palavras-chave: monopólos magnéticos; cabibbo-ferrari-salam; renormalização algébrica

ABSTRACT

DIAS, Thadeu Dos Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2024. **The Cabibbo-Ferrari-Salam Quantum Electrodynamics**. Adviser: Oswaldo Monteiro Del Cima.

In this work, we define the Cabibbo-Ferrari-Salam model, which we construct based on the works of N. Cabibbo and E. Ferrari in 1962, and A. Salam in 1966. These works present alternative approaches to describing the problem of magnetic charge, from which we draw inspiration. The magnetic monopole was a topic explored by Paul Dirac to discuss its conception, and quantum mechanics provided evidence to support its existence, implying the quantization of electric charge. N. Cabibbo and E. Ferrari, in their work, conceived an extension of the usual U(1) gauge group of QED. Instead, we now have the group U(1)xU(1), which serves to address the singularity of the usual vector potential A_μ by redefining the field strength, now described by two four-potentials, A_μ and B_μ. A. Salam discusses two alternatives for describing monopoles, and also the possibility of abandoning the relationship between electric and magnetic charges. This hypothesis opens a new avenue for studying perturbation theory. In this context, the present work examines the validity of a theory for dyons, revisiting monopoles, followed by a brief introduction to BRS symmetry and the algebraic renormalization procedure, which is central to quantizing the model. Subsequently, we construct the Cabibbo-Ferrari-Salam model, exploring its continuous and discrete symmetries and studying its tree-level aspects. Finally, a quantum-level analysis is performed to determine whether the model is renormalizable to all orders in perturbation theory, concluding with some future perspectives for the model.

Keywords: magnetic monopoles; cabibbo-ferrari-salam; algebraic renormalization

Sumário

Convenções

- Adotaremos ao longo do trabalho o sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = 1$.
- Os índices gregos, $\mu, \nu, \cdots = (0, 1, 2, 3)$, seguirão com respeito ao espaço-tempo. Iremos adotar a convenção de soma de Einstein tal que, índices repetidos são considerados somas.
- A métrica do espaço-tempo considerado é,

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- O tensor de Levi-Civita em quatro dimensões é dado por:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{se permutação par} \\ -1 & \text{se permutação ímpar} \\ 0 & \text{se índices repetidos} \end{cases}, \quad \text{assumindo } \varepsilon_{0123} = 1$$

  além disso $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

1 Introdução

O mundo moderno tem como base o estudo da eletricidade e do magnetismo. Muitas de nossas tecnologias resultam dos avanços nessas áreas. No período entre 1855 e 1864, James Clerk Maxwell estabeleceu o que hoje conhecemos como eletromagnetismo. Em 1861, ele publicou *On Physical Lines of Force*[1], onde demonstrou que os efeitos elétricos e magnéticos se propagam à velocidade da luz. Em 1864, fez uma apresentação à *Royal Society* intitulada *Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*[2], que continha as famosas Equações de Maxwell. Sua teoria unificou os fenômenos de eletricidade, magnetismo e a óptica.

Nesse contexto, uma questão de grande importância é a existência de monopolos magnéticos. Classicamente, não há nada que impeça a existência de partículas com carga magnética, ou seja, partículas que possuam apenas um polo magnético. No entanto, empiricamente sabe-se que não foram observados polos isolados, como estabelecido pelas equações de Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). Por outro lado, a existência de monopolos tornaria a teoria mais simétrica, pois as equações de Maxwell no vácuo apresentam uma simetria de dualidade[1]:

$$\begin{array}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \xrightarrow[\mathbf{E}\to\ \mathbf{B}]{\mathbf{B}\to -\mathbf{E}} \begin{array}{c} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \tag{1.1}$$

Na presença de cargas e correntes elétricas, essa simetria não é observada. A simetria de dualidade também sugere as características dos monopolos magnéticos, que se comportariam de maneira análoga às partículas eletricamente carregadas.

Do ponto de vista clássico, como mencionado, não há impedimentos para a existência de monopolos magnéticos. No entanto, um ponto central no desenvolvimento do nosso entendimento da matéria está na mecânica quântica, que, à primeira vista, não parece permitir monopolos. Isso ocorre porque, na teoria quântica, o campo eletromagnético é acoplado à função de onda via uma fase, na qual os potenciais (ϕ, $\mathbf{A}$) desempenham um papel fundamental, essa investigação foi feita por Paul Adrien Maurice Dirac.

Em 1931, Paul A.M. Dirac mostrou que é possível conceber monopolos magnéticos [3], desde que certas condições sejam atendidas. Primeiramente, nos monopolos de Dirac, cada polo é conectado por uma linha chamada *string* de Dirac, que transporta o fluxo magnético do polo sul para o polo norte, garantindo a continuidade do campo magnético. Em segundo lugar, a carga do monopolo g não é independente da carga elétrica e,

[1] A simetria de dualidade implica a transformação de grandezas elétricas em magnéticas e vice-versa, ou seja, quantidade elétrica $\longrightarrow$ quantidade magnética e quantidade magnética $\longrightarrow$ $-$quantidade elétrica.

havendo uma relação estabelecida pela equação:

$$n\hbar c/ge = 2, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Assim, como apresentado por Dirac, os monopolos devem ser quantizados. Além disso, essa condição leva à quantização da carga elétrica, fornecendo uma possível explicação para o fato de as cargas das partículas elementares serem múltiplos da carga elétrica fundamental e.

A *string* de Dirac aparece como uma singularidade no potencial vetor $\mathbf{A}$. No entanto, segundo Dirac, essa *string* não possui realidade física; apenas os polos magnéticos deveriam ser observáveis. Dirac também levantou questões sobre o motivo de os monopolos ainda não terem sido observados experimentalmente.

Nos anos seguintes ao trabalho de 1931, o tema dos monopolos magnéticos recebeu pouca atenção até que Dirac retornou ao assunto em 1948 [4]. Nessa nova abordagem, ele propôs descrever partículas carregadas e monopolos interagindo por meio do campo eletromagnético, assumindo que estaria cada polo no fim de uma *string* de Dirac observável. O potencial permanece singular, e Dirac introduz coordenadas e momento para descrever o movimento da string.

Em 1962, Nicola Cabibbo e Ezio Ferrari publicaram um importante trabalho [5] cuja ideia principal era desenvolver uma eletrodinâmica quântica que evitasse a singularidade no potencial vetor (*string* de Dirac). Para isso, eles utilizaram um formalismo que faz uso de dois potenciais vetores, introduzindo um pseudo-quadrivetor na teoria. Um dos potenciais está associado à carga elétrica, enquanto o outro está relacionado à carga magnética. A introdução desse segundo potencial é equilibrada pela ampliação do grupo de transformações de calibre, $U(1) \times U(1)$.

O formalismo proposto por Cabibbo e Ferrari também requer a condição de quantização de Dirac para manter a consistência da teoria. Eles chegaram a uma formulação em que não há conservação de paridade (P) nem de conjugação de carga (C), mas ao combinar essas duas operações com a reflexão da carga magnética (M), surgem novas simetrias.

Em 1968, Julian Schwinger [6] estudou partículas que possuem tanto cargas elétricas quanto magnéticas. Nesse contexto, a intensa força de atração entre monopolos com cargas opostas, indicada pela condição de quantização de Dirac, sugere a neutralidade magnética da matéria ordinária. Isso implica que a matéria seria composta por partículas com carga elétrica fracionária.

Em 1974, Yoichiro Nambu [7] adaptou o modelo de Dirac para estudar os quarks como portadores de carga magnética, permanentemente ligados em pares por *strings*. No mesmo ano, Gerardus ’t Hooft [8] e Alexander Markovich Polyakov [9], de forma independente, demonstraram que é possível criar monopolos magnéticos como soluções regulares das equações de campo, sem a necessidade das *strings* de Dirac, desde que o grupo de *gauge* $U(1)$ do eletromagnetismo seja considerado um subgrupo de grupos maiores, como $SU(2)$ ou $SU(3)$. Nesses casos, o grupo de *gauge* sofre quebra espontânea, e duas componentes do campo vetorial adquirem massa por meio do mecanismo de Higgs.

Apesar disso, o monopolo de ’t Hooft-Polyakov, como ficou conhecido, não faz parte do Modelo Padrão. No entanto, pode-se mostrar que, em teorias de grande unificação (GUT - *Grand Unified Theories*), os monopolos de ’t Hooft-Polyakov são consequências inevitáveis. O limite de massa de um monopolo GUT é da ordem de 10^{17}GeV$/c^2$ [10], o que significa que eles são extremamente pesados para serem produzidos em laboratório. O tratamento desses monopolos em teoria quântica de campos é complexo, pois a condição de quantização de Dirac nos leva a uma constante de estrutura fina magnética na qual a teoria de perturbação não se aplica. Podemos apenas estimar esse limite de massa com base na escala de energia da grande unificação.

Em 1982, surgiu um possível candidato a monopolo magnético. Utilizando um detector de anéis supercondutores (SQUID), Blas Cabrera[11] identificou um sinal que correspondia à passagem de um monopolo magnético. Embora esse único sinal tenha sido surpreendentemente preciso, ele não se repetiu ao longo dos 151 dias de observação. O sinal observado por Cabrera nunca foi repetido, mas a busca experimental por monopolos continua até os dias de hoje.

A busca por monopolos magnéticos ainda não terminou. Diversos experimentos, como o MACRO (1989-2000) em Gran Sasso, o MoEDAL, o ATLAS, do CERN (Centro Europeu de Pesquisas Nucleares, na Suíça), ANITA, ANTARES, os detectores de neutrinos *IceCube*, entre muitos outros, têm procurado por essas partículas. Recentes experimentos no ATLAS, em complementaridade com o MoEDAL, têm buscado monopolos magnéticos de Dirac, contemplados nas HIPs (*Highly Ionizing Particles*) [12][12].

No âmbito teórico, estudos como o de J. Govaerts [13] mostram que um eletromagnetismo clássico com dois potenciais é totalmente consistente, o que reforça o interesse no modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam, que construímos neste trabalho. Em física de matéria condensada, há estados análogos e excitações que surgem em sistemas como os *spin ices* [14]. Portanto, embora os monopolos ainda não tenham sido detectados, eles continuam a ser o foco de intensa investigação, tanto teórica quanto experimental, e podem abrir novas portas na fronteira da física.

Neste trabalho, no Capítulo 2 revisitamos o monopolo magnético e discutimos acerca do monopolo em teoria de perturbação. No Capítulo 3, introduzimos a simetria BRS (Becchi-Rouet-Stora) e o procedimento de renormalização algébrica, que desempenham um papel fundamental na teoria quântica de campos. Utilizamos a ação de Yang-Mills como nosso toy model, construindo uma base sólida que será essencial para o desenvolvimento posterior do trabalho.

No Capítulo 4, iniciamos a discussão sobre o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam, que busca ser uma possível descrição consistente para uma teoria de *dyons*. Estabelecemos as simetrias do modelo, analisamos a consistência do modelo a *tree-level* com base nos propagadores. Finalmente, no Capítulo 5, obtemos as simetrias escritas na forma funcional que descrevem completamente o modelo e realizamos sua quantização por meio da renormalização algébrica. Nesse ponto, verificamos se há anomalias de *gauge* e posteriormente a estabilidade da ação, com base no procedimento construído no Capítulo 3, a fim de determinar se o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam é consistente em nível quântico.

2 A jornada do monopolo

Como é amplamente conhecido, o desenvolvimento do eletromagnetismo clássico culminou com os trabalhos de James Clerk Maxwell, iniciados em 1855 e publicados em 1861 [1]. Esses estudos consolidaram as contribuições de diversos cientistas sobre os fenômenos elétricos e magnéticos, resultando em um conjunto de equações diferenciais que descrevem tais fenômenos. Além disso, J.C. Maxwell revelou a relação fundamental entre a luz e as ondas eletromagnéticas [15].

O trabalho de Maxwell não apenas provocou uma revolução na física, mas também destacou uma característica peculiar de sua teoria: não existem polos magnéticos isolados na natureza, ou, ao menos, essa é a interpretação predominante. Essa particularidade da teoria foi objeto de debate ao longo do século XIX.

Em 1894, Pierre Curie especulou sobre a possível existência de magnetismo livre [16], e, em 1896, Henri Poincaré realizou cálculos sobre a trajetória de raios catódicos no campo de um polo magnético [17]. Contudo, a ausência de experimentos que comprovassem a existência de monopolos magnéticos, impediu o avanço desse campo de investigação. Isso mudou com o trabalho de P.A.M. Dirac na década de 1930.

Os monopolos magnéticos têm sido um tema de pesquisa e especulação científica por mais de um século. Sua existência e propriedades foram exploradas em diversos contextos, tanto em modelos teóricos quanto em experimentos. A pesquisa sobre monopolos magnéticos continua a ser atual e de grande relevância.

2.1 Monopolo de Dirac

A simetria dual nas equações de Maxwell, surge quando consideramos o vácuo, isto é, na ausência de fontes elétricas (cargas e correntes). Entretanto, essa simetria pode ser restaurada na presença de cargas elétricas se assumirmos a existência de cargas magnéticas, os chamados monopolos magnéticos. Neste capítulo, investigaremos as implicações da hipótese da existência dessas cargas magnéticas

É sabido que a simetria de dualidade, embora presente nas equações de Maxwell no vácuo, não pode ser imposta na presença de cargas elétricas,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.1}$$

a menos que postulemos a existência de monopolos magnéticos isolados. Assim, devemos supor a existência de polos magnéticos isolados na natureza:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = g^\nu. \tag{2.2}$$

No entanto, essa hipótese ainda não foi confirmada experimentalmente. Apesar de, historicamente, ter sido amplamente discutida na física, empiricamente não é possível dividir um imã em apenas polo norte e polo sul, ainda sim, esta é uma hipótese razoável aceitada por muitos físicos que se dedicaram a este problema.

Um trabalho bastante famoso sobre o tema foi o de Paul A.M. Dirac publicado em 1931 [3]. Nele, a ideia de quantização da carga elétrica forneceu uma motivação para a existência dos monopolos magnéticos, sugerindo uma explicação das cargas elétricas serem sempre encontradas quantizadas.

Construiremos, a seguir, o potencial vetor de Dirac para o monopolo. Partindo da hipótese de um monopolo pontual com carga magnética g, o fluxo do campo magnético deve ser

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g, \tag{2.3}$$

onde S é aréa da superfície Gaussiana envolvendo o monopolo g e $\mathbf{B}$ é o campo magnético radial do monopolo. Portanto, o campo deve ser dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^3}\mathbf{r}. \tag{2.4}$$

Esse campo magnético radial é o esperado para um monopolo pontual, similar ao campo elétrico de uma carga elétrica pontual. Para descrevê-lo de forma consistente, precisamos definir o campo magnético como o rotacional de um potencial vetor $\mathbf{A}$, tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.5}$$

Por outro lado, ao aplicar o teorema de Gauss para o campo magnético, obtemos:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dV = 0. \tag{2.6}$$

Essa expressão parece contradizer a hipótese de um monopolo pontual. Para contornar essa contradição, assumimos que o potencial vetor gerado por uma carga magnética deve conter singularidades, permitindo que a integral anterior não se anule quando realizada sobre uma região contendo a singularidade. Essa singularidade é a chamada *string* de Dirac, que pode ser associada à inclusão de um termo extra no campo magnético radial $\mathbf{B}$. A *string* de Dirac é definida como um conjunto de pontos singulares que formam uma curva contínua. Ela pode ser visualizada como um solenoide idealizado de espessura nula, carregando o fluxo magnético do polo sul para o polo norte. Assim, o monopolo estaria na extremidade deste solenoide.

Dado o conceito da *string*, precisamos construir uma expressão para o potencial vetor $\mathbf{A}$ que fornece um campo magnético radial de um monopolo, compatível com a equação (2.3) para o fluxo magnético. Considerando que o campo magnético é radial e resulta de um produto vetorial, é razoável propor algumas hipóteses para o potencial vetor $\mathbf{A}$: ele deve depender do ângulo polar θ e apontar na direção do gradiente do ângulo azimutal ϕ. Podemos, então, escrever o potencial vetor na forma:

$$\mathbf{A} = f(\theta)\nabla\phi, \tag{2.7}$$

o ângulo azimutal ϕ pode ser obtido a partir das relações entre coordenadas cartesianas e esféricas

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{2.8}$$

Assim, temos:

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.9}$$

Portanto, o gradiente de ϕ é dado por:

$$\nabla\phi = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\hat{x} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\hat{y}, \tag{2.10}$$

A função $f(\theta)$ é escolhido de forma que o solenoide se encontra no semi-eixo negativo z. Então, em coordenadas esféricas, e em um calibre apropriado, a única componente não nulo do potencial vetorial é usualmente escolhida como[1][18]:

$$f(\theta) = g(1 - \cos\theta), \tag{2.11}$$

onde g é associada com a carga magnética do monopolo. Substituindo essas expressões na definição $\mathbf{A}$, obtemos:

$$\mathbf{A} = -\frac{g(1-\cos\theta)\sin\phi}{r\sin\theta}\hat{x} + \frac{g(1-\cos\theta)\cos\phi}{.}r\sin\theta\hat{y} \tag{2.12}$$

Realizando uma mudança para as coordenadas esféricas, obtemos o potencial vetor de Dirac simplificado:

$$\mathbf{A} = g\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\phi}, \qquad r \neq 0 \tag{2.13}$$

Essa equação define o monopolo de Dirac. Observamos que sua singularidade ocorre em $\theta = \pi$, ao longo do semi-eixo negativo z, formando a *string* de Dirac.

Do ponto de vista da teoria quântica, Dirac sugeriu que a existência de monopolos magnéticos poderia fornecer uma explicação para a quantização da carga elétrica. Em seu trabalho de 1931 [3], ele demonstrou que o fluxo do campo magnético através de uma superfície fechada S, devido à *string* de Dirac, é:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\hbar c}{e}2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2.14}$$

[1] Pode-se escolher ainda a função sendo $f(\theta) = -g(1-\cos\theta)$, a física não iria mudar nesta escolha.

Comparado com a equação (2.3), que define a lei de Gauss para o magnetismo, temos que:

$$4\pi g = \frac{\hbar c}{e} 2\pi n. \tag{2.15}$$

portanto, a carga magnética desse monopolo será dado por:

$$g = \frac{\hbar c}{2e} n \tag{2.16}$$

esse resultado indica que a carga magnética dos monopolos é discretizada e quantizada em termos da carga elétrica fundamental, com valor mínimo, $g = \frac{\hbar c}{2e}$, quando $n = 1$. Além disso, a existência de monopolos impõe que a carga elétrica também deve ser quantizada.

O impacto profundo dessas ideias entre a existência de monopolos magnéticos e a teoria quântica teve grande influência nos fundamentos da física, destacando a importância do trabalho de Dirac e suas implicações até os dias atuais.

2.2 A jornada continua

2.2.1 Monopolo de Cabibbo-Ferrari

Em 1962 N. Cabibbo e E. Ferrari contribuíram significativamente para o tópico dos monopolos magnéticos [5]. Em uma abordagem inovadora, eles propuseram uma ampliação do grupo de simetria de calibre, introduzindo a simetria $U(1) \times U(1)$. Essa ampliação não foi realizada de maneira arbitrária, pois eles conseguiram "corrigir" o problema da singularidade no campo eletromagnético presente na teoria de Dirac, eliminando a necessidade da *string* de Dirac.

Com a ampliação do grupo de simetria, o campo eletromagnético passou a ser descrito por dois 4-potenciais: um 4-vetor A_μ e um pseudo 4-vetor B_μ. Cada carga está associada a um fator abeliano do grupo $U(1) \times U(1)$, que não é semi-simples. Embora Cabibbo e Ferrari tenham evitado o uso da *string* de Dirac, eles mantiveram a condição de quantização de Dirac (2.16) entre a carga elétrica e a carga magnética, preservando assim os graus de liberdade da QED usual. Isso significa que, apesar da introdução de um novo 4-potencial, a teoria envolve apenas a propagação de um único bóson de calibre: o fóton.

Em seu trabalho, utilizando o formalismo desenvolvido por S. Mandelstam [19], eles descreveram dois campos escalares massivos e carregados, distintos entre si — um contendo a carga elétrica e o outro a carga magnética — e analisaram como esses campos interagem com o campo eletromagnético. Além disso, definiram as relações de comutação em tempos iguais entre os campos da teoria e discutiram as simetrias discretas do modelo. A inclusão do monopolo magnético exige a introdução de uma transformação discreta responsável pela conjugação da carga magnética [20], o que levou à obtenção de novas simetrias discretas no modelo.

