

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

CÍNTIA COELHO DOS SANTOS

**TEORIA DE MELNIKOV PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
SUAVES POR PARTES**

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022**

CÍNTIA COELHO DOS SANTOS

**TEORIA DE MELNIKOV PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
SUAVES POR PARTES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Oscar Alexander Ramírez
Céspedes

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2022

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S237t Santos, Cíntia Coelho dos, 1997-
2022 Teoria de Melnikov para sistemas de equações diferenciais
suaves por partes / Cíntia Coelho dos Santos. – Viçosa, MG,
2022.

1 dissertação eletrônica (81 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Oscar Alexander Ramírez Cespedes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2022.

Referências bibliográficas: f. 79-81.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2022.260>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Sistemas lineares. 2. Ciclo limite. 3. Melnikov, Método
de. I. Cespedes, Oscar Alexander Ramírez, 1988-.
II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

CDD 22. ed. 515.353

Bibliotecário(a) responsável: Alice Regina Pinto CRB6 2523


CÍNTIA COELHO DOS SANTOS

TEORIA DE MELNIKOV PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
SUAVES POR PARTES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de fevereiro de 2022.

Assentimento:



Cíntia Coelho dos Santos
Autora



Oscar Alexander Ramírez Cespedes
Orientador

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter guiado meu caminho até aqui, pelas ótimas pessoas que colocou na minha vida durante esses dois anos, por ter ouvido todas as minhas orações, me acalmado nos momentos de tensão e por ter me tornado uma pessoa mais persistente.

O meu orientador, Oscar Alexander Ramírez Cespedes, pela disponibilidade e dedicação que foram indispensáveis na realização deste trabalho. Por toda paciência, apoio, amizade e, principalmente, pela confiança. Sua motivação e ensinamentos foram fundamentais para o meu amadurecimento científico.

Aos professores do DMA-UFV de quem tive a oportunidade de ser aluna pelo acolhimento, frases motivadoras, incentivo à pesquisa e paciência durante o percurso. Agradeço também a Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade e o Prof. Dr. Alexandre Miranda Alves por aceitarem o convite de compor a banca de defesa e pelas contribuições ao trabalho.

Aos meus pais, José Luiz e Maria das Dores, que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória. Sou grata por sempre me incentivarem e acreditarem que eu seria capaz de superar os obstáculos. Obrigada por todo o esforço investido na minha educação, confiança no meu progresso e pelo apoio emocional.

Ao meu irmão, Thiago, por estar ao meu lado e por me fazer ter confiança nas minhas decisões. Pela amizade e atenção dedicadas quando sempre precisei. Por me incentivar a prosseguir na caminhada e por acreditar na minha capacidade.

Aos meus amigos de mestrado, Amanda, Angie, Carlos e Renata, por compartilharem essa experiência com tanta determinação, pelo companheirismo, pelo apoio nas crises e pelos estudos em grupos.

As minhas amigas, Fernanda e Thaynara, por dividirem a casa e a vida em Viçosa nos últimos dois anos. Obrigada pelas trocas acadêmicas e experiências vividas. Os passeios, as horas de descontração e até mesmo os desentendimentos contribuíram muito para o meu amadurecimento pessoal.

Por fim, agradeço a FAPEMIG pelo suporte financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Eu aprendi qual é o valor de um sonho alcançar
Eu entendi que o caminho pedras terá
[...]
Vejo vitórias e hoje eu olho pra trás
E a minha frente eu sei
Existem muito mais
Eu sei que minha jornada aqui só começou
Ao longo dessa estrada sozinho não estou
(Só o começo- Vocal livre)*

Resumo

SANTOS, Cíntia Coelho dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2022. **Teoria de Melnikov para sistemas de equações diferenciais suaves por partes.** Orientador: Oscar Alexander Ramírez Céspedes.

Neste trabalho, o objetivo principal é estudar o número máximo de ciclos limite, $H(m, n)$, de um sistema diferencial linear por partes planar com duas zonas separadas pela curva $y^n = x^m$, com m, n sendo inteiros positivos. Mais precisamente, fornecemos uma estimativa inferior de $H(m, n)$ para perturbações lineares por partes de um centro linear usando alguns resultados recentes sobre sistemas de Chebyshev com acurácia positiva e sobre a Teoria de Melnikov.

Palavras-chave: Ciclos limites. Teoria de Melnikov. Sistemas lineares por partes.

Abstract

SANTOS, Cíntia Coelho dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2022. **Melnikov's theory of piecewise smooth differential equation.** Adviser: Oscar Alexander Ramírez Cespedes.

The main objective of this work is to study the maximum number of limit cycles, $H(m, n)$, of a planar piecewise linear differential system with two zones separated by the curve $y^n = x^m$, where m, n are positive integers. More precisely, we provide a lower estimate of $H(m, n)$ for piecewise linear perturbations of a linear center using some recent results about Chebyshev systems with positive accuracy and Melnikov Theory.

Keywords: Limit cycles. Melnikov Theory. Piecewise linear systems.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 8 |
| 1 Preliminares | 13 |
| 1.1 Convenção de Filippov | 13 |
| 1.2 Alguns teoremas importantes | 16 |
| 1.3 Teoria de Chebyshev | 17 |
| 2 Teoria de Melnikov | 20 |
| 2.1 Funções de Melnikov para uma classe de sistemas suaves por partes | 20 |
| 3 Aplicações | 39 |
| 3.1 Famílias de sistemas ET com acurácia | 45 |
| 3.2 Provas dos Teoremas 1, 2 e 3 | 65 |
| Considerações Finais | 78 |
| Referências Bibliográficas | 81 |

Introdução

Segundo [12], a noção de ciclo limite surgiu pela primeira vez através de Henri Poincaré entre os anos de 1880 e 1890, por meio da definição de órbita periódica. Um ciclo limite de um sistema diferencial é uma solução periódica isolada. O estudo de ciclos limites ganhou importância com o desenvolvimento da teoria qualitativa de equações diferenciais. Porém, apesar dos grandes avanços e ferramentas para determinar a quantidade de ciclos limites, devido a sua complexidade, ainda possuem vários problemas em aberto.

Em 1900, na Conferência Internacional de Matemática, o matemático alemão David Hilbert apresentou uma lista com 23 problemas matemáticos, conhecidos como “Problemas de Hilbert”, para serem resolvidos durante o século XX. Dentre esses 23 problemas, o 16^o problema de Hilbert, que ainda está em aberto, se trata de conhecer o número e a distribuição de ciclos limites em sistemas diferenciais planares.

O problema acima mencionado foi dividido em duas partes, sendo a primeira de interesse da geometria algébrica e a segunda que questiona sobre a quantidade máxima e localizações dos ciclos limites de sistemas polinomiais no plano, ou seja, sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

onde P e Q são polinômios nas variáveis x e y com graus menores ou iguais a n .

Devido a dificuldade da resolução do 16^o problema de Hilbert, vários matemáticos foram dando novos enunciados ao problema. Por exemplo, existem diversos estudos sobre ciclos limites algébricos, ou seja, curvas algébricas $f(x, y) = 0$ que são soluções particulares de (1), como pode ser visto em [32, 24]. Além disso, tem-se estudado sistemas suaves por partes para explicar alguns fenômenos levando a reformulação do 16^o problema de Hilbert para esse tipo de sistemas. Há um grande número de artigos que abordam este problema assumindo que a curva de descontinuidade é uma linha reta, veja [2, 5, 4, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 21, 22, 23, 25, 26]. Recentemente, o caso não linear foi estudado considerando que a curva de descontinuidade é da forma $y - x^m = 0$, com m sendo um número inteiro positivo, veja [1, 6, 20, 29, 30].

Em particular, o objetivo deste trabalho é estudar o 16^o problema de Hilbert para uma classe de sistemas diferenciais suaves por partes com curva de descontinuidade não-linear.

Para isso, sejam D um conjunto aberto de \mathbb{R}^d , $S^1 = \mathbb{R}/T$ para algum período $T > 0$, N um número inteiro positivo e um conjunto finito de funções $\theta_i : D \rightarrow S^1$ para $i = 1, \dots, M$ de classe \mathcal{C}^r ($r \geq N + 1$). Para todo $x \in D$,

$$0 \equiv \theta_0(x) < \theta_1(x) < \theta_2(x) < \dots < \theta_M(x) < \theta_{M+1}(x) \equiv T.$$

Consideramos o seguinte sistema diferencial suave por partes

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{N+1} R(t, x, \varepsilon), \quad (2)$$

com

$$F_i(t, x) = \begin{cases} F_i^0(t, x), & 0 < t < \theta_1(x), \\ F_i^1(t, x), & \theta_1(x) < t < \theta_2(x), \\ \vdots \\ F_i^M(t, x), & \theta_M(x) < t < T, \end{cases}$$

e

$$R(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} R^0(t, x, \varepsilon), & 0 < t < \theta_1(x), \\ R^1(t, x, \varepsilon), & \theta_1(x) < t < \theta_2(x), \\ \vdots \\ R^M(t, x, \varepsilon), & \theta_M(x) < t < T, \end{cases}$$

onde $F_i^j : S^1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $R^j : S^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$, são funções \mathcal{C}^r , $r \geq N + 1$, e T -periódicas na variável t . Onde a curva de descontinuidade desse sistema é definida por $\Sigma = \{(\theta_j(x), x); x \in D, j = 0, 1, \dots, M\}$.

Neste trabalho apresentamos uma das técnicas utilizadas no estudo de ciclos limites que bifurcam de um centro em sistemas planos, conhecida como Teoria de Melnikov, veja [3]. Esta teoria, que é de nosso interesse, é uma ferramenta clássica para atacar problemas sobre a determinação de soluções periódicas, pois ela nos indica a existência e a quantidade de ciclos limites de (2), como pode ser visto em [1, 8].

No Capítulo 1 são apresentados os conceitos preliminares e alguns resultados que são fundamentais para o entendimento do restante do trabalho. Iniciamos com o estudo da Convenção de Filippov que é necessária para estabelecer as soluções dos sistemas estudados. Apresentamos, então, o Teorema de Descartes que foi utilizado junto com a Teoria de Chebyshev para a determinação do número máximo de ciclos limites de sistemas diferenciais lineares por partes planares.

No Capítulo 2 é estudada a Teoria de Melnikov de primeira e segunda ordem. Nele apresentamos o Teorema 2.1, que visa determinar uma relação entre os zeros das funções de Melnikov de primeira e segunda ordens do sistema (2) e a existência de órbitas periódicas isoladas, ou seja, a existência de ciclos limites, e sua demonstração.

Por último, no Capítulo 3, aplicamos a Teoria de Melnikov a fim de determinar uma

cota inferior para o número máximo de ciclos limites que o seguinte sistema possui:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i P_i^+(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i Q_i^+(x, y) \end{pmatrix}, & y^n - x^m > 0, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i P_i^-(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i Q_i^-(x, y) \end{pmatrix}, & y^n - x^m < 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde m, n são inteiros positivos, e P_i^\pm e Q_i^\pm são funções polinomiais de grau 1 dadas por

$$\begin{aligned} P_i^+(x, y) &= a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}y, \\ P_i^-(x, y) &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \alpha_{2i}y, \\ Q_i^+(x, y) &= b_{0i} + b_{1i}x + b_{2i}y, \\ Q_i^-(x, y) &= \beta_{0i} + \beta_{1i}x + \beta_{2i}y, \end{aligned}$$

com $a_{ji}, \alpha_{ji}, b_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno. A curva de descontinuidade do sistema (3) é dada por $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^n = x^m\}$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Desta maneira, determinamos um limite inferior para $H(m, n)$, sendo $H(m, n)$ o número máximo de ciclos limites que estes sistemas podem ter e $m, n \in \mathbb{N}$.

Os valores $m_\ell(m, n)$, para $\ell \in \{1, 2\}$, fornecem limites inferiores para $H(m, n)$, ou seja, $H(m, n) \geq m_\ell(m, n)$ para cada $\ell \in \{1, 2\}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Os resultados conhecidos na literatura abordam o caso em que $n = 1$ e $m \in \mathbb{N}$ e estão apresentados na Tabela 1, retirada de [1].

| | | Ordem ℓ | |
|----------|------------------|--------------|----------|
| | | 1 | 2 |
| Grau m | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 3 | 4 |
| | 3 | 3 | 7 |
| | $m \geq 4$ par | 4 | 7 |
| | $m \geq 5$ ímpar | 3 | 7 |

Tabela 1: Valores conhecidos na literatura. Em particular, $H(2, 1) \geq 4$, $H(3, 1) \geq 8$, $H(m, 1) \geq 7$, para $n \geq 4$ par e $H(m, 1) \geq 9$, para $n \geq 5$ ímpar.

Os principais resultados encontrados no Capítulo 3 fornecem os valores de $m_\ell(m, n)$, para $\ell \in \{1, 2\}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Assim, nossa contribuição é apresentada nas Tabelas 2, 3 e 4 que estendem os valores de n considerando $n \in \mathbb{N}$.

| | Ordem ℓ | |
|--|--------------|----------|
| | 1 | 2 |
| Quociente m/n $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$ | 3 | 7 |
| $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ | 2 | 8 |
| $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$ | 2 | 7 |
| $\{1\}$ | 1 | 1 |

Tabela 2: Valores para $m_\ell(m, n)$, com $\ell \in \{1, 2\}$, quando m, n são números inteiros positivos ímpares.

| | Ordem ℓ | |
|--|--------------|----------|
| | 1 | 2 |
| Quociente m/n $\left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$ | 2 | 5 |
| $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2] \cup [3, 5]$ | 2 | 4 |
| $\{1\}$ | 0 | 1 |

Tabela 3: Valores para $m_\ell(m, n)$, com $\ell \in \{1, 2\}$, quando m, n são números inteiros positivos pares.

| | | Ordem ℓ | |
|-----------------|---|--------------|----------------------|
| | | 1 | 2 |
| Quociente m/n | $(0, k_0) \cup (k_0, k_1)$ | 3 | $6 \leq m_2 \leq 11$ |
| | $\left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$ | 3 | 7 |
| | $\left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$ | 3 | 6 |
| | $\left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2)$ | 3 | $7 \leq m_2 \leq 8$ |
| | $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup (k_5, \infty)$ | 4 | 7 |
| | $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ | 3 | 5 |
| | $\{2\}$ | 3 | 4 |
| | $(2, 3)$ | 4 | $7 \leq m_2 \leq 8$ |
| | $(3, k_4)$ | 4 | $6 \leq m_2 \leq 11$ |
| | (k_4, k_5) | 4 | $7 \leq m_2 \leq 9$ |

Tabela 4: Valores para $m_\ell(m, n)$, com $\ell \in \{1, 2\}$, quando m é inteiro positivo par e n é inteiro positivo ímpar.

Capítulo 1

Preliminares

No desenvolvimento deste capítulo, abordamos alguns conceitos básicos que serão necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. Entre eles encontram-se a Convenção de Filippov e o Teorema da Função Implícita serão fundamentais na Teoria de Melnikov. Além disso, o estudo da Teoria de Chebyshev e da Regra de Sinais de Descartes que serão essenciais para adquirirmos os resultados apresentados neste trabalho.

1.1 Convenção de Filippov

Nesta seção, apresentamos conceitos básicos em Sistemas de Equações Diferenciais Suaves por Partes, conhecidos como Sistemas de Filippov, que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Estes conceitos não podem ser transferidos da Teoria Qualitativa clássica de sistemas suaves devido à presença de uma superfície de descontinuidade. Desta maneira, iremos reformulá-los afim de preservar algumas características dos sistemas suaves. Os resultados a seguir têm como referências [17] e [28].

Com esse objetivo, consideremos um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ e subvariedades de dimensão 1 (regiões de descontinuidade) que dividam essa região em “partes”, de forma que, em cada “parte” podemos definir diferentes campos suaves.

Sejam X e Y campos vetoriais suaves definidos em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem e f um germe de uma função \mathcal{C}^r , $r > 1$, (\mathcal{C}^r denota o conjunto das funções continuamente diferenciáveis de ordem r) para o qual 0 é valor regular. Então, a curva $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão um e divide o conjunto aberto U em duas regiões abertas:

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U | f(x, y) > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{(x, y) \in U | f(x, y) < 0\},$$

Um sistema planar de Filippov é um campo vetorial suave por partes no plano definido

da seguinte forma:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases} \quad (1.1)$$

Denota-se $Z = (X, Y)$ a fim de esclarecer quais são as componentes do campo vetorial. Além disso, assumimos que X e Y são de classe \mathcal{C}^r , com $r > 1$, em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, onde $\overline{\Sigma^\pm}$ denota o fecho de Σ^\pm .

Chamaremos de Ω^r o espaço dos campos vetoriais desse tipo. Este pode ser tomado como $\Omega^r = \mathcal{X}^r \times \mathcal{X}^r$, onde \mathcal{X}^r denota o conjunto dos campos de classe \mathcal{C}^r em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$. Consideremos Ω^r com a topologia produto.

A fim de estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega^r$ em U , precisamos definir a trajetória local por um ponto $p \in U$. Se p pertence a Σ^+ ou Σ^- definimos a trajetória local desse ponto como a trajetória dada, respectivamente, pelos campos X e Y da maneira usual.

Se p pertence a Σ devemos ter um pouco mais de cuidado ao definir a trajetória local e para isso começamos observando que Σ pode ser dividido como o fecho das 3 regiões dadas a seguir, que dependem da forma como apontam os campos X e Y :

1. Região de costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$;
2. Região de deslize estável (ou deslize): $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$;
3. Região de deslize instável (ou escape): $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$.

onde $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$ e $Yf(p) = \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle$ são, respectivamente, as derivadas de Lie de f com respeito aos campos de vetores X e Y no ponto p . As Figuras 1.1, 1.2, 1.3 ilustram cada uma dessas regiões.

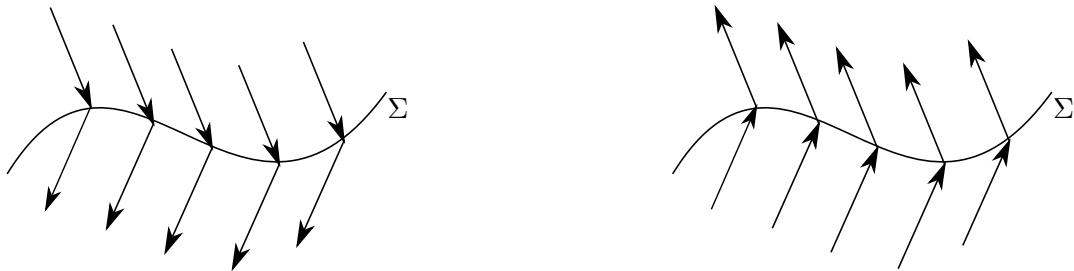


Figura 1.1: Regiões de costura

Para este trabalho, utilizamos somente as regiões de costura, por isso, a partir daqui, nos restringimos a elas. Dado um campo vetorial suave por partes autônomo X definido em um conjunto aberto U , denotamos seu fluxo $\varphi_X(t, p)$ estabelecendo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p. \end{cases}$$

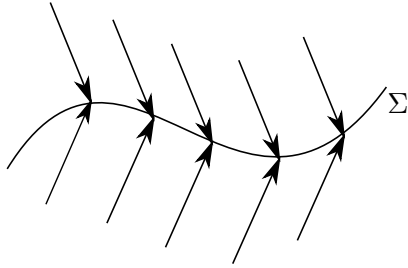


Figura 1.2: Região de deslize

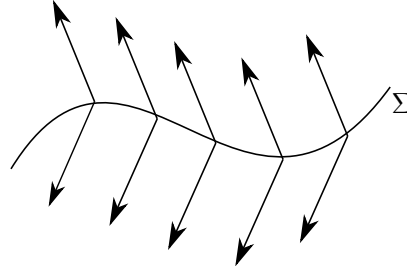


Figura 1.3: Região de escape

O fluxo $\varphi_X(t, p)$ está definido para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde $I = I(p)$ é um intervalo que depende de $p \in U$ e do campo vetorial X .

De maneira não rigorosa, para definirmos trajetória em um ponto $p \in \Sigma^c$, basta sobrepor as trajetórias de X e Y em p . A seguir, damos uma definição formal de trajetória:

Definição 1.1. A *trajetória local* de um Sistema de Filippov como (1.1) por um ponto p é definida da seguinte maneira:

1. Para $p \in \Sigma^+$ ou $p \in \Sigma^-$, tais que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$, respectivamente, a trajetória por p é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ ou $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, para $t \in I \subset \mathbb{R}$, respectivamente.
2. Para $p \in \Sigma^c$, temos dois casos:
 - (a) Se $Xf(p), Yf(p) > 0$, definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I \cap [0, +\infty), \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap (-\infty, 0]. \end{cases}$$

- (b) Se $Xf(p), Yf(p) < 0$, definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap [0, +\infty), \\ \varphi_X(t, p), & t \in I \cap (-\infty, 0]. \end{cases}$$

3. Para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) \neq 0$, definimos $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$ para $t \in I$, onde Z^s é o campo vetorial deslizante dado pela equação

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}.$$

4. Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que as trajetórias para os pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é essa trajetória estendida. Nesse caso dizemos que p é um ponto de tangência regular.

5. Para pontos p que não se enquadram nos itens acima, definimos $\varphi_Z(t, p) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Esse é o caso dos pontos críticos de X e Y em Σ^\pm , e dos pontos críticos do campo deslizando Z^s em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$. Também estão incluídos os pontos de tangência em Σ que não são regulares, chamados pontos de tangência singulares.

Definição 1.2. A órbita local de um ponto $p \in U$, é o conjunto

$$\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I\}.$$

Definição 1.3. Dados um ponto $p \in \Sigma$ e uma trajetória $\varphi_Z(t, q) \in \overline{\Sigma^+} \cup \overline{\Sigma^-}$, dizemos que p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$ e diremos que é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$.

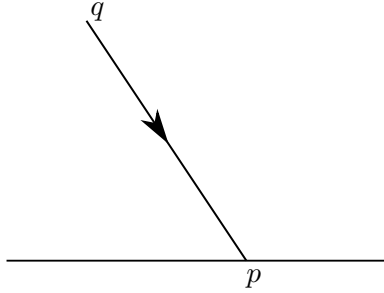


Figura 1.4: Ponto de chegada

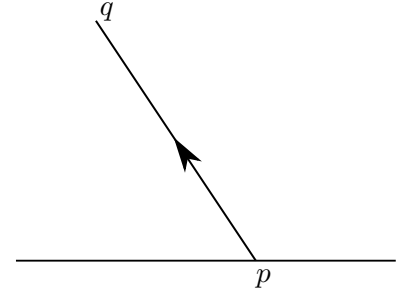


Figura 1.5: Ponto de partida

Note que, de acordo com a definição de fluxo, se $p \in \Sigma^c$, então p é o **ponto de partida** de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer ponto q pertencente à órbita $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap [0, \infty)\}$ e é um **ponto de chegada** de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer q pertencendo à órbita $\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap (-\infty, 0]\}$. Assim, a órbita por um ponto $p \in \Sigma^c$ é a união do ponto com suas órbitas de partida e chegada, isto é,

$$\gamma(p) = \{p\} \cup \gamma^+(p) \cup \gamma^-(p).$$

1.2 Alguns teoremas importantes

A seguir apresentamos alguns teoremas que serão necessários nos capítulos seguintes. Em particular, utilizamos o Teorema da Função Implícita, exclusivamente, no Capítulo 2.

Teorema 1.1 (Teorema da Função Implícita). [19] Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0; \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:

- (i) $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$;

(ii) Para todo $x \in B$ existe um único $y = \zeta(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \zeta(x)) = c$.

A função $\zeta : B \rightarrow J$, assim definida, é de classe \mathbb{C}^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \zeta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \zeta(x))}.$$

O seguinte teorema que nos auxilia na contagem de zeros dos polinômios que encontramos no Capítulo 3.

Teorema 1.2 (Regra de Sinais de Descartes). [7] *Seja $P(x) = a_0x^{B_0} + a_1x^{B_1} + \dots + a_nx^{B_n}$, um polinômio com coeficientes reais não nulos e cujos expoentes satisfazem $B_0 < B_1 < \dots < B_n$. Então o número de raízes positivas de $P(x)$ (contadas com suas multiplicidades) é menor ou igual à quantidade de mudanças de sinais na sequência de coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n . Além disso, a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e a quantidade de raízes positivas de $P(x)$ é um número par.*

1.3 Teoria de Chebyshev

Considere $\mathcal{F} = [u_0, \dots, u_n]$ um conjunto ordenado de funções suaves definidas no intervalo fechado $[a, b]$ e $\mathcal{Z}(\mathcal{F})$ o número máximo de zeros, contando a multiplicidade, de qualquer função não-trivial em $\text{Span}(\mathcal{F})$, sendo este o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de \mathcal{F} . A seguir apresentamos definições e teoremas sobre a Teoria de Chebyshev que utilizamos para estudar o número de zeros não negativos das funções de Melnikov.

Definição 1.4. [16] *O conjunto \mathcal{F} é dito um Sistema Estendido de Chebyshev ou apenas sistema ET em $[a, b]$, se $\mathcal{Z}(\mathcal{F}) \leq n$.*

Definição 1.5. [27] *Quando $\mathcal{Z}(\mathcal{F}) = n + k$, o conjunto \mathcal{F} é chamado um sistema ET com acurácia k em $[a, b]$.*

Definição 1.6. *Dizemos que \mathcal{F} é um Sistema Estendido Completo de Chebyshev ou um sistema ECT se, e somente se, para qualquer k , $0 \leq k \leq n$, $[u_0, u_1, \dots, u_k]$ é um sistema ET.*

A seguir enunciaremos os principais resultados da Teoria da Chebyshev.

Definição 1.7. *O Wronskiano do conjunto ordenado $[u_0, \dots, u_s]$, de $s+1$ funções, é definido como*

$$W_s(x) = W_s(u_0, \dots, u_s)(x) = \det(M(u_0, \dots, u_s)(x)),$$

onde

$$M(u_0, \dots, u_s)(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) & \dots & u_s(x) \\ u_0'(x) & \dots & u_s'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(s)}(x) & \dots & u_s^{(s)}(x) \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.3. [16] $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ é um sistema ECT em $[a, b]$ se, e somente se, $W(u_0, \dots, u_k)(x) \neq 0$ em $[a, b]$ para $0 \leq k \leq n$.

Teorema 1.4. [16] Seja $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ um sistema ECT em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, o número de zeros isolados para todo elemento de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não ultrapassa n . Além disso, para cada configuração de $m \leq n$ zeros, contando sua multiplicidade, existe $F \in \text{Span}(\mathcal{F})$ com essa configuração de zeros.

Exemplo 1.1. A família $\mathcal{G}_2^k = [x + x^{2k-1}, x + x^{2k-1} \tan^{-1}(x^{k-1}), x^k]$ é um sistema ECT e $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_2^k) = 2$, para $k \neq 1$.

De fato, os Wronskianos da família \mathcal{G}_2^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x + x^{2k-1}, \\ W_1(x) &= (k-1)x^{k-2}(x^2 + x^{2k}), \\ W_2(x) &= -\frac{4(k-1)^3 x^{4k-2}}{x^2 + x^{2k}}. \end{aligned}$$

Note que $W_0(x), W_1(x), W_2(x) \neq 0$ para $x > 0$ e $k \neq 1$. Assim, a família \mathcal{G}_2^k é um sistema ECT, para $k \neq 1$. Portanto, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_2^k) = 2$, para $k \neq 1$.

Os próximos resultados estendem o teorema acima para o caso em que alguns Wronskianos possuem zeros.

Teorema 1.5. [27] Seja $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ um conjunto ordenado de funções definidas em $[a, b]$. Assuma que todos os Wronskianos $W_i(x)$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, não possuem zeros em $[a, b]$, exceto $W_n(x)$, que tem exatamente um zero em $[a, b]$ e esse zero é simples. Então, o número de zeros isolados para todo elemento de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não excede $n+1$. Além disso, para qualquer configuração de $m \leq n+1$ zeros existe $F \in \text{Span}(\mathcal{F})$ com exatamente $n+1$ zeros.

Exemplo 1.2. A família $\mathcal{G}_3^k = [1, x^{k-1}, x + x^{2k-1}]$ é um sistema ET com acurácia 1 em $[a, b]$, com $a, b > 0$, e $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_3^k) = 3$, para $k \in (2, \infty)$.

De fato, os Wronskianos da família \mathcal{G}_3^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= (k-1)x^{k-2}, \\ W_2(x) &= (k-1)x^{k-3}P_{0,k}(x^{2k-2}), \end{aligned}$$

com $P_{0,k}(x) = k(2k-1)x - (k-2)$. Para $k \neq 1$, $W_0(x), W_1(x)$ são não nulos em $(0, \infty)$. Note que $P_{0,k}(0)P'_{0,k}(x) < 0$ se $k \in (2, \infty)$. Logo, $W_2(x)$ tem exatamente um zero positivo, o qual é simples, para $k \in (2, \infty)$. Assim, a família \mathcal{G}_3^k é um sistema ET com acurária 1, para $k \in (2, \infty)$. Portanto, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_3^k) = 3$, para $k \in (2, \infty)$.

Teorema 1.6. [27] Seja $\mathcal{F} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ um conjunto ordenado de funções analíticas em $[a, b]$. Assuma que todos os ν_i zeros do Wronskiano W_i são simples para $i \in \{0, \dots, n\}$. Então o número de zeros isolados para todos elementos de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não excede

$$n + \nu_n + \nu_{n-1} + 2(\nu_{n-2} + \dots + \nu_0) + \mu_{n-1} + \dots + \mu_3 \quad (1.2)$$

com $\mu_i = \min(2\nu_i, \nu_{i-3} + \dots + \nu_0)$, para $i \in \{3, \dots, n-1\}$.

Observação 1.1. No Teorema 1.6, assumimos que todos os zeros dos Wronskianos W_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, são simples. Em [1] foi observado que a condição pode ser eliminada da seguinte forma:

Assuma que, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, Wronskiano W_i tem ν_i zeros contando a multiplicidade. Então, o número de zeros simples para cada elemento de $\text{Span}(\mathcal{F})$ não excede (1.2).

De fato, se existe um elemento $f = \sum_{i=0}^n a_i u_i \in \text{Span}(\mathcal{F})$ tal que o número de zeros simples excede (1.2), então perturbando as funções u_i , denotadas como u_i^ε , para $i \in \{0, \dots, n\}$, a função $f_\varepsilon = \sum_{i=0}^n a_i u_i^\varepsilon$ ainda iria exceder (1.2), porque assumimos que os zeros de f são simples. Além do mais, essa perturbação pode ser escolhida de modo que cada Wronskiano W_i^ε do conjunto ordenado de funções $[u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon]$, para $i \in \{0, \dots, n\}$, tem menos ou exatamente ν_i zeros, todos eles simples. Isso contradiz o Teorema 1.6.

Capítulo 2

Teoria de Melnikov

Recentemente desenvolvida para sistemas diferenciais não suaves com curva não linear em [1], a Teoria de Melnikov fornece uma sequência de funções Δ_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, que controlam, em certo sentido, a existência de órbitas periódicas isoladas bifurcando de um anel de órbitas periódicas. Essas funções são chamadas de Funções de Melnikov ou Funções de Bifurcação. O objetivo deste capítulo é apresentar e demonstrar o resultado que servirá como base para o desenvolvimento do Capítulo 3.

2.1 Funções de Melnikov para uma classe de sistemas suaves por partes

Sejam D um conjunto aberto de \mathbb{R}^d , $S^1 = \mathbb{R}/T$ para algum período $T > 0$, N um número inteiro positivo e um conjunto finito de funções $\theta_i : D \rightarrow S^1$ para $i = 1, \dots, M$ sendo elas todas de classe \mathcal{C}^r ($r \geq N + 1$). Para todo $x \in D$,

$$0 \equiv \theta_0(x) < \theta_1(x) < \theta_2(x) < \dots < \theta_M(x) < \theta_{M+1}(x) \equiv T.$$

Consideramos o seguinte sistema diferencial suave por partes

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{N+1} R(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

com

$$F_i(t, x) = \begin{cases} F_i^0(t, x), & 0 < t < \theta_1(x), \\ F_i^1(t, x), & \theta_1(x) < t < \theta_2(x), \\ \vdots \\ F_i^M(t, x), & \theta_M(x) < t < T, \end{cases}$$

e

$$R(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} R^0(t, x, \varepsilon), & 0 < t < \theta_1(x), \\ R^1(t, x, \varepsilon), & \theta_1(x) < t < \theta_2(x), \\ \vdots \\ R^M(t, x, \varepsilon), & \theta_M(x) < t < T, \end{cases}$$

onde $F_i^j : S^1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $R^j : S^1 \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$, são funções \mathcal{C}^r , $r \geq N + 1$. Temos $\Sigma_i = \{(\theta_i(x), x) : x \in D\}$ para $i = 1, \dots, M, M + 1$ são curvas de classe \mathcal{C}^r , se θ_i é de classe \mathcal{C}^r . Além disso, para $j = 1, \dots, M$, denotaremos

$$F^j(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i^j(t, x) + \varepsilon^{N+1} R^j(t, x, \varepsilon). \quad (2.2)$$

A *Teoria de Melnikov* é uma ferramenta clássica para investigar a existência de soluções periódicas de sistemas suaves. Em [3], os autores estenderam as funções de Melnikov até ordem 2 para sistemas não suaves e recentemente, em [1], foi estabelecida as funções de Melnikov de ordem superior para essa mesma classe de sistemas. Em suma, tal teoria determina uma sequência de funções Δ_i , $i = 1, \dots, k$, que identifica a existência de soluções periódicas isoladas de (2.1). Essas funções são chamadas de *Funções de Melnikov* ou *Funções de Bifurcação de ordem i*.

A seguir, o Teorema 2.1 determina uma relação entre os zeros das funções de Melnikov de primeira e segunda ordem do sistema (2.1), Δ_1 e Δ_2 , e a existência de órbitas periódicas isoladas, ou seja, ciclos limites. E também, nos fornece a fórmula de Δ_1 e Δ_2 sendo

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= \int_0^T F_1(s, x) ds, \\ \Delta_2(x) &= \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x} F_1(s, x) \int_0^s F_1(t, x) dt + F_2(s, x) \right) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^M (F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) - F_1^j(\theta_j(x), x)) \frac{\partial}{\partial x} \theta_j(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Teorema 2.1. *Considere o sistema diferencial não suave (2.1) e as funções Δ_1 e Δ_2 definidas em (2.3). As seguintes afirmações são válidas:*

- (1) *(Primeira ordem) Suponha que $a^* \in D$ satisfaz $\Delta_1(a^*) = 0$ e $\det(J\Delta_1(a^*)) \neq 0$. Então para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução τ periódica $x(t, \varepsilon)$ do sistema (2.1) de modo que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
- (2) *(Segunda ordem) Suponha que $\Delta_1(x) \equiv 0$ e $a^* \in D$ satisfaz $\Delta_2(a^*) = 0$ e $\det(J\Delta_2(a^*)) \neq 0$. Então para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução τ periódica $x(t, \varepsilon)$ do sistema (2.1) de modo que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Para a demonstração desse Teorema, utilizaremos as duas proposições abaixo.

Proposição 2.1. *Seja*

$$F^{j-1}(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i^{j-1}(t, x) + \varepsilon^{N+1} R^{j-1}(t, x, \varepsilon).$$

Então as seguintes igualdades são verdadeiras

- (i) $\left. \frac{\partial^k F^{j-1}}{\partial x^k}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0$, com $k = 0, \dots, N$;
- (ii) $\left. \frac{\partial F^{j-1}}{\partial t}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0$;
- (iii) $\left. \frac{\partial^2 F^{j-1}}{\partial \varepsilon \partial x}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F_1^{j-1}}{\partial x}(t, x)$;
- (iv) $\left. \frac{\partial^k F^{j-1}}{\partial \varepsilon^k}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = k! F_k^{j-1}(t, x)$, com $k = 0, \dots, N$.