2.2.2 Monopolo de A. Salam

Nessa mesma linha de pensamento, A. Salam, em 1966 [21], publicou um artigo no qual propôs uma modificação na teoria dos monopolos magnéticos e, consequentemente, a existência de um segundo tipo de "fóton". Salam discutiu primeiramente a inclusão de fontes magnéticas nas equações de Maxwell e a distinção entre a matéria ordinária — léptons e quarks — e um novo tipo de matéria magnética não massiva, e também a inclusão de termos de acoplamento não mínimos.

Ao abordar a quantização apresentada por Dirac, Salam enfrentou uma dificuldade: a carga magnética, segundo a condição de quantização de Dirac, precisaria assumir um valor elevado fora do regime perturbativo. Além disto, a presença de matéria magnética não massiva parece, à primeira vista, levar a uma polarização de vácuo significativa e a efeitos que violariam a conjugação de carga. Salam levantou questões sobre como realizar cálculos confiáveis diante desse cenário, tendo em vista que o regime seria não-perturbativo.

Como alternativa, A. Salam propôs uma modificação no *field strength*, semelhante à de Cabibbo-Ferrari, que envolvia dois tipos de fótons na teoria: os fótons magnéticos e os fótons elétricos. Nessa proposta, os fótons elétricos interagiriam com léptons e hádrons, mas não com matéria magnética; enquanto os fótons magnéticos interagiriam com hádrons e matéria magnética, mas não com léptons.

Adicionalmente, uma das hipóteses de A. Salam foi a eliminação da necessidade da condição de quantização de Dirac, uma vez que o problema de singularidade foi resolvido com a introdução do segundo potencial. Em suas conclusões, discutiu várias possibilidades, como a questão de o fóton magnético ser massivo ou não, implicações na física de partículas e as interações de mésons vetoriais.

2.3 Teoria de Perturbação para monopolos?

À vista disso, propomos aqui um modelo que incorpora as ideias de N. Cabibbo, E. Ferrari e A. Salam. Entretanto, é necessário verificar a viabilidade de descrever monopolos dentro do contexto da teoria de perturbação.

Apesar de toda a discussão sobre o modelo de Dirac para monopolos magnéticos, a prescrição por ele proposta torna-se incompatível com a teoria de perturbação. Embora seja possível buscar uma aproximação viável por meio da condição de quantização de Dirac, apresentada na equação (2.16), essa abordagem pode se tornar inviável diante das correções radiativas decorrentes do acoplamento superforte dos fótons aos monopolos magnéticos, como discutido por Arnulf Rabl em [22]. Dessa forma, tratar o monopolo de Dirac de maneira perturbativa está fora do escopo.

Adicionalmente, Timir Datta [23] demonstrou que o pequeno valor da constante de estrutura fina elétrica[2], responsável pela estabilidade e ligação dos sistemas eletrônicos, afeta os monopolos magnéticos de maneira contrária. Isso leva os sistemas formados por monopolos magnéticos de cargas opostas a colapsar.

Em 1996, Douglas Singleton [24] mostrou que a existência de um acoplamento magnético não-perturbativo tão intenso poderia provocar uma transição de fase, na qual a carga magnética seria confinada e, como consequência, o fóton se tornaria massivo. No entanto, a aparente ausência de evidências experimentais para a massa do fóton pode ser interpretada como um argumento contrário à existência de uma carga magnética abeliana grande e não-perturbativa como a do tipo Dirac.

Trabalhos recentes, como o de Jan Govaerts [13], descrevem uma teoria eletromagnética estendida que não se restringe à condição de quantização de Dirac, abrindo possibilidades para setores "*dark*" de cargas elétricas e magnéticas.

Embora os estudos de A. Rabl, T. Datta, D. Singleton e J. Govaerts não representem provas definitivas da inexistência de monopolos do tipo Dirac, nosso modelo é construído com base em algumas hipóteses. Assumimos, como hipótese principal, que a carga magnética e a carga elétrica não possuem relações, isto é, não consideramos a condição de quantização de Dirac em nosso trabalho, permitindo um estudo em teoria de perturbação. Utilizaremos o *field strength* de Cabibbo-Ferrari, evitando as *strings* de Dirac. Como proposta central, nossa teoria descreve a interação de um campo espinorial de spin $1/2$, com carga elétrica e magnética, ou seja, um *dyon*.

[2] A constante de estrutura fina é dada por $\alpha_e = 1/137$.

3 Simetria BRS e Renormalização Algébrica

Neste capítulo temos como objetivo formular o procedimento de Renormalização Algébrica, um esquema iterativo geral desenvolvido por Carlo Becchi, Alain Rouet e Raymond Stora, a qual será nosso método para o estudo completo do modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam no nível quântico que se seguirá neste trabalho.

No contexto da nossa construção, consideraremos a ação de Yang-Mills, uma teoria não-abeliana cujos primeiros resultados sólidos em renormalização foram obtidos por G. 't Hooft e M. Veltman em 1972 [25]. Vale ressaltar que esses avanços foram alcançados graças ao procedimento de Faddeev-Popov [26], que lida com os graus de liberdade redundantes nos campos de *gauge* em teorias não-abelianas.

Anos mais tarde, a renormalização foi provada por meio do método algébrico desenvolvido por C. Becchi, A. Rouet e R. Stora nos trabalhos de 1974 [27] e 1976 [28]. Eles descobriram que a ação de Yang-Mills possuía uma simetria adicional à simetria de calibre, conhecida posteriormente como simetria BRS. Com essa nova simetria estabelecida, eles demonstraram a consistência da teoria, ao garantir a relação entre a invariância BRS e a unitariedade da matriz S[1].

Além disso, T. Kugo e I. Ojima demonstraram em 1978 [29, 30], por meio do procedimento BRS, a construção de um subespaço físico com norma positiva, de maneira semelhante ao formalismo de Gupta-Bleuler, utilizando a carga de BRS obtida pelo teorema de Noether. Eles também provaram a independência de *gauge* dos observáveis físicos.

A força desse método algébrico é tamanha que a prova de renormalização se aplica iterativamente a todas as ordens na teoria de perturbação, sendo independente do procedimento de regularização utilizado (regularização dimensional, Pauli-Villars,...). Isso ocorre porque não existe um método de regularização que respeite simultaneamente a localidade, unitariedade e as simetrias da teoria. Por exemplo, a regularização de Pauli-Villars é local, mas viola a unitariedade para energias acima da massa reguladora e também quebra a invariância BRS. Em outras palavras, ao regularizar, inevitavelmente abandonamos algum aspecto da teoria para cancelar as divergências que surgem nos cálculos de loops [31]. De forma ingênua, pode-se pensar que ao remover a regularização, a simetria seria automaticamente restaurada, entretanto, o que pode ocorrer é uma quebra da simetria BRS, isto é, anomalia.

Seja um grupo de Lie, os campos de *gauge* tomados na representação adjunta são

[1] Conhecida como matriz de espalhamento, a qual está intrinsecamente ligada à probabilidade de o sistema ser encontrado em um determinado estado final.

dados por:

$$A_\mu = A^a_\mu \tau_a \tag{3.1}$$

em que os geradores do grupo τ_a obedecem:

$$[\tau_a, \tau_b] = \imath f_{abc}\tau_c, \qquad Tr(\tau_a \tau_b) = \frac{\delta_{ab}}{2} \tag{3.2}$$

as constantes de estrutura f_{abc} é uma quantidade antissimétrica e satisfaz a relação de Jacobi

$$f^{abc}f^{cde} + f^{adc}f^{ceb} + f^{aec}f^{cbd} = 0. \tag{3.3}$$

Dessa forma, temos a ação de Yang-Mills,

$$\Sigma_{YM} = Tr\int d^4x \left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right) \tag{3.4}$$

o *field strength* definido como

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{3.5}$$

Essa ação é então invariante sob as transformações de BRS:

$$\begin{cases} sA^a_\mu = D^{ab}_\mu c^b = \partial_\mu c^a + gf^{abc}A^c_\mu c^b \\ sc^a = \dfrac{g}{2}f^{abc}c^b c^c \end{cases}, \qquad \begin{cases} s\bar{c}^a = b^a \\ sb^a = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

onde s é o operador de BRS que é nilpotente, isto é,

$$s^2 = 0 \tag{3.7}$$

que é verificado usando a identidade de Jacobi. Os campos c e $\bar{c}$ são respectivamente os *ghost* e *anti-ghost* de Faddeev-Popov[2], o campo b é o campo de Nakanishi-Lautrup que atua como multiplicador de Lagrange, $\bar{c}$ e b formam o chamado dubleto de BRS [32].

Uma vez concluídas as apresentações, é necessário proceder à fixação de calibre para controlar a contagem redundante das configurações do campo A^a_μ, dado que existe toda uma classe de configurações conectadas pelas transformações de *gauge* (ver Apêndice A). Isso pode ser feito pelo procedimento de Faddeev-Popov, como já mencionado. No entanto, há um caminho naturalmente satisfatório a seguir utilizando o procedimento BRS. Após estabelecermos as transformações BRS, podemos, devido à nilpotência de s, definir uma ação de *gauge-fixing* dada por:

$$\Sigma_{gf} = s\int d^4x\, \bar{c}^a I\left(A^a_{\mu,}, c^a, \bar{c}^a, b^a\right) \tag{3.8}$$

onde I é uma função dos campos e definida conforme a escolha específica para a fixação de calibre. Uma escolha apropriada e bem conhecida é, por exemplo, o *gauge* linear covariante

$$I = \partial^\mu A^a_\mu + \frac{\alpha}{2}b^a, \tag{3.9}$$

[2] Campos escalares que obedecem à estatística de Fermi-Dirac.

e usando-se tal função pode-se chegar a ação de *gauge-fixing*:

$$\Sigma_{gf} = \int d^4x \, \left(b^a \partial^\mu A^a_\mu + \frac{\alpha}{2} b^a b^a - \bar{c}^a \partial^\mu D^{ac}_\mu c^c \right) \tag{3.10}$$

Pela Equação (3.8), temos uma forma geral para a ação de *gauge-fixing* dependendo apenas de escolher o mais apropriado para o modelo, e ainda dizemos que ela é um termo trivial da cohomologia do operador de BRS e, portanto, os parâmetros da fixação de calibre aparecem apenas no setor não-físico da teoria e assim os observáveis não dependem desses parâmetros.

Para controlar, no nível quântico, a renormalização das transformações BRS não lineares[3] dos campos A^a_μ e c^a, devemos introduzir os campos externos invariantes sob BRS, A^{*a}_μ e c^{*a}, conhecidos também como anticampos. Esta adição é feita a partir da ação:

$$\Sigma_{Ext} = \int d^4x \left\{ -A^{*a}_\mu s A^\mu + c^{*a} s c^a \right\}. \tag{3.11}$$

A ação total invariante de BRS é dada por:

$$\Sigma = \Sigma_{YM} + \Sigma_{gf} + \Sigma_{Ext}, \tag{3.12}$$

ação que possui um novo número quântico a ser considerado, o chamado número de ghost (carga de Faddeev-Popov) $\Phi\Pi$. Os números de *ghost* associados aos campos estão listados na Tabela 3.1.

	A_μ	c	$\bar{c}$	b	A^*_μ	c^*
$\Phi\Pi$	0	1	-1	0	-1	-2
dim. UV	1	0	2	2	3	4

Tabela 3.1 – dimensão ultravioleta e número de ghost

Sabendo que a ação inicial de Yang-Mills possui número de *ghost* igual a zero, a ação total (3.12) também preserva esse número de *ghost* igual a zero. Além disso, o operador BRS, s, possui número de *ghost* igual a 1, e sua ação sobre os campos aumenta o número de *ghost* em uma unidade.

Dando prosseguimento, a invariância de BRS, $s\Sigma = 0$, pode ser expresso por uma identidade funcional, a chamada identidade de Slavnov-Taylor:

$$\mathcal{S}(\Sigma) = 0, \tag{3.13}$$

onde o operador de Slavnov-Taylor é dado por:

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \, \sum_{\Phi_i} (s\Phi_i) \frac{\delta \Sigma}{\delta \Phi_i} = 0, \tag{3.14}$$

onde $\Phi_k = \left(A_\mu, b, c, \bar{c}, A^*_\mu, c^* \right)$. Portanto,

[3] Produtos de dois campos no mesmo ponto.

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left\{ (sA^a_\mu)\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu} + (sc^a)\frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + (s\bar{c}^a)\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} + (sb^a)\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} + (sA^{*a}_\mu)\frac{\delta\Sigma}{\delta A^{*a}_\mu} \right.$$
$$\left. +(sc^{*a})\frac{\delta\Sigma}{\delta c^{*a}} \right\} = 0$$
$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Sigma}{\delta A^{*a}_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^{*a}}\frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + b^a\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} \right\} = 0. \tag{3.15}$$

A partir da identidade de Slavnov-Taylor, pode-se obter um novo operador que se mostrará útil ao nosso propósito. Ao realizar uma pequena variação na ação, ou seja, $\mathcal{S}(\Sigma + \epsilon\mathcal{F}) = 0$, onde $\mathcal{F}$ é um funcional e ϵ é um parâmetro infinitesimal, isto implica que $\mathcal{S}_\Sigma\mathcal{F} = 0$. Dessa forma, obtemos o operador de Slavnov-Taylor linearizado:

$$\mathcal{S}_\Sigma = \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Sigma}{\delta A^{*a}_\mu}\frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta}{\delta A^{*a}_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^{*a}}\frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta c^{*a}} + b^a\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} \right\}. \tag{3.16}$$

A partir de (3.15) e (3.16) segue-se que as próximas identidades de nilpotência se verificam:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0, &\quad \forall\mathcal{F} \\ \mathcal{S}_\mathcal{F}\mathcal{S}_\mathcal{F} = 0, &\quad \text{se} \quad \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $\mathcal{F}$ é um funcional qualquer.

Algumas outras identidades são usadas para descrever de maneira completa nosso modelo, tais como a condição de *gauge-fixing*,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} = \partial^\mu A^a_\mu + \alpha b^a; \tag{3.18}$$

e a equação de *ghost*

$$\mathcal{G}\Sigma = 0, \quad \mathcal{G} = \frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} + \partial_\mu\frac{\delta}{\delta A^{*a}_\mu}. \tag{3.19}$$

O esquema de renormalização algébrica é baseado no princípio de ação quântica (QAP — *Quantum Action Principle*), uma generalização do princípio de ação clássico que leva em conta as flutuações quânticas. Esse princípio nos fornece a resposta da teoria a variações (infinitesimais) das condições externas, como variações de parâmetros (constantes de acoplamentos, massas,...) ou campos [32].

Seja uma ação clássica qualquer, $\Gamma^0 = \Sigma$, que obedece a uma identidade de Ward, associado a uma simetria contínua, escrita como:

$$W(\Gamma^{(0)}) = \Delta, \tag{3.20}$$

onde W é o operador de Ward que realiza funcionalmente a simetria, Δ, representa uma quebra em funções dos campos quânticos e das fontes. Agora, considere o funcional de vértice quântico Γ, obtido a partir da ação clássica Σ por meio de um procedimento de regularização não especificado, cuja expansão formal em séries de $\hbar$ é:

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \mathcal{O}(\hbar^n) \qquad n \geq 1, \tag{3.21}$$

pelo princípio de ação quântica, podemos escrever então para tal funcional de vértice,

$$W(\Gamma) = \Delta \cdot \Gamma = \Delta + \hbar^n \Delta^n + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \qquad n \geq 1, \tag{3.22}$$

onde Δ^n é um polinômio integrado local dos campos e fontes, a qual os números quânticos são determinados pela natureza do operador W.

Dito isso, podemos aplicar a identidade de Slavnov-Taylor, à qual a ação clássica obedece na equação (3.15). Assumindo-se que o funcional de vértice Γ obedece à identidade de Slavnov-Taylor até ordem $n-1$ em $\hbar$. Assim, ocorrerá a quebra em ordem n de $\hbar$. Para isso, utilizamos a QAP (3.22), onde:

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}). \tag{3.23}$$

Usando a expansão fornecida pela equação (3.21) no operador de Slavnov-Taylor linearizado, obteremos:

$$\mathcal{S}_\Gamma = \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} + \mathcal{O}(\hbar) \tag{3.24}$$

Utilizando a relação da equação (3.17), temos:

$$\mathcal{S}_\Gamma \mathcal{S}(\Gamma) = 0 \tag{3.25}$$

$$\left(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} + \mathcal{O}(\hbar)\right)\left(\hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\right) = 0 \tag{3.26}$$

Assim, o possível termo de anomalia obedece à relação:

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta = 0 \tag{3.27}$$

Essa relação é chamada de condição de consistência de Wess-Zumino. Voltando-se agora ao caso de Yang-Mills, o polinômio local integrado Δ, limitado pela dimensão 4, possui propriedades que advêm do operador de Slavnov-Taylor. Além disso, com base nas identidades (3.18) e (3.19):

$$\frac{\delta \Delta}{\delta b^a} = \mathcal{G}\Delta = 0. \tag{3.28}$$

Portanto, para o modelo de Yang-Mills, o possível termo de anomalia será agora uma função de $(A_\mu, c, \bar{c}, A^*_\mu, c^*)$, e nossa tarefa é buscar a forma mais geral de Δ e averiguar se há ou não anomalia.

Para finalizar a análise do modelo, outro ponto importante é verificar a estabilidade da ação em relação às correções radiativas, ou seja, a renormalizabilidade multiplicativa da teoria. Para verificar se a ação é perturbativamente estável, assumimos que $\Gamma^{(0)}$ é perturbado por um funcional local Γ^{ct}(contratermos) integrado nos campos e fontes externas, isto é:

$$\Gamma^{(0)} \longrightarrow \Gamma^{(0)} + \epsilon \Gamma^{ct} \tag{3.29}$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal. Mediante essa perturbação, se a identidade de Slavnov-Taylor se mantém, portanto, no caso de não haver anomalia, teremos:

$$\mathcal{S}(\Gamma^0 + \epsilon\Gamma^{ct}) = \mathcal{S}(\Gamma^0) + \epsilon\mathcal{S}_{\Gamma^0}\Gamma^{ct} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \tag{3.30}$$

Isso nos leva à condição que a ação de contratermos Γ^{ct} deve obedecer, a identidade de Slavnov-Taylor (3.15):

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Gamma^{ct} = 0. \tag{3.31}$$

Além disso, outras restrições as quais Γ^{ct} pode estar submetida (como condições de calibre e equações de *ghost*) devem ser consideradas. Queremos saber se, por meio de redefinições de campos $(A^a_\mu, c^a, \bar{c}^a, b^a)$, fontes externas (A^{*a}_μ, c^{*a}) e parâmetros (g, α), a ação Γ^{ct} pode ser redefinida a partir da ação a *tree-level* $\Gamma^{(0)}$.

Note que encontramos duas equações, (3.27) e (3.31), que são bastante semelhantes. A primeira reflete a condição de consistência de Wess-Zumino para o possível termo de anomalia $(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Delta = 0)$, enquanto a segunda trata da invariância de Slavnov-Taylor para os contratermos $(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Gamma^{ct} = 0)$. Ambas as equações implicam um dos conceitos fundamentais do procedimento de renormalização algébrica: o estudo da cohomologia [33, 32, 31].

Um problema de cohomologia consiste em resolver uma equação linear do tipo:

$$s\Omega = 0 \tag{3.32}$$

onde o operador linear s é nilpotente $(s^2 = 0)$. A solução para este problema é dada pelas classes de equivalência $\Omega \; mod \; s\Lambda$ [31]. Isso pode ser expresso como:

$$\Omega = \tilde{\Omega} + s\Lambda \tag{3.33}$$

desde que, $s\tilde{\Omega} = 0$, as classes de equivalência das soluções de Ω formam um espaço linear conhecido como a cohomologia do operador s, $H(s)$, definido por [33]:

$$H(s) \equiv \frac{\text{Ker}(s)}{\text{Img}(s)} \tag{3.34}$$

Dessa forma, a imagem de s está contido no *kernel* de s, $\text{Img}(s) \subseteq \text{Ker}(s)$[4]. Assumindo a prescrição Ω^g, onde g representa o número de *ghosts* e $H^g(s)$ a cohomologia de s, a possível anomalia se configura como um problema de cohomologia no setor de número de *ghost* igual a 1, enquanto a estabilidade é um problema de cohomologia no setor de número de *ghost* igual a 0.

Nossa tarefa no capítulo (5) é discutir a busca pelos possíveis termos de anomalia, Δ, e contratermos, Γ^{ct}, para o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam. É importante ressaltar novamente que o procedimento de renormalização algébrica é, de fato, um método poderoso que garante a prova de maneira iterativa em todas as ordens em teoria de perturbação.

[4] $\text{Img}(s) = \{\text{seja } w, \text{ tal que, existe um } u \text{ de forma que } su = w\}$, $\ker(s) = \{\text{seja } u, \text{ tal que, } su = 0\}$.