Demonstração. Calculando a derivada em relação a x de ordem k , com $k = 0, \dots, N$, temos

$$\frac{\partial^k F^{j-1}}{\partial x^k}(t, x, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^i \frac{\partial^k}{\partial x^k} F_i^{j-1}(t, x) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial^k}{\partial x^k} R^{j-1}(t, x, \varepsilon) \right).$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$, segue que

$$\left. \frac{\partial^k F^{j-1}}{\partial x^k}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Com isso terminamos a demonstração do item (i). Agora, calculando a derivada de primeira ordem em relação a t , temos

$$\frac{\partial F^{j-1}}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial t} F_i^{j-1}(t, x) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial}{\partial t} R^{j-1}(t, x, \varepsilon) \right).$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$, segue que

$$\left. \frac{\partial F^{j-1}}{\partial t}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Com isso terminamos a demonstração do item (ii). Calculando a seguinte derivada, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^{j-1}}{\partial \varepsilon \partial x}(t, x, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^i \frac{\partial F_i^{j-1}}{\partial x}(t, x) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial}{\partial x} R^{j-1}(t, x, \varepsilon) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N i \varepsilon^{i-1} \frac{\partial F_i^{j-1}}{\partial x}(t, x) + (N+1) \varepsilon^N \frac{\partial}{\partial x} R^{j-1}(t, x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$, segue que

$$\left. \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon \partial x}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F_1^{j-1}}{\partial x}(t, x).$$

Com isso terminamos a demonstração do item (iii). Por fim, utilizando Indução Matemática sobre k , vamos provar que

$$\left. \frac{\partial^k F^{j-1}}{\partial \varepsilon^k}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = k! F_k^{j-1}(t, x). \quad (2.4)$$

com $k = 0, \dots, N$. Note que, para $k = 1$,

$$\frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N i \varepsilon^{i-1} F_i^{j-1}(t, x) + (N+1) \varepsilon^N R^{j-1}(t, x, \varepsilon).$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$, temos

$$\left. \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = F_1^{j-1}(t, x).$$

Que estabelece a veracidade de (2.4) para $k = 1$. Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, a fórmula (2.4) é válida para todo valor de k . Agora, vamos verificar a veracidade para $k + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} F^{j-1}}{\partial \varepsilon^{k+1}}(t, x, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial^k F^{j-1}}{\partial \varepsilon^k}(t, x, \varepsilon) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\sum_{i=1}^N (i) \dots (i - (k-1)) \varepsilon^{i-k} F_i^{j-1}(t, x) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [(N+1) \dots (N - (k-2)) \varepsilon^{N-(k-1)} R^{j-1}(t, x, \varepsilon)] \\ &= \sum_{i=1}^N (i) \dots (i - k) \varepsilon^{i-(k+1)} F_i^{j-1}(t, x) \\ &\quad + (N+1) \dots (N - (k-1)) \varepsilon^{N-k} R^{j-1}(t, x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$,

$$\left. \frac{\partial^{k+1} F^{j-1}}{\partial \varepsilon^{k+1}}(t, x, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = (k+1)! F_{k+1}^{j-1}(t, x).$$

Logo, a fórmula (2.4) é verdadeira para $k + 1$. Portanto, por Indução Matemática, (2.4) é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

Com isso terminamos a prova da Proposição 2.1. □

Proposição 2.2 (Tempos de voo). *Considere $\varphi_{j-1}(t, x, \varepsilon)$ a solução do sistema $\dot{x} = F^{j-1}(t, x, \varepsilon)$ e $B(\theta_j(x), \delta_{j+1})$ a bola de centro $\theta_j(x)$ e raio δ_{j+1} . Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno,*

existem funções de classe \mathcal{C}^r

$$\alpha_j : (-\varepsilon_{j+1}, \varepsilon_{j+1}) \rightarrow B(\theta_j(x), \delta_{j+1}),$$

para $j = 1, \dots, M$, tais que

$$(i) \theta_j(\varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon)) - \alpha_j(x, \varepsilon) = 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, M;$$

$$(ii) \alpha_j(x, 0) = \theta_j(x).$$

Demonstração. Considere a equação $\theta_1(\varphi_0(t, x, \varepsilon)) - t = 0$ numa vizinhança do ponto $(t, \varepsilon) = (\theta_1(x), 0)$. Observe que $\theta_1(\varphi_0(\theta_1(x), x, 0)) - \theta_1(x) = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_1(\varphi_0(t, x, \varepsilon)) - t) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(\varphi_0(t, x, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t, x, \varepsilon) - 1. \quad (2.5)$$

Por hipótese, para $j = 1$, $\varphi_0(t, x, \varepsilon)$ é solução do sistema $\dot{x} = F^0(t, x, \varepsilon)$. Logo,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = F^0(t, \varphi_0(t, x, \varepsilon), \varepsilon).$$

Avaliando $(t, \varepsilon) = (\theta_1(x), 0)$ em (2.5) temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t}(\theta_1(\varphi_0(t, x, \varepsilon)) - t) \right|_{(t, \varepsilon) = (\theta_1(x), 0)} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(\varphi_0(\theta_1(x), x, 0)) F^0(\theta_1(x), \varphi_0(\theta_1(x), x, 0), 0) - 1.$$

Mas, substituindo $j = 0$, $t = \theta_1(x)$, $x = \varphi_0(\theta_1(x), x, 0)$ e $\varepsilon = 0$ em (2.2), temos $F^0(\theta_1(x), \varphi_0(\theta_1(x), x, 0), 0) = 0$ assim

$$\left. \frac{\partial}{\partial t}(\theta_1(\varphi_0(t, x, \varepsilon)) - t) \right|_{(t, \varepsilon) = (\theta_1(x), 0)} = -1.$$

Consequentemente,

$$\det \left(\frac{\partial}{\partial t}(\theta_1(\varphi_0(\theta_1(x), x, 0)) - \theta_1(x)) \right) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem $\varepsilon_2, \delta_2 > 0$ e uma única função de classe \mathcal{C}^r , $\alpha_1 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow B(\theta_1(x), \delta_2)$ tais que:

$$(i) \quad (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B(\theta_1(x), \delta_2) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times D \text{ e } \det \left(\frac{\partial}{\partial t}(\theta_1(\varphi_0(\theta_1(x), x, \varepsilon)) - \theta_1(x)) \right) \neq 0$$

para todo $(x, y) \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B(\theta_1(x), \delta_2)$;

$$(ii) \quad \theta_1(\varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon)) - \alpha_1(x, \varepsilon) = 0 \text{ para todo } (x, \varepsilon) \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B(\theta_1(x), \delta_2);$$

$$(iii) \quad \alpha_1(x, 0) = \theta_1(x).$$

Por Indução Matemática, segue a existência de $\alpha_j(x, \varepsilon)$ sendo

$$\alpha_j(x, \varepsilon) = \theta_j(\varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon)),$$

para $j = 1, 2, \dots, M$, $\alpha_0(x, \varepsilon) = 0$ e $\alpha_{M+1}(x, \varepsilon) = T$. \square

Observação 2.1. Na expressão acima, $\alpha_j(x, \varepsilon) - \alpha_{j-1}(x, \varepsilon)$ é o tempo que a trajetória $\varphi_{j-1}(\cdot, x, \varepsilon)$, começando em $\varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \in D$ demora para atingir a variedade Σ_j . Esse tempo é chamado tempo de voo.

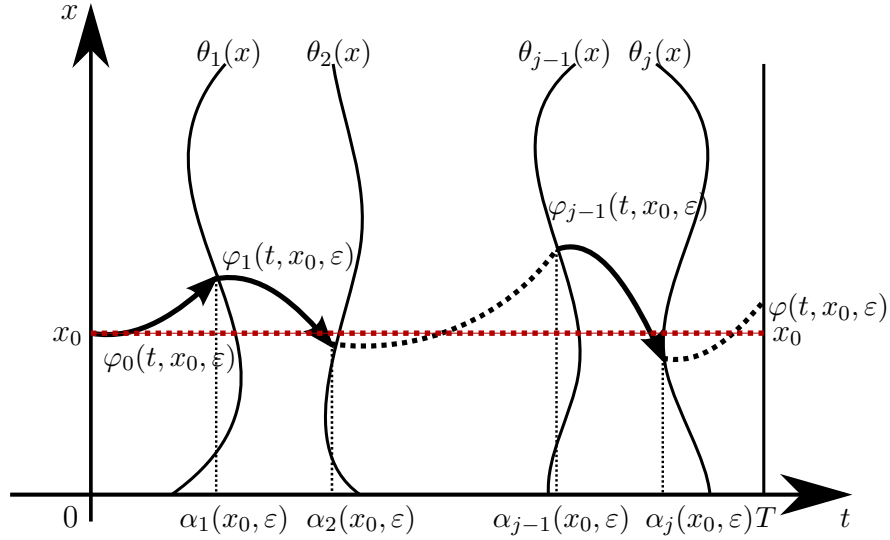


Figura 2.1: Tempos de voo

Demonstração do Teorema 2.1. Denote a solução de (2.1) por

$$\varphi(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_0(t, x, \varepsilon), & 0 \leq t \leq \alpha_1(x, \varepsilon), \\ \varphi_1(t, x, \varepsilon), & \alpha_1(x, \varepsilon) \leq t \leq \alpha_2(x, \varepsilon), \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_M(t, x, \varepsilon), & \alpha_M(x, \varepsilon) \leq t \leq T. \end{cases}$$

Além disso,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t, x, \varepsilon) = F^j(t, \varphi_j(t, x, \varepsilon), \varepsilon),$$

onde

$$\begin{cases} \varphi_0(0, x, \varepsilon) = x, \\ \varphi_j(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) = \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \end{cases}$$

para $j = 0, 1, \dots, M$. Desta forma, utilizando recorrência temos

$$\begin{aligned}
\varphi_0(0, x, \varepsilon) &= x, \\
\varphi_0(t, x, \varepsilon) &= x + \int_0^t F^0(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds, \\
\varphi_1(t, x, \varepsilon) &= \varphi_1(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \varphi_1(t - \alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \\
&= \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \int_{\alpha_1(x, \varepsilon)}^t F^1(s, \varphi_1(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \\
&= x + \int_0^{\alpha_1(x, \varepsilon)} F^0(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds + \int_{\alpha_1(x, \varepsilon)}^t F^1(s, \varphi_1(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds, \\
\varphi_2(t, x, \varepsilon) &= \varphi_2(\alpha_2(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \varphi_2(t - \alpha_2(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \\
&= \varphi_1(\alpha_2(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \int_{\alpha_2(x, \varepsilon)}^t F^2(s, \varphi_2(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \\
&= x + \sum_{j=1}^2 \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds + \int_{\alpha_2(x, \varepsilon)}^t F^2(s, \varphi_2(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds, \\
&\quad \vdots \\
\varphi_j(t, x, \varepsilon) &= \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t F^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \\
&= x + \sum_{j=1}^j \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds + \int_{\alpha_j(x, \varepsilon)}^t F^j(s, \varphi_j(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

para $j = 1, \dots, M$. Portanto,

$$\varphi_M(t, x, \varepsilon) = x + \sum_{j=1}^M \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds + \int_{\alpha_M(x, \varepsilon)}^t F^M(s, \varphi_M(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds. \tag{2.7}$$

Assim, função deslocamento do sistema (2.1) é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta(x, \varepsilon) &= \varphi(\alpha_{M+1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) - \varphi(\alpha_0(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \\
&= \varphi(T, x, \varepsilon) - \varphi(0, x, \varepsilon) \\
&= \varphi(T, x, \varepsilon) - x \\
&= \varphi_M(T, x, \varepsilon) - x.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Observe que $\Delta(x, \varepsilon)$ é uma função de classe \mathcal{C}^{r+1} . Fazendo a expansão em série de Taylor até ordem 2 em relação a ε em $\varepsilon = 0$, temos

$$\Delta(x, \varepsilon) = \Delta_0(x) + \varepsilon \Delta_1(x) + \varepsilon^2 \Delta_2(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Note que, $\Delta_0(x) = 0$, pois como $\varphi(0, x, 0) = x$ e φ é periódica de período T ,

$$\Delta_0(x) = \Delta(x, 0) = \varphi(T, x, 0) - x = 0.$$

Além disso, o sistema (2.1) tem uma órbita periódica passando por $x = x_0$ se, e somente se, $\Delta(x_0, \varepsilon) = 0$.

Agora queremos mostrar, para ε suficientemente pequeno, que os zeros simples da função $\Delta_1(x)$ correspondem a zeros simples da função $\Delta(x, \varepsilon)$. E, quando $\Delta_1(x) \equiv 0$, o mesmo acontecerá para $\Delta_2(x)$. Para isso, se $\Delta_{l-1}(x) \equiv 0$, defina

$$\hat{\Delta}_l(x, \varepsilon) := \frac{\Delta(x, \varepsilon)}{\varepsilon^l} = \Delta_l(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{l+1}),$$

com $l \in \{1, 2\}$. Assuma que $\Delta_1(x)$ verifica as hipóteses do item (i) do enunciado do Teorema 2.1, isto é, existe $a^* \in D$ tal que $\Delta_1(a^*) = 0$ e $\det\left(\frac{\partial \Delta_1}{\partial x}(a^*)\right) \neq 0$. Portanto, $\hat{\Delta}_1(a^*, 0) = 0$ e

$$\det\left(\frac{\partial \hat{\Delta}_1}{\partial x}(a^*, 0)\right) = \det(D\Delta_1(a^*)) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita para a equação $\hat{\Delta}_1(x, \varepsilon) = 0$ numa vizinhança de $(a^*, 0)$ segue que existem $\varepsilon_1, \delta_1 > 0$ e uma única função de classe \mathcal{C}^r , $a : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow B(a^*, \delta_1)$ tais que:

- (i) $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times B(a^*, \delta_1) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times D$ e $\det\left(\frac{\partial \hat{\Delta}_1}{\partial x}(x, \varepsilon)\right) \neq 0$ para todo $(x, \varepsilon) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times B(a^*, \delta_1)$;
- (ii) $\hat{\Delta}_1(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$;
- (iii) $a(0) = a^*$.

Utilizando o item (ii) sabemos que $\hat{\Delta}_1(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ e $|\varepsilon| \neq 0$, com isso temos $\Delta(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Isto implica que para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno o sistema (2.1) tem uma única órbita periódica passando pelo ponto $a(\varepsilon)$ e $\hat{\Delta}_1(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Com isso finalizamos a prova do item (i) do Teorema 2.1.

De forma similar segue a prova do item (ii), isto é, suponha que $\Delta_1(x) \equiv 0$ e $a^* \in D$ satisfaz $\Delta_2(a^*) = 0$ e $\det(J\Delta_2(a^*)) \neq 0$. Então para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, $\hat{\Delta}_2(a(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ e, conseqüentemente, $a(\varepsilon)$ será um zero simples da função $\Delta(x, \varepsilon)$.

Agora provaremos que as funções de Melnikov de ordens 1 e 2, isto é,

$$\Delta_1(x) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Delta(x, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \quad \text{e} \quad \Delta_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \Delta(x, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0},$$

são dadas pelas expressões em (2.3). Com esse proposito, vamos substituir (2.7) em (2.8).

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta(x, \varepsilon) &= \varphi_M(T, x, \varepsilon) - x \\
&= \sum_{j=1}^M \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds + \int_{\alpha_M(x, \varepsilon)}^T F^M(s, \varphi_M(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \\
&= \sum_{j=1}^{M+1} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\sum_{j=1}^{M+1} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \right|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{j=1}^{M+1} \left. \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \right|_{\varepsilon=0}; \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2(x) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left(\sum_{j=1}^{M+1} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \right|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{j=1}^{M+1} \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Por simplicidade, denotamos

$$\begin{aligned}
\Delta_1^j(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \right|_{\varepsilon=0}; \\
\Delta_2^j(x) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left(\int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \right|_{\varepsilon=0}.
\end{aligned}$$

Trabalharemos, inicialmente, com equação (2.9). Para $j = 1, \dots, M$, tem-se,

$$\begin{aligned}
\Delta_1^j(x) &= F^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_j(x, \varepsilon) \\
&\quad - F^{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \alpha_{j-1}(x, \varepsilon) \\
&\quad + \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) \\ &+ \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11)

$$\begin{aligned} \Delta_1^j(x) &= F^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &- F^{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \\ &+ \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) ds. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por (2.2) e (2.13), segue que

$$\begin{aligned} \Delta_1^j(x) &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ \varepsilon^{N+1} R^{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &- \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i^{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &- \varepsilon^{N+1} R^{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial x} F_i^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) ds \\ &+ \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} \varepsilon^{N+1} \frac{\partial}{\partial x} R^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) ds \\ &+ \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} \left(\sum_{i=1}^N i \varepsilon^{i-1} F_i^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon)) \right) ds \\ &+ \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} (N+1) \varepsilon^N R^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$ e lembrando que $\varphi_{j-1}(s, x, 0) = x$, $\alpha_j(x, 0) = \theta_j(x)$ e $\alpha_{j-1}(x, 0) = \theta_{j-1}(x)$. Concluimos, para $j = 1, \dots, M$,

$$\Delta_1^j(x) = \int_{\theta_{j-1}(x)}^{\theta_j(x)} F_1^{j-1}(s, x) ds.$$

Desse modo, por (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= \sum_{j=1}^{M+1} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F_1^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{j=1}^{M+1} \left(\int_{\theta_{j-1}(x)}^{\theta_j(x)} F_1^{j-1}(s, x) ds \right) \\ &= \int_0^T F_1(s, x) ds. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que $\Delta_2(x)$ é dada como em (2.3). Com esse propósito, trabalharemos, a partir de agora, com a equação (2.10). Para $j = 1$ temos

$$\begin{aligned} \Delta_2^0(x) &= \frac{\partial F^0}{\partial t}(\alpha_1(x, \varepsilon), \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \right)^2 \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial x}(\alpha_1(x, \varepsilon), \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(\alpha_1(x, \varepsilon), \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ F^0(\alpha_1(x, \varepsilon), \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \varepsilon^2}(x, \varepsilon) \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial x}(\alpha_1(x, \varepsilon), \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(\alpha_1(x, \varepsilon), \varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &+ \int_0^{\alpha_1(x, \varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F^0(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para determinar a expressão exata de (2.14), precisaremos calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F^0(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) \text{ e } \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, 0).$$

Desta forma, antes de tudo temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F^0(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) + \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \right) \\
&= \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^2}(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) \right)^2 \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial \varepsilon \partial x}(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) \\
&\quad + \frac{\partial F^0}{\partial x}(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varepsilon^2}(s, x, \varepsilon) + \frac{\partial^2 F^0}{\partial \varepsilon^2}(s, \varphi_0(s, x, \varepsilon), \varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

E, por (2.6),

$$\varphi_0(s, x, \varepsilon) = x + \int_0^s F^0(t, \varphi_0(t, x, \varepsilon), \varepsilon) dt,$$

donde segue que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) = \int_0^s \frac{\partial F^0}{\partial x}(t, \varphi_0(t, x, \varepsilon), \varepsilon) \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon) + \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(t, \varphi_0(t, x, \varepsilon), \varepsilon) dt.$$

Considerando os itens (i) e (iii) da Proposição 2.1, temos

$$\frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(t, \varphi_0(t, x, 0), 0) = F_1^0(t, \varphi_0(t, x, 0)) = F_1^0(t, x)$$

e $\frac{\partial F^0}{\partial x}(t, \varphi_0(t, x, 0), 0) = 0$. Desta forma,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) = \int_0^s F_1^0(t, x) dt. \tag{2.16}$$

Agora, pela Proposição 2.2, temos

$$\alpha_1(x, \varepsilon) = \theta_1(\varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon)).$$

Assim, derivando em relação a ε ,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(\varphi_0(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon)) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(\alpha_1(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \right).$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$ e lembrando que $\theta_1(\varphi_0(\alpha_1(x, 0), x, 0)) = \theta_1(x)$ e $\alpha_1(x, 0) = \theta_1(x)$, segue que

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, 0) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(\theta_1(x), x, 0) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, 0) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(\theta_1(x), x, 0) \right).$$

Além disso, sabemos que $\varphi_0(\theta_1(x), x, 0) = x$ para todo x , assim $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(\theta_1(x), x, 0) = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}(x, 0) &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(\theta_1(x), x, 0) \\ &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Substituindo (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.14)

$$\begin{aligned}\Delta_2^0(x) &= \frac{\partial F^0}{\partial t}(\theta_1(x), x, 0) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds \right)^2 \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial x}(\theta_1(x), x, 0) \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \left(\int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds \right)^2 \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(\theta_1(x), x, 0) \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds + F^0(\theta_1(x), x, 0) \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \varepsilon^2}(x, 0) \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial x}(\theta_1(x), x, 0) \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \left(\int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds \right)^2 \\ &+ \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon}(\theta_1(x), x, 0) \frac{\partial}{\partial x} \theta_1(x) \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds \\ &+ \int_0^{\alpha_1(x, 0)} \left[\frac{\partial^2 F^0}{\partial x^2}(s, x, 0) \left(\int_0^s F_1^0(t, x) dt \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial \varepsilon \partial x}(s, x, 0) \int_0^s F_1^0(t, x) dt \right] ds \\ &+ \int_0^{\alpha_1(x, 0)} \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}(s, x, 0) \int_0^s F_1^0(t, x) dt + \frac{\partial^2 F^0}{\partial \varepsilon^2}(s, x, 0) \right) ds.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Substituindo os itens da Proposição 2.1 em (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_2^0(x) &= 2F_1^0(\theta_1(x), x) \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(s, x) ds + \int_0^{\theta_1(x)} \left(2 \frac{\partial F_1^0}{\partial x}(s, x) \int_0^s F_1^0(t, x) dt \right) ds \\ &+ \int_0^{\theta_1(x)} 2F_2^0(s, x) ds.\end{aligned}$$

Considerando (2.13), com $j = 1, \dots, M$, segue

$$\begin{aligned}
\Delta_2^j(x) = & \frac{\partial F^{j-1}}{\partial t}(\theta_j(x), x, 0) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, 0) \right)^2 \\
& + \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(\theta_j(x), x, 0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, 0), x, 0) \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, 0) \\
& + \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(\theta_j(x), x, 0) \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, 0) + F^{j-1}(\theta_j(x), x, 0) \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial \varepsilon^2}(x, 0) \\
& + \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(\theta_j(x), x, 0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_{j-1}(\alpha_j(x, 0), x, 0) \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, 0) \\
& + \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(\theta_j(x), x, 0) \frac{\partial \alpha_j}{\partial \varepsilon}(x, 0) - \frac{\partial F^{j-1}}{\partial t}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \left(\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) \right)^2 \\
& - \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) \\
& - \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) - F^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \frac{\partial^2 \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon^2}(x, 0) \\
& - \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) \\
& - \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) + \int_{\alpha_{j-1}(x, 0)}^{\alpha_j(x, 0)} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, 0), 0) ds.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Para determinar a expressão exata de (2.19), precisaremos calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon), \quad \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) \text{ e } \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0).$$

Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, 0), 0) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(s, \varphi_{j-1}(s, x, 0), 0) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) \right) \\
&+ \frac{\partial^2 F^{j-1}}{\partial \varepsilon^2}(s, \varphi_{j-1}(s, x, 0), 0) \\
&= \frac{\partial^2 F^{j-1}}{\partial x^2}(s, x, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) \right)^2 \\
&+ 2 \frac{\partial^2 F^{j-1}}{\partial \varepsilon \partial x}(s, x, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) \\
&+ \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(s, x, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial^2 \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon^2}(s, x, 0) + \frac{\partial^2 F^{j-1}}{\partial \varepsilon^2}(s, x, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

E, por (2.7), temos

$$\varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon) = \varphi_{j-2}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) + \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^s F^{j-1}(t, \varphi_{j-1}(t, x, \varepsilon), \varepsilon) dt.$$

Derivando em ambos os lados em relação a ε segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, \varepsilon) &= \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial \varepsilon}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \\ &\quad - F^{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \\ &\quad + \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^s \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(t, \varphi_{j-1}(t, x, \varepsilon), \varepsilon) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(t, x, \varepsilon) dt \\ &\quad + \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^s \frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(t, \varphi_{j-1}(t, x, \varepsilon), \varepsilon) dt. \end{aligned}$$

Analisando em $\varepsilon = 0$ e considerando os itens (i) e (iii) da Proposição 2.1, temos que $F^{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, 0), 0) = 0$,

$$\frac{\partial F^{j-1}}{\partial \varepsilon}(t, \varphi_{j-1}(t, x, 0), 0) = F_1^{j-1}(t, \varphi_{j-1}(t, x, 0)) = F_1^{j-1}(t, x)$$

e $\frac{\partial F^{j-1}}{\partial x}(t, \varphi_{j-1}(t, x, 0), 0) = 0$. Sabemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(t, x, \varepsilon) &= F^{j-2}(t, \varphi_{j-2}(t, x, \varepsilon), \varepsilon) \\ &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i F_i^{j-2}(t, \varphi_{j-2}(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon^{N+1} R^{j-2}(t, \varphi_{j-2}(t, x, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Avaliando em $\varepsilon = 0$, temos

$$\frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(t, x, 0) = 0.$$

Portanto, $\frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0) = 0$. Ainda temos que,

$$\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) = \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial \varepsilon}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0) + \int_{\alpha_{j-1}(x, 0)}^s F_1^{j-1}(t, x) dt.$$

Utilizando recorrência, iniciando para $j = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon}(\alpha_1(x, 0), x, 0) + \int_{\alpha_1(x, 0)}^s F_1^1(t, x) dt \\ &= \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(t, x) dt + \int_{\theta_1(x)}^s F_1^1(t, x) dt; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varepsilon}(\alpha_2(x, 0), x, 0) + \int_{\alpha_2(x, 0)}^s F_1^2(t, x) dt \\ &= \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(t, x) dt + \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} F_1^1(t, x) dt + \int_{\theta_2(x)}^s F_1^2(t, x) dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varepsilon}(\alpha_3(x, 0), x, 0) + \int_{\alpha_3(x, 0)}^s F_1^3(t, x) dt \\
&= \int_0^{\theta_1(x)} F_1^0(t, x) dt + \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} F_1^1(t, x) dt + \int_{\theta_2(x)}^{\theta_3(x)} F_1^2(t, x) dt + \int_{\alpha_3(x, 0)}^s F_1^3(t, x) dt; \\
&\vdots \\
\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) &= \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial \varepsilon}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0) + \int_{\alpha_{j-1}(x, 0)}^s F_1^{j-1}(t, x) dt \\
&= \sum_{i=0}^{j-2} \int_{\theta_i(x)}^{\theta_{i+1}(x)} F_1^i(t, x) dt + \int_{\theta_{j-1}(x, 0)}^s F_1^{j-1}(t, x) dt.
\end{aligned}$$

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \varepsilon}(s, x, 0) &= \sum_{i=0}^{j-2} \int_{\theta_i(x)}^{\theta_{i+1}(x)} F_1^i(t, x) dt + \int_{\theta_{j-1}(x)}^s F_1^{j-1}(t, x) dt \\
&= \int_0^s F_1(t, x) dt.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Agora, pela Proposição 2.2,

$$\alpha_{j-1}(x, \varepsilon) = \theta_{j-1}(\varphi_{j-2}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon)).$$

Derivando em relação a ε ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) &= \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(\varphi_{j-2}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon)) \\
&\quad \left(\frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial \varepsilon}(\alpha_{j-1}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \right).
\end{aligned}$$

Analisando em $\varepsilon = 0$ e lembrando que $\theta_{j-1}(\varphi_{j-2}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0)) = \theta_{j-1}(x)$ e $\alpha_{j-1}(x, 0) = \theta_{j-1}(x)$, temos

$$\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) = \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \left(\frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) + \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial \varepsilon}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \right).$$

Além disso, sabemos que $\varphi_{j-2}(\theta_{j-1}(x), x, 0) = x$ para todo t , assim

$$\frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial t}(\theta_{j-1}(x), x, 0) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \varepsilon}(x, 0) &= \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_{j-2}}{\partial \varepsilon}(\theta_{j-1}(x), x, 0) \\
&= \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \sum_{i=0}^{j-2} \int_{\theta_i(x)}^{\theta_{i+1}(x)} F_1^i(s, x) ds \\
&= \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Substituindo (2.20), (2.21) e (2.22) em (2.19) e recordando que

$$\varphi_{j-1}(\alpha_j(x, 0), x, 0) = \varphi_{j-1}(\alpha_{j-1}(x, 0), x, 0) = \varphi_{j-1}(s, x, 0) = x,$$

$\alpha_{j-1}(x, 0) = \theta_{j-1}(x)$ e $\alpha_j(x, 0) = \theta_j(x)$, concluimos que

$$\begin{aligned}
\Delta_2^j(x) &= 2F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds \\
&\quad - 2F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds \\
&\quad + \int_{\theta_{j-1}(x)}^{\theta_j(x)} 2F_2^{j-1}(s, x) ds + \int_{\theta_{j-1}(x)}^{\theta_j(x)} 2 \frac{\partial F_1^{j-1}}{\partial x}(s, x) \left(\int_0^s F_1(t, x) dt \right) ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2\Delta_2(x) &= \sum_{j=1}^{M+1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \int_{\alpha_{j-1}(x, \varepsilon)}^{\alpha_j(x, \varepsilon)} F^{j-1}(s, \varphi_{j-1}(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{j=1}^{M+1} \left(2F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds \right. \\
&\quad - 2F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds \\
&\quad \left. + \int_{\theta_{j-1}(x)}^{\theta_j(x)} 2 \frac{\partial F_1^{j-1}}{\partial x}(s, x) \int_0^s F_1(t, x) dt + 2F_2^{j-1}(s, x) ds \right) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{M+1} \left(F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds \right. \\
&\quad \left. - F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds \right) \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^{M+1} \left(\int_{\theta_{j-1}(x)}^{\theta_j(x)} \frac{\partial F_1^{j-1}}{\partial x}(s, x) \cdot \int_0^s F_1(t, x) dt + F_2^{j-1}(s, x) ds \right).
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} a_{j-1} &= F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds, \\ b_{j-1} &= F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds, \end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M+1} \left(F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds - F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds \right) \\ &= \sum_{j=1}^{M+1} a_{j-1} - b_{j-1} \\ &= a_0 - b_0 + a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \dots + a_M - b_M + a_{M+1} - b_{M+1}. \end{aligned}$$

Mas, notemos que

$$\begin{aligned} a_{j-1} - b_j &= F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds - F_1^j(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds \\ &= (F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) - F_1^j(\theta_j(x), x)) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds. \end{aligned}$$

Destá maneira,

$$\sum_{j=1}^{M+1} (a_{j-1} - b_{j-1}) = -b_0 + a_{M+1} + \sum_{j=1}^{M+1} (a_{j-1} - b_j).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M+1} \left(F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds - F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds \right) \\ &= -F_1^0(\theta_0(x), x) \frac{\partial \theta_0}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_0(x)} F_1(s, x) ds + F_1^M(\theta_{M+1}(x), x) \frac{\partial \theta_{M+1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{M+1}(x)} F_1(s, x) ds \\ &+ \sum_{j=1}^{M+1} \left((F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) - F_1^j(\theta_j(x), x)) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds \right). \end{aligned}$$

Porém, sabemos que $\theta_0(x) \equiv 0$ e $\theta_{M+1}(x) \equiv T$, logo

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial x}(x) = 0 = \frac{\partial \theta_{M+1}}{\partial x}(x).$$

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M+1} \left(F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds - F_1^{j-1}(\theta_{j-1}(x), x) \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_{j-1}(x)} F_1(s, x) ds \right) \\ &= \sum_{j=1}^{M+1} \left((F_1^{j-1}(\theta_j(x), x) - F_1^j(\theta_j(x), x)) \frac{\partial \theta_j}{\partial x}(x) \int_0^{\theta_j(x)} F_1(s, x) ds \right). \end{aligned}$$

Portanto, a função de Melnikov de segunda ordem é dada por (2.3). \square

Finalizamos, assim, o estudo da Teoria de Melnikov. No próximo capítulo, faremos aplicações do Teorema 2.1.

Capítulo 3

Aplicações

O principal objetivo deste capítulo é estudar o número máximo de ciclos limites, $H(m, n)$, de sistemas diferenciais planares lineares por partes com duas zonas separadas pela curva $y^n - x^m = 0$, com m, n inteiros positivos. Mais precisamente, fornecemos uma estimativa mínima de $H(m, n)$ estudando perturbações lineares de um centro linear. Para isso, consideramos o seguinte campo de vetores planar linear por partes

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i P_i^+(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i Q_i^+(x, y) \end{pmatrix}, & y^n - x^m > 0, \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i P_i^-(x, y) \\ -x + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i Q_i^-(x, y) \end{pmatrix}, & y^n - x^m < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde m, n são inteiros positivos, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e P_i^\pm e Q_i^\pm são funções dadas por

$$\begin{aligned} P_i^+(x, y) &= a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}y, \\ P_i^-(x, y) &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \alpha_{2i}y, \\ Q_i^+(x, y) &= b_{0i} + b_{1i}x + b_{2i}y, \\ Q_i^-(x, y) &= \beta_{0i} + \beta_{1i}x + \beta_{2i}y, \end{aligned}$$

com $a_{ji}, \alpha_{ji}, b_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{0, 1, 2\}$. A curva de comutação do sistema (3.1) é dada por $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^n = x^m\}$.

Durante o desenvolvimento do capítulo utilizamos o software Wolfram Mathematica [31] para obtermos os resultados e figuras apresentados. As figuras abaixo são exemplos de centros lineares para casos particulares de m, n . Na Figura 3.1, temos a curva de descontinuidade $y = x^3$, é um caso particular de m, n inteiros positivos ímpares. Na

Figura 3.2, temos a curva de descontinuidade $y^2 = x^4$, é um caso particular de m, n inteiros positivos pares. Na Figura 3.3, temos a curva de descontinuidade $y = x^2$, é um caso particular de m inteiro positivo par e n inteiro positivo ímpar. E na Figura 3.4, temos a curva de descontinuidade $y^2 = x$, é um caso particular de m inteiro positivo ímpar e n inteiro positivo par.

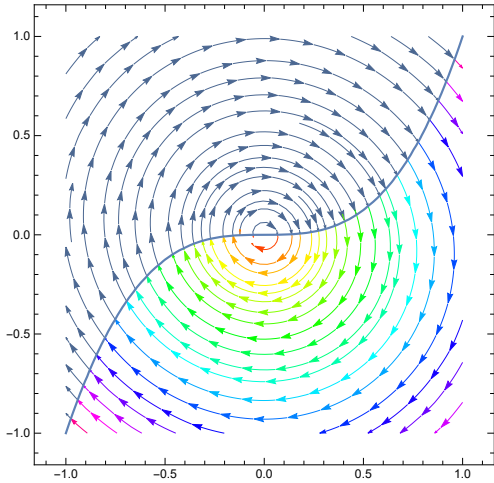


Figura 3.1: Centro linear com curva de comutação $y = x^3$.

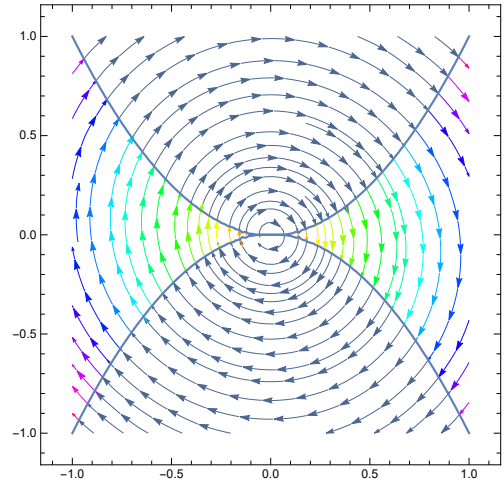


Figura 3.2: Centro linear com curva de comutação $y^2 = x^4$.

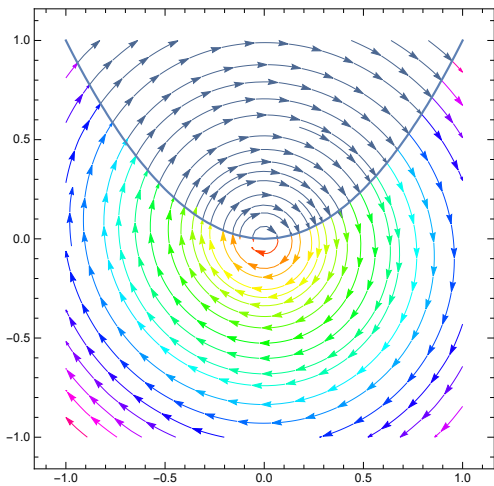


Figura 3.3: Centro linear com curva de comutação $y = x^2$.

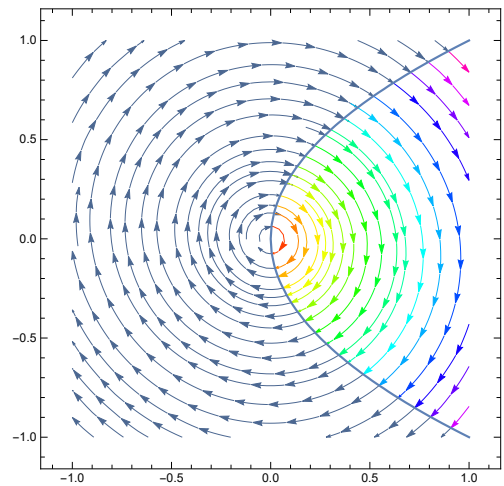


Figura 3.4: Centro linear com curva de comutação $y^2 = x$.

A fim de fornecer a estimativa inferior de $H(m, n)$, usamos a Teoria de Melnikov até ordem 2. Na sequência, denotamos por $m_\ell(m, n)$ o número máximo de ciclos limite do sistema (3.1) que pode ser obtido usando a função Melnikov de ordem ℓ . Os principais resultados deste trabalho fornecem os valores $m_\ell(m, n)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \{1, 2\}$. A contribuição dos Teoremas 1, 2 e 3 estão resumidas nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente.

Teorema 1. *As seguintes afirmações são válidas para o sistema diferencial linear por partes (3.1), quando m e n são inteiros positivos pares*

1. $m_1(m, n) = 0$ e $m_2(m, n) = 1$, para $\frac{m}{n} = 1$;
2. $m_1(m, n) = 2$ e $m_2(m, n) = 4$, para $\frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2] \cup [3, 5]$;
3. $m_1(m, n) = 2$ e $m_2(m, n) = 5$, para $\frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$.

Consequentemente,

$$H(m, n) \geq \begin{cases} 1, & \text{para } \frac{m}{n} = 1, \\ 4, & \text{para } \frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2] \cup [3, 5], \\ 5, & \text{para } \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 3) \cup (5, \infty). \end{cases}$$

Teorema 2. *As seguintes afirmações são válidas para o sistema diferencial linear por partes (3.1), quando m e n são inteiros positivos ímpares*

1. $m_1(m, n) = m_2(m, n) = 1$, para $\frac{m}{n} = 1$;
2. $m_1(m, n) = 2$ e $m_2(m, n) = 7$, para $\frac{m}{n} \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$;
3. $m_1(m, n) = 3$ e $m_2(m, n) = 7$, para $\frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$;
4. $m_1(m, n) = 2$ e $m_2(m, n) = 8$, para $\frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Consequentemente,

$$H(m, n) \geq \begin{cases} 2, & \text{para } \frac{m}{n} = 1, \\ 7, & \text{para } \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty), \\ 8, & \text{para } \frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Teorema 3. *As seguintes afirmações são válidas para o sistema diferencial linear por partes (3.1), quando m é um número inteiro positivo par e n é um número inteiro positivo ímpar*

1. $m_1(m, n) = 3$ e $m_2(m, n) = 4$, para $\frac{m}{n} = 2$;
2. $m_1(m, n) = 3$ e $m_2(m, n) = 5$, para $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$;
3. $m_1(m, n) = 3$ e $m_2(m, n) = 6$, para $\frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \setminus \{1\}$;
4. $m_1(m, n) = 3$ e $m_2(m, n) = 7$, para $\frac{m}{n} \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$;
5. $m_1(m, n) = 4$ e $m_2(m, n) = 7$, para $\frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup (k_5, \infty)$;
6. $m_1(m, n) = 3$ e $7 \leq m_2(m, n) \leq 8$, para $\frac{m}{n} \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) (k_3, 2)$;
7. $m_1(m, n) = 4$ e $7 \leq m_2(m, n) \leq 8$, para $\frac{m}{n} \in (2, 3)$;
8. $m_1(m, n) = 4$ e $7 \leq m_2(m, n) \leq 9$, para $\frac{m}{n} \in (k_4, k_5)$;
9. $m_1(m, n) = 4$ e $6 \leq m_2(m, n) \leq 11$, para $\frac{m}{n} \in (3, k_4)$;
10. $m_1(m, n) = 3$ e $6 \leq m_2(m, n) \leq 11$, para $\frac{m}{n} \in (0, k_0) \cup (k_0, k_1)$,

onde

(i) k_1 é a raiz irracional em $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ do polinômio

$$q_1(x) = 2x^6 - 153x^5 + 894x^4 - 1625x^3 + 1234x^2 - 444x + 48;$$

(ii) k_0, k_2, k_3, k_5 são as raízes irracionais em $\left(0, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ e $(3, 4)$, respectivamente, do polinômio

$$\begin{aligned} q_2(x) = & 177586560x^{17} - 1447424208x^{16} + 5969663136x^{15} - 29387373904x^{14} \\ & + 129626832188x^{13} - 293774330511x^{12} + 102470736381x^{11} + 1027573184492x^{10} \\ & - 2645532232771x^9 + 3259827826136x^8 - 2344796073539x^7 + 997977148820x^6 \\ & - 227233713561x^5 + 15757275163x^4 + 3311923726x^3 - 563207524x^2 \\ & + 11249208x + 19744, \end{aligned}$$

sendo que $k_0 < k_1$;

(iii) k_4 é a raiz irracional em $(3, 4)$ do polinômio

$$q_3(x) = 862x^5 - 4831x^4 + 8308x^3 - 5186x^2 + 974x + 1,$$

sendo que $k_4 < k_5$.