4 O modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam

Neste capítulo, definiremos o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam, que é o foco deste trabalho. Assumiremos, conforme discutido no Capítulo 2, que a condição de quantização de Dirac não será considerada, seguindo a proposta de A. Salam. Também abordaremos a eliminação da *string* de Dirac por meio da formulação do tipo Cabibbo-Ferrari. Além disso, consideramos que o campo de matéria analisado é um campo espinorial massivo que contém ambas as cargas: elétrica e magnética, ou seja, consideramos nosso modelo para um dyon. Há um interesse em modelos com este tipo de simetria de calibre investigando modelos de *dark/hidden photons* [34, 35, 36].

4.1 Definindo as simetrias

Assumindo, por hipótese, a existência de monopolos magnéticos, as equações de Maxwell são substituídas por um novo conjunto de equações que descrevem o *field strength* $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ do eletromagnetismo clássico. Podemos interpretar essa modificação como a inserção de um 4-vetor de corrente magnética, g^{μ}, nas equações homogêneas de Maxwell, da seguinte forma:

$$\partial_{\mu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = j^{\nu} \tag{4.1}$$

$$\partial_{\mu}\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = g^{\nu} \tag{4.2}$$

onde j^{ν} é o 4-vetor de corrente elétrica. O tensor dual $\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$ é dado por:

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

Utilizando o formalismo de dois potenciais, o tensor contravariante de Cabibbo-Ferrari, $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, é dado por [5]:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma} \tag{4.4}$$

Usando a natureza do tensor de Levi-Civita em quatro dimensões, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, o tensor covariante é dado por:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^{\rho}B^{\sigma}. \tag{4.5}$$

Aqui, A_{μ} é o 4-vetor usual, enquanto B_{μ} é o novo 4-vetor introduzido pela solução de Cabibbo-Ferrari. A introdução do segundo potencial visa evitar o problema de singularidade, isto é, a *string* de Dirac. Além disso, A_{μ} transforma-se como um 4-vetor, enquanto, pela presença do tensor de Levi-Civita que acompanha B_{μ} no segundo termo, observamos que B_{μ} se comporta como um pseudo 4-vetor (vetor axial).

A ação do modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam (CFS) é inicialmente dada por:

$$\Sigma_{CFS} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\imath\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi \right] \tag{4.6}$$

Essa ação é invariante sob o grupo de simetria de *gauge* $U(1)\times U(1)$, com as seguintes transformações de calibre:

$$\delta_{\theta}A_{\mu} = -\partial_{\mu}\theta \quad \delta_{\theta}B_{\mu} = 0 \quad \delta_{\theta}\psi = -\imath e\theta\psi \quad \delta_{\theta}\bar{\psi} = \imath e\theta\bar{\psi} \tag{4.7}$$

$$\delta_{\chi}A_{\mu} = 0 \quad \delta_{\chi}B_{\mu} = -\partial_{\mu}\chi \quad \delta_{\chi}\psi = -\imath g\chi\psi \quad \delta_{\chi}\bar{\psi} = \imath g\chi\bar{\psi} \tag{4.8}$$

onde θ e χ são parâmetros infinitesimais locais.

O campo ψ representa um campo de matéria fermiônico massivo, associado a uma partícula com carga elétrica e e carga magnética g, e parâmetro de massa m. A derivada usual ∂_{μ}, é substituída pela derivada covariante D_{μ}, definida como:

$$\partial_{\mu} \longrightarrow D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - \imath eA_{\mu} - \imath gB_{\mu}. \tag{4.9}$$

Reescrevendo o *field strength* de Cabibbo-Ferrari,

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma} \tag{4.10}$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$.

Analisando o termo cinético $\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ isolado da ação CFS, temos:

$$\begin{aligned}
\int d^4x\ \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \int d^4x \left(F_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta}\right)\left(F^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma}\right) \\
&= \int d^4x \left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \underbrace{F_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma}}_{\blacklozenge} - \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta}F^{\mu\nu}}_{\blacklozenge} - \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma}}_{\bigstar} \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

usando as propriedades do tensor de Levi-Civita[1] no termo $\bigstar$ acima, temos

$$\begin{aligned}
\int d^4x(\underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma}}_{\bigstar}) &= \int d^4x\ \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta}\right)\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma}\right) \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta} + \varepsilon_{\mu\nu\delta\lambda}\partial^{\delta}B^{\lambda}\right)\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma} + \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\partial_{\sigma}B_{\rho}\right) \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\lambda}B^{\delta} - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\partial^{\delta}B^{\lambda}\right)\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}B_{\sigma} - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\sigma}B_{\rho}\right) \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\partial^{\lambda}B^{\delta} - \partial^{\delta}B^{\lambda}\right)\left(\partial_{\rho}B_{\sigma} - \partial_{\sigma}B_{\rho}\right) \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^{\lambda\delta}G_{\rho\sigma} \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{4}[-2(\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\delta} - \delta^{\rho}_{\rho}\delta^{\sigma}_{\lambda})]G^{\lambda\delta}G_{\rho\sigma} \\
&= \int d^4x\ G^{\rho\sigma}G_{\rho\sigma},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

[1] $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = -2(\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\delta} - \delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\delta})$.

onde definimos na quinta linha $G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

O termo em ⧫ também é reescrito,

$$\begin{aligned}
\int d^4x(\underbrace{F_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho B_\sigma}_{\blacklozenge}) &= \int d^4x\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho B_\sigma)F_{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[\underbrace{\cancelto{0}{\partial_\rho(B_\sigma F_{\mu\nu})}}_{superficie} - B_\sigma(\partial_\rho F_{\mu\nu})\right] \\
&= -\int d^4x\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}B_\sigma(\partial_\rho F_{\mu\nu}) \\
&= -\int d^4x\ B_\sigma\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho F_{\mu\nu}) \\
&= \int d^4x\ B_\sigma\varepsilon^{\sigma\rho\mu\nu}(\partial_\rho F_{\mu\nu}) \\
&= \int d^4x\ B_\sigma\varepsilon^{\sigma\rho\mu\nu}\partial_\rho\partial_\mu A_\nu - \int d^4x\ B_\sigma\varepsilon^{\sigma\rho\mu\nu}\partial_\rho\partial_\nu A_\mu \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Na última linha, utilizamos o fato que o termo $\partial_\rho\partial_\mu A_\nu$ é simétrico em relação à troca $\rho \to \mu$, uma vez que as derivadas ∂_μ comutam, por outro lado, a presença do tensor de Levi-Civita, que é completamente antissimétrico, faz com que toda a expressão seja nula.

Portanto, a ação pode ser reescrita como:

$$\Sigma_{CFS} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu D_\mu - m)\psi\right] \tag{4.14}$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
G^{\mu\nu} &= \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \\
D_\mu &= \partial_\mu - \imath e A_\mu - \imath g B_\mu
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde e é a carga elétrica, g é a carga magnética, e m é o parâmetro de massa.

As equações de Euler-Lagrange são dadas por:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \imath e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \\
\partial_\mu G^{\mu\nu} &= \imath g\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \\
(\imath\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi &= 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Neste trabalho, assumiremos que A_μ e B_μ descrevem a propagação de dois tipos de bósons não massivos. A partir deste ponto, nomearemos o bóson associado a A_μ como fóton, e o bóson associado a B_μ como meta-fóton.

4.1.1 Simetrias discretas

As simetrias discretas exigem algumas considerações. Como sugerido por N.F. Ramsey, com base no trabalho de Dirac, ele concluiu que, em uma teoria que inclua os efeitos de cargas magnéticas, o teorema usual CPT [37, 38, 39] deveria ser modificado para um teorema $MEPT$ [20], onde M representa a conjugação de carga magnética, E a conjugação de carga elétrica, T a reversão temporal, e P a transformação de paridade.

Podemos expressar o teorema de várias formas; aqui por termos a presença de um *dyon*, escolhemos a forma:

$$C'PT \tag{4.17}$$

onde $C' = ME$, inclui ambas as conjugações de carga: a conjugação de carga elétrica (E) e a conjugação de carga magnética (M). Além disso, tratamos a carga magnética g nas equações fundamentais como um pseudoescalar em relação às transformações de paridade P e reversão temporal T, enquanto a carga elétrica e é considerada um escalar.

Conjugação de Cargas C': Considerando a representação de Dirac para as matrizes-γ [40], essa operação é dada por:

$$\begin{array}{cc} \psi \overset{C'}{\to} \psi^{C'} = C'\bar{\psi}^T & \bar{\psi} \overset{C'}{\to} \bar{\psi}^{C'} = -\psi^T C'^{-1} \\ A_\mu \overset{C'}{\to} A_\mu^{C'} = -A_\mu & B^\mu \overset{C'}{\to} B_\mu^{C'} = -B_\mu \\ C'(\gamma^\mu)^T C'^{-1} = -\gamma^\mu & C'(\gamma^5)^T C'^{-1} = \gamma^5 \end{array} \tag{4.18}$$

onde C', é assumido aqui como uma matriz de conjugação de carga total, que conjuga simultaneamente a carga elétrica e magnética e obedece a $C'^2 = 1$.

Paridade P:

$$\begin{aligned} & x = (x^0, \mathbf{x}) \overset{P}{\to} x^P = (x^0, -\mathbf{x}) \\ & \psi \xrightarrow{P} \psi^P = \gamma^0\psi, \quad \bar{\psi} \xrightarrow{P} \bar{\psi}^P = \bar{\psi}\gamma^0 \\ & A_\mu \xrightarrow{P} A^\mu, \quad B_\mu \xrightarrow{P} -B^\mu \\ & e \xrightarrow{P} e, \quad g \xrightarrow{P} -g \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde P é a matriz de paridade usual, e obedece $P^2 = 1$.

Reversão temporal T:

$$\begin{aligned} & x = (x^0, \mathbf{x}) \xrightarrow{T} x^T = (-x^0, \mathbf{x}) \\ & \psi \xrightarrow{T} \psi^T = \gamma^1\gamma^3\psi, \quad \bar{\psi} \xrightarrow{T} \bar{\psi}^T = \bar{\psi}[-\gamma^1\gamma^3] \\ & A_\mu \xrightarrow{T} A^\mu, \quad B_\mu \xrightarrow{T} -B^\mu \\ & e \xrightarrow{T} e, \quad g \xrightarrow{T} -g \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde T é a matriz de reversão temporal usual sendo anti-unitária obedecendo $T^2 = 1$.

A ação Σ_{CFS} mediante as transformações discretas definidas anteriormente em (4.18)-(4.20), se comportam como se segue na Tabela 4.1

	P	T	C'
$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	$(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})(x^P)$	$(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})(x^T)$	$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
$G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$	$(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})(x^P)$	$(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})(x^T)$	$G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$
$\imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	$\imath(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)(x^P)$	$\imath(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)(x^T)$	$\imath\bar{\psi}\,\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}\,\psi$
$m\bar{\psi}\psi$	$m(\bar{\psi}\psi)(x^P)$	$m(\bar{\psi}\psi)(x^T)$	$m\bar{\psi}\psi$
$e\bar{\psi}\not{A}\psi$	$e(\bar{\psi}\not{A}\psi)(x^P)$	$e(\bar{\psi}\not{A}\psi)(x^T)$	$e\bar{\psi}\not{A}\gamma^\mu\psi$
$g\bar{\psi}\not{B}\psi$	$g(\bar{\psi}\not{B}\psi)(x^P)$	$g(\bar{\psi}\not{B}\psi)(x^T)$	$g\bar{\psi}\not{B}\psi$

Tabela 4.1 – Transformações C', P e T

Verificamos que a ação Σ_{CFS} exibe uma invariância sob C', P, T e $C'PT$.

4.1.2 Simetria de dualidade discreta

Notamos ainda que, a ação (4.14) é invariante sob a seguinte troca discretas nos campos e constantes de acoplamentos (simetria de dualidade discreta):

$$\begin{matrix} A_\mu \longrightarrow B_\mu, & B_\mu \longrightarrow A_\mu \\ e \longrightarrow g, & g \longrightarrow e \end{matrix} \Rightarrow \Sigma_{CFS} \longrightarrow \Sigma_{CFS}. \tag{4.21}$$

Todas as simetrias discretas coletadas serão úteis não só como parte fundamental da definição do modelo como também através do princípio de ação quântica (QAP) para o estudo da renormalização do modelo.

4.1.3 Simetria de dualidade continua

A dualidade na teoria eletromagnética clássica foi descoberta por Heaviside para as equações de Maxwell no vácuo:

$$\mathbf{E} \to \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B} \to -\mathbf{E}. \tag{4.22}$$

Larmor generalizou a dualidade descoberta por Heaviside para uma transformação contínua, tendo isso mente, podemos construir para a ação Σ_{CFS}, a transformação de dualidade contínua. Seja, a matriz de transformação dada por:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{4.23}$$

para os campos vetoriais (A_μ, B_μ) e as cargas (e, g), temos:

$$\begin{bmatrix} A'_\mu \\ B'_\mu \end{bmatrix} = M(\theta) \begin{bmatrix} A_\mu \\ B_\mu \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} e' \\ g' \end{bmatrix} = M(\theta) \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

utilizando essas transformações, podemos identificar as seguintes mudanças:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \cos\theta F^{\mu\nu} - \sin\theta G^{\mu\nu} \tag{4.25}$$

$$G^{\mu\nu} \longrightarrow \sin\theta F^{\mu\nu} + \cos\theta G^{\mu\nu} \tag{4.26}$$

substituindo no termo cinético da ação, temos:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4}(\cos^2\theta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\sin\theta\cos\theta F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \sin^2\theta G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \tag{4.27}$$
$$-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4}(\sin^2\theta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\sin\theta\cos\theta F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \cos^2\theta G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \tag{4.28}$$

utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}, \tag{4.29}$$

obtemos que a parte cinética é invariante sob transformações de dualidade contínua.

Para a parte de interação da ação, temos:

$$e\bar{\psi}\not{A}\psi \longrightarrow \cos^2\theta(e\bar{\psi}\not{A}\psi) - \cos\theta\sin\theta(e\bar{\psi}\not{B}\psi + g\bar{\psi}\not{A}\psi) + \sin^2\theta(g\bar{\psi}\not{B}\psi), \tag{4.30}$$
$$g\bar{\psi}\not{B}\psi \longrightarrow \sin^2\theta(e\bar{\psi}\not{A}\psi) + \cos\theta\sin\theta(e\bar{\psi}\not{B}\psi + g\bar{\psi}\not{A}\psi) + \cos^2\theta(g\bar{\psi}\not{B}\psi), \tag{4.31}$$

de forma similar, utilizamos a identidade trigonométrica, e obtemos:

$$e\bar{\psi}\not{A}\psi + g\bar{\psi}\not{B}\psi \longrightarrow e\bar{\psi}\not{A}\psi + g\bar{\psi}\not{B}\psi. \tag{4.32}$$

Concluímos, portanto, que a ação Σ_{CFS}(4.14) é invariante sob as transformações de dualidade continuas definidas em (4.24).

4.1.4 Simetrias de *gauge*

A ação (4.14) é invariante sob dois conjuntos de transformações de *gauge*, δ_θ e δ_χ:

$$\delta_\theta A_\mu = -\partial_\mu\theta, \quad \delta_\theta B_\mu = 0, \quad \delta_\theta\psi = -\imath e\theta\psi, \quad \delta_\theta\bar{\psi} = \imath e\theta\bar{\psi}, \tag{4.33}$$
$$\delta_\chi A_\mu = 0, \quad \delta_\chi B_\mu = -\partial_\mu\chi, \quad \delta_\chi\psi = -\imath g\chi\psi, \quad \delta_\chi\bar{\psi} = \imath g\chi\bar{\psi}, \tag{4.34}$$

onde θ e χ são parâmetros infinitesimais locais.

$$\begin{aligned}
\delta_\theta\Sigma_{CFS} &= \delta_\theta\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu D_\mu - m)\psi\right]\\
&= \int d^4x\left[-\frac{1}{2}(\delta_\theta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\delta_\theta G_{\mu\nu})G^{\mu\nu} + \delta_\theta[\bar{\psi}(\imath\gamma^\mu D_\mu - m)\psi]\right]\\
&= \int d^4x\left[\imath\delta_\theta(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + e\delta_\theta(\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi) + g\delta_\theta(\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi) - m\delta_\theta(\bar{\psi}\psi)\right]\\
&= \int d^4x\Big[\imath(\delta_\theta\bar{\psi})\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(\delta_\theta\psi) + e(\delta_\theta\bar{\psi})\gamma^\mu A_\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu(\delta_\theta A_\mu)\psi\\
&\qquad + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu(\delta_\theta\psi) + g(\delta_\theta\bar{\psi})\gamma^\mu B_\mu\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu(\delta_\theta\psi) - m(\delta_\theta\bar{\psi})\psi - m\bar{\psi}(\delta_\theta\psi)\Big]\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

igualmente para as transformações (4.34) a ação é invariante

$$\delta_\chi\Sigma_{CFS} = 0. \tag{4.36}$$

Sabe-se que, enquanto existirem invariâncias de calibre, a quantização dos campos de calibre abelianos apresenta problemas relacionados aos graus de liberdade espúrios, isto é, aqueles que nos levam a estados de norma negativa. A solução para esse problema foi encontrada por Suraj N. Gupta [41] e Konrad Bleuler [42] na década de 1950, identificando um subespaço do espaço de Fock que contém os estados físicos.

Embora lidemos com uma teoria abeliana neste trabalho, optamos por não utilizar o método de Gupta-Bleuler. Em vez disso, adotaremos o método desenvolvido por L. Faddeev e V.N. Popov, uma vez que o procedimento de renormalização algébrica, que inclui os *ghosts* de Faddeev-Popov, será empregado. Esse procedimento pode ser realizado com a adição de um novo termo na ação, S_{gf}, cuja função é controlar a contagem excessiva de graus de liberdade no espaço de configurações, ou seja,

$$S_{gf} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{1}{2\beta} \left(\partial_\mu B^\mu\right)^2 \right]. \tag{4.37}$$

Nesse caso, a simetria de *gauge* é quebrada, isto é:

$$\begin{aligned} \delta_\theta S_{gf} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} \delta_\theta \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{1}{2\beta} \delta_\theta \left(\partial_\mu B^\mu\right)^2 \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{\alpha} \left(\partial_\mu A^\mu\right) \partial_\mu \partial^\mu \theta \right] \\ &= \int \ d^4x \ \frac{\theta}{\alpha} \Box (\partial_\mu A^\mu), \end{aligned} \tag{4.38}$$

similarmente para as transformações (4.33):

$$\delta_\chi S_{gf} = \int \ d^4x \ \frac{\chi}{\beta} \Box (\partial_\mu B^\mu) \tag{4.39}$$

No entanto, apesar de haver quebra na simetria de calibre, a ação do modelo possui uma nova simetria, a simetria BRS.

4.1.5 Simetria BRS

As transformações de BRS (Becchi-Rouet-Stora) dos campos A_μ, B_μ, ψ e $\bar{\psi}$ são definidas por:

$$\begin{aligned} & sA_\mu = -\partial_\mu c, \quad sB_\mu = -\partial_\mu \xi; \\ & s\psi = -\imath(ec + g\xi)\psi, \quad s\bar{\psi} = \imath(ec + g\xi)\bar{\psi}; \\ & sc = 0, \quad s\xi = 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde c e ξ são os *ghosts* de Faddeev-Popov com número de *ghost* $+1$.

Com a inclusão dos ghosts de Faddeev-Popov (c,ξ), é necessário também introduzir os anti-ghosts ($\bar{c}$,$\bar{\xi}$), e os campos de Nakanishi-Lautrup (b,π) [43, 44, 45], que atuam como multiplicadores de Lagrange para as condições de calibre. Dessa forma, introduzimos os dubletos de BRS:

$$\begin{aligned} s\bar{c} &= b, \quad sb = 0; \\ s\bar{\xi} &= \pi, \quad s\pi = 0; \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde os anti-*ghosts* têm número de *ghost* -1, enquanto os campos de Nakanishi-Lautrup têm número de *ghost* 0.

O operador de BRS s possui a propriedade de nilpotência, isto é,

$$s^2 = 0 \tag{4.42}$$

e isso é verificado para o conjunto de transformações de BRS (4.40) e (4.41).

Um *gauge* covariante linear é escolhido e uma ação de *gauge-fixing* é introduzida via procedimento BRS. As condições de *gauge-fixing* para um *gauge* covariante linear são dados por:

$$\frac{\delta\Sigma_{gf}}{\delta b} = \partial^\mu A_\mu + \alpha b, \tag{4.43}$$

$$\frac{\delta\Sigma_{gf}}{\delta \pi} = \partial^\mu B_\mu + \beta \pi, \tag{4.44}$$

onde α e β são respectivamente os parâmetros de fixação de calibre que a princípio podem ser escolhidos livremente.

A ação de *gauge-fixing* é introduzida via procedimento de BRS, assim como na Equação (3.8), isto é:

$$\begin{aligned} \Sigma_{gf} &= s\int d^4x \left[\bar{c}\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha\bar{c}b + \bar{\xi}\partial^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\beta\bar{\xi}\pi\right] \\ &= \int d^4x \left[b\partial^\mu A_\mu + \bar{c}\Box c + \frac{1}{2}\alpha b^2 + \pi\partial^\mu B_\mu + \bar{\xi}\Box\xi + \frac{1}{2}\beta\pi^2\right]. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Para controlar, no nível quântico, a renormalização das transformações de BRS não lineares de ψ e $\bar{\psi}$, devemos introduzir os anticampos(fontes externas) Y e $\bar{Y}$. Portanto, temos a ação de fontes externas:

$$\Sigma_{ext} = \int d^4x \left[\bar{Y}s\psi - s\bar{\psi}Y\right]. \tag{4.46}$$

Por fim, devido à presença dos campos de calibre sem massa A_μ e B_μ, adotamos o esquema de subtração de Lowenstein–Zimmermann no contexto do método de renormalização de Bogoliubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann–Lowenstein (BPHZL) [46], de modo a lidar com as divergências infravermelhas que surgem no processo de subtração das divergências ultravioletas.

A ação correspondente ao termo de massa de Lowenstein-Zimmermann para os campos de calibre, A_μ e B_μ, é escrita como:

$$\Sigma_{IR} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}M_A^2(s-1)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}M_B^2(s-1)B_\mu B^\mu\right], \tag{4.47}$$

onde os termos de massa de Lowenstein-Zimmermann, $M_A^2(s-1)$ e $M_B^2(s-1)$, permitem a utilização de um esquema de subtração no espaço dos momenta sem a introdução de singularidades infravermelhas espúrias. O parâmetro de Lowenstein-Zimmermann, s, é definido no intervalo $0 \leq s \leq 1$, e desempenha o papel de uma variável de subtração adicional (similar ao momento externo) no programa de renormalização BPHZL, de modo que a teoria que descreve partículas sem massa é recuperada para $s = 1$ [47].

Vale ressaltar que, no contexto da QED, apesar da inclusão dos termos de massa de Lowenstein–Zimmermann para os campos de calibre quebrar a invariância de calibre, as propriedades quânticas do modelo permanecem intactas. Essa é uma peculiaridade no caso abeliano [48], esse comportamento foi estudado detalhadamente no contexto da QED em [49, 50], utilizando o esquema BPHZL.

Embora os *ghosts* de Faddeev–Popov não sejam massivos, eles são campos livres que se desacoplam, de modo que não é necessário introduzir termos de massa de Lowenstein–Zimmermann para eles.

A ação de partida para o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam é dada por:

$$\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(0)}_{(s-1)} = \Sigma_{CFS} + \Sigma_{gf} + \Sigma_{ext} + \Sigma_{IR}, \tag{4.48}$$

e é de nosso interesse avaliar a invariância de BRS para essa ação. Para a ação de *gauge-fixing* temos:

$$\begin{aligned} s\Sigma_{gf} &= s\left\{ s\int d^4x \left[\bar{c}\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha\bar{c}b + \bar{\xi}\partial^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\beta\bar{\xi}\pi \right] \right\} \\ &= \underbrace{s^2}_{nilpotência} \int d^4x \left[\bar{c}\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha\bar{c}b + \bar{\xi}\partial^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\beta\bar{\xi}\pi \right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.49}$$

do mesmo modo, para ação externa,

$$\begin{aligned} s\Sigma_{ext} &= s\int d^4x \left[\bar{Y}s\psi - s\bar{\psi}Y \right] \\ &= \underbrace{s^2}_{nilpotência} \int d^4x \left[\bar{Y}\psi - \bar{\psi}Y \right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.50}$$

e a transformação de BRS para a ação de massa de Lowenstein-Zimmermann é:

$$\begin{aligned} s\Sigma_{IR} &= s\int d^4x \left[\frac{1}{2}M_A^2(s-1)A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}M_B^2(s-1)B_\mu B^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[-M_A^2(s-1)A^\mu\partial_\mu c - M_B^2(s-1)B^\mu\partial_\mu\xi \right] \\ &= (s-1)\Delta_{lin} \end{aligned} \tag{4.51}$$

sendo

$$\Delta_{lin} = \int d^4x \left[-M_A^2 A^\mu\partial_\mu c - M_B^2 B^\mu\partial_\mu\xi \right], \tag{4.52}$$

onde Δ_{lin} é uma quebra linear, pois os *ghosts* c e ξ são livres, sendo assim eles desacoplam.

Para a ação Σ_{CFS} definida em (4.14), temos:

$$
\begin{aligned}
s\Sigma_{CFS} &= s\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}+\bar{\psi}(\imath\gamma^\mu D_\mu-m)\psi\right]\\
&= \int d^4x\Bigg[-\frac{1}{2}\overbrace{(sF_{\mu\nu})}^{0}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\overbrace{(sG_{\mu\nu})}^{0}G^{\mu\nu}+\imath s(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)+es(\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)\\
&\qquad +gs(\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi)-ms(\bar{\psi}\psi)\Bigg]\\
&= \int d^4x\Big[\imath\left(s\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu s\psi\right)+e\left(s\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu sA_\mu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu s\psi\right)\\
&\qquad +g\left(s\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu sB_\mu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu s\psi\right)-m\left(s\bar{\psi}\psi-\bar{\psi}s\psi\right)\Big]\\
&= \int d^4x\Big[\imath\left(\imath(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\imath(ec+g\xi)\psi\right)\\
&\qquad +e\left(\imath(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu c\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\imath(ec+g\xi)\psi\right)\\
&\qquad +g\left(\imath(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\xi\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\imath(ec+g\xi)\psi\right)\\
&\qquad -m\left(\imath(ec+g\xi)\bar{\psi}\psi+\bar{\psi}\imath(ec+g\xi)\psi\right)\Big]\\
&= \int d^4x\Bigg[-\underbrace{(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi}_{\bullet}-\underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(ec+g\xi)\psi}_{\blacktriangle}-\underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu(ec+g\xi)\partial_\mu\psi}_{\bullet}\\
&\qquad +\imath e\underbrace{(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\blacktriangledown}+\underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu c\psi}_{\blacktriangle}+\imath e\underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu(ec+g\xi)\psi}_{\blacktriangledown}+\imath g\underbrace{(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi}_{\blacksquare}\\
&\qquad +\underbrace{g\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\xi\psi}_{\blacktriangle}+\imath g\underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu(ec+g\xi)\psi}_{\blacksquare}-\imath m\left((ec+g\xi)\bar{\psi}\psi+\bar{\psi}(ec+g\xi)\psi\right)\Bigg]\\
&= \int d^4x\Big[-\left((ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)\\
&\qquad -\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(ec+g\xi)\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(ec+g\xi)\psi\right)\\
&\qquad +\left(\imath e(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi-\imath e(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi\right)\\
&\qquad +\left(\imath g(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi-\imath g(ec+g\xi)\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi\right)-\imath m\left((ec+g\xi)\bar{\psi}\psi-(ec+g\xi)\bar{\psi}\psi\right)\Big]\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Finalmente, para cada termo da ação inicial, $\Gamma^{(0)}$ (4.48), podemos verificar que a ação é invariante sob transformações BRS, exceto por uma quebra linear proveniente da parte de Lowenstein-Zimmermann, isto é expresso por:

$$s\Gamma^{(0)} = s(\Sigma_{CFS}+\Sigma_{gf}+\Sigma_{ext}+\Sigma_{IR}) = (s-1)\Delta_{lin}. \tag{4.54}$$

Podemos recuperar a invariância BRS ao tomarmos $s=1$, resultando em:

$$s\Gamma^{(0)}\Big|_{s=1} = 0. \tag{4.55}$$

Por fim, a ação definida em (4.48), $\Gamma^{(0)}$, preserva o número de *ghost* igual a 0, e mantém as simetrias discretas C', P, T e $C'PT$. A partir de agora, essa será a ação que utilizaremos para nossas futuras análises. Além disso, podemos também definir como os campos de *ghosts*, Nakanishi-Lautrup e fontes externas se comportam sob a ação das transformações discretas C', P e T, conforme segue:

$$\begin{array}{ccc} \varphi \xrightarrow{C'} -\varphi, & \varphi \xrightarrow{P} \varphi, & \varphi \xrightarrow{T} -\varphi, \\ \Xi \xrightarrow{C'} -\Xi, & \Xi \xrightarrow{P} -\Xi, & \Xi \xrightarrow{T} \Xi, \\ Y \xrightarrow{C'} C'\bar{Y}^T, & Y \xrightarrow{P} \gamma^0 Y, & Y \xrightarrow{T} \gamma^1\gamma^3 Y, \\ \bar{Y} \xrightarrow{C'} -Y^T C'^{-1}, & \bar{Y} \xrightarrow{P} \bar{Y}\gamma^0, & \bar{Y} \xrightarrow{T} \bar{Y}[-\gamma^1\gamma^3] \end{array} \tag{4.56}$$

onde, para simplificação, definimos os conjuntos $\phi = \{c, \bar{c}, b\}$ e $\Xi = \{\xi, \bar{\xi}, \pi\}$.

4.2 Análise Espectral

Neste ponto, devemos analisar a unitariedade e a causalidade para garantir a consistência do modelo a *tree-level* e construir uma teoria quântica de campos coerente. A unitariedade está intimamente ligada à matriz-S e à conservação da probabilidade, um dos pilares fundamentais da mecânica quântica. Ela se refere à preservação de estados com norma positiva, os quais podem ser perdidos durante o processo de quantização, levando ao surgimento de estados de norma negativa, também conhecidos como estados não-físicos ou "fantasmas". Por outro lado, a causalidade, outro princípio fundamental da física, estabelece a correlação entre causa e efeito na evolução temporal dos eventos, garantindo que não há efeito antes da causa ou um efeito que ocorra simultaneamente à causa.

4.2.1 Propagadores

Tomando a parte livre da ação, $\Gamma^{(0)}_{free} = \Sigma_{CFS}|_{e=g=0} + \Sigma_{IR} + \Sigma_{gf}$, podemos obter os propagadores de todos os campos, onde a análise de unitariedade é feita a *tree-level* para o modelo CFS:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)}_{free} = \int d^4x \Big[& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}M_A^2(s-1)A_\mu A^\mu \\ & + \frac{1}{2}M_B^2(s-1)B_\mu B^\mu + b\partial^\mu A_\mu + \bar{c}\Box c + \frac{1}{2}\alpha b^2 + \pi\partial^\mu B_\mu + \bar{\xi}\Box\xi + \frac{1}{2}\beta\pi^2 \Big] \end{aligned} \tag{4.57}$$

onde, por meio dos operadores

$$\Theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box} \qquad \Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box} \tag{4.58}$$

que obedecem à álgebra na Tabela 4.2 (ver Apêndice B). Podemos reescrever a ação livre como:

	$\Theta^{\lambda\nu}$	$\Omega^{\lambda\nu}$
$\Theta_{\mu\lambda}$	${\Theta_\mu}^\nu$	0
$\Omega_{\mu\lambda}$	0	${\Omega_\mu}^\nu$

Tabela 4.2 – Operadores de projeção

$$\begin{aligned}\Gamma^{(0)}_{free} = \int d^4x \Big[&\frac{1}{2}A^\mu\Box\Theta_{\mu\nu}A^\nu + \frac{1}{2}B^\mu\Box\Theta_{\mu\nu}B^\nu + \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}M_A^2(s-1)A_\mu A^\mu \\ &+ \frac{1}{2}M_B^2(s-1)B_\mu B^\mu + b\partial^\mu A_\mu + \bar{c}\Box c + \frac{1}{2}\alpha b^2 + \pi\partial^\mu B_\mu + \bar{\xi}\Box\xi + \frac{1}{2}\beta\pi^2\Big]\end{aligned} \tag{4.59}$$

O funcional gerador para as funções de Green conexos, $Z^c[J_k]$, é definido por meio do funcional gerador de vértice $\Gamma^{(0)}[\Phi_k]$ através da transformação de Legendre:

$$Z^c[J_k] = \Gamma^{(0)}[\Phi_k] + \int d^4x \left[A_\mu J_A^\mu + B_\mu J_B^\mu + bJ_b + \pi J_\pi + \bar{J}_c c + J_{\bar{c}}\bar{c} + \bar{J}_\xi\xi + J_{\bar{\xi}}\bar{\xi} + \bar{J}_\psi\psi + J_{\bar{\psi}}\bar{\psi}\right] \tag{4.60}$$

onde $\Phi_k = \left(A_\mu, B_\mu, b, \pi, c, \bar{c}, \xi, \bar{\xi}, \psi, \bar{\psi}\right)$ e $J_k = \left(J_A^\mu, J_B^\mu, J_b, J_\pi, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \bar{J}_\xi, J_{\bar{\xi}}, \bar{J}_\psi, J_{\bar{\psi}}\right)$, de modo que:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z^c}{\delta J_A^\mu} &= A_\mu & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu} &= -J_A^\mu \\
\frac{\delta Z^c}{\delta J_B^\mu} &= B_\mu & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta B_\mu} &= -J_B^\mu \\
\frac{\delta Z^c}{\delta J_b} &= b & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta b} &= -J_b \\
\frac{\delta Z^c}{\delta J_\pi} &= \pi & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \pi} &= -J_\pi \\
\frac{\delta Z^c}{\delta \bar{J}_c} &= c & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c} &= \bar{J}_c \\
\frac{\delta Z^c}{\delta J_{\bar{c}}} &= \bar{c} & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{c}} &= J_{\bar{c}} \\
\frac{\delta Z^c}{\delta \bar{J}_\xi} &= \xi & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \xi} &= \bar{J}_\xi \\
\frac{\delta Z^c}{\delta J_{\bar{\xi}}} &= \bar{\xi} & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \xi} &= J_{\bar{\xi}} \\
\frac{\delta Z^c}{\delta \bar{J}_\psi} &= \psi & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \psi} &= \bar{J}_\psi \\
\frac{\delta Z^c}{\delta J_{\bar{\psi}}} &= \bar{\psi} & \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{\psi}} &= J_{\bar{\psi}}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Os propagadores a *tree-level* para todos os campos são definidos por:

$$\langle T\Phi_i(x)\Phi_j(y)\rangle = -\imath\frac{\delta^2 Z^c}{\delta J_i(x)\delta J_j(y)}, \tag{4.62}$$

segue-se então que:

$$
\begin{aligned}
&\langle TA_\mu(x)A_\nu(y)\rangle = -\imath\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta J_A^\nu(y)} && \langle TB_\mu(x)B_\nu(y)\rangle = -\imath\frac{\delta B_\mu(x)}{\delta J_B^\nu(y)}\\
&\langle TA_\mu(x)b(y)\rangle = -\imath\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta J_b(y)} && \langle TB_\mu(x)\pi(y)\rangle = -\imath\frac{\delta B_\mu(x)}{\delta J_\pi(y)}\\
&\langle Tb(x)b(y)\rangle = -\imath\frac{\delta b(x)}{\delta J_b(y)} && \langle T\pi(x)\pi(y)\rangle = -\imath\frac{\delta \pi(x)}{\delta J_\pi(y)}\\
&\langle Tc(x)\bar{c}(y)\rangle = \imath\frac{\delta c(x)}{\delta J_{\bar{c}}(y)} && \left\langle T\xi(x)\bar{\xi}(y)\right\rangle = \imath\frac{\delta \xi(x)}{\delta J_{\bar{\xi}}(y)}\\
&\left\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\rangle = \imath\frac{\delta\psi}{\delta J_{\bar{\psi}}(y)},
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

usando-se o fato que a derivada funcional satisfaz:

$$
\frac{\delta^2}{\delta X_i^{g_i}(x)\delta X_j^{g_j}(y)} = (-1)^{g_i g_j}\frac{\delta^2}{\delta X_j^{g_j}(y)\delta X_i^{g_i}(x)} \tag{4.64}
$$

onde g_i e g_j são os números de *ghost* ($\Phi\Pi$) dos campos dispostos na Tabela 4.3 e as correntes $J_k = \left(J_A^\mu, J_B^\mu, J_b, J_\pi, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \bar{J}_\xi, J_{\bar{\xi}}, \bar{J}_\psi, J_{\bar{\psi}}\right)$ tem seus números de *ghost* definidos de maneira que:

$$
\Phi\Pi(J_k) = (0,0,0,0,-1,1,-1,1,0,0)\,. \tag{4.65}
$$

Das equações (4.61) e (4.59) obtemos $J_k = J_k[\Phi_j]$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu} = \Box\Theta^{\mu\nu}A_\nu + M_A^2(s-1)A^\mu - \partial^\mu b = -J_A^\mu,\\
&\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta b} = \partial^\mu A_\mu + \alpha b = -J_b,\\
&\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta B_\mu} = \Box\Theta^{\mu\nu}B_\nu + M_B^2(s-1)B^\mu - \partial^\mu \pi = -J_B^\mu,\\
&\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \pi} = \partial^\mu B_\mu + \beta\pi = -J_\pi,\\
&\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{c}} = \Box c = J_{\bar{c}}, \qquad \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{\xi}} = \Box\xi = J_{\bar{\xi}},\\
&\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{\psi}} = (\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = J_{\bar{\psi}},
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

resolvendo as equações acima usando a álgebra definida na Tabela 4.2, obtemos os campos $\Phi_j = \Phi_j[J_k]$ como sendo:

$$
\begin{aligned}
&A_\mu = -\left(\frac{\Theta_{\mu\sigma}}{\Box - M_A^2(s-1)^2} + \alpha\frac{\Omega_{\mu\sigma}}{\Box - \alpha M_A^2(s-1)^2}\right)J_A^\sigma - \frac{\partial_\mu}{\Box}J_b,\\
&b = \frac{1}{\Box}\left(\partial_\mu J_A^\mu\right),\\
&B_\mu = -\left(\frac{\Theta_{\mu\sigma}}{\Box - M_B^2(s-1)^2} + \beta\frac{\Omega_{\mu\sigma}}{\Box - \beta M_B^2(s-1)^2}\right)J_B^\sigma - \frac{\partial_\mu}{\Box}J_\pi,
\end{aligned}
$$

$$\pi = \frac{1}{\Box}\left(\partial_\mu J^\mu_B\right),$$
$$c = \frac{1}{\Box}J_{\bar{c}}, \qquad \xi = \frac{1}{\Box}J_{\bar{\xi}},$$
$$\psi = -\frac{(\imath\gamma^\mu\partial_\mu + m)}{\Box + m^2}J_{\bar{\psi}}, \tag{4.67}$$

Usando os campos obtidos anteriormente juntamente com a Equação (4.63), os propagadores são dados por:

$$\langle TA_\mu(x)A_\nu(y)\rangle = \imath\left(\frac{\Theta_{\mu\sigma}}{\Box - M_A^2(s-1)^2} + \alpha\frac{\Omega_{\mu\sigma}}{\Box - \alpha M_A^2(s-1)^2}\right)\delta^4(x-y),$$
$$\langle TB_\mu(x)B_\nu(y)\rangle = \imath\left(\frac{\Theta_{\mu\sigma}}{\Box - M_B^2(s-1)^2} + \beta\frac{\Omega_{\mu\sigma}}{\Box - \beta M_B^2(s-1)^2}\right)\delta^4(x-y),$$
$$\langle TA_\mu(x)b(y)\rangle = \langle TB_\mu(x)\pi(y)\rangle = \imath\frac{\partial_\mu}{\Box}\delta^4(x-y),$$
$$\langle Tb(x)b(y)\rangle = \langle T\pi(x)\pi(y)\rangle = 0,$$
$$\langle Tc(x)\bar{c}(y)\rangle = \left\langle T\xi(x)\bar{\xi}(y)\right\rangle = \imath\frac{1}{\Box}\delta^4(x-y),$$
$$\left\langle T\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\rangle = -\imath\frac{(\imath\gamma^\mu\partial_\mu + m)}{\Box + m^2}\delta^4(x-y), \tag{4.68}$$

assumindo a delta de Dirac dada por:

$$\delta^4(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}, \tag{4.69}$$

os propagadores no espaço dos *momenta* são escritos como:

$$\langle A_\mu(k)A_\nu(k)\rangle = \Delta^{AA}_{\mu\nu}(k,s) = -\imath\left[\frac{1}{k^2 - M_A^2(s-1)^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{\alpha}{k^2 - \alpha M_A^2(s-1)^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right],$$
$$\langle B_\mu(k)B_\nu(k)\rangle = \Delta^{BB}_{\mu\nu}(k,s) = -\imath\left[\frac{1}{k^2 - M_B^2(s-1)^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{\beta}{k^2 - \beta M_B^2(s-1)^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right],$$
$$\langle A_\mu(k)b(k)\rangle = \Delta^{Ab}_\mu(k) = -\frac{k_\mu}{k^2},$$
$$\langle B_\mu(k)\pi(k)\rangle = \Delta^{B\pi}_\mu(k) = -\frac{k_\mu}{k^2},$$
$$\langle b(k)b(k)\rangle = \Delta^{bb}(k) = 0,$$
$$\langle \pi(k)\pi(k)\rangle = \Delta^{\pi\pi}(k) = 0,$$
$$\langle c(k)\bar{c}(k)\rangle = \Delta^{c\bar{c}}(k) = -\frac{\imath}{k^2},$$
$$\left\langle \xi(k)\bar{\xi}(k)\right\rangle = \Delta^{\xi\bar{\xi}}(k) = -\frac{\imath}{k^2},$$
$$\left\langle \psi(k)\bar{\psi}(k)\right\rangle = \Delta^{\psi\bar{\psi}}(k) = \imath\frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2}, \tag{4.70}$$

Na Tabela 4.3, apresentamos o número de *ghost*, a dimensão ultravioleta (UV) e a dimensão infravermelha (IR) dos campos do modelo. Para determinar essas dimensões, analisamos para quaisquer campos X e Y o comportamento assintótico dos propagadores

$\Delta^{XY}(k,s)$ no limite UV e IR. O comportamento assintótico UV, denotada por d_{XY}, é obtida no limite para $(k,s) \longrightarrow \infty$, enquanto o comportamento assintótico IR, denotado por r_{XY}, reflete o comportamento no limite $(k, s-1) \longrightarrow 0$.