Consequentemente,

$$H(m, n) \geq \begin{cases} 4, & \text{para } \frac{m}{n} = 2, \\ 5, & \text{para } \frac{m}{n} = \frac{2}{3}, \\ 6, & \text{para } \frac{m}{n} \in (0, k_0) \cup (k_0, k_1) \cup \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \\ & \cup (3, k_4), \\ 7, & \text{para } \frac{m}{n} \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \\ & \cup (k_3, 2) \cup (2, 3) \cup (k_4, \infty). \end{cases}$$

| | | Ordem ℓ | |
|-----------------|--|--------------|----------|
| | | 1 | 2 |
| Quociente m/n | $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$ | 3 | 7 |
| | $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ | 2 | 8 |
| | $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$ | 2 | 7 |
| | $\{1\}$ | 1 | 1 |

Tabela 3.1: Valores para $m_\ell(m, n)$, com $\ell \in \{1, 2\}$, quando m, n são números inteiros positivos ímpares.

| | Ordem ℓ | |
|---|--------------|----------|
| | 1 | 2 |
| Quociente m/n | | |
| $\left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$ | 2 | 5 |
| $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2] \cup [3, 5]$ | 2 | 4 |
| $\{1\}$ | 0 | 1 |

Tabela 3.2: Valores para $m_\ell(m, n)$, com $\ell \in \{1, 2\}$, quando m, n são números inteiros positivos pares.

| | Ordem ℓ | |
|---|--------------|----------------------|
| | 1 | 2 |
| Quociente m/n | | |
| $(0, k_0) \cup (k_0, k_1)$ | 3 | $6 \leq m_2 \leq 11$ |
| $\left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$ | 3 | 7 |
| $\left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$ | 3 | 6 |
| $\left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2)$ | 3 | $7 \leq m_2 \leq 8$ |
| $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup (k_5, \infty)$ | 4 | 7 |
| $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ | 3 | 5 |
| $\{2\}$ | 3 | 4 |
| $(2, 3)$ | 4 | $7 \leq m_2 \leq 8$ |
| $(3, k_4)$ | 4 | $6 \leq m_2 \leq 11$ |
| (k_4, k_5) | 4 | $7 \leq m_2 \leq 9$ |

Tabela 3.3: Valores para $m_\ell(m, n)$, com $\ell \in \{1, 2\}$, quando m é inteiro positivo par e n é inteiro positivo ímpar.

Na sequência do capítulo serão desenvolvidas ferramentas para demonstrar os teoremas acima. Para considerarmos o caso em que m é um número inteiro positivo ímpar e n é um número inteiro positivo par, utilizamos o seguinte lema:

Lema 3.1. *Se $i, m, n \in \mathbb{N}$ então $m_i(m, n) = m_i(n, m)$.*

Demonstração. A prova é imediata usando a mudança linear de coordenadas $(x, y) \rightarrow (y, x)$. \square

Desta forma, calculamos somente o caso em que m é um número inteiro positivo par e n é um número inteiro positivo ímpar.

3.1 Famílias de sistemas ET com acurácia

Definimos em $[a, b]$, com $a, b > 0$, os conjuntos ordenados de funções

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^k &= [u_1^k], & \mathcal{G}_1^k &= [u_0^k, u_1^k], \\ \mathcal{G}_2^k &= [u_8^k, u_{11}^k, u_1^k], & \mathcal{G}_3^k &= [u_0^k, u_2^k, u_8^k], \\ \mathcal{G}_4^k &= [u_8^k, u_{11}^k, u_1^k, u_0^k], & \mathcal{G}_5^k &= [u_2^k, u_5^k, u_4^k, u_0^k, u_1^k, u_6^k, u_7^k, u_9^k], \\ \mathcal{G}_6^k &= [u_6^k, u_0^k, u_1^k, u_{10}^k, u_{12}^k], & \mathcal{G}_7^k &= [u_1^k, u_6^k, u_5^k, u_3^k, u_{10}^k, u_{12}^k], \\ \mathcal{G}_8^k &= [u_1^k, u_6^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_3^k], & \mathcal{G}_9^k &= [u_0^k, u_1^k, u_6^k, u_5^k, u_3^k, u_{10}^k, u_{12}^k], \\ \mathcal{G}_{10}^k &= [u_1^k, u_3^k], \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} u_0^k(x) &= 1, & u_1^k(x) &= x^k, \\ u_2^k(x) &= x^{k-1}, & u_3^k(x) &= x^{k-2}, \\ u_4^k(x) &= x^{2k-1}, & u_5^k(x) &= x^{2k-2}, \\ u_6^k(x) &= x^{3k-2}, & u_7^k(x) &= x^{3k-3}, \\ u_8^k(x) &= x + x^{2k-1}, & u_9^k(x) &= x + kx^{4k-3}, \\ u_{10}^k(x) &= (1 + x^{2k-2})(x + kx^{2k-1}), & u_{11}^k(x) &= (x + x^{2k-1}) \tan^{-1}(x^{k-1}), \\ u_{12}^k(x) &= (1 + x^{2k-2})(x + kx^{2k-1}) \tan^{-1}(x^{k-1}). \end{aligned}$$

Também, denotamos por $\text{sign}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o vetor $(\text{sign}(a_1), \text{sign}(a_2), \dots, \text{sign}(a_n))$ e o discriminante do polinômio P por $\text{Dis}(P)$. Temos os seguintes resultados:

Proposição 3.1. *As seguintes afirmações são válidas:*

1. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_0^k) = 0$, para $k > 0$;
2. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_1^k) = 1$, para $k > 0$;
3. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_2^k) = 2$, para $k \neq 1$;

4. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_3^k) = 2$, para $k \in (1, 2]$;
5. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_3^k) = 3$, para $k \in (2, \infty)$;
6. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_4^k) = 3$, para $k \in (1, 2]$;
7. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_4^k) = 4$, para $k \in (2, \infty)$;
8. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_5^k) = 7$, para $k \in \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)$;
9. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_5^k) = 8$, para $k \in \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$;
10. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_6^k) = 4$, para $k = 2$;
11. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_7^k) = 5$, para $k = \frac{2}{3}$;
12. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_{10}^k) = 1$, para $k = 1$.

Demonstração. Para provar, vamos mostrar que para cada família $\mathcal{G} \in \{\mathcal{G}_0^k, \mathcal{G}_1^k, \mathcal{G}_2^k, \mathcal{G}_3^k, \mathcal{G}_4^k, \mathcal{G}_5^k, \mathcal{G}_6^k, \mathcal{G}_7^k, \mathcal{G}_{10}^k\}$ todos seus Wronskianos são não nulos exceto o último, no qual não tem zeros ou tem exatamente um zero dependendo do valor de k . Portanto, dos Teoremas 1.4 e 1.5 obtemos que \mathcal{G} é um sistema ECT ou um sistema ET com acurácia 1 e, conseqüentemente, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = n$ ou $\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = n + 1$, com n é um número cardinal de \mathcal{G} .

O Wronskiano da família \mathcal{G}_0^k é $W_0(x) = 1$ e os Wronskianos da família \mathcal{G}_1^k são $W_0(x) = W_1(x) = 1$. Conseqüentemente, todos estes Wronskianos não possuem zeros.

Os Wronskianos da família \mathcal{G}_2^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x + x^{2k-1}, \\ W_1(x) &= (k-1)x^{k-2}(x^2 + x^{2k}), \\ W_2(x) &= -\frac{4(k-1)^3 x^{4k-2}}{x^2 + x^{2k}}. \end{aligned}$$

Claramente $W_0(x), W_1(x), W_2(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$, para $k \neq 1$.

Os Wronskianos da família \mathcal{G}_3^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= (k-1)x^{k-2}, \\ W_2(x) &= (k-1)x^{k-3}P_{0,k}(x^{2k-2}), \end{aligned}$$

com $P_{0,k}(x) = k(2k-1)x - (k-2)$. Para $k \neq 1$, $W_0(x), W_1(x)$ são não nulos em $(0, \infty)$. Note que $P_{0,k}(0)P'_{0,k}(x) > 0$ se $k \in (1, 2)$, $P_{0,k}(0)P'_{0,k}(0) = 0$ se $k = 2$ e $P_{0,k}(0)P'_{0,k}(x) < 0$

se $k \in (2, \infty)$. Logo, $W_2(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ se $k \in (1, 2]$ e $W_2(x)$ tem exatamente um zero positivo, o qual é simples, para $k \in (2, \infty)$.

Os Wronskianos da família \mathcal{G}_4^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x + x^{2k-1}, \\ W_1(x) &= (k-1)x^{k-2}(x^{2k} + x^2), \\ W_2(x) &= -\frac{4(k-1)^3 x^{4k-2}}{x^{2k} + x^2}, \\ W_3(x) &= -\frac{4(k-1)^3 k x^{4k-3}}{(x^{2k} + x^2)^2} P_{1,k}(x^{2k-2}), \end{aligned}$$

com $P_{1,k}(x) = (k-2)(2k-1)x - 3k + 2$. É fácil ver que $W_0(x), W_1(x), W_2(x) \neq 0$ para $x > 0$ e $k \neq 1$. Note que $|(P_{1,k}(0), P'_{1,k}(x))| \neq 0$, $P_{1,k}(0)P'_{1,k}(x) < 0$ para $k \in (2, \infty)$ e $P_{1,k}(0)P'_{1,k}(x) > 0$ para $k \in (1, 2]$. Então, obtemos que $W_3(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $k \in (1, 2]$ e $W_3(x)$ tem exatamente um zero positivo, o qual é simples, se $k \in (2, \infty)$.

Os Wronskianos da família \mathcal{G}_5^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^{k-1}, \\ W_1(x) &= (k-1)x^{3k-4}, \\ W_2(x) &= (k-1)kx^{5k-7}, \\ W_3(x) &= -2(k-1)^3 k(2k-1)x^{5k-10}, \\ W_4(x) &= -2(k-2)(k-1)^4 k^2(2k-1)x^{6k-14}, \\ W_5(x) &= -4(1-2k)^2(k-2)(k-1)^6 k^3(3k-2)x^{9k-21}, \\ W_6(x) &= 24(1-2k)^2(k-2)^2(k-1)^9 k^3(2k-3)(3k-2)x^{12k-30}, \\ W_7(x) &= 144(1-2k)^2(k-2)^2(k-1)^{12} k^3(2k-3)(3k-2)x^{12k-36} P_{2,k}(x^{4k-4}), \end{aligned}$$

com $P_{2,k}(x) = k^2(2k-1)(3k-2)(4k-3)x + (k-2)(2k-3)(3k-4)$. Para $k \in (1, \infty) \setminus \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}$ e $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$. Analogamente, ao caso anterior, concluímos que $W_7(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $k \in \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right) \cup (2, \infty)$ e $W_7(x)$ tem exatamente um zero positivo, o qual é simples, para $k \in \left(1, \frac{4}{3} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2 \right)$.

Os Wronskianos de \mathcal{G}_6^k , para $k = 2$, são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^4, \\ W_1(x) &= -4x^3, \\ W_2(x) &= 16x^3, \\ W_3(x) &= 48(10x^5 - 3x^3 + x), \\ W_4(x) &= \frac{1536x^3(2x^2 + 9)}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

Por cálculos simples, obtemos que $W_i(x) \neq 0$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Os Wronskianos de \mathcal{G}_7^k , para $k = \frac{2}{3}$, são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^{2/3}, \\ W_1(x) &= -\frac{2}{3x^{1/3}}, \\ W_2(x) &= -\frac{16}{27x^3}, \\ W_3(x) &= \frac{256}{243x^{22/3}}, \\ W_4(x) &= \frac{256(-25x^{2/3} + 105x^{4/3} + 6)}{19683x^{35/3}}, \\ W_5(x) &= -\frac{65536(9x^{2/3} + 26)}{4782969(x^{2/3} + 1)^4 x^{46/3}}. \end{aligned}$$

Note que $W_i(x) \neq 0$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Os Wronskianos de \mathcal{G}_{10}^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^k, \\ W_1(x) &= -2x^{2k-3}. \end{aligned}$$

Logo, $W_0(x)$ e $W_1(x)$ são não nulos em $(0, \infty)$.

Isto finaliza a prova da Proposição 3.1. □

Proposição 3.2. *As seguintes afirmações são válidas:*

1. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_8^k) = 4$, para $k \in (1, 2] \cup [3, 5]$.
2. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_8^k) = 5$, para $k \in (2, 3) \cup (5, \infty)$.

Demonstração. Consideremos o conjunto ordenado

$$\mathcal{F}_1^k = \begin{cases} [u_1^k, u_6^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_3^k], & k \in (1, 5), \\ [u_1^k, u_3^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_6^k], & k \in [5, \infty). \end{cases}$$

Observe que $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_8^k) = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_1^k)$. Na sequência, mostraremos que para $k \in [1, 5)$ todos os Wronskianos \mathcal{F}_1^k são não nulos, exceto o último, que não tem ou tem exatamente um zero, que é simples. Portanto, dos Teoremas 1.4 e 1.5 obtemos que \mathcal{F}_1^k é um sistema ECT ou um sistema ET com acurácia um e, conseqüentemente, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_8^k) = 4$ ou $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_8^k) = 5$. Para estudar $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1^k)$ consideramos os seguintes casos:

Caso 1:

Seja $k \in (1, 5)$. Os Wronskianos de \mathcal{F}_1^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^k, \\ W_1(x) &= 2(k-1)x^{4k-3}, \\ W_2(x) &= 2(k-1)^3 x^{4k-4} P_{3,k}(x^{2k-2}), \\ W_3(x) &= -\frac{32(k-1)^6 x^{9k-7}}{(x^{2k} + x^2)^2} P_{4,k}(x^{2k-2}), \\ W_4(x) &= \frac{256(k-1)^6 k x^{10k-11}}{(x^{2k} + x^2)^3} P_{5,k}(x^{2k-2}), \end{aligned}$$

onde $P_{3,k}(x) = 3kx^2 - (k+1)x + 3$, $P_{4,k}(x) = (k-5)kx + (1-5k)$ e

$$P_{5,k}(x) = A_{5,k}x^2 + B_{5,k}x + C_{5,k}$$

com

$$\begin{aligned} A_{5,k} &= (k-5)(k-2)k(3k-1), & B_{5,k} &= -2(k(k(k(k+10) - 30) + 10) + 1) \text{ e} \\ C_{5,k} &= -(k-3)(2k-1)(5k-1). \end{aligned}$$

A partir daqui é fácil ver que para $k \in (1, 5)$ e $i \in \{0, 1, 3\}$, $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ e $\text{Dis}(P_{3,k}) = k^2 - 34k + 1 < 0$. Então, $W_2(x)$ também não tem zeros positivos. Além disso,

$$\text{sign}(A_{5,k}, B_{5,k}, C_{5,k}) = \begin{cases} (1, 1, 1), & k \in (1, 2), \\ (0, 1, 1), & k = 2, \\ (-1, \text{sign}(B_{5,k}), 1), & k \in (2, 3), \\ (-1, -1, 0), & k = 3, \\ (-1, -1, -1), & k \in (3, 5). \end{cases}$$

Portanto, pelo Teorema 1.2, $W_4(x)$ não tem zeros para $k \in (1, 2] \cup [3, 5)$ e tem um zero positivo, o qual é simples, para $k \in (2, 3)$. Aplicando os Teoremas 1.4 e 1.5, concluímos que $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1^k) = 4$ para $k \in (1, 2] \cup [3, 5)$ e $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1^k) = 5$ para $k \in (2, 3)$.

Caso 2:

Seja $k \in [5, \infty)$. Os Wronskianos de \mathcal{F}_1^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^k, \\ W_1(x) &= -2x^{2k-3}, \\ W_2(x) &= -2(k-1)x^{2k-4} P_{6,k}(x^{-2+2k}), \end{aligned}$$

$$W_3(x) = \frac{8(k-1)^3 x^{5k-5}}{(x^{2k} + x^2)^2} P_{7,k}(x^{2k-2}),$$

$$W_4(x) = \frac{256(k-1)^6 k x^{10k-11}}{(x^{2k} + x^2)^3} P_{8,k}(x^{2k-2}),$$

com

$$P_{6,k}(x) = A_{6,k}x^2 + B_{6,k}x + C_{6,k},$$

$$P_{7,k}(x) = A_{7,k}x^4 + B_{7,k}x^3 + C_{7,k}x^2 + D_{7,k}x + E_{7,k},$$

$$P_{8,k}(x) = A_{8,k}x^2 + B_{8,k}x + C_{8,k}.$$

e

$$A_{6,k} = 3k(3k-1), \quad B_{6,k} = (k+1)^2,$$

$$C_{6,k} = k-3, \quad A_{7,k} = -3k^3(3k-1),$$

$$B_{7,k} = -17k^4 + 8k^3 + k^2, \quad C_{7,k} = -k(k(k(k+34) - 67) + 20),$$

$$D_{7,k} = 4 - k(k(k(k+22) - 61) + 18), \quad E_{7,k} = k(k(7-3k) + 6),$$

$$A_{8,k} = -(k-5)(k-2)k(3k-1), \quad B_{8,k} = 2(k(k(k(k+10) - 30) + 10) + 1),$$

$$C_{8,k} = (k-3)(2k-1)(5k-1).$$

Note que para $k \in [5, \infty)$, $\text{sign}(A_{6,k}) = \text{sign}(B_{6,k}) = \text{sign}(C_{6,k}) = 1$ e

$$\text{sign}(A_{7,k}) = \text{sign}(B_{7,k}) = \text{sign}(C_{7,k}) = \text{sign}(D_{7,k}) = \text{sign}(E_{7,k}) = -1.$$

Logo, pelo Teorema 1.2, $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $k \in [5, \infty)$ e $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Desde que

$$\text{sign}(A_{8,k}, B_{8,k}, C_{8,k}) = \begin{cases} (1, -1, -1), & k \in (5, \infty), \\ (0, -1, -1), & k = 5, \end{cases}$$

temos que $W_4(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $k = 5$ e ele tem um zero positivo, o qual é simples, para $k \in (5, \infty)$. Então segue que $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1^k) = 4$ para $k = 5$ e para $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1^k) = 5$ para $k \in (5, \infty)$.

Com isso terminamos a prova da Proposição 3.2. □

A fim de provar a Proposição 3.3, precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}x^4 + \mathcal{B}x^3 + \mathcal{C}x^2 + \mathcal{D}x + \mathcal{E}$ com*

$$\mathcal{A} = (k-5)(k-2)^2 k(2k-1)(3k-4)(3k-1)(4k-3),$$

$$\mathcal{B} = -2(2k-1)(3k-4)(k(k(k(2k(k(39k-179) + 235) - 89) - 118) + 35) - 2),$$

$$\mathcal{C} = (3k-4)(k(k(k(5k(k(2k(24k-61) + 177) - 366) + 2034) - 930) + 201) - 38),$$

$$\mathcal{D} = -2(3k-2)(5k-4)(k(k(k(k(2k-19) + 88) - 75) - 38) + 26) \text{ e}$$

$$\mathcal{E} = (k-3)(2k-3)(2k-1)(3k-2)(5k-4)(5k-1).$$

As seguintes afirmações são válidas:

1. Para $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$, $\mathcal{P}(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$, onde k_2, k_3 são raízes de $q_2(x)$ em $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, respectivamente;
2. Para $k \in \left(k_0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup \{2\} \cup (k_5, 5]$, $\mathcal{P}(x)$ tem um zero positivo, o qual é simples, onde k_0 e k_5 são raízes de $q_2(x)$ em $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ e $(3, 4)$, respectivamente;
3. Para $k \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$, $\mathcal{P}(x)$ tem dois zeros positivos, os quais são simples;
4. Para $k \in (0, k_0) \cup (3, k_5)$, $\mathcal{P}(x)$ tem três zeros positivos, os quais são simples.

Demonstração. Por cálculos simples, obtemos

$$\text{sign}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}) = \begin{cases} (1, 1, 1, \text{sign}(\mathcal{D}), -1), & k \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \\ (-1, -1, \text{sign}(\mathcal{C}), 1, 1), & k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \\ (-1, -1, -1, 0, 0), & k = \frac{2}{3}, \\ (-1, -1, -1, -1, -1), & k \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \\ (1, \text{sign}(\mathcal{B}), -1, -1, -1), & k \in \left(\frac{3}{4}, k_6\right), \\ (1, 1, \text{sign}(\mathcal{C}), -1, -1), & k = k_6, \\ (1, 1, 1, -1, -1), & k \in \left(k_6, \frac{4}{5}\right), \\ (1, 1, 1, 0, 0), & k = \frac{4}{5}, \\ (1, 1, 1, 1, 1), & k \in \left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right), \\ (0, 0, 0, 1, 1), & k = \frac{4}{3}, \\ (-1, -1, -1, \text{sign}(\mathcal{D}), 1), & k \in \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right), \end{cases}$$

onde k_6 é raiz, em $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$, do polinômio $240x^7 - 610x^6 + 885x^5 - 1830x^4 + 2034x^3 - 930x^2 + 201x - 38$. Aplicando o Teorema 1.2, temos que \mathcal{P} é não nulo em $(0, \infty)$

para $k \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right]$ e \mathcal{P} tem um zero positivo, o qual é simples, para $k \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

Agora, o discriminante de \mathcal{P} é dado por

$$\text{Dis}(\mathcal{P}) = -192(4 - 3k)^2(k - 1)^{12}(2k - 1)(3k - 2)(5k - 4)\mathcal{M}\mathcal{N},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= 32400k^{12} - 189990k^{11} + 503307k^{10} - 781069k^9 + 742059k^8 - 352440k^7 - 84219k^6 \\ &\quad + 253647k^5 - 161955k^4 + 28332k^3 + 22032k^2 - 15336k + 3296, \\ \mathcal{N} &= 177586560k^{17} - 1447424208k^{16} + 5969663136k^{15} - 29387373904k^{14} \\ &\quad + 129626832188k^{13} - 293774330511k^{12} + 102470736381k^{11} + 1027573184492k^{10} \\ &\quad - 2645532232771k^9 + 3259827826136k^8 - 2344796073539k^7 + 997977148820k^6 \\ &\quad - 227233713561k^5 + 15757275163k^4 + 3311923726k^3 - 563207524k^2 + 11249208k \\ &\quad + 19744. \end{aligned}$$

Então,

$$\text{sign}(\text{Dis}(\mathcal{P})) = \begin{cases} -1, & k \in \left(k_0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \cup (k_5, \infty), \\ 1, & k \in (0, k_0) \cup \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, k_5). \end{cases}$$

Portanto, \mathcal{P} tem dois zeros reais, contando as multiplicidades para $k \in \left(k_0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \cup (k_5, \infty)$ e \mathcal{P} tem 4 ou 0 zeros, contando as multiplicidades para $k \in (0, k_0) \cup \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2) \cup (3, k_5)$. Na sequência, devemos determinar o número exato de zeros em $(0, \infty)$. Por meio de cálculos simples, é possível ver que

$$\text{sign}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}) = \begin{cases} (-1, \text{sign}(B), 1, -1, 1), & k \in \left(0, \frac{1}{5}\right), \\ (-1, \text{sign}(B), 1, -1, -1), & k \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right), \\ (-1, \text{sign}(B), \text{sign}(C), -1, -1), & k \in \left(\frac{3}{2}, 2\right), \\ (0, 1, 1, -1, -1), & k = 2, \\ (-1, \text{sign}(B), 1, -1, -1), & k \in (2, 3), \end{cases}$$

$$\text{sign}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}) = \begin{cases} (-1, -1, 1, -1, 1), & k \in (3, 5), \\ (0, -1, 1, -1, 1), & k = 5, \\ (1, -1, 1, -1, 1), & k \in (5, \infty), \end{cases}$$

e $\mathcal{P}(-1) > 0$ para $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \cup (k_3, 3)$, $\mathcal{P}(1) > 0$ para $k \in [2, 3)$ e $\mathcal{P}(3) < 0$ para $k \in (4, \infty)$. Consequentemente,

1. Para $k \in \left(k_0, \frac{1}{5}\right) \cup (k_5, 5)$, \mathcal{P} tem dois zeros reais, os quais são simples, um deles positivo e o outro negativo;
2. Para $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$, \mathcal{P} tem dois zeros reais, os quais são simples e negativos;
3. Para $k \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2) \cup (2, 3)$, \mathcal{P} tem quatro zeros reais, os quais são simples, dois deles positivos e os outros dois negativos;
4. Para $k \in (0, k_0) \cup (3, k_5)$, \mathcal{P} tem quatro zeros reais, os quais são simples, três deles positivos e o outro negativo;
5. Para $k = 2$ ou 5 , \mathcal{P} tem um zero real, o qual é simples e positivo;
6. Para $k \in (5, \infty)$, \mathcal{P} tem dois zeros reais, os quais são simples e positivos.

Isto finaliza a prova. □

Proposição 3.3. Para $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, 2, 1, \frac{3}{2}\right\}$, $6 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 11$. Além disso, as seguintes afirmações são válidas:

1. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) = 6$, para $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$;
2. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) = 7$, para $k \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (k_5, 5]$;
3. $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 8$ para $k \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2) \cup (2, 3)$;
4. $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 9$, para $k \in (k_4, k_5)$.

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, 2, 1, \frac{3}{2}\right\}$. Os Wronskianos do conjunto ordenado \mathcal{G}_9^k são

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= kx^{k-1}, \\ W_2(x) &= 2(k-1)k(3k-2)x^{4k-5}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
W_3(x) &= -4(k-2)(k-1)^2 k^2 (3k-2) x^{6k-10}, \\
W_4(x) &= 16k^4 (3k-2) (k^2 - 3k + 2)^2 x^{7k-16}, \\
W_5(x) &= 16(k-2)^2 (k-1)^4 k^4 (3k-2) x^{7k-20} P_{9,k}(x^{2k-2}), \\
W_6(x) &= \frac{512(k-2)^2 (k-1)^7 k^4 (3k-2) x^{12k-20}}{(x^{2k} + x^2)^5} \mathcal{P}(x^{2k-2}),
\end{aligned}$$

com \mathcal{P} dado no Lema 3.2 e

$$P_{9,k}(x) = A_{9,k}x^2 + B_{9,k}x + C_{9,k},$$

onde $A_{9,k} = 3k(2k-1)(3k-1)(4k-3)$, $B_{9,k} = -(k+1)^2(2k-1)$ e $C_{9,k} = 3(k-3)(2k-3)$. Claramente $W_0(x), W_1(x), W_2(x), W_3(x), W_4(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$, $\text{grau}(P_{9,k}) = 2$ para $k \notin \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$ e $\text{grau}(\mathcal{P}) = 4$ para $k \notin \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 2, 5 \right\}$. Então W_5 e W_6 tem no máximo 2 e 4 zeros positivos, respectivamente. Aplicando os Teoremas 1.4 e 1.6 concluímos que $6 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 11$. No entanto, para determinar uma melhor estimativa para $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k)$ usando a Teoria de Chebyshev é necessário reorganizar as funções de \mathcal{G}_9^k convenientemente. Consideremos o conjunto ordenado \mathcal{F}_2^k definido por

$$\mathcal{F}_2^k = \begin{cases} [u_5^k, u_6^k, u_3^k, u_0^k, u_1^k, u_{10}^k, u_{12}^k], & k \in (k_4, k_5) \cup (k_5, 4], \\ [u_5^k, u_6^k, u_3^k, u_1^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_0^k], & k \in \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right], \\ [u_6^k, u_3^k, u_1^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_0^k, u_5^k], & k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right), \\ [u_6^k, u_1^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_5^k, u_0^k, u_3^k], & k \in \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2 \right) \right) \setminus \{k_2, 1, k_3\}, \\ [u_5^k, u_3^k, u_0^k, u_1^k, u_{10}^k, u_{12}^k, u_6^k], & k \in \left(k_1, \frac{1}{5} \right) \cup (2, 3), \\ [u_0^k, u_1^k, u_6^k, u_5^k, u_3^k, u_{10}^k, u_{12}^k], & k \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \cup (4, 5]. \end{cases}$$

Na sequência, mostramos que para \mathcal{F}_2^k todos seus Wronskianos são não nulos exceto o último, o qual tem exatamente ℓ zeros, todos simples, onde

$$\ell = \begin{cases} 0, & k \in \left(\frac{1}{5}, k_2 \right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1 \right) \cup \left(1, \frac{4}{3} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3 \right), \\ 1, & k \in \left(k_1, \frac{1}{5} \right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right) \cup (k_5, 5], \\ 2, & k \in \left(k_2, \frac{1}{3} \right) \cup (k_3, 2) \cup (2, 3), \\ 3, & k \in (k_4, k_5). \end{cases}$$

Dos Teoremas 1.4, 1.5 e 1.6 concluímos que:

1. $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_2^k) = 6$, para $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$;
2. $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_2^k) = 7$, para $k \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (k_5, 5]$;
3. $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{F}_2^k) \leq 8$, para $k \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2) \cup (2, 3)$;
4. $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 9$, para $k \in (k_4, k_5)$.

A fim de estudar os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k consideramos os seis casos seguintes:

Caso 1:

Seja $k \in (k_4, k_5) \cup (k_5, 4]$. Então, os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k são dados por

$$\begin{aligned}
 W_0(x) &= x^{2k-2}, \\
 W_1(x) &= kx^{5k-5}, \\
 W_2(x) &= 2k^3x^{6k-9}, \\
 W_3(x) &= -4(k-2)(k-1)k^3(3k-2)x^{6(k-2)}, \\
 W_4(x) &= -16k^4(3k-2)(k^2-3k+2)^2x^{7k-16}, \\
 W_5(x) &= -16(k-2)^2(k-1)^4k^4(3k-2)x^{7k-20}P_{10,k}(x^{2k-2}), \\
 W_6(x) &= -\frac{512(k-2)^2(k-1)^7k^4(3k-2)x^{12k-20}}{(x^{2k}+x^2)^5}\mathcal{P}(x^{2k-2}),
 \end{aligned}$$

onde \mathcal{P} é dado pelo Lema 3.2 e

$$P_{10,k}(x) = (3k(2k-1)(3k-1)(4k-3))x^2 - (k+1)^2(2k-1)x + 3(k-3)(2k-3).$$

Note que discriminante de $P_{10,k}$ é

$$\text{Dis}(P_{10,k}) = -(2k-1)(862k^5 - 4831k^4 + 8308k^3 - 5186k^2 + 974k + 1).$$

Através de cálculos simples é fácil ver que $\text{Dis}(P_{10,k}) < 0$ para $k \in (k_5, 4] \cup (k_4, k_5)$. Então $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pelo Lema 3.2 temos que $W_6(x)$ tem um zero para $k \in (k_5, 4]$ e tem três zeros positivos para $k \in (k_4, k_5)$.

Caso 2:

Seja $k \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right]$. Então, os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k são

$$W_0(x) = x^{2k-2},$$

$$\begin{aligned}
W_1(x) &= kx^{5k-5}, \\
W_2(x) &= 2k^3x^{6k-9}, \\
W_3(x) &= 8(k-2)(k-1)k^3x^{7k-12}, \\
W_4(x) &= 8(k-2)(k-1)^3k^3x^{7k-15}P_{11,k}(x^{2k-2}), \\
W_5(x) &= \frac{256(k-2)(k-1)^6k^3x^{12k-16}}{(x^{2k}+x^2)^4}P_{12,k}(x^{2k-2}), \\
W_6(x) &= \frac{512(k-2)^2(k-1)^7k^4(3k-2)x^{12k-20}}{(x^{2k}+x^2)^5}\mathcal{P}(x^{2k-2}).
\end{aligned}$$

onde \mathcal{P} é dado pelo Lema 3.2, $P_{11,k}(x) = (3k(k(6k-5)+1))x^2 - (k+1)^2x + 3(k-3)(2k-3)$ e

$$P_{12,k}(x) = A_{12,k}x^3 + B_{12,k}x^2 + C_{12,k}x + D_{12,k}$$

com

$$\begin{aligned}
A_{12,k} &= -(k-5)(k-2)k(2k-1)(3k-4)(3k-1), \\
B_{12,k} &= k(k(k(k(9k(4k+3)-562)+949)-498)+80)-8, \\
C_{12,k} &= (3k-2)(k(k(2k(18k-89)+185)+10)-29), \\
D_{12,k} &= (k-3)(2k-3)(2k-1)(3k-2)(5k-1).
\end{aligned}$$

Sob cálculos simples mostramos que $\text{Dis}(P_{11,k}) < 0$, já que

$$\text{Dis}(P_{11,k}) = -432k^5 + 2305k^4 - 3632k^3 + 1950k^2 - 320k + 1,$$

e, também,

$$\text{sign}(A_{12,k}) = \text{sign}(B_{12,k}) = \text{sign}(C_{12,k}) = \text{sign}(D_{12,k}) = 1.$$

Portanto, $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Aplicando o Lema 3.2 temos que $W_6(x)$ não tem zeros para $k = \frac{4}{5}$ e tem um zero positivo para $k \in \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$.

Caso 3:

Seja $k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$. Logo, os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k são dados por

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= x^{3k-2}, \\
W_1(x) &= -2kx^{4k-5}, \\
W_2(x) &= 8(k-1)kx^{5k-7}, \\
W_3(x) &= 8(k-1)^3kx^{5k-9}P_{13,k}(x^{2k-2}), \\
W_4(x) &= \frac{256(k-1)^6kx^{10k-11}}{(x^{2k}+x^2)^3}P_{14,k}(x^{2k-2}),
\end{aligned}$$

$$W_5(x) = \frac{256(k-2)(k-1)^6 k^2 (3k-2)x^{10k-14}}{(x^{2k} + x^2)^4} P_{15,k}(x^{2k-2}),$$

$$W_6(x) = \frac{512(k-2)^2(k-1)^7 k^4 (3k-2)x^{12k-20}}{(x^{2k} + x^2)^5} \mathcal{P}(x^{2k-2}),$$

com \mathcal{P} dado pelo Lema 3.2, $P_{13,k}(x) = A_{13,k}x^2 + B_{13,k}x + C_{13,k}$, $P_{14,k}(x) = A_{14,k}x^2 + B_{14,k}x + C_{14,k}$ e $P_{15,k}(x) = A_{15,k}x^3 + B_{15,k}x^2 + C_{15,k}x + D_{15,k}$, onde

$$\begin{aligned} A_{13,k} &= 3k(3k-1), \\ B_{13,k} &= -(k+1)^2, \\ C_{13,k} &= -3(k-3), \\ A_{14,k} &= (k-5)(k-2)k(3k-1), \\ B_{14,k} &= -2(k(k(k(k+10) - 30) + 10) + 1), \\ C_{14,k} &= -(k-3)(2k-1)(5k-1), \\ A_{15,k} &= (k-5)(k-2)^2 k(3k-1)(4k-3), \\ B_{15,k} &= -(k(k(k(k(k(82k-329) + 246) + 341) - 404) + 84) + 4), \\ C_{15,k} &= (k(5k(k(4k(k^2+4) - 91) + 84) - 73) - 16) e \\ D_{15,k} &= (k-3)(2k-1)(5k-4)(5k-1). \end{aligned}$$

É fácil checar que $\text{Dis}(P_{13,k}) = k^4 + 112k^3 - 354k^2 + 112k + 1 < 0$, $\text{sign}(A_{14,k}) = \text{sign}(B_{14,k}) = \text{sign}(C_{14,k}) \neq 0$ e $\text{sign}(A_{15,k}) = \text{sign}(B_{15,k}) = \text{sign}(C_{15,k}) = \text{sign}(D_{15,k}) \neq 0$. Isto implica que $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Aplicando o Lema 3.2 temos que $W_6(x)$ não tem zeros para $k \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ e tem um zero positivo para $k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

Caso 4:

Seja $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \cup (k_3, 2)$. Então, os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^{3k-2}, \\ W_1(x) &= -2(k-1)x^{4k-3}, \\ W_2(x) &= -2(k-1)^3 x^{4k-4} P_{16,k}(x^{2k-2}), \\ W_3(x) &= \frac{32(k-1)^6 x^{9k-7}}{(x^{2k} + x^2)^2} P_{17,k}(x^{2k-2}), \\ W_4(x) &= \frac{32(k-2)(k-1)^6 k x^{11k-11}}{(x^{2k} + x^2)^3} P_{18,k}(x^{2k-2}), \\ W_5(x) &= \frac{64(k-2)(k-1)^7 k^2 (3k-2)x^{11k-14}}{(x^{2k} + x^2)^4} P_{19,k}(x^{2k-2}), \end{aligned}$$

$$W_6(x) = \frac{512(k-2)^2(k-1)^7k^4(3k-2)x^{12k-20}}{(x^{2k}+x^2)^5}\mathcal{P}(x^{2k-2}),$$

com \mathcal{P} dado pelo Lema 3.2,

$$\begin{aligned} P_{16,k}(x) &= A_{16,k}x^2 + B_{16,k}x + C_{16,k}, \\ P_{17,k}(x) &= A_{17,k}x + B_{17,k}, \\ P_{18,k}(x) &= A_{18,k}x^2 + B_{18,k}x + C_{18,k} \text{ e} \\ P_{19,k}(x) &= A_{19,k}x^3 + B_{19,k}x^2 + C_{19,k}x + D_{19,k}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_{16,k} &= 3k, \\ B_{16,k} &= -(k+1), \\ C_{16,k} &= 3, \\ A_{17,k} &= (k-5)k, \\ B_{17,k} &= 1-5k, \\ A_{18,k} &= (k-5)k(2k-1)(3k-4), \\ B_{18,k} &= -(k(k(51k-98)+35)+4), \\ C_{18,k} &= k((71-30k)k-43)+6, \\ A_{19,k} &= (k-5)(k-2)k(2k-1)(3k-4)(4k-3), \\ B_{19,k} &= -(2k-1)(3k-4)(k(k(10k(2k-3)-49)+45)+2), \\ C_{19,k} &= (5k-4)(k(k(k(6k+59)-125)+40)+8) \text{ e} \\ D_{19,k} &= (2k-3)(3k-2)(5k-4)(5k-1). \end{aligned}$$

Note que $\text{Dis}(P_{16,k}) = k^2 - 34k + 1 < 0$, $\text{sign}(A_{17,k}) = \text{sign}(B_{17,k}) = -1$,

$$\text{sign}(A_{18,k}, B_{18,k}, C_{18,k}) = \begin{cases} (1, 1, 1), & k \in \left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right), \\ (-1, -1, -1), & k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \cup (k_3, 2), \\ (1, 1, 0), & k = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

e

$$\text{sign}(A_{19,k}, B_{19,k}, C_{19,k}, D_{19,k}) = \begin{cases} (1, 1, 1, 1), & k \in \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)\right) \setminus \{k_2, 1\}, \\ (-1, -1, -1, -1), & k \in \left(\frac{3}{2}, k_3\right) \cup (k_3, 2), \\ (1, 1, 0, 0), & k = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.2, implica que $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Do Lema 3.2 temos que $W_6(x)$ não tem zeros para $k \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right)$ e tem dois zeros positivos para $k \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2)$.