As dimensões UV (d) e IR (r) dos campos, X e Y, são escolhidas para satisfazer as seguintes desigualdades[2] [32, 51]:

$$d_X + d_Y \geq 4 + d_{XY} \quad \text{e} \quad r_X + r_Y \leq 4 + r_{XY}. \tag{4.71}$$

	A_μ	B_μ	ψ	c	$\bar{c}$	b	ξ	$\bar{\xi}$	π	Y	$s-1$	s
d	1	1	3/2	0	2	2	0	2	2	5/2	1	1
r	1	1	2	0	2	2	0	2	2	2	1	0
$\Phi\Pi$	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0	-1	0	0

Tabela 4.3 – dimensão UV, dimensão IR e número de ghost.

4.2.2 Causalidade e unitariedade

A causalidade é verificada através dos polos dos propagadores, os quais são interpretados como partículas, avaliando se há ou não táquions em nosso modelo. Para isso, analisamos os propagadores, em especial os propagadores dos campos de calibre, consideramos o caso em que $s = 1$, ou seja,

$$\Delta^{AA}_{\mu\nu}(k,s)|_{s=1} \equiv \Delta^{AA}_{\mu\nu}(k) \tag{4.72}$$

$$\Delta^{BB}_{\mu\nu}(k,s)|_{s=1} \equiv \Delta^{BB}_{\mu\nu}(k) \tag{4.73}$$

recuperando, assim, os propagadores dos campos de calibre não massivos.

Através dos propagadores obtido em (4.70), a Tabela 4.4, mostra os pontos em que ocorrem os polos,

$\Delta^{AA}_{\mu\nu}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{BB}_{\mu\nu}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{Ab}_{\mu}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{B\pi}_{\mu}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{bb}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{\pi\pi}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{c\bar{c}}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{\xi\bar{\xi}}(k)$	$k^2 = 0$
$\Delta^{\psi\bar{\psi}}(k)$	$k^2 = m^2$

Tabela 4.4 – polos

[2] A derivada ∂_μ tem dimensão UV e IR, $d = r = 1$.

Com isso, notamos que os polos ocorrem em $k^2 \geq 0$, o que indica que nosso modelo é livre de táquions. Devemos também verificar a ausência de "fantasmas" no modelo, ou seja, estados de norma negativa. Para isso, analisamos os propagadores e os acoplamos a correntes externas $\{\mathcal{J}_{\Phi_i}\}$, compatíveis com as simetrias do modelo. Em seguida, calculamos as amplitudes corrente-corrente $\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j}$ nos polos. A partir da parte imaginária do resíduo das amplitudes nos polos, obtemos uma condição necessária, mas não suficiente, para a unitariedade a *tree-level*: se $Im\{\text{Res}\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j}|_{\text{poles}}\} > 0$, a matriz-$S$ pode ser unitária[3]. Com isso, podemos contabilizar os graus de liberdade descritos pelos campos $\{\Phi_i\}$[51].

$$\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j} = \mathcal{J}^*_{\Phi_i}(k)\left\langle \Phi_i(k)\Phi_j(k)\right\rangle \mathcal{J}_{\Phi_j}(k). \tag{4.74}$$

Primeiramente, realizaremos a análise dos propagadores dos campos vetoriais A_μ e B_μ, conforme as equações (4.70). As correntes 4-vetoriais, J^μ_A, J^μ_B, podem ser expandidas em termos de uma base completa e 4-dimensional $\{k^\mu, \tilde{k}^\mu, \epsilon^\mu, \tilde{\epsilon}^\mu\}$ (ver Apêndice C) no espaço dos *momenta*. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\mu_A &= \lambda_1 k^\mu + \lambda_2\tilde{k}^\mu + \lambda_3\epsilon^\mu + \lambda_4\tilde{\epsilon}^\mu,\\ \mathcal{J}^\mu_B &= \chi_1 k^\mu + \chi_2\tilde{k}^\mu + \chi_3\epsilon^\mu + \chi_4\tilde{\epsilon}^\mu,\end{aligned} \tag{4.75}$$

usando a Equação (C.6), juntamente com a condição de conservação da corrente:

$$k_\mu\mathcal{J}^\mu_A = 0 \text{ e } k_\mu\mathcal{J}^\mu_B = 0, \tag{4.76}$$

isso nos permite fixar as 4-correntes como:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^\mu_A &= (\lambda_1\omega, \lambda_3\epsilon + \lambda_4\varepsilon, \lambda_3\varepsilon - \lambda_4\epsilon, \lambda_1\omega),\\ \mathcal{J}^\mu_B &= (\chi_1\omega, \chi_3\epsilon + \chi_4\varepsilon, \chi_3\varepsilon - \chi_4\epsilon, \chi_1\omega).\end{aligned} \tag{4.77}$$

A amplitude corrente-corrente para o campo vetorial A^μ é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AA} =& \mathcal{J}^{*\mu}_A(k)\left\langle A_\mu(k)A_\nu(k)|A_\mu(k)A_\nu(k)\right\rangle \mathcal{J}^\nu_A(k)\\ =& \mathcal{J}^{*\mu}_A(k)(-\imath)\left[\frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{\alpha}{k^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right]\mathcal{J}^\nu_A(k)\\ =& \mathcal{J}^{*\mu}_A(k)(-\imath)\left[\frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu}\mathcal{J}^\nu_A(k) - \frac{k_\mu k_\nu\mathcal{J}^\nu_A(k)}{k^2}\right) + \frac{\alpha}{k^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu\mathcal{J}^\nu_A(k)}{k^2}\right)\right]\\ =& \mathcal{J}^{*\mu}_A(k)(-\imath)\left[\frac{1}{k^2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{J}^\nu_A(k)\right]\\ =& -\frac{\imath}{k^2}\mathcal{J}^{*\mu}_A(k)\eta_{\mu\nu}\mathcal{J}^\nu_A(k)\\ =& -\frac{\imath}{k^2}\mathcal{J}^{*\mu}_A(k)\mathcal{J}_{\nu A}(k)\\ =& -\frac{\imath}{k^2}\{|\lambda_1|^2\omega^2 - (\lambda_3^*\epsilon + \lambda_4^*\varepsilon)(\lambda_3\epsilon + \lambda_4\varepsilon) - (\lambda_3^*\varepsilon + \lambda_4^*\epsilon)(\lambda_3\varepsilon + \lambda_4\epsilon) - |\lambda_1|^2\omega^2\}\\ =& -\frac{\imath}{k^2}\{-|\lambda_3|^2\epsilon^2 - |\lambda_4|^2\varepsilon^2 - |\lambda_3|^2\varepsilon^2 - |\lambda_4|^2\epsilon^2\}\end{aligned}$$

[3] Para completar a análise da unitariedade a *tree-level*, ainda é necessário estudar o comportamento o limite de Froissart-Martin [52, 53, 54]. Porém, espera-se que seja satisfeito tendo em vista o comportamento UV dos propagadores e vértices de interação como uma extensão da QED usual.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\imath}{k^2}\{|\lambda_3|^2(\epsilon^2+\varepsilon^2)+|\lambda_4|^2(\epsilon^2+\varepsilon^2)\} \\
&= \frac{\imath}{k^2}(|\lambda_3|^2+|\lambda_4|^2),
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

similarmente, para o campo vetorial B_μ, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{BB} &= \mathcal{J}_B^{*\mu}(k)\left\langle B_\mu(k)B_\nu(k)\right\rangle \mathcal{J}_B^\nu(k) \\
&= \mathcal{J}_B^{*\mu}(k)(-\imath)\left[\frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\frac{\beta}{k^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right]\mathcal{J}_B^\nu(k) \\
&= \mathcal{J}_B^{*\mu}(k)(-\imath)\left[\frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu}\mathcal{J}_B^\nu(k)-\frac{k_\mu k_\nu \mathcal{J}_B^\nu(k)}{k^2}\right)+\frac{\beta}{k^2}\left(\frac{k_\mu k_\nu \mathcal{J}_B^\nu(k)}{k^2}\right)\right] \\
&= \mathcal{J}_B^{*\mu}(k)(-\imath)\left[\frac{1}{k^2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{J}_B^\nu(k)\right] \\
&= -\frac{\imath}{k^2}\mathcal{J}_B^{*\mu}(k)\eta_{\mu\nu}\mathcal{J}_B^\nu(k) \\
&= -\frac{\imath}{k^2}\mathcal{J}_B^{*\mu}(k)\mathcal{J}_{\nu B}(k) \\
&= -\frac{\imath}{k^2}\{|\chi_1|^2\omega^2-(\chi_3^*\epsilon+\chi_4^*\varepsilon)(\chi_3\epsilon+\chi_4\varepsilon)-(\chi_3^*\varepsilon+\chi_4^*\epsilon)(\chi_3\varepsilon+\chi_4\epsilon)-|\chi_1|^2\omega^2\} \\
&= -\frac{\imath}{k^2}\{-|\chi_3|^2\epsilon^2-|\chi_4|^2\varepsilon^2-|\chi_3|^2\varepsilon^2-|\chi_4|^2\epsilon^2\} \\
&= \frac{\imath}{k^2}\{|\chi_3|^2(\epsilon^2+\varepsilon^2)+|\chi_4|^2(\epsilon^2+\varepsilon^2)\} \\
&= \frac{\imath}{k^2}(|\chi_3|^2+|\chi_4|^2).
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

Analisando para os propagadores dos campos b, π, c, $\bar{c}$, ξ e $\bar{\xi}$, dado pelas equações em (4.70), as amplitudes corrente-corrente são:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{Ab} &= \mathcal{J}_A^{*\mu}(k)\left\langle A_\mu(k)b(k)\right\rangle \mathcal{J}_b(k) \\
&= \mathcal{J}_A^{*\mu}(k)\left[-\frac{k_\mu}{k^2}\right]\mathcal{J}_b(k) \\
&= -\frac{\mathcal{J}_A^{*\mu}(k)k_\mu}{k^2}\mathcal{J}_b(k) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.80}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{B\pi} &= \mathcal{J}_B^{*\mu}(k)\left\langle B_\mu(k)\pi(k)\right\rangle \mathcal{J}_\pi(k) \\
&= \mathcal{J}_B^{*\mu}(k)\left[-\frac{k_\mu}{k^2}\right]\mathcal{J}_\pi(k) \\
&= -\frac{\mathcal{J}_B^{*\mu}(k)k_\mu}{k^2}\mathcal{J}_\pi(k) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.81}
$$

$$
\mathcal{A}_{bb} = \mathcal{J}_b(k)\left\langle b(k)b(k)\right\rangle \mathcal{J}_b(k) = 0, \tag{4.82}
$$

$$
\mathcal{A}_{\pi\pi} = \mathcal{J}_\pi(k)\left\langle \pi(k)\pi(k)\right\rangle \mathcal{J}_\pi(k) = 0, \tag{4.83}
$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{c\bar{c}} &= \mathcal{J}_c^*(k)\left\langle c(k)\bar{c}(k)\right\rangle \mathcal{J}_{\bar{c}}(k)\\ &= -\frac{\imath}{k^2}\mathcal{J}_c^*(k)\mathcal{J}_{\bar{c}}(k),\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\xi\bar{\xi}} &= \mathcal{J}_\xi^*(k)\left\langle \xi(k)\bar{\xi}(k)\right\rangle \mathcal{J}_{\bar{\xi}}\\ &= -\frac{\imath}{k^2}\mathcal{J}_\xi^*(k)\mathcal{J}_{\bar{\xi}}(k),\end{aligned} \tag{4.85}$$

A amplitude corrente-corrente para o campo fermiônico ψ é dada por:

$$\mathcal{A}_{\psi\bar{\psi}} = \bar{\mathcal{J}}_\psi(k)\left\langle \psi(k)\bar{\psi}(k)\right\rangle \mathcal{J}_{\bar{\psi}}(k), \tag{4.86}$$

onde $\bar{\mathcal{J}}_\psi = \mathcal{J}_\psi^\dagger\gamma^0$, de forma que usamos as matrizes de Dirac na representação encontrado em [40]:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & -\mathbb{I}\end{bmatrix}, \tag{4.87}$$

assim temos

$$\mathcal{J}_\psi = \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{J}}_\psi = \begin{bmatrix}\sigma_1^* & \sigma_2^* & -\sigma_3^* & -\sigma_4^*\end{bmatrix}, \tag{4.88}$$

no caso massivo ($k^2 = m^2$), o 4-momento pode ser escolhido no referencial de repouso da partícula, $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, dessa maneira:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\psi\bar{\psi}} &= \bar{\mathcal{J}}_\psi(k)\left\langle \psi(k)\bar{\psi}(k)\right\rangle \mathcal{J}_{\bar{\psi}}(k)\\ &= \bar{\mathcal{J}}_\psi(k)\left[\imath\frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2}\right]\mathcal{J}_{\bar{\psi}}(k)\\ &= \bar{\mathcal{J}}_\psi(k)\left[\imath\frac{(\gamma^0 m + m)}{k^2 - m^2}\right]\mathcal{J}_{\bar{\psi}}(k)\\ &= \frac{\imath m}{k^2 - m^2}\left[\bar{\mathcal{J}}_\psi(k)\gamma^0\mathcal{J}_{\bar{\psi}}(k) + \bar{\mathcal{J}}_\psi(k)\mathcal{J}_{\bar{\psi}}(k)\right]\\ &= \frac{\imath m}{k^2 - m^2}\left[|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2 + |\sigma_3|^2 + |\sigma_4|^2 + |\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2 - |\sigma_3|^2 - |\sigma_4|^2\right]\\ &= \frac{2\imath m}{k^2 - m^2}\left(|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2\right).\end{aligned} \tag{4.89}$$

Assim, os resíduos das amplitudes corrente-corrente, $\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j}$, seguem-se:

$$\begin{aligned}&\text{Res}\mathcal{A}_{AA}|_{k^2=0} = \imath(|\lambda_3|^2 + |\lambda_4|^2),\\ &\text{Res}\mathcal{A}_{BB}|_{k^2=0} = (|\chi_3|^2 + |\chi_4|^2),\\ &\text{Res}\mathcal{A}_{Ab}|_{k^2=0} = \text{Res}\mathcal{A}_{bb}|_{k^2=0} = \text{Res}\mathcal{A}_{B\pi}|_{k^2=0} = \text{Res}\mathcal{A}_{\pi\pi}|_{k^2=0} = 0,\\ &\text{Res}\mathcal{A}_{c\bar{c}}|_{k^2=0} = -\imath\mathcal{J}_c^*(k)\mathcal{J}_{\bar{c}}(k),\\ &\text{Res}\mathcal{A}_{\xi\bar{\xi}}|_{k^2=0} = -\imath\mathcal{J}_\xi^*(k)\mathcal{J}_{\bar{\xi}}(k),\\ &\text{Res}\mathcal{A}_{\psi\bar{\psi}}|_{k^2=m^2} = 2\imath m\left(|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2\right),\end{aligned} \tag{4.90}$$

e as respectivas partes imaginárias, $Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{\Phi_i\Phi_j}|_{\text{poles}}\}$, são:

$$
\begin{aligned}
&Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{AA}|_{k^2=0}\} = |\lambda_3|^2+|\lambda_4|^2 > 0, \\
&Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{BB}|_{k^2=0}\} = |\chi_3|^2+|\chi_4|^2 > 0, \\
&Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{Ab}|_{k^2=0}\} = Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{bb}|_{k^2=0}\} = Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{B\pi}|_{k^2=0}\} = Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{\pi\pi}|_{k^2=0}\} = 0, \\
&Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{c\bar{c}}|_{k^2=0}\} = -\mathcal{J}_c^*(k)\mathcal{J}_{\bar{c}}(k) < 0, \\
&Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{\xi\bar{\xi}}|_{k^2=0}\} = -\mathcal{J}_\xi^*(k)\mathcal{J}_{\bar{\xi}}(k) < 0, \\
&Im\{\mathrm{Res}\mathcal{A}_{\psi\bar{\psi}}|_{k^2=m^2}\} = 2m\left(|\sigma_1|^2+|\sigma_2|^2\right) > 0.
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

A partir desses resultados, verificamos que os campos vetoriais A_μ e B_μ propagam dois graus de liberdade físicos de massa nula, isto é, o fóton e o meta-fóton, respectivamente. Os campos de Nakanishi-Lautrup não se propagam, além disso, os *ghosts* (c, ξ) e anti-*ghosts* $(\bar{c}, \bar{\xi})$ de Faddeev-Popov, não massivos, propagam graus de liberdade com norma negativa. Esses campos atuam para compensar os graus de liberdade espúrios no setor longitudinal dos campos vetoriais. O campo fermiônico ψ possui quatro graus de liberdade físicos com massa m, o dyon. Portanto, a *tree-level*, o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam é livre de táquions e de "fantasmas".

5 Quantização do modelo

5.1 Identidade de Slavnov-Taylor dentre outras

Em função de estudar anomalia e estabilidade do modelo, precisamos representar as simetrias de uma forma funcional, isto é, a identidade de Slavnov-Taylor, equação de *ghost*, equação de anti-*ghost*, condição de *gauge-fixing*.

A identidade de Slavnov-Taylor é obtida diretamente da invariância de BRS escrita na forma funcional nos molde da Equação (3.14), ou seja, para a ação definida em (4.48) que obdece $s\Gamma^{(0)}|_{s=1}= 0$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma^{(0)})\Big|_{s=1} &= \int d^4x \left[-\partial_\mu c \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta A_\mu} - \partial_\mu \xi \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta B_\mu} + b\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{c}} + \pi\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{\xi}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{Y}}\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \psi} - \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta Y}\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{\psi}} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

O operador de Slavnov-Taylor linearizado ($\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}$) correspondente a (5.1) é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} = \int d^4x \Bigg[& -\partial_\mu c \frac{\delta}{\delta A_\mu} - \partial_\mu \xi \frac{\delta}{\delta B_\mu} + b\frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \pi\frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{Y}}\frac{\delta}{\delta \psi} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \psi}\frac{\delta}{\delta \bar{Y}} \\ & - \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta Y}\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \bar{\psi}}\frac{\delta}{\delta Y} \Bigg] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Além disso, esses dois operadores, obedecem as seguintes identidades para um funcional qualquer $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0, \ \ \forall\mathcal{F}, \tag{5.3}$$

e

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = 0 \ \text{ se } \ \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0. \tag{5.4}$$

As condições de *gauge-fixing*,

$$\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta b} = \partial^\mu A_\mu + \alpha b, \qquad \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \pi} = \partial^\mu B_\mu + \beta\pi, \tag{5.5}$$

apresentam uma quebra linear nos campos.