Caso 5:

Seja $k \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup (2, 3)$. Então, os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k são dados por

$$\begin{aligned} W_0(x) &= x^{2k-2}, \\ W_1(x) &= -kx^{3k-5}, \\ W_2(x) &= -2(k-2)(k-1)kx^{3k-7}, \\ W_3(x) &= 4(k-2)^2(k-1)k^2x^{4k-10}, \\ W_4(x) &= 4(k-2)^2(k-1)^2k^2x^{4k-13}P_{20,k}(x^{2k-2}), \\ W_5(x) &= \frac{16(k-2)^2(k-1)^4k^2x^{7k-12}}{(x^{2k}+x^2)^4}P_{21,k}(x^{2k-2}), \\ W_6(x) &= \frac{512(k-2)^2(k-1)^7k^4(3k-2)x^{12k-20}}{(x^{2k}+x^2)^5}\mathcal{P}(x^{2k-2}), \end{aligned}$$

com \mathcal{P} dado pelo Lema 3.2,

$$\begin{aligned} P_{20,k}(x) &= A_{20,k}x^2 + B_{20,k}x + C_{20,k} \text{ e} \\ P_{21,k}(x) &= A_{21,k}x^6 + B_{21,k}x^5 + C_{21,k}x^4 + D_{21,k}x^3 + E_{21,k}x^2 + F_{21,k}x + G_{21,k}, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} A_{20,k} &= 3k(2k-1)(3k-1)(4k-3), \\ B_{20,k} &= (k+1)^2(2k-1), \\ C_{20,k} &= (9-2k)k-9, \\ A_{21,k} &= 3k^4(2k-1)(3k-2)(3k-1)(4k-3), \\ B_{21,k} &= k^3(2k-1)(3k-2)(k(k(144k-157)+34)-1), \\ C_{21,k} &= k(k(k(k(k(6k(12k(16k-17)-877)+15977)-19731)+12594)-3976)+480), \\ D_{21,k} &= 2(k(k(k(k(k(4k(9k(28k-123)+1928)-4375)-3482)+5733)-2528)+324)+16), \\ E_{21,k} &= -(3k-2)(k(k(k(k(k(2k(36k-77)+337)-1899)+3376)-2038)+312)+64), \\ F_{21,k} &= (3k-2)(k(k(k(k(k(2k-153)+894)-1625)+1234)-444)+48), \\ G_{21,k} &= -(k-3)k^2(2k-3)(3k-2)(3k+2). \end{aligned}$$

Claramente, $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Cálculos simples mostram que

$$\text{sign}(A_{20,k}) = \text{sign}(B_{20,k}) = \text{sign}(C_{20,k}) \neq 0 \text{ e}$$

$$\text{sign}(A_{21,k}, B_{21,k}, C_{21,k}, D_{21,k}, E_{21,k}, F_{21,k}, G_{21,k}) = \begin{cases} (1, 1, 1, 1, 1, 1), & k \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right), \\ (1, 1, 1, 1, \text{sign}(E_{21,k}), 1, 1), & k \in (2, 3). \end{cases}$$

Também,

$$\begin{aligned} \text{Dis}(P_{21,k}) &= 65536(k-1)^{20}k^7(2k-1)(3k-2)^3M_{21,k}N_{21,k} > 0 \text{ e} \\ \text{Dis}(P''_{21,k}) &= -138240(k-1)^6k^7(2k-1)(3k-4)(3k-2)M''_{21,k} < 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M_{21,k} &= 839808k^{14} - 1010880k^{13} - 5060880k^{12} + 38949840k^{11} - 119174064k^{10} \\ &\quad + 206860856k^9 - 229069101k^8 + 172507094k^7 - 93655033k^6 + 40317742k^5 \\ &\quad - 15647109k^4 + 5552126k^3 - 1513413k^2 + 251166k - 18144, \\ N_{21,k} &= 3806744916427776k^{33} - 55363303288765440k^{32} \\ &\quad + 930918457497147264k^{31} - 11836004463340516800k^{30} \\ &\quad + 91532683238850129312k^{29} - 461469196017358935696k^{28} \\ &\quad + 1622359364855004861768k^{27} - 4081835756886132853476k^{26} \\ &\quad + 7066283856715725821154k^{25} - 6426908477868657393915k^{24} \\ &\quad - 5570734270994188242092k^{23} + 34449311793335111162756k^{22} \\ &\quad - 72559458015304856204100k^{21} + 93717261635762945156198k^{20} \\ &\quad - 65437568405213793393128k^{19} - 25211872504090862077128k^{18} \\ &\quad + 153990865975216351065386k^{17} - 268923470102381922080003k^{16} \\ &\quad + 322246492599713740001772k^{15} - 299852489898557778337168k^{14} \\ &\quad + 225377328717270001041400k^{13} - 138781976728733627492448k^{12} \\ &\quad + 70242082807482307324928k^{11} - 29138571482801500573952k^{10} \\ &\quad + 9832545194432486567808k^9 - 2665220654327667122944k^8 \\ &\quad + 569193829546198405120k^7 - 92927089125456728064k^6 \\ &\quad + 11032032669333372928k^5 - 866311843757228032k^4 \\ &\quad + 35207468035866624k^3 + 85494705684480k^2 - 49435757248512k \\ &\quad + 226492416000. \\ M''_{21,k} &= 6423611255021371392k^{32} - 111541968937921019904k^{31} \\ &\quad + 919200338078790647808k^{30} - 4751398693800526086144k^{29} \\ &\quad + 17051707504593799543296k^{28} - 43956979968459952060416k^{27} \\ &\quad + 79325528585775828825888k^{26} - 83049401006160707918160k^{25} \\ &\quad - 23541866479728480999600k^{24} + 306720930758420745367704k^{23} \\ &\quad - 717990042317623841069030k^{22} + 1028998488320313495753775k^{21} \\ &\quad - 915830770482208120258250k^{20} + 188673794870808275027004k^{19} \\ &\quad + 1005516286916761775852976k^{18} - 2208045399982750081770142k^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2920284937455072726299120k^{16} - 2913634752052959555716740k^{15} \\
& +2331198233528173549750198k^{14} - 1529393372181064351073785k^{13} \\
& +828284597891147416650858k^{12} - 369475648282342414004728k^{11} \\
& +134404932680713025481024k^{10} - 39088597168487171481504k^9 \\
& +8750911360694654129984k^8 - 1385973942226936482304k^7 \\
& +115178193874563928064k^6 + 8227208308803918592k^5 \\
& -4233031926351437312k^4 + 648475854014928896k^3 \\
& -52082860372828160k^2 + 1952897294499840k - 13759414272000.
\end{aligned}$$

Logo, $P_{21,k}$ tem duas raízes reais, para este intervalo de k , e já que

$$\begin{aligned}
P_{21,k}(0) &= -18k^6 + 81k^5 - 73k^4 - 36k^3 + 36k^2 > 0 \text{ e} \\
P_{21,k}(-1) &= -1728k^8 + 9696k^7 - 22752k^6 + 28608k^5 - 20160k^4 + 7008k^3 - 96k^2 - 768k \\
&\quad + 192 < 0,
\end{aligned}$$

resulta que as duas raízes reais de $P_{21,k}$ são negativas. Isto implica que $W_4(x), W_5(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$. Do Lema 3.2 temos que $W_6(x)$ tem um zero para $k \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right)$ e dois zeros positivos para $k \in (2, 3)$.

Caso 6:

Seja $k \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (4, 5]$. Os Wronskianos de \mathcal{F}_2^k são dados por (3.2). Observe que

$$\text{sign}(A_{9,k}, B_{9,k}, C_{9,k}) = \begin{cases} (1, 1, 1), & k \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \\ (1, -1, 1), & k \in (4, 5], \end{cases}$$

e $\text{Dis}(P_{9,k}) = -(2k - 1)(862k^5 - 4831k^4 + 8308k^3 - 5186k^2 + 974k + 1) < 0$, se $k > 4$. Então, $W_i(x) \neq 0$ em $(0, \infty)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Aplicando o Lema 3.2, temos que $W_6(x)$ tem um zero positivo para $k \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (4, 5]$. Isto finaliza a prova. \square

Proposição 3.4. $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_7^k) = 6$, para $k \in (5, \infty)$.

Demonstração. No conjunto de funções \mathcal{G}_7^k , mostraremos que todos os seus Wronskianos não possuem zeros em $(0, \infty)$, exceto o último que tem exatamente um zero simples nesse intervalo.

Os Wronskianos da família \mathcal{G}_7^k são dados por

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= x^k, \\
W_1(x) &= 2(k - 1)x^{4k-3}, \\
W_2(x) &= -2(k - 2)(k - 1)kx^{6k-7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_3(x) &= 8(k-2)(k-1)k^3x^{7k-12}, \\
W_4(x) &= 8(k-2)(k-1)^3k^3x^{7k-15}P_{22,k}(x^{2k-2}), \\
W_5(x) &= \frac{256(k-2)(k-1)^6k^3x^{12k-16}}{(x^{2k}+x^2)^4}P_{23,k}(x^{2k-2}).
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
P_{22,k}(x) &= A_{22,k}x^2 + B_{22,k}x + C_{22,k} \text{ e} \\
P_{23,k}(x) &= A_{23,k}x^3 + B_{23,k}x^2 + C_{23,k}x + D_{23,k},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{22,k} &= 3k(k(6k-5)+1), & A_{23,k} &= -(k-5)(k-2)k(2k-1)(3k-4)(3k-1), \\
B_{22,k} &= -(k+1)^2, & B_{23,k} &= (k(k(k(k(9k(4k+3)-562)+949)-498)+80)-8), \\
C_{22,k} &= 3(k-3)(2k-3), & C_{23,k} &= (3k-2)(k(k(2k(18k-89)+185)+10)-29) \text{ e} \\
D_{23,k} &= (k-3)(2k-3)(2k-1)(3k-2)(5k-1).
\end{aligned}$$

Já que $k > 5$, $W_i(x)$, para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, não possuem zeros positivos em $(0, \infty)$. Além disso, o número de zeros de $W_4(x)$ é igual ao número de zeros de $P_{22,k}(x)$, e

$$\text{Dis}(P_{22,k}) = -432k^5 + 2305k^4 - 3632k^3 + 1950k^2 - 320k + 1 < 0.$$

Como $P_{22,k}$ é um polinômio de segundo grau com discriminante negativo, $P_{22,k}$ não possui zeros reais. Resta analisar a quantidade de zeros de $W_5(x)$, que coincidem com os zeros de $P_{23,k}(x)$. Para $k > 5$, $\text{sign}(A_{23,k}) = -1$ e $\text{sign}(B_{23,k}) = \text{sign}(C_{23,k}) = \text{sign}(D_{23,k}) = 1$. Pelo Teorema 1.2, $P_{23,k}$ e, portanto, $W_5(x)$ possui exatamente um zero positivo, além disso, este zero é simples. Isto finaliza a prova. \square

Proposição 3.5. Para $k \in (5, \infty)$, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) = 7$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{G}^k = [u_0^k, u_1^k, u_6^k, u_5^k, u_3^k, u_{10}^k]$ e $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k = [u_1^k, u_6^k, u_5^k, u_3^k, \alpha u_0^k + \beta u_{10}^k + u_{12}]$ conjuntos ordenados. Observe que

$$\text{Span}(\mathcal{G}_9^k) = \text{Span}(\mathcal{G}^k) \cup \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \text{Span}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k).$$

Faremos essa demonstração em dois passos. Primeiro, vamos mostrar que os Wronskianos da família \mathcal{G}_9^k são não nulos, exceto o último, que possui dois zeros simples. Em seguida, provaremos que \mathcal{G}^k é um sistema ECT e que os Wronskianos de $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k$ não se anulam, exceto o último, que tem no máximo 3 zeros, contando as multiplicidades. Portanto, pelos Teoremas 1.4, 1.5, 1.6 e Observação 1.1 temos que $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 8$, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^k) = 5$ e $4 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \leq 7$. Assim, como todo elemento do $\text{Span}(\mathcal{G}_9^k)$ pertence ao $\text{Span}(\mathcal{G}^k)$ ou a $\bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \text{Span}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k)$ concluímos que $\mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) = 7$.

Os Wronskianos da família \mathcal{G}_9^k são dados por

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= 1, \\
W_1(x) &= kx^{k-1}, \\
W_2(x) &= 2(k-1)k(3k-2)x^{4k-5}, \\
W_3(x) &= -4(k-2)(k-1)^2k^2(3k-2)x^{6k-10}, \\
W_4(x) &= 16k^4(3k-2)(k^2-3k+2)^2x^{7k-16}, \\
W_5(x) &= 16(k-2)^2(k-1)^4k^4(3k-2)x^{7k-20}P_{24,k}(x^{2k-2}), \\
W_6(x) &= \frac{512(k-2)^2(k-1)^7k^4(3k-2)x^{12k-20}}{(x^{2k}+x^2)^5}\mathcal{P}(x^{2k-2}),
\end{aligned}$$

com \mathcal{P} é dado pelo Lema 3.2 e

$$P_{24,k}(x) = A_{24,k}x^2 + B_{24,k}x + C_{24,k},$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{24,k} &= 3k(2k-1)(3k-1)(4k-3), \\
B_{24,k} &= -(k+1)^2(2k-1) \text{ e} \\
C_{24,k} &= 3(k-3)(2k-3).
\end{aligned}$$

Se $k \in (5, \infty)$, $W_i(x) \neq 0$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Agora iremos mostrar que $W_5(x)$ não possui zeros em $(0, \infty)$ e $W_6(x)$ possui dois zeros positivos e simples para $k > 5$. Calculando o discriminante de $P_{24,k}$ obtemos

$$\text{Dis}(P_{24,k}) = -(2k-1)M_{24,k},$$

com

$$M_{24,k} = 862k^5 - 4831k^4 + 8308k^3 - 5186k^2 + 974k + 1.$$

Desta forma, obtemos que, para $k > 4$, $\text{Dis}(P_{24,k}) < 0$. Logo, como $P_{24,k}$ é um polinômio de segundo grau com discriminante negativo, donde não admite zeros reais. Consequentemente, $W_5(x)$ não tem zeros positivos. Além disso, pela Proposição 3.2, para $k \in (5, \infty)$, \mathcal{P} possui dois zeros simples em $(0, \infty)$. Assim, pelos Teoremas 1.5 e 1.6, temos $7 \leq \mathcal{Z}(\mathcal{G}_9^k) \leq 8$ para $k \in (5, \infty)$.

Como os Wronskianos de \mathcal{G}^k são iguais aos seis primeiros Wronskianos de \mathcal{G}_9^k , \mathcal{G}^k é um sistema ECT e, pelo Teorema 1.4, $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^k) = 5$.

Agora, os Wronskianos de $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k$, são

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= x^k, \\
W_1(x) &= 2(k-1)x^{4k-3}, \\
W_2(x) &= -2(k-2)(k-1)kx^{6k-7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3(x) &= 8(k-2)(k-1)k^3x^{7k-12} e \\ W_4(x) &= 8(k-2)(k-1)^3k^3x^{7k-15}S_3^k(x^{2k-2})Q_{\alpha,\beta}^k(x), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\beta}^k(x) &= \frac{(k-1)x^{k+9}S_2^k(x^{2k-2}) + \alpha S_1^k(x)}{(k-1)x^4(x^{2k} + x^2)^3 S_3^k(x^{2k-2})} + \beta + \tan^{-1}(x^{k-1}), \\ S_1^k(x) &= 2(k-2)k(3k-2)x^3(x^{2k} + x^2)^3, \\ S_2^k(x) &= 3k(k(6k-5) + 1)x^4 + (k(k(48k-41) + 6) - 1)x^3 + (k-1)(k(46k-37) + 61)x^2 \\ &\quad + ((74-15k)k - 71)x - 3(k-3)(2k-3) e \\ S_3^k(x) &= 3k(k(6k-5) + 1)x^2 - (k+1)^2x + 3(k-3)(2k-3). \end{aligned}$$

Claramente, se $k > 5$, $W_i(x) \neq 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$. A derivada de $Q_{\alpha,\beta}^k(x)$ é

$$(Q_{\alpha,\beta}^k)'(x) = R^k(x)S_{\alpha}^k(x),$$

com

$$\begin{aligned} R^k(x) &= -\frac{2(k-2)k(3k-2)x^2x^4q_1^k(x^{2k-2})}{(k-1)x^8[S_3^k(x^{2k-2})]^2} e \\ S_{\alpha}^k(x) &= \alpha + \frac{16(k-1)^2x^6x^{5k+2}q_2^k(x^{2k-2})}{(k-2)k(3k-2)x^4(x^{2k} + x^2)^4q_1^k(x^{2k-2})}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} q_1^k(x) &= 3k(2k-1)(3k-1)(4k-3)x^2 - (2k-1)(k+1)^2x + 3(k-3)(2k-3), \\ q_2^k(x) &= (k-5)(k-2)k(2k-1)(3k-4)(3k-1)x^3 \\ &\quad + (8 - k(k(k(k(9k(4k+3) - 562) + 949) - 498) + 80))x^2 \\ &\quad - (3k-2)(k(k(2k(18k-89) + 185) + 10) - 29)x \\ &\quad - (k-3)(2k-3)(2k-1)(3k-2)(5k-1). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\text{Dis}(q_1^k) = -(2k-1)(862k^5 - 4831k^4 + 8308k^3 - 5186k^2 + 974k + 1).$$

Logo, para $k > 5$, $\text{Dis}(q_1^k) < 0$ e $S_3^k(x^{2k-2}) \neq 0$ pois $\text{Dis}(S_3^k) < 0$, consequentemente, $R^k(x) \neq 0$. E, também,

$$(S_{\alpha}^k)'(x) = -\frac{16(k-1)^2x^4x^8x^{5k+1}q_3^k(x^{2k-2})q_4^k(x^{2k-2})}{(k-2)k(3k-2)x^8(x^{2k} + x^2)^5[q_1^k(x^{2k-2})]^2},$$

onde

$$q_3^k(x) = 3k(k(6k-5) + 1)x^2 - (k+1)^2x + 3(k-3)(2k-3)$$

e

$$\begin{aligned}
q_4^k(x) = & (k-5)(k-2)^2k(2k-1)(3k-4)(3k-1)(4k-3)x^4 \\
& -2(2k-1)(3k-4)(k(k(k(2k(k(39k-179)+235)-89)-118)+35)-2)x^3 \\
& +(3k-4)(k(k(k(5k(k(2k(24k-61)+177)-366)+2034)-930)+201)-38)x^2 \\
& -2(3k-2)(5k-4)(k(k(k(k(2k-19)+88)-75)-38)+26)x \\
& +(k-3)(2k-3)(2k-1)(3k-2)(5k-4)(5k-1).
\end{aligned}$$

Calculando os discriminantes de q_3^k e q_4^k obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Dis}(q_3^k) &= -432k^5 + 2305k^4 - 3632k^3 + 1950k^2 - 320k + 1 \text{ e} \\
\text{Dis}(q_4^k) &= -192(4-3k)^2(k-1)^{12}(2k-1)(3k-2)(5k-4)M_4^kN_4^k,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
M_4^k &= 32400k^{12} - 189990k^{11} + 503307k^{10} - 781069k^9 + 742059k^8 - 352440k^7 - 84219k^6 \\
&+ 253647k^5 - 161955k^4 + 28332k^3 + 22032k^2 - 15336k + 3296, \\
N_4^k &= 177586560k^{17} - 1447424208k^{16} + 5969663136k^{15} - 29387373904k^{14} \\
&+ 129626832188k^{13} - 293774330511k^{12} + 102470736381k^{11} + 1027573184492k^{10} \\
&- 2645532232771k^9 + 3259827826136k^8 - 2344796073539k^7 + 997977148820k^6 \\
&- 227233713561k^5 + 15757275163k^4 + 3311923726k^3 - 563207524k^2 + 11249208k \\
&+ 19744.
\end{aligned}$$

Então, obtemos $\text{Dis}(q_3^k), \text{Dis}(q_4^k) < 0$, para $k > 5$. Portanto, q_3^k não admite zeros reais e q_4^k tem no máximo dois zeros positivos contando as multiplicidades. Isso implica que o número de zeros de $(S_\alpha^k)'(x)$, contando as multiplicidades, é no máximo dois. Consequentemente, $(Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)$ tem no máximo três zeros. Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}((Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{sign}((Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)) = -\text{sign}(\alpha).$$

Para $\alpha \neq 0$, segue que $(Q_{\alpha,\beta}^k)'(x)$ tem no máximo dois zeros em $(0, \infty)$. Portanto, $Q_{\alpha,\beta}^k$ e conseqüentemente, $W_4(x)$ têm no máximo três zeros positivos. Pelo Teorema 1.6 e pela Observação 1.1, obtemos $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \leq 7$. Para $\alpha = 0$, segue que $\text{Span}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \subset \text{Span}(\mathcal{G}_7^k)$. Considerando a Proposição 3.4, obtemos $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^k) \leq 6$. Isto finaliza a prova. \square

3.2 Provas dos Teoremas 1, 2 e 3

Agora, vamos provar os Teoremas 1, 2 e 3.