As equações de *ghost*, para os respectivos *ghosts* c e ξ, dadas por:

$$\mathcal{G}_I\Gamma^{(0)} = 0, \qquad \mathcal{G}_I = \frac{\delta}{\delta\bar{c}} - \Box c, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{G}_{II}\Gamma^{(0)} = 0, \qquad \mathcal{G}_{II} = \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} - \Box \xi. \tag{5.7}$$

As equações de anti-*ghost*,

$$\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c} = -\Box\bar{c} + \imath e\,[\bar{Y}\psi - \bar{\psi}Y], \qquad \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta \xi} = -\Box\bar{\xi} + \imath g\,[\bar{Y}\psi - \bar{\psi}Y], \tag{5.8}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_I\Gamma^{(0)} = \bar{\Delta}_I, \quad \bar{\mathcal{G}}_{II}\Gamma^{(0)} = \bar{\Delta}_{II}. \tag{5.9}$$

onde temos,

$$\bar{\mathcal{G}}_I = \int d^4x\, \frac{\delta}{\delta c}, \qquad \bar{\Delta}_I = \imath e \int d^4x [\bar{Y}\psi - \bar{\psi}Y], \tag{5.10}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{II} = \int d^4x\, \frac{\delta}{\delta \xi}, \qquad \bar{\Delta}_{II} = \imath g \int d^4x [\bar{Y}\psi - \bar{\psi}Y]. \tag{5.11}$$

Para concluir a análise das simetrias do modelo descrito pela ação clássica $\Gamma^{(0)}$, é importante ressaltar sua invariância sob duas simetrias rígidas decorrentes do operador de Slavnov-Taylor (5.1), juntamente com as equações de anti-*ghost* (5.9). Essas equações expressam a simetria de calibre $U(1) \times U(1)$, correspondendo à conservação da carga elétrica e da carga magnética:

$$\mathcal{W}^{\text{rig}}_{\text{I}}\Gamma^{(0)} = 0, \quad \mathcal{W}^{\text{rig}}_{\text{II}}\Gamma^{(0)} = 0, \tag{5.12}$$

com os operadores de Ward rígidos dados por:

$$\mathcal{W}^{\text{rig}}_{\text{I}} = \imath e \int d^4x \left[\psi\frac{\delta}{\delta\psi} - \bar{\psi}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} + Y\frac{\delta}{\delta Y} - \bar{Y}\frac{\delta}{\delta\bar{Y}}\right], \tag{5.13}$$

$$\mathcal{W}^{\text{rig}}_{\text{II}} = \imath g \int d^4x \left[\psi\frac{\delta}{\delta\psi} - \bar{\psi}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} + Y\frac{\delta}{\delta Y} - \bar{Y}\frac{\delta}{\delta\bar{Y}}\right]. \tag{5.14}$$

Desde que temos um grupo de simetria não semissimples a invariância rígida ganha destaque com a possibilidade de ser anômala em casos onde há quebra espontânea de simetria.

Além disso, para um funcional qualquer $\mathcal{F}$ com número de *ghost* par, as seguintes identidades são satisfeitas:

$$\frac{\delta}{\delta b}\mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b} - \partial^\mu A_\mu\right) = \mathcal{G}_I(\mathcal{F}), \quad \frac{\delta}{\delta\pi}\mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\pi} - \partial^\mu B_\mu\right) = \mathcal{G}_{II}(\mathcal{F}), \tag{5.15}$$

$$\mathcal{G}_I\mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{G}_I(\mathcal{F}) = 0, \quad \mathcal{G}_{II}\mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{G}_{II}(\mathcal{F}) = 0, \tag{5.16}$$

$$\bar{\mathcal{G}}_I\mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\left(\bar{\mathcal{G}}_I(\mathcal{F}) - \bar{\Delta}_I\right) = \mathcal{W}_I(\mathcal{F}), \quad \bar{\mathcal{G}}_{II}\mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\left(\bar{\mathcal{G}}_{II}(\mathcal{F}) - \bar{\Delta}_{II}\right) = \mathcal{W}_{II}(\mathcal{F}), \tag{5.17}$$

$$\mathcal{W}_I\mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{W}_I(\mathcal{F}) = 0, \quad \mathcal{W}_{II}\mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\mathcal{W}_{II}(\mathcal{F}) = 0. \tag{5.18}$$

5.2 A busca por anomalias

Nossa busca, como já mencionado no Capítulo 3, é por uma possível anomalia que pode surgir de uma quebra no nível quântico da identidade de Slavnov-Taylor. Dessa forma, é necessário verificar a possível extensão do modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam de forma perturbativa.

A ação quântica Γ pode ser expandida formalmente em série de potências em $\hbar$, de modo que:

$$\Gamma \equiv \Gamma_{(s-1)} = \Gamma^{(0)} + \mathcal{O}(\hbar), \tag{5.19}$$

em ordem zero de $\hbar$, teremos que $\Gamma = \Gamma^{(0)}$ (Equação (4.48) do capítulo 4).

Em geral, ao realizar o estudo de anomalia, podemos nos deparar com o que chamamos de anomalia genuína, representando uma obstrução à teoria independente do esquema de regularização, comprometendo sua consistência em nível quântico. Isso traz consigo uma quebra de simetria através das correções radiativas e, consequentemente, uma violação da unitariedade da matriz-S, como demonstrado por Kugo e Ojima [29, 30].

Por outro lado, podemos nos deparar com contratermos não-invariantes que possibilita a identidade de Slavnov-Taylor ser mantida no nível quântico ordem a ordem.

Assumimos que, em uma ordem $(n-1)$ em $\hbar$, a identidade de Slavnov-Taylor é mantida, ou seja, $\mathcal{S}(\Gamma)|_{s=1} = \mathcal{O}(\hbar^n)$. Assim, ao considerar uma quebra na ordem de $\hbar^n$, pelo princípio de ação quântica [32], temos:

$$\mathcal{S}(\Gamma)\Big|_{s=1} = \hbar^n \Delta \cdot \Gamma\Big|_{s=1} = \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{5.20}$$

onde $\Delta \equiv \Delta|_{s=1}$ é um polinômio integrado local nos campos e fontes, com número de *ghost* igual a 1 e limitado por dimensão UV, $d \leq 4$ e dimensão IR, $r \geq 4$.

Relembrando que, em uma expansão em $\hbar$, a identidade de Slavnov-Taylor linearizada é (3.24):

$$\mathcal{S}_\Gamma = \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} + \mathcal{O}(\hbar), \tag{5.21}$$

juntamente com a identidade (5.3), obtemos a condição de consistência de Wess-Zumino para a quebra quântica,

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \Delta = 0. \tag{5.22}$$

Antes de prosseguir, vale enfatizar que as identidades de Ward apresentadas no conjunto de Eqs. (5.5)-(5.14) não são anômalas no nível quântico[1]. Em especial, deve-se ressaltar, no que diz respeito às simetrias rígidas $\mathcal{W}_I^{\mathrm{rig}}$ e $\mathcal{W}_{II}^{\mathrm{rig}}$, como já foi comentado, a presença de um grupo de simetria $U(1) \times U(1)$, que não é semissimples, pode, em princípio, ser anômala.

No entanto, enquanto os dois fatores abelianos não forem quebrados espontaneamente e a carga elétrica (e) e a carga magnética (g) forem conservadas, isto é, $\mathcal{W}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{rig}}\Gamma^{(0)} = 0$ e $\mathcal{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{rig}}\Gamma^{(0)} = 0$, como resultado, as condições, $\mathcal{W}_I^{rig}\Delta = 0$ e $\mathcal{W}_{II}^{rig}\Delta = 0$, são atendidas, e a quebra quântica é invariante por simetria rígida [55, 56].

[1] A prova pode ser verificada em [32]. Consiste em mostrar que é possível reabsorver na ação de partida a inserção quântica realizada. Além disso, essa reabsorção é feita de maneira recursiva, sendo, portanto, válida em todas as ordens em teoria de perturbação.

Usando as identidades (5.15)-(5.18) em nosso modelo é possível obter um conjunto de restrições para a quebra quântica Δ:

$$\frac{\delta\Delta}{\delta b} = \frac{\delta\Delta}{\delta\pi} = 0, \tag{5.23}$$

$$\frac{\delta\Delta}{\delta\bar{c}} = \frac{\delta\Delta}{\delta\bar{\xi}} = 0, \tag{5.24}$$

$$\int d^4x\,\frac{\delta\Delta}{\delta c} = \int d^4x\,\frac{\delta\Delta}{\delta\xi} = 0, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{W}_I^{\mathrm{rig}}\Delta = \mathcal{W}_{II}^{\mathrm{rig}}\Delta = 0. \tag{5.26}$$

Dessas restrições, o polinômio integrado local, Δ, não pode depender dos campos b, π, $\bar{c}$ e $\bar{\xi}$, além disso, a dependência nos campos de *ghost* só pode vir através das derivadas, isto é, $\Delta = \Delta(A_\mu, B_\mu, \partial^\mu c, \partial^\mu \xi)$.

Da condição de consistência de Wess-Zumino (5.22) temos um problema de cohomologia no espaço de polinômios integrados locais nos campos e suas derivadas no setor de número de *ghost* igual a 1, e limitado por $d \leq 4$ e $r \geq 4$. Portanto, como citado no Capítulo 3, sua solução geral é dada por:

$$\Delta = \tilde{\Delta} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\check{\Delta}, \tag{5.27}$$

na qual:

- $\tilde{\Delta}$, é o termo não-trivial com número de ghost igual a 1;
- $\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\check{\Delta}$, é o termo trivial (cocycle), onde $\check{\Delta}$ tem número de *ghost* igual a 0.

Se a cohomologia do operador $\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}$ for vazia, então diz-se que o modelo é livre de anomalias, permitindo que o operador de Slavnov-Taylor seja implementado em nível quântico. Entretanto, se a cohomologia de $\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}$ não for vazia, temos um possível candidato à anomalia.

Nesse caso, se Δ tiver contribuições apenas pela parte do termo trivial (*cocycle*), chamado de contratermos não-invariantes, estes são reabsorvidos pela ação quântica, ordem a ordem, e a identidade de Slavnov-Taylor será mantida no nível quântico. Por outro lado, se Δ tiver contribuições do termo não-trivial, estaremos diante de uma anomalia genuína, e a identidade de Slavnov-Taylor é quebrado no nível quântico.

A possível quebra quântica, $\Delta = \Delta(A_\mu, B_\mu, \partial^\mu c, \partial^\mu \xi)$, pode ser escrita através da restrição (5.25), como:

$$\Delta = \int d^4x\,[\mathcal{K}_\mu\partial^\mu c + \mathcal{R}_\mu\partial^\mu\xi], \tag{5.28}$$

onde $\mathcal{K}_\mu$ e $\mathcal{R}_\mu$ são tensores de rank-1, limitados por dimensão UV e IR, $d \leq 3$ e $r \geq 3$, respectivamente, e número de *ghost* igual a 0. Além disso, eles podem ser expressos na base vetorial $\{\mathcal{V}_\mu^k\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\mu &= \sum_k \alpha_k \mathcal{V}_\mu^k,\\ \mathcal{R}_\mu &= \sum_k \beta_k \mathcal{V}_\mu^k,\end{aligned} \tag{5.29}$$

com α_k e β_k sendo coeficientes escalares arbitrários.

É possível listar os possíveis tensores $\mathcal{V}^k_\mu$ construídos por meio do vetor A_μ e do pseudovetor B_μ, limitados por $d \leq 3$ e $r \geq 3$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^1_\mu = A_\mu A_\nu A^\nu, & \mathcal{V}^2_\mu = A_\mu A_\nu B^\nu, & \mathcal{V}^3_\mu = A_\mu B_\nu B^\nu, \\ \mathcal{V}^4_\mu = B_\mu B_\nu B^\nu, & \mathcal{V}^5_\mu = B_\mu B_\nu A^\nu, & \mathcal{V}^6_\mu = B_\mu A_\nu A^\nu, \\ \mathcal{V}^7_\mu = \partial_\mu A_\nu A^\nu, & \mathcal{V}^8_\mu = \partial_\mu A_\nu B^\nu, & \mathcal{V}^9_\mu = \partial_\mu B_\nu A^\nu, \\ \mathcal{V}^{10}_\mu = \partial_\mu B_\nu B^\nu, & \mathcal{V}^{11}_\mu = \partial_\nu A^\nu A_\mu, & \mathcal{V}^{12}_\mu = \partial_\nu A^\nu B_\mu, \\ \mathcal{V}^{13}_\mu = \partial_\nu B^\nu A_\mu, & \mathcal{V}^{14}_\mu = \partial_\nu B^\nu B_\mu, & \mathcal{V}^{15}_\mu = A_\nu \partial^\nu A_\mu, \\ \mathcal{V}^{16}_\mu = A_\nu \partial^\nu B_\mu, & \mathcal{V}^{17}_\mu = B_\nu \partial^\nu A_\mu, & \mathcal{V}^{18}_\mu = B_\nu \partial^\nu B_\mu, \\ \mathcal{V}^{19}_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu A_\rho B_\sigma, & \mathcal{V}^{20}_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu A_\rho A_\sigma, & \mathcal{V}^{21}_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu B_\rho B_\sigma. \end{array} \tag{5.30}$$

Vale notar que, o operador de Slavnov-Taylor, $\mathcal{S}(\mathcal{F})$, é invariante sob as transformações discretas, assim como o operador de Slavnov-Taylor linearizado ($\mathcal{S}_\mathcal{F}$), caso o funcional $\mathcal{F}$ seja invariante sob as transformações discretas (ver Apêndice D).

Devido à invariância da ação $\Gamma^{(0)}$ sob as simetrias discretas (C', P, T), e o fato do operador de Slavnov-Taylor ser par sob as transformações discretas, consequentemente Δ também é par. Por meio da Equação (5.28), visto que $\partial^\mu c$ e $\partial^\mu \xi$ são quantidades impares com respeito a conjugação de cargas (C'), podemos concluir que, $\mathcal{K}_\mu$ e $\mathcal{R}_\mu$ deve ser impar por C' também. Portanto, eliminamos da base $\{\mathcal{V}^k_\mu\}$, os elementos correspondentes $k = 7, \ldots, 21$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^1_\mu = A_\mu A_\nu A^\nu, & \mathcal{V}^2_\mu = A_\mu A_\nu B^\nu, & \mathcal{V}^3_\mu = A_\mu B_\nu B^\nu, \\ \mathcal{V}^4_\mu = B_\mu B_\nu B^\nu, & \mathcal{V}^5_\mu = B_\mu B_\nu A^\nu, & \mathcal{V}^6_\mu = B_\mu A_\nu A^\nu. \end{array} \tag{5.31}$$

Aliás, com respeito a paridade (P), $\partial^\mu c$ é uma quantidade vetorial enquanto, $\partial^\mu \xi$ é uma quantidade pseudovetorial, podemos concluir que, $\mathcal{K}_\mu$ é um vetor, e $\mathcal{R}_\mu$ um pseudovetor, sendo assim:

$$\mathcal{K}_\mu = \{\mathcal{V}^1_\mu, \mathcal{V}^3_\mu, \mathcal{V}^5_\mu\}, \tag{5.32}$$

$$\mathcal{R}_\mu = \{\mathcal{V}^2_\mu, \mathcal{V}^4_\mu, \mathcal{V}^6_\mu\}. \tag{5.33}$$

Desse modo, pode-se mostrar que o possível termo de anomalia que respeita todas as simetrias discretas do modelo é escrito como:

$$\begin{aligned} \Delta = \int d^4x[\alpha_1 A_\mu A_\nu A^\nu \partial^\mu c + \alpha_3 A_\mu B_\nu B^\nu \partial^\mu c + \alpha_5 B_\mu B_\nu A^\nu \partial^\mu c + \beta_2 A_\mu A_\nu B^\nu \partial^\mu \xi \\ + \beta_4 B_\mu B_\nu B^\nu \partial^\mu \xi + \beta_6 B_\mu A_\nu A^\nu \partial^\mu \xi]. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Além disso, verificamos que a expressão acima para Δ, pode ser reescrita por:

$$\Delta = \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}(\lambda_1 \check{\Delta}_1 + \lambda_2 \check{\Delta}_2 + \lambda_3 \check{\Delta}_3 + \lambda_4 \check{\Delta}_4), \tag{5.35}$$

de modo que os monômios integrados localmente $\check{\Delta}_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, são dados por:

$$\begin{aligned}\check{\Delta}_1 &= \int d^4x (A_\mu A^\mu)^2, & \check{\Delta}_2 &= \int d^4x (B_\mu B^\mu)^2, \\ \check{\Delta}_3 &= \int d^4x (A_\mu A^\mu B_\nu B^\nu), & \check{\Delta}_4 &= \int d^4x (A_\mu A^\nu B_\nu B^\mu),\end{aligned} \tag{5.36}$$

com os coeficientes, λ_i, se relacionando com os coeficientes, α_k e β_k por meio de:

$$\alpha_1 = -4\lambda_1, \tag{5.37}$$

$$\beta_4 = -4\lambda_2, \tag{5.38}$$

$$\alpha_3 = \beta_6 = -2\lambda_3, \tag{5.39}$$

$$\alpha_5 = \beta_2 = -2\lambda_4. \tag{5.40}$$

Por consequência, demonstramos que, no que diz respeito à anomalia, $\Delta = \tilde{\Delta} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \check{\Delta}$, concluímos que $\tilde{\Delta} = 0$. Portanto, a única contribuição vem dos contratermos não invariantes, $\check{\Delta}$, que podem ser incorporados ordem a ordem na ação quântica, ou seja:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\Gamma)\Big|_{s=1} &= \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \\ \mathcal{S}(\Gamma)\Big|_{s=1} &= \hbar^n \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}} \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \check{\Delta}_k + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \\ \mathcal{S}\left(\Gamma - \hbar^n \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \check{\Delta}_k\right)\Big|_{s=1} &= \mathcal{O}(\hbar^{n+1}).\end{aligned} \tag{5.41}$$

Vale ressaltar que, além de não haver anomalia de *gauge*, é importante mencionar que o modelo poderia sofrer de anomalia de infravermelho decorrente dos campos de calibre não massivos. No entanto, nenhum dos monômios $\check{\Delta}_k$ viola a condição de infravermelho $r \geq 4$[2].

Por fim, verificamos que o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam é livre de anomalia de Slavnov-Taylor, ou seja, a identidade de Slavnov-Taylor é estabelecida no nível quântico, além de ser livre de anomalias de infravermelho em todas as ordens na teoria de perturbação. No entanto, ainda precisamos verificar a renormalizabilidade multiplicativa (estabilidade) para uma análise completa da extensão do modelo no nível quântico.

5.3 Estabilidade da ação

A renormalizabilidade multiplicativa, também conhecida como condição de estabilidade, é o foco desta seção. Nosso objetivo é determinar se o modelo é estável frente aos efeitos das correções radiativas, ou seja, se os contratermos invariantes locais são compatíveis com a renormalização dos parâmetros da teoria clássica, por meio da redefinição das variáveis físicas (campos, constantes de acoplamento e massa).

[2] A condição é obtida analisando que a nova ação quântica após a incorporação dos contratermos não-invariantes tem os mesmos números quânticos da ação de partida, portanto os monômios devem ser limitados por $d \leq 4$ e $r \geq 4$.

Para verificar se o modelo é estável perturbativamente, assumimos $\Gamma^{(0)}$ sendo perturbada por um funcional local integrado nos campos (contratermos) $\Gamma^{ct} \equiv \Gamma^{ct}_{(s-1)}$:

$$\Gamma^{(0)} \to \Gamma^{(0)} + \epsilon\Gamma^{ct}, \tag{5.42}$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal.

Dado que a ação perturbada deve obedecer as mesmas condições da ação original, podemos, por meio da equação (4.54), onde $s\Gamma^{(0)} = (s-1)\Delta_{lin}$, verificar para a ação dos contratermos que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}(\Gamma^{(0)} + \epsilon\Gamma^{ct}) = (s-1)\Delta_{lin} \\
&\mathcal{S}(\Gamma^{(0)}) + \epsilon\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}(\Gamma^{ct}) = (s-1)\Delta_{lin} \\
&(s-1)\Delta_{lin} + \epsilon\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}(\Gamma^{ct}) = (s-1)\Delta_{lin} \\
&\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Gamma^{ct} = 0.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Da mesma forma, para as identidades funcionais apresentadas em (5.5)-(5.14) a ação de contratermos, Γ^{ct}, obedece as seguintes restrições:

$$\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Gamma^{ct} = 0, \tag{5.44}$$

$$\frac{\delta\Gamma^{ct}}{\delta b} = \frac{\delta\Gamma^{ct}}{\delta\bar{c}} = \frac{\delta\Gamma^{ct}}{\delta c} = \mathcal{W}_I^{rig}\Gamma^{ct} = 0, \tag{5.45}$$

$$\frac{\delta\Gamma^{ct}}{\delta\pi} = \frac{\delta\Gamma^{ct}}{\delta\bar{\xi}} = \frac{\delta\Gamma^{ct}}{\delta\xi} = \mathcal{W}_{II}^{rig}\Gamma^{ct} = 0. \tag{5.46}$$

O funcional Γ^{ct} possui os mesmos números quânticos que a ação clássica, sendo limitado pela dimensão UV $d \leq 4$ e pela dimensão IR $r \geq 4$. Além disso, ele obedece a todas as simetrias a *tree-level*, sejam elas contínuas ou discretas, portanto:

$$\Gamma^{ct} \xrightarrow{C'} \Gamma^{ct}, \quad \Gamma^{ct} \xrightarrow{P} \Gamma^{ct}, \quad \Gamma^{ct} \xrightarrow{T} \Gamma^{ct}, \quad \Gamma^{ct} \xrightarrow{C'PT} \Gamma^{ct}. \tag{5.47}$$

A partir da equação (5.44), podemos novamente identificar um problema de cohomologia no espaço de polinômios integrados locais, no setor com número de *ghost* igual a 0, limitado por $d \leq 4$ e $r \geq 4$:

$$\Gamma^{ct} = \check{\Gamma} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\tilde{\Gamma}, \tag{5.48}$$

onde todos os números quânticos são preservados, de modo que:

- $\check{\Gamma}$ é o termo não trivial com número de *ghost* 0;

- $\tilde{\Gamma}$ é o termo trivial (*cocycle*) com número de *ghost* -1.

O contratermo da parte não trivial pode ser reabsorvido por uma renormalização das constantes de acoplamento (as cargas e e g), que são os parâmetros físicos. Por outro lado, os contratermos triviais (*cocycle*), podem ser reabsorvidos por uma redefinição dos campos e dos parâmetros de *gauge* (α e β), resultando em uma renormalização não física, correspondente à trivialidade cohomologica dos contratermos $\tilde{\Gamma}$.

Os contratermos cujo número de *ghost* igual a zero, limitados por $d \leq 4$ e $r \geq 4$, podem ser escritos em uma base de monômios da seguinte forma:

$$\Gamma^{ct} = \int d^4x \sum_i \alpha_i \Sigma^i, \tag{5.49}$$

onde os possíveis Σ^i estão listados abaixo, conforme as restrições obtidas nas Eqs. (5.44)-(5.46):

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^1 = \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, & \Sigma^2 = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, & \Sigma^3 = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu, \\
\Sigma^4 = m\bar{\psi}\psi, & \Sigma^5 = A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu, & \Sigma^6 = A_\mu A^\mu A_\nu B^\nu, \\
\Sigma^7 = A_\mu A^\mu B_\nu B^\nu, & \Sigma^8 = B_\mu B^\mu B_\nu B^\nu, & \Sigma^9 = B_\mu B^\mu A_\nu B^\nu, \\
\Sigma^{10} = A_\mu B^\mu A_\nu B^\nu, & \Sigma^{11} = \partial_\mu A_\nu A^\mu B^\nu, & \Sigma^{12} = \partial_\mu A_\nu B^\mu B^\nu, \\
\Sigma^{13} = \partial_\mu A^\mu B_\nu B^\nu, & \Sigma^{14} = \partial_\mu B^\mu B_\nu B^\nu, & \Sigma^{15} = \partial_\mu B_\nu A^\mu A^\nu, \\
\Sigma^{16} = \partial_\mu B_\nu A^\nu B^\mu, & \Sigma^{17} = \partial_\mu B_\nu A^\mu B^\nu, & \Sigma^{18} = \partial_\mu B_\nu B^\mu B^\nu, \\
\Sigma^{19} = \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu, & \Sigma^{20} = \partial_\mu B^\mu A_\nu A^\nu, & \Sigma^{21} = \partial_\mu A_\nu A^\mu A^\nu, \\
\Sigma^{22} = \partial_\mu A_\nu B^\mu A^\nu, & \Sigma^{23} = \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu, & \Sigma^{24} = \partial_\mu A_\nu \partial^\mu B^\nu, \\
\Sigma^{25} = \partial_\mu B_\nu \partial^\mu B^\nu, & \Sigma^{26} = \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu, & \Sigma^{27} = \partial_\mu A_\nu \partial^\nu B^\mu, \\
\Sigma^{28} = \partial_\mu B_\nu \partial^\nu B^\mu, & \Sigma^{29} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma, & \Sigma^{30} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu A_\nu A_\rho B_\sigma, \\
\Sigma^{31} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu A_\nu B_\rho B_\sigma, & \Sigma^{32} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu B_\nu B_\rho B_\sigma, & \Sigma^{33} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu B_\nu B_\rho B_\sigma, \\
\Sigma^{34} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma, & \Sigma^{35} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu A_\rho B_\sigma, & \Sigma^{36} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu B_\rho B_\sigma, \\
\Sigma^{37} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu B_\nu B_\rho B_\sigma, & \Sigma^{38} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho B_\sigma, & \Sigma^{39} = \Box\partial_\mu A^\mu, \\
\Sigma^{40} = \Box\partial_\mu B^\mu. & &
\end{array} \tag{5.50}$$

Uma vez que Γ^{ct} é invariante sob a conjugação de cargas (C'), os elementos da base de monômios Σ^i também devem ser invariantes sob C'. Portanto, eliminamos os elementos correspondentes a $i = 11, \ldots, 22, 34, 35, 36, 37, 39, 40$. Além disso, os integrandos $\Sigma^{29}, \Sigma^{30}, \Sigma^{31}, \Sigma^{32}, \Sigma^{33}$ são nulos devido à antisimetria do tensor de Levi-Civita, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Podemos escrever então:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{ct} = \int d^4x [&\alpha_1 \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \alpha_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \alpha_3\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu + \alpha_4 m\bar{\psi}\psi + \alpha_5 A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu \\
&+ \alpha_6 A_\mu A^\mu A_\nu B^\nu + \alpha_7 A_\mu A^\mu B_\nu B^\nu + \alpha_8 B_\mu B^\mu B_\nu B^\nu + \alpha_9 B_\mu B^\mu A_\nu B^\nu + \alpha_{10} A_\mu B^\mu A_\nu B^\nu \\
&+ \alpha_{23}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \alpha_{24}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu B^\nu + \alpha_{25}\partial_\mu B_\nu \partial^\mu B^\nu + \alpha_{26}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \alpha_{27}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu B^\mu \\
&+ \alpha_{28}\partial_\mu B_\nu \partial^\nu B^\mu + \alpha_{38}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho B_\sigma],
\end{aligned} \tag{5.51}$$

e como sabemos, o termo de Σ^{38} é nulo, visto que:

$$\alpha_{38}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho B_\sigma = \alpha_{38}\int d^4x \left[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \underbrace{\partial_\mu(A_\nu\partial_\rho B_\sigma)}_{superfície} - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \underbrace{\partial_\mu\partial_\rho}_{simétrico} B_\sigma\right] = 0, \tag{5.52}$$

portanto, a forma C'-invariante respeitando as restrições (5.44)-(5.46) é dada por:

$$\begin{aligned}\Gamma^{ct} = \int d^4x[&\alpha_1 \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \alpha_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \alpha_3\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu + \alpha_4 m\bar{\psi}\psi + \alpha_5 A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu \\ &+ \alpha_6 A_\mu A^\mu A_\nu B^\nu + \alpha_7 A_\mu A^\mu B_\nu B^\nu + \alpha_8 B_\mu B^\mu B_\nu B^\nu + \alpha_9 B_\mu B^\mu A_\nu B^\nu + \alpha_{10} A_\mu B^\mu A_\nu B^\nu \\ &+ \alpha_{23}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu + \alpha_{24}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu B^\nu + \alpha_{25}\partial_\mu B_\nu\partial^\mu B^\nu + \alpha_{26}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu + \alpha_{27}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu B^\mu \\ &+ \alpha_{28}\partial_\mu B_\nu\partial^\nu B^\mu].\end{aligned} \tag{5.53}$$

Além disso, sabendo que Γ^{ct} é invariante sob paridade e reversão temporal, a forma mais geral possível é obtida quando eliminamos os termos Σ^{24} e Σ^{27}. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}\Gamma^{ct} = \int d^4x[&\alpha_1 \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \alpha_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \alpha_3\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu + \alpha_4 m\bar{\psi}\psi + \alpha_5 A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu \\ &+ \alpha_6 A_\mu A^\mu A_\nu B^\nu + \alpha_7 A_\mu A^\mu B_\nu B^\nu + \alpha_8 B_\mu B^\mu B_\nu B^\nu + \alpha_9 B_\mu B^\mu A_\nu B^\nu + \alpha_{10} A_\mu B^\mu A_\nu B^\nu \\ &+ \alpha_{23}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu + \alpha_{25}\partial_\mu B_\nu\partial^\mu B^\nu + \alpha_{26}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu + \alpha_{28}\partial_\mu B_\nu\partial^\nu B^\mu].\end{aligned} \tag{5.54}$$

Usando o operador de Slavnov-Taylor linearizado em (5.54) termo a termo, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_1\imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= \int d^4x\ \alpha_1[\underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu c\psi}_{\blacklozenge} + \underbrace{g\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\xi\psi}_{\lozenge}],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \int d^4x\ \alpha_2[\underbrace{-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu c}_{\blacklozenge}],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_3\alpha_3\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu &= \int d^4x\ \alpha_3[\underbrace{-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\xi}_{\lozenge}],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_4 m\bar{\psi}\psi &= 0,\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_{23}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu &= \int d^4x\ \alpha_{23}[\underbrace{-2\partial_\mu\partial_\nu c\partial^\mu A^\nu}_{\blacksquare}],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_{25}\partial_\mu B_\nu\partial^\mu B^\nu &= \int d^4x\ \alpha_{25}[\underbrace{-2\partial_\mu\partial_\nu\xi\partial^\mu B^\nu}_{\bullet}],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_{26}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu &= \int d^4x\ \alpha_{26}[\underbrace{-2\partial_\mu\partial_\nu c\partial^\nu A^\mu}_{\blacksquare}],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_{28}\partial_\mu B_\nu\partial^\nu B^\mu &= \int d^4x\ \alpha_{28}[\underbrace{-2\partial_\mu\partial_\nu\xi\partial^\nu B^\mu}_{\bullet}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_5 A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu &= \int d^4x\ \alpha_5[-4\partial_\mu c A^\mu A_\nu A^\nu],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_6 A_\mu A^\mu A_\nu B^\nu &= \int d^4x\ \alpha_6[-2\partial_\mu c A^\mu A_\nu B^\nu - \partial_\nu c A_\mu A^\mu B^\nu - \partial^\nu\xi A_\mu A^\mu A_\nu],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_7 A_\mu A^\mu B_\nu B^\nu &= \int d^4x\ \alpha_7[-2\partial_\mu c A^\mu B_\nu B^\nu - 2\partial_\nu\xi A_\mu A^\mu B^\nu],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_8 B_\mu B^\mu B_\nu B^\nu &= \int d^4x\ \alpha_8[-4\partial_\mu\xi B^\mu B_\nu B^\nu],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_9 B_\mu B^\mu A_\nu B^\nu &= \int d^4x\ \alpha_9[-2\partial_\mu\xi B^\mu A_\nu B^\nu - \partial_\nu c B_\mu B^\mu B^\nu - \partial^\nu\xi B_\mu B^\mu A_\nu],\\
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\int d^4x\ \alpha_{10} A_\mu B^\mu A_\nu B^\nu &= \int d^4x\ \alpha_{10}[-\partial_\mu c B^\mu A_\nu B^\nu - \partial^\mu\xi A_\mu A_\nu B^\nu - \partial_\nu c A_\mu B^\mu B^\nu - \partial^\nu\xi A_\mu B^\mu A_\nu].
\end{aligned}$$

Para a condição de invariância de Slavnov-Taylor, $\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\Gamma^{ct} = 0$, ser satisfeita, identificamos a nulidade de alguns coeficientes, $\alpha_j = 0, \text{ para } j = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, enquanto para os demais é possível via combinação linear, para tal, redefinimos os coeficientes sendo:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2 = e\alpha_1, \;\; \alpha_3 = g\alpha_1, \\
&\alpha_{23} = -\alpha_{26} = -\frac{1}{2}\beta_3, \\
&\alpha_{25} = -\alpha_{28} = -\frac{1}{2}\beta_4,
\end{aligned} \tag{5.55}
$$

com isso, pode-se escrever a ação de contratermos como:

$$
\Gamma^{ct} = \int d^4x \left[\alpha_1 \imath\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi + \alpha_4 m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\beta_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\beta_4 G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right]. \tag{5.56}
$$

Para o termo trivial $\tilde{\Gamma}$, respeitando o número de ghost igual a -1, partindo da Tabela 4.3 podemos construir a forma mais geral possível:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma} = \int d^4x \Big[&\tilde{\alpha}_1\bar{Y}\psi + \tilde{\alpha}_2\bar{\psi}Y + \tilde{\alpha}_3\bar{c}\partial^\mu A_\mu + \tilde{\alpha}_4\bar{c}b + \tilde{\alpha}_5\bar{c}\partial^\mu B_\mu + \tilde{\alpha}_6\bar{c}\pi + \tilde{\alpha}_7\bar{\xi}\partial^\mu A_\mu + \tilde{\alpha}_8\bar{\xi}b + \tilde{\alpha}_9\bar{\xi}\partial^\mu B_\mu \\
&+ \tilde{\alpha}_{10}\bar{\xi}\pi + \tilde{\alpha}_{11}\bar{c}A_\nu A^\nu + \tilde{\alpha}_{12}\bar{c}B_\nu B^\nu + \tilde{\alpha}_{13}\bar{\xi}A_\nu A^\nu + \tilde{\alpha}_{14}\bar{\xi}B_\nu B^\nu + \tilde{\alpha}_{15}\bar{c}A_\nu B^\nu + \tilde{\alpha}_{16}\bar{\xi}A_\nu B^\nu\Big],
\end{aligned} \tag{5.57}
$$

aplicando o operador de Slavnov-Taylor linearizado, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\tilde{\Gamma} = \int d^4x \Big\{&\tilde{\alpha}_1[(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\bar{Y})\psi - \bar{Y}(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\psi)] + \tilde{\alpha}_2[(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\bar{\psi})Y - \bar{\psi}(\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}Y)] + \tilde{\alpha}_3[b\partial^\mu A_\mu + \bar{c}\Box\, c] \\
&+ \tilde{\alpha}_4 b^2 + \tilde{\alpha}_5[b\partial^\mu B_\mu + \bar{c}\Box\, \xi] + \tilde{\alpha}_6 b\pi + \tilde{\alpha}_7[\pi\partial^\mu A_\mu + \bar{\xi}\Box\, c] + \tilde{\alpha}_8\pi b + \tilde{\alpha}_9[\pi\partial^\mu B_\mu + \bar{\xi}\Box\, \xi] \\
&+ \tilde{\alpha}_{10}\pi^2 + \tilde{\alpha}_{11}[bA_\nu A^\nu + 2\bar{c}A_\nu\partial^\nu c] + \tilde{\alpha}_{12}[bB_\nu B^\nu + 2\bar{c}B_\nu\partial^\nu\xi] + \tilde{\alpha}_{13}[\pi A_\nu A^\nu + 2\bar{\xi}A_\nu\partial^\nu c] \\
&+ \tilde{\alpha}_{14}[\pi B_\nu B^\nu + 2\bar{\xi}B_\nu\partial^\nu\xi] + \tilde{\alpha}_{15}[bA_\nu B^\nu + \bar{c}\partial_\nu cB^\nu + \bar{c}A_\nu\partial^\nu\xi] \\
&+ \tilde{\alpha}_{16}[\pi A_\nu B^\nu + \bar{\xi}\partial_\nu cB^\nu + \bar{\xi}A_\nu\partial^\nu\xi]\Big\},
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

usando as restrições (5.44)-(5.46), $\tilde{\alpha}_i = 0, \;\text{ para }\; i = 3, \ldots, 16$, escrevemos então:

$$
\mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\tilde{\Gamma} = \int d^4x \;(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)[\imath\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi]. \tag{5.59}
$$

Sabemos de (5.48) que, $\Gamma^{ct} = \check{\Gamma} + \mathcal{S}_{\Gamma^{(0)}}\tilde{\Gamma}$, com uma redefinição dos coeficientes de modo que:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = \beta_1, \\
&\alpha_4 + \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = -\beta_2,
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

A ação de contratermos Γ^{ct} é tal qual:

$$
\Gamma^{ct} = \int d^4x \left[\beta_1 \imath\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \beta_2 m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\beta_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\beta_4 G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right]. \tag{5.61}
$$

Para fixar os coeficientes dos contratermos invariantes, utilizamos condições de renormalização. Considerando o funcional de vértice no espaço dos *momenta*, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\Gamma_{\bar{\psi}\psi}(\not{p})\Big|_{\not{p}=m} = 0, \tag{5.62}$$

$$\frac{d}{d\not{p}}\Gamma_{\bar{\psi}\psi}(\not{p})\Big|_{\not{p}=m} = 1, \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^T_{AA}(p^2)\Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^T_{BB}(p^2)\Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \tag{5.65}$$

onde μ é o parâmetro de normalização (escala de energia) com dimensão de massa 1.

Agora precisamos verificar se Γ^{ct} pode ser reabsorvida pela ação de partida $\Gamma^{(0)}$ por meio de uma redefinição multiplicativa dos campos Φ (A^μ, B^μ, ...), das fontes externas Y e dos parâmetros λ (massa, cargas, ...) [32]:

$$\Gamma^{(0)}(\Phi, Y, \lambda) + \epsilon\Gamma^{ct} = \Gamma^{(0)}(\Phi_0, Y_0, \lambda_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{5.66}$$

onde vamos ter as chamadas quantidades *bare*, Φ_0, Y_0, λ_0, definidas como:

$$\Phi_0 = Z_\Phi^{1/2}\Phi, \quad Y_0 = Z_Y Y, \quad \lambda_0 = Z_\lambda \lambda. \tag{5.67}$$

Explicitamente, os fatores de renormalização para os campos A_μ, B_μ, ψ e parâmetro de massa fermiônico (m), temos:

$$Z_A^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\beta_3, \tag{5.68}$$

$$Z_B^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\beta_4, \tag{5.69}$$

$$Z_\psi^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\beta_1, \tag{5.70}$$

$$Z_m = 1 + \epsilon(\beta_2 - \beta_1). \tag{5.71}$$

Os fatores de renormalização dos ghosts de Faddeev-Popov (c, ξ), cargas (e, g), campos de Nakanishi-Lautrup (b, π) e fontes Y e parâmetros de *gauge* (α, β) não são independentes, isto é:

$$Z_c^{1/2} = Z_{\bar{c}}^{1/2} = Z_\xi^{1/2} = Z_{\bar{\xi}}^{1/2} = 1 \tag{5.72}$$

$$Z_b^{1/2} = Z_e = Z_A^{-1/2} \tag{5.73}$$

$$Z_\pi^{1/2} = Z_g = Z_B^{-1/2} \tag{5.74}$$

$$Z_Y = Z_{\bar{Y}} = Z_\psi^{1/2} Z_A^{-1/2} = Z_\psi^{1/2} Z_B^{-1/2} \tag{5.75}$$

$$Z_\alpha = Z_A^{-1} \tag{5.76}$$

$$Z_\beta = Z_B^{-1} \tag{5.77}$$

Vale notar que, por meio da equação (5.75), obteremos que $Z_A^{1/2} = Z_B^{1/2}$, o que nos leva aos coeficientes $\beta_3 = \beta_4$, conforme esperado, uma vez que a ação dos contratermos é invariante sob a troca discreta dos campos (4.21) (simetria de dualidade discreta). Isso é fisicamente consistente, considerando que A_μ e B_μ descrevem o campo eletromagnético. Portanto, concluímos que o modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam é renormalizável em todas as ordens na teoria de perturbação, finalizando nossa prova da consistência quântica do modelo.

6 Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, propomos a construção de um modelo para o *dyon*, uma partícula que possui tanto carga elétrica quanto carga magnética. Fundamentando-nos no trabalho proposto por Nicola Cabibbo e Ezio Ferrari em 1962 [5], que consiste na ampliação do grupo de simetria de calibre, e no trabalho de Abdus Salam de 1966 [21], no qual abandonamos a hipótese da condição de quantização de Dirac. Iniciamos com a construção de um *field strength* modificado, que é solução das equações de Maxwell na presença de carga magnética. A partir disso, desenvolvemos uma ação invariante sob simetrias discretas (C', P, T e $C'PT$) e também invariante de *gauge*, onde C' é a conjugação de carga elétrica e magnética, e P e T, as transformações de paridade e reversão temporal usuais, respectivamente.

Visando o estudo da renormalização algébrica, construímos as transformações de BRS, o que nos permitiu alcançar uma ação de partida do modelo, denominado "modelo de Cabibbo-Ferrari-Salam (CFS)". A ação do modelo é invariante sob BRS a menos de uma quebra linear devido à presença do termo de massa Lowenstein-Zimmermann. Na primeira parte deste trabalho, realizamos o estudo a *tree-level*, onde verificamos que o modelo é livre de estados de norma negativa, isto é, respeita a unitariedade. Além disso, o modelo também respeita a causalidade, não há táquions no espectro.

Na etapa final desta dissertação, estudamos as anomalias e a estabilidade do modelo CFS. Verificamos que o modelo é livre de anomalias de gauge e de infravermelho, além de ser estável. Assim, concluímos que a teoria é renormalizável a todas as ordens em teoria de perturbação, o que garante que as simetrias clássicas são preservadas no nível quântico, e que é multiplicativamente renormalizável.

A renormalizabilidade a todas as ordens abre novas perspectivas para investigações futuras sobre possíveis fenômenos físicos associados ao modelo CFS. Em particular, podemos realizar cálculos de espalhamento Compton, Bhabha e Möller. Também podemos explorar teorias efetivas do tipo Euler-Heisenberg aplicadas ao modelo CFS, onde pode-se estudar a birrefringência magnética do vácuo de modo a comparar com resultados experimentais. Além disso, uma análise da estabilidade e do espectro atômico em sistemas compostos por *dyon* e anti-*dyon* é uma possibilidade a ser considerada.

Outras direções de estudo incluem a incorporação do modelo CFS no contexto da extensão do Modelo Padrão, examinando como recuperá-lo a partir da teoria eletrofraca. Além disso, propor e estudar uma versão supersimétrica $N = 1$ do modelo CFS no superespaço.

Essas investigações não apenas aprofundarão nosso entendimento teórico, mas também poderão contribuir para a exploração de novos fenômenos físicos e possíveis aplicações do modelo.

Referências

[1] J. C. Maxwell, "On physical lines of force," *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1861.

[2] J. C. Maxwell, "A dynamical theory of the electromagnetic field," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, pp. 459–512, 1865.

[3] P. A. M. Dirac, "Quantised singularities in the electromagnetic field," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 133, no. 821, pp. 60–72, 1931.

[4] P. A. M. Dirac, "The Theory of Magnetic Poles," *Phys. Rev.*, vol. 74, pp. 817–830, Oct 1948.

[5] N. Cabibbo and E. Ferrari, "Quantum electrodynamics with Dirac monopoles," *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 23, pp. 1147–1154, 1962.

[6] J. Schwinger, "Sources and Magnetic Charge," *Phys. Rev.*, vol. 173, pp. 1536–1544, Sep 1968.

[7] Y. Nambu, "Strings, monopoles, and gauge fields," *Physical Review D*, vol. 10, no. 12, p. 4262, 1974.

[8] G. t Hooft, "Magnetic monopoles in unified theories," *Nucl. Phys. B*, vol. 79, no. CERN-TH-1876, pp. 276–284, 1974.

[9] A. M. Polyakov, "Particle spectrum in quantum field theory," in *30 years of the Landau institute—selected papers*, pp. 540–541, World Scientific, 1996.

[10] A. Rajantie, "The search for magnetic monopoles," *Physics Today*, vol. 69, no. 10, 2016.

[11] B. Cabrera, "First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles," *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 20, p. 1378, 1982.

[12] K. Topolnicki and W. Przygoda, "Search for magnetic monopoles and stable particles with high electric charges in $\sqrt{s}=13$ TeV pp collisions with the ATLAS detector," *The Journal of High Energy Physics*, vol. 2023, no. 11, 2023.

[13] J. Govaerts, "Magnetic monopoles with no strings attached: a portal to the dark side of dual electrodynamics," *Eur. Phys. J. C*, vol. 83, no. 2, p. 158, 2023.

[14] L. Mól, R. Silva, R. Silva, A. Pereira, W. Moura-Melo, and B. Costa, "Magnetic monopole and string excitations in two-dimensional spin ice," *Journal of Applied Physics*, vol. 106, no. 6, 2009.

[15] A. Rajantie, "Introduction to magnetic monopoles," *Contemporary Physics*, vol. 53, no. 3, pp. 195–211, 2012.

[16] P. Curie, "Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre," *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, vol. 3, no. 1, pp. 415–417, 1894.

[17] H. Poincaré, "Remarques sur une experience de M. Birkeland," *Comptes Rendus Acad. Sci*, vol. 123, p. 530, 1896.

[18] J. Preskill, "Magnetic monopoles," *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 34, no. 1, pp. 461–530, 1984.

[19] S. Mandelstam, "Quantum electrodynamics without potentials," *Annals Phys.*, vol. 19, pp. 1–24, 1962.

[20] N. F. Ramsey, "Time reversal, charge conjugation, magnetic pole conjugation, and parity," *Physical Review*, vol. 109, no. 1, p. 225, 1958.

[21] A. Salam, "Magnetic monopole and two photon theories of C-violation," *Physics Letters*, vol. 22, no. 5, pp. 683–684, 1966.

[22] A. Rabl, "Perturbation theory for magnetic monopoles," *Phys. Rev.*, vol. 179, pp. 1363–1370, 1969.

[23] T. Datta, "The fine-structure constant, magnetic monopoles and Dirac charge quantization condition," *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, vol. 37, pp. 51–54, 1983.

[24] D. Singleton, "Does magnetic charge imply a massive photon?," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 35, pp. 2419–2426, 1996.

[25] M. Veltman *et al.*, "Regularization and renormalization of gauge fields," *Nuclear Physics B*, vol. 44, no. 1, pp. 189–213, 1972.

[26] L. D. Faddeev and V. N. Popov, "Feynman diagrams for the Yang-Mills field," *Physics Letters B*, vol. 25, no. 1, pp. 29–30, 1967.

[27] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, "The abelian Higgs Kibble model, unitarity of the S-operator," *Physics Letters B*, vol. 52, no. 3, pp. 344–346, 1974.

[28] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, "Renormalization of gauge theories," *Annals of Physics*, vol. 98, no. 2, pp. 287–321, 1976.

[29] T. Kugo and I. Ojima, "Manifestly covariant canonical formulation of the Yang-Mills field theories. i: —general formalism—," *Progress of Theoretical Physics*, vol. 60, no. 6, pp. 1869–1889, 1978.

[30] T. Kugo and I. Ojima, "Manifestly covariant canonical formulation of Yang-Mills theories physical state subsidiary conditions and physical S-matrix unitarity," *Physics Letters B*, vol. 73, no. 4-5, pp. 459–462, 1978.

[31] N. Dragon and F. Brandt, "BRST symmetry and cohomology," in *Strings, gauge fields, and the geometry behind: The legacy of Maximilian Kreuzer*, pp. 3–86, World Scientific, 2013.

[32] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, vol. 28. Springer Science & Business Media, 2008.

[33] A. Fuster, M. Henneaux, and A. Maas, "BRST-antifield quantization: a short review," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 2, no. 05, pp. 939–963, 2005.

[34] M. Deliyergiyev, "Recent progress in search for dark sector signatures," *Open Physics*, vol. 14, no. 1, pp. 281–303, 2016.

[35] M. P. Bento, H. E. Haber, and J. P. Silva, "Classes of complete dark photon models constrained by Z-physics," *Physics Letters B*, p. 138501, 2024.

[36] M. Bauer, P. Foldenauer, and J. Jaeckel, "Hunting all the hidden photons," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, no. 7, pp. 1–47, 2018.

[37] G. Lüders and B. Zumino, "Some consequences of TCP-invariance," *Physical Review*, vol. 106, no. 2, p. 385, 1957.

[38] G. Lüders, "Proof of the TCP theorem," *Annals of Physics*, vol. 2, no. 1, pp. 1–15, 1957.

[39] O. Greenberg, "Why is CPT Fundamental?," *Foundations of Physics*, vol. 36, no. 10, pp. 1535–1553, 2006.

[40] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.

[41] S. N. Gupta, "Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics," *Proceedings of the Physical Society. Section A*, vol. 63, no. 7, p. 681, 1950.

[42] K. Bleuler, “Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 23, no. 5, pp. 567–586, 1950.

[43] N. Nakanishi, “Covariant quantization of the electromagnetic field in the Landau gauge,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 35, no. 6, pp. 1111–1116, 1966.

[44] N. Nakanishi, “On the validity of the Regge Formula in the Unequal-Mass case,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 37, no. 3, pp. 618–631, 1967.

[45] B. Lautrup, “Canonical quantum electrodynamics in covariant gauges,” *Matematisk-fysiske meddelelser: udgivet af Det Kongelige danske videnskabernes selskab*, vol. 35, no. 11, p. 3, 1967.

[46] J. H. Lowenstein, “BPHZ renormalization,” in *Renormalization Theory: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the International School of Mathematical Physics at the ‘Ettore Majorana’Centre for Scientific Culture in Erice (Sicily) Italy, 17–31 August, 1975*, pp. 95–160, Springer, 1976.

[47] O. M. Del Cima, D. H. Franco, and O. Piguet, “Symanzik–Becchi–Rouet–Stora lessons on renormalizable models with broken symmetry: The case of Lorentz violation,” *Nuclear Physics B*, vol. 912, pp. 51–69, 2016.

[48] O. Piguet and A. Rouet, “Symmetries in perturbative quantum field theory,” *Physics Reports*, vol. 76, no. 1, pp. 1–77, 1981.

[49] J. Lowenstein and B. Schroer, “Gauge invariance and Ward identities in a massive-vector-meson model,” *Physical Review D*, vol. 6, no. 6, p. 1553, 1972.

[50] J. Lowenstein and B. Schroer, “Comment on the absence of radiative corrections to the anomaly of the axial-vector current,” *Physical Review D*, vol. 7, no. 6, p. 1929, 1973.

[51] O. M. Del Cima, “The Jackiw–Pi model: Classical theory,” *Physics Letters B*, vol. 720, no. 1-3, pp. 254–261, 2013.

[52] M. Chaichian, J. Fischer, and Y. S. Vernov, “Generalization of the Froissart-Martin bounds to scattering in a space-time of general dimension,” *Nuclear Physics B*, vol. 383, no. 1-2, pp. 151–172, 1992.

[53] K. Chadan, N. Khuri, A. Martin, and T. T. Wu, “Universality of low-energy scattering in 2+ 1 dimensions,” *Physical Review D*, vol. 58, no. 2, p. 025014, 1998.

[54] O. M. Del Cima, “Probing the Froissart bound for models with charged vector fields in D= 3,” *Modern Physics Letters A*, vol. 9, no. 18, pp. 1695–1700, 1994.

[55] R. Stora, "Renormalization Theory, G. Velo, A.S. Wightman (Eds.), D Reidel (Dordrecht-Holland)," 1976.

[56] E. Kraus and K. Sibold, "Rigid invariance as derived from brs invariance: The abelian higgs model," *Z.Phys.C*, vol. 68, pp. 331–344, 1995.

Apêndices

APÊNDICE A – Problema de contagem para o campo gauge

Dado a ação do campo de calibre abeliano por:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{A.1}$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, podemos reescrever a ação como sendo,

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu)\right],$$

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu (\Box \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu. \tag{A.2}$$

Podemos reescrever, via transformada de Fourier, a ação para o espaço dos momenta sabendo que:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-\imath kx} \tilde{A}_\mu(k) \tag{A.3}$$

vamos ter

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-\imath kx} \tilde{A}_\mu(k) (\Box \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) e^{-\imath k'x} \tilde{A}_\nu(k'), \tag{A.4}$$

e assim obtendo

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{\imath(-k-k')x} \tilde{A}_\mu(k) (-k'^2 \eta^{\mu\nu} + k'^\mu k'^\nu) \tilde{A}_\nu(k'), \tag{A.5}$$

fazendo uso da identidade

$$\int d^4x e^{\imath kx} = (2\pi)^4 \delta^4(k) \tag{A.6}$$

temos a ação na forma:

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(-k-k') \tilde{A}_\mu(k) (-k'^2 \eta^{\mu\nu} + k'^\mu k'^\nu) \tilde{A}_\nu(k') \tag{A.7}$$

portanto, a ação é reescrita como

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k). \tag{A.8}$$

Analisando o operador

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu\nu}(k) = -k^2 \eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu, \tag{A.9}$$

podemos escolher uma configuração de campo no espaço dos momenta, na forma $\tilde{A}_\nu \sim k_\nu$, o operador vai ter autovalores zero,

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu\nu}(k) A_\nu \sim \hat{\mathcal{O}}^{\mu\nu}(k) k_\nu = -k^2 \eta^{\mu\nu} k_\nu + k^\mu k^\nu k_\nu = -k^2 k^\mu + k^\mu k^2 = 0 \tag{A.10}$$

a princípio o inverso deste operador $\hat{\mathcal{O}}^{\mu\nu}(k)$ nos forneceria o que seria a função de Green ($\Delta_{\nu\lambda}(k)$)

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu\nu}(k)\Delta_{\nu\lambda}(k) = \delta^{\mu}_{\lambda} \tag{A.11}$$

entretanto, este operador não é inversível, portanto a função de Green associada ao operador não existe. Logo, não há a possibilidade em realizar a quantização, muito menos de obter um propagador para o campo de calibre. Esse é o motivo de tomarmos o procedimento de *gauge-fixing*.

APÊNDICE B – Álgebra dos operadores

Sejam os operadores de projeção dados por:

$$\Theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box} \qquad \Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box} \tag{B.1}$$

podemos verificar que constituem uma álgebra fechada. Por exemplo, para o operador $\Theta_{\mu\nu}$ temos,

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\lambda}\Theta^{\lambda\nu} &= \left(\eta_{\mu\lambda} - \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\Box}\right)\left(\eta^{\lambda\nu} - \frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box}\right), \\
\Theta_{\mu\lambda}\Theta^{\lambda\nu} &= \left(\eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\nu} - \eta_{\mu\lambda}\frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box} - \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\Box}\eta^{\lambda\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\Box}\frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box}\right), \\
\Theta_{\mu\lambda}\Theta^{\lambda\nu} &= \left(\eta_\mu^{\ \nu} - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box} - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box} + \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box}\right), \\
\Theta_{\mu\lambda}\Theta^{\lambda\nu} &= \left(\eta_\mu^{\ \nu} - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box}\right),
\end{aligned} \tag{B.2}$$

dessa forma nós temos:

$$\Theta_{\mu\lambda}\Theta^{\lambda\nu} = \Theta_\mu^{\ \nu} \tag{B.3}$$

podemos também verificar para o operador $\Omega_{\mu\nu}$ que

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} &= \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\Box}\frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box}, \\
\Omega_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} &= \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box},
\end{aligned} \tag{B.4}$$

portanto, temos

$$\Omega_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} = \Omega_\mu^{\ \nu}. \tag{B.5}$$

Para finalizar verificamos a ortogonalidade entre $\Theta_{\mu\nu}$ e $\Omega_{\mu\nu}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} &= \left(\eta_{\mu\lambda} - \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\Box}\right)\frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box}, \\
\Theta_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} &= \eta_{\mu\lambda}\frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box} - \frac{\partial_\mu \partial_\lambda}{\Box}\frac{\partial^\lambda \partial^\nu}{\Box}, \\
\Theta_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} &= \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box} - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\Box},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

que nos leva em

$$\Theta_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda\nu} = 0, \tag{B.7}$$

completando a prova da álgebra dos operadores de projeção dados na Tabela 4.2.

APÊNDICE C – Base completamente 4-dimensional

Para obter uma base completa no espaço dos momenta em 4-dimensões, vamos iniciar com:

$$\begin{aligned} k^{\mu} &= (k^0, \mathbf{k}) \quad \tilde{k}^{\mu} = (k^0, -\mathbf{k}) \\ \epsilon^{\mu} &= (0, \epsilon) \qquad \tilde{\epsilon}^{\mu} = (0, \tilde{\epsilon}) \end{aligned} \tag{C.1}$$

onde tais vetores obedecem as seguintes restrições

$$\begin{gathered} k^{\mu}\epsilon_{\mu} = \tilde{k}^{\mu}\epsilon_{\mu} = k^{\mu}\tilde{\epsilon}_{\mu} = \tilde{k}^{\mu}\tilde{\epsilon}_{\mu} = 0, \\ \epsilon^{\mu}\epsilon_{\mu} = \tilde{\epsilon}^{\mu}\tilde{\epsilon}_{\mu} = -1. \end{gathered} \tag{C.2}$$

Desde que a análise seja feita no caso não-massivo $k^{\mu}k_{\mu} = 0$, podemos escolher $k^{\mu} = (\omega, 0, 0, \omega)$, consequentemente $\tilde{k}^{\mu} = (\omega, 0, 0, -\omega)$, então obtém-se $\epsilon^{\mu} = (0, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3)$, onde

$$k^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0 \rightarrow \omega\epsilon^3 = 0 \rightarrow \epsilon^3 = 0, \tag{C.3}$$

da mesma forma

$$k^{\mu}\tilde{\epsilon}_{\mu} = 0 \rightarrow \omega\tilde{\epsilon}^3 = 0 \rightarrow \tilde{\epsilon}^3 = 0, \tag{C.4}$$

agora $\epsilon^{\mu} = (0, \epsilon^1, \epsilon^2, 0)$ e $\epsilon^{\mu} = (0, \tilde{\epsilon}^1, \tilde{\epsilon}^2, 0)$. Resolvendo este conjunto de equações

$$\begin{cases} \epsilon^{\mu}\tilde{\epsilon}_{\mu} = 0 \rightarrow \epsilon^1\tilde{\epsilon}^1 + \epsilon^2\tilde{\epsilon}^2 = 0, \\ \epsilon^{\mu}\epsilon_{\mu} = -1 \rightarrow (\epsilon^1)^2 + (\epsilon^2)^2 = 1, \\ \tilde{\epsilon}^{\mu}\tilde{\epsilon}_{\mu} = -1 \rightarrow (\tilde{\epsilon}^1)^2 + (\tilde{\epsilon}^2)^2 = 1, \end{cases} \tag{C.5}$$

obtemos $\epsilon^2 = \tilde{\epsilon}^1 = \epsilon$ e $\epsilon^1 = -\tilde{\epsilon}^2 = \varepsilon$, portanto

$$\begin{aligned} k^{\mu} &= (\omega, 0, 0, \omega) \quad \tilde{k}^{\mu} = (\omega, 0, 0, \omega), \\ \epsilon^{\mu} &= (0, \epsilon, \varepsilon, 0) \quad \tilde{\epsilon}^{\mu} = (0, \varepsilon, -\epsilon, 0). \end{aligned} \tag{C.6}$$

APÊNDICE D – Invariância discreta do operador de Slavnov-Taylor

Para verificar se o operador de Slavnov-Taylor $\mathcal{S}$ é invariante sob a conjugação das cargas C', seja a transformação dada por:

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) \xrightarrow{C'} \mathcal{S}^{C'}(\mathcal{F}^{C'}) \tag{D.1}$$

precisamos analisar os termos do operador de Slavnov-Taylor,

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \int d^4x \left[-\partial_\mu c \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A_\mu} - \partial_\mu \xi \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta B_\mu} + b \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}} + \pi \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\xi}} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{Y}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta Y} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}} \right], \tag{D.2}$$

de modo que, as transformações dadas por (4.18) e (4.56), a parte espinorial se transforma como:

$$\frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{Y}^{C'}_\alpha} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \psi^{C'}_\alpha} = \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta Y_\beta} \frac{\delta Y_\beta}{\delta \bar{Y}^{C'}_\alpha} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\psi}_{\beta'}} \frac{\delta \bar{\psi}_{\beta'}}{\delta \psi^{C'}_\alpha} = \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta Y_\beta} (-C'_{\alpha\beta}) \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\psi}_{\beta'}} (C'^{-1}_{\beta'\alpha}) = -\frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta Y_\beta} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\psi}_\beta} \tag{D.3}$$

de forma similar, temos

$$\frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta Y^{C'}_\alpha} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\psi}^{C'}_\alpha} = -\frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{Y}_\beta} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \psi_\beta}, \tag{D.4}$$

Os demais termos na identidade de Slavnov-Taylor são verificados de imediato. Portanto, mediante a conjugação das cargas C',

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{C'}(\mathcal{F}^{C'}) &= \int d^4x \left[-\partial_\mu c^{C'} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta A^{C'}_\mu} - \partial_\mu \xi^{C'} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta B^{C'}_\mu} + b^{C'} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{c}^{C'}} + \pi^{C'} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\xi}^{C'}} + \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{Y}^{C'}} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \psi^{C'}} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta Y^{C'}} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\psi}^{C'}} \right], \\ &= \int d^4x \left[-\partial_\mu c \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta A_\mu} - \partial_\mu \xi \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta B_\mu} + b \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{c}} + \pi \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\xi}} - \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta Y} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \bar{Y}} \frac{\delta \mathcal{F}^{C'}}{\delta \psi} \right].\end{aligned} \tag{D.5}$$

Concluímos que, o operador de Slavnov-Taylor $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ é C'-invariante se o funcional $\mathcal{F}$ também for. A prova também pode ser reproduzida para o operador linearizado de Slavnov-Taylor $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para as demais transformações discretas, paridade e reversão temporal, na condição do funcional ser invariante sob P e T, sendo este o caso para o modelo CFS.