Prova do Teorema 1. Afim de aplicar o Teorema 2.1, primeiro escrevemos o sistema (3.1)

em coordenadas polares com $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$,

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varepsilon A_1^+(r, \theta) + \varepsilon^2 A_2^+(r, \theta) \\ -1 + \varepsilon B_1^+(r, \theta) + \varepsilon^2 B_2^+(r, \theta) \end{pmatrix}, & r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) > 0, \\ \begin{pmatrix} \varepsilon A_1^-(r, \theta) + \varepsilon^2 A_2^-(r, \theta) \\ -1 + \varepsilon B_1^-(r, \theta) + \varepsilon^2 B_2^-(r, \theta) \end{pmatrix}, & r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned} A_1^+(r, \theta) &= \cos(\theta)(a_{01} + r(a_{21} + b_{11}) \sin(\theta)) + a_{11}r \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(b_{01} + b_{21}r \sin(\theta)), \\ A_1^-(r, \theta) &= \cos(\theta)(\alpha_{01} + r(\alpha_{21} + \beta_{11}) \sin(\theta)) + \alpha_{11}r \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(\beta_{01} + \beta_{21}r \sin(\theta)), \\ B_1^+(r, \theta) &= r^{-1}[-\sin(\theta)(a_{01} + a_{21}r \sin(\theta)) + \cos(\theta)(r(b_{21} - a_{11}) \sin(\theta) + b_{01}) + b_{11}r \cos^2(\theta)], \\ B_1^-(r, \theta) &= r^{-1}[-\sin(\theta)(\alpha_{01} + \alpha_{21}r \sin(\theta)) + \cos(\theta)(r(\beta_{21} - \alpha_{11}) \sin(\theta) + \beta_{01}) + \beta_{11}r \cos^2(\theta)], \\ A_2^+(r, \theta) &= \cos(\theta)(a_{02} + r(a_{22} + b_{12}) \sin(\theta)) + a_{12}r \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(b_{02} + b_{22}r \sin(\theta)), \\ A_2^-(r, \theta) &= \cos(\theta)(\alpha_{02} + r(\alpha_{22} + \beta_{12}) \sin(\theta)) + \alpha_{12}r \cos^2(\theta) + \sin(\theta)(\beta_{02} + \beta_{22}r \sin(\theta)), \\ B_2^+(r, \theta) &= r^{-1}[-\sin(\theta)(a_{02} + a_{22}r \sin(\theta)) + \cos(\theta)(r(b_{22} - a_{12}) \sin(\theta) + b_{02}) + b_{12}r \cos^2(\theta)] \text{ e} \\ B_2^-(r, \theta) &= r^{-1}[-\sin(\theta)(\alpha_{02} + \alpha_{22}r \sin(\theta)) + \cos(\theta)(r(\beta_{22} - \alpha_{12}) \sin(\theta) + \beta_{02}) + \beta_{12}r \cos^2(\theta)]. \end{aligned}$$

Então, tomando θ como a variável independente, o sistema (3.3) pode ser escrito como

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \frac{\varepsilon A_1^+(r, \theta) + \varepsilon^2 A_2^+(r, \theta)}{-1 + \varepsilon B_1^+(r, \theta) + \varepsilon^2 B_2^+(r, \theta)}, & r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) > 0, \\ \frac{\varepsilon A_1^-(r, \theta) + \varepsilon^2 A_2^-(r, \theta)}{-1 + \varepsilon B_1^-(r, \theta) + \varepsilon^2 B_2^-(r, \theta)}, & r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Assim, para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (3.4) e, conseqüentemente, o sistema (3.3) tornam-se equivalentes à

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \varepsilon F_1^+(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2^+(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) > 0, \\ \varepsilon F_1^-(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} F_1^+(r, \theta) &= -\cos(\theta)(a_{01} + r(a_{21} + b_{11}) \sin(\theta)) - a_{11}r \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(b_{01} + b_{21}r \sin(\theta)), \\ F_1^-(r, \theta) &= -\cos(\theta)(\alpha_{01} + r(\alpha_{21} + \beta_{11}) \sin(\theta)) - \alpha_{11}r \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(\beta_{01} + \beta_{21}r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Seja n, m inteiros positivos ímpares. Então, o sistema (3.5) torna-se equivalente à

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & 0 < \theta(r) < \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^+(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & \theta_1(r) < \theta(r) < \pi + \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & \pi + \theta_1(r) < \theta(r) < 2\pi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Onde $\theta_1(r) = \tan^{-1}(x^{k-1})$ é a solução da equação $r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) = 0$ no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. A figura 3.5 representa, através do gráfico $y = x^3$, a divisão do sistema em 3 partes para o caso em que m, n são inteiros positivos ímpares.

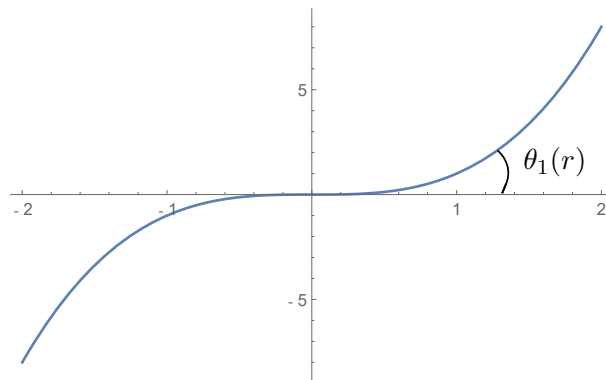


Figura 3.5: Curva $y = x^3$.

Por (2.3), temos que a função de Melnikov de primeira ordem do sistema (3.6) é

$$\Delta_1(r) = \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\theta, r) d\theta + \int_{\theta_1(r)}^{\pi + \theta_1(r)} F_1^+(\theta, r) d\theta + \int_{\pi + \theta_1(r)}^{2\pi} F_1^-(\theta, r) d\theta.$$

Sabemos que

$$\cos(\theta_1(r)) = \frac{x}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^k}{\sqrt{x^{2k} + x^2}} \text{ e } r = \sqrt{x^{2k} + x^2},$$

logo a Função de Melnikov de primeira ordem (3.6) se reduz a

$$\Delta_1(x) = \frac{\varrho_1(x)}{2x^{-1}\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad x > 0,$$

onde $k = \frac{m}{n}$,

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} v_0 u_2^k(x) + v_1 u_8^k(x) + v_2 u_0^k(x), & k \neq 1, \\ (v_0 + v_2) u_0^k(x) + v_1 u_8^k(x), & k = 1, \end{cases}$$

e $v_0 = 4(a_{01} - \alpha_{01})$, $v_1 = -\pi(a_{11} + \alpha_{11} + b_{21} + \beta_{21})$ e $v_2 = -4(b_{01} - \beta_{01})$. Do Teorema 2.1, $m_1(m, n)$ coincide com o número máximo de zeros positivos da função $\varrho_1(x)$. Note que, $\varrho_1(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_1^k)$ para $k = 1$ e $\varrho_1(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_3^k)$ para $k \neq 1$. Além disso, $\{v_0, v_1, v_2\}$ e $\{v_0 + v_2, v_1\}$ são linearmente independentes. Conseqüentemente, do Lema 3.1, pela Proposição 3.1 e pelo Teorema 2.1, obtemos que

$$m_1(m, n) = \begin{cases} 1, & \frac{m}{n} = 1, \\ 2, & \frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2], \\ 3, & \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Agora, por (2.3), temos que a função de Melnikov de segunda ordem do sistema (3.6) é

$$\Delta_2(r) = \Delta_{21,a} + \Delta_{22,a} + \Delta_{21,b} + \Delta_{22,b} + \Delta_{21,c},$$

com

$$\Delta_{21,a} = \int_0^{\theta_1(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) \delta_1(\phi) + F_2^-(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{21,b} = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^+(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\phi)] + F_2^+(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{21,c} = \int_{\theta_2(r)}^{\theta_3(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\theta_2(r)) + \delta_3(\phi)] + F_2^-(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{22,a} = \gamma_1 [F_1^-(\theta_1(r), r) - F_1^+(\theta_1(r), r)] e$$

$$\Delta_{22,b} = (\gamma_1 + \gamma_2) [F_1^+(\theta_2(r), r) - F_1^-(\theta_2(r), r)] \frac{\partial}{\partial r}(\theta_2(r)),$$

onde

$$\delta_1(\phi) = \int_0^\phi F_1^-(\theta, r) d\theta, \quad \gamma_1 = \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\phi, r) d\phi,$$

$$\delta_2(\phi) = \int_{\theta_1(r)}^\phi F_1^+(\theta, r) d\theta, \quad \gamma_2 = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F_1^+(\phi, r) d\phi e$$

$$\delta_3(\phi) = \int_{\theta_2(r)}^\phi F_1^-(\theta, r) d\theta.$$

Lembrando que

$$\cos(\theta_1(r)) = \frac{x}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^k}{\sqrt{x^{2k} + x^2}} \text{ e } r = \sqrt{x^{2k} + x^2},$$

e, considerando que Δ_1 é identicamente zero se, e somente se, $(a_{01}, a_{11}, b_{01}) = (\alpha_{01}, -\alpha_{11} - b_{21} - \beta_{21}, \beta_{01})$ para $k \neq 1$ e $(a_{01}, a_{11}) = (\alpha_{01} + b_{01} - \beta_{01}, -\alpha_{11} - b_{21} - \beta_{21})$ para $k = 1$. Nesse caso, a Função de Melnikov de segunda ordem do sistema (3.6) se reduz a

$$\Delta_2(x) = \frac{\varrho_4(x)}{4x^{-3}\sqrt{x^{2k} + x^2}(mx^{2k} + nx^2)}, \quad x > 0,$$

com

$$\varrho_4(x) = \begin{cases} \ell_0 u_9^k(x) + \ell_1 u_2^k(x) + \ell_2 u_5^k(x) + \ell_3 u_4^k(x) + \ell_4 u_0^k(x) + \ell_5 u_1^k(x) + \ell_6 u_6^k(x) & k \neq 1, \\ + \ell_7 u_7^k(x), \\ \ell_8 u_0^k(x) + \ell_9 u_1^k(x), & k = 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \ell_0 &= -\pi n(-\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{11}\beta_{11} + 2a_{12} + 2\alpha_{12} + \alpha_{11}a_{21} + a_{21}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{21} - \alpha_{11}b_{11} - b_{11}\beta_{21} \\ &\quad + \beta_{11}\beta_{21} + 2b_{22} + 2\beta_{22}), \\ \ell_1 &= 8(a_{02}n + \alpha_{01}b_{11}n - \beta_{01}b_{21}m - \beta_{01}b_{21}n - 2\alpha_{11}\beta_{01}m - \beta_{01}\beta_{21}m - \alpha_{01}\beta_{11}n - \alpha_{02}n \\ &\quad - 2\alpha_{11}\beta_{01}n - \beta_{01}\beta_{21}n), \\ \ell_2 &= 8(a_{21}\beta_{01}m - b_{02}m + \alpha_{01}b_{21}(m + n) - \alpha_{01}\beta_{21}m - \alpha_{21}\beta_{01}m + \beta_{02}m - \alpha_{01}\beta_{21}n), \\ \ell_3 &= -\pi(a_{21}(\alpha_{11} + \beta_{21})(3m - n) + \alpha_{11}b_{11}m + b_{11}\beta_{21}m - 3\alpha_{11}b_{11}n - 3b_{11}\beta_{21}n \\ &\quad + 2b_{22}(m + n) - 3\alpha_{11}\alpha_{21}m - \alpha_{11}\beta_{11}m + 2\alpha_{12}m - 3\alpha_{21}\beta_{21}m - \beta_{11}\beta_{21}m + 2\beta_{22}n \\ &\quad + 2\beta_{22}m + \alpha_{11}\alpha_{21}n + 3\alpha_{11}\beta_{11}n + 2\alpha_{12}n + \alpha_{21}\beta_{21}n + 3\beta_{11}\beta_{21}n + 2a_{12}(m + n)), \\ \ell_4 &= -8n(2\alpha_{01}(\alpha_{11} + \beta_{21}) - \beta_{01}\beta_{11} + b_{02} - \beta_{02} + \beta_{01}b_{11}), \\ \ell_5 &= 2\pi(\alpha_{11} + \beta_{21})(m - n)(2\alpha_{11} + b_{21} + \beta_{21}), \\ \ell_6 &= -2\pi(\alpha_{11} + \beta_{21})(b_{21} - \beta_{21})(m - n), \\ \ell_7 &= 8m(\alpha_{01}\alpha_{21} + a_{02} - \alpha_{02} - 2\alpha_{11}\beta_{01} - \alpha_{01}a_{21} - 2\beta_{01}\beta_{21}), \\ \ell_8 &= 8n(-2\alpha_{01}\alpha_{11} + \alpha_{01}\alpha_{21} - \alpha_{01}\beta_{11} + 2a_{02} - 2\alpha_{02} - 2\alpha_{11}\beta_{01} - \alpha_{01}a_{21} + a_{21}\beta_{01} \\ &\quad - \alpha_{21}\beta_{01} - 4\beta_{21}(\alpha_{01} + b_{01}) - 4\alpha_{11}b_{01} + \beta_{01}\beta_{11} - 2b_{02} + 2\beta_{02} + \alpha_{01}b_{11} - \beta_{01}b_{11} \\ &\quad + 2\alpha_{01}b_{21} - 2\beta_{01}b_{21}) \text{ e} \\ \ell_9 &= -4\pi n(2(\alpha_{12} + \beta_{22}) + 2a_{12} + (\alpha_{11} + \beta_{21})(a_{21} - \alpha_{21} - b_{11} + \beta_{11}) + 2b_{22}). \end{aligned}$$

Note que, $\varrho_4(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_1^k)$ para $k = 1$ e $\varrho_4(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_5^k)$ para $k \neq 1$ e os conjuntos $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7\}$ e $\{\ell_8, \ell_9\}$ são linearmente independentes. Consequentemente, do

Lema 3.1, da Proposição 3.1 e do Teorema 2.1, obtemos

$$m_2(m, n) = \begin{cases} 1, & \frac{m}{n} = 1, \\ 7, & \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty), \\ 8, & \frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Isto finaliza a prova do Teorema 1. □

Prova do Teorema 2. Seja m, n inteiros positivos pares. Então, o sistema (3.5) torna-se equivalente à

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & 0 < \theta(r) < \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^+(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & \theta_1(r) < \theta(r) < \pi - \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & \pi - \theta_1(r) < \theta(r) < \pi + \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^+(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & \pi + \theta_1(r) < \theta(r) < 2\pi - \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & 2\pi - \theta_1(r) < \theta(r) < 2\pi. \end{cases} \quad (3.7)$$

Considerando, novamente, $\theta_1(r) = \tan^{-1}(x^{k-1})$ a solução da equação $r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) = 0$ no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. A figura 3.5 representa, através do gráfico $y^2 = x^4$, a divisão do sistema em 5 partes para o caso em que m, n são inteiros positivos pares.

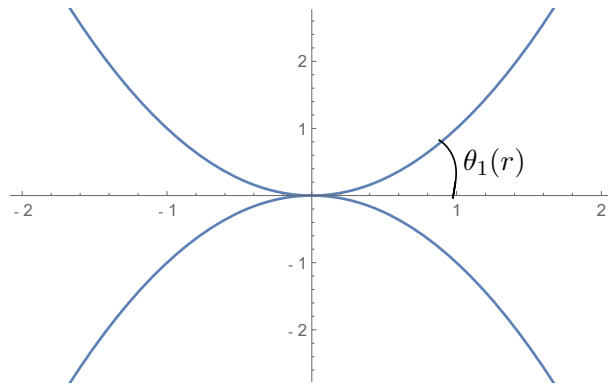


Figura 3.6: Curva $y^2 = x^4$.

De acordo com (2.3), a função de Melnikov de primeira ordem do sistema (3.7) é

$$\begin{aligned}\Delta_1(r) &= \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\theta, r) d\theta + \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F_1^+(\theta, r) d\theta + \int_{\theta_2(r)}^{\theta_3(r)} F_1^-(\theta, r) d\theta \\ &\quad + \int_{\theta_3(r)}^{\theta_4(r)} F_1^+(\theta, r) d\theta + \int_{\theta_4(r)}^{2\pi} F_1^-(\theta, r) d\theta.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\cos(\theta_1(r)) = \frac{x}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^k}{\sqrt{x^{2k} + x^2}} \text{ e } r = \sqrt{x^{2k} + x^2},$$

temos que a primeira função de Melnikov se reduz a

$$\Delta_1(x) = \frac{\varrho_2(x)}{x^{-1}\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad x > 0,$$

onde $k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$,

$$\varrho_2(x) = \begin{cases} v_0 u_1^k(x) + v_1 u_8^k(x) + v_2 u_{11}^k(x), & k \neq 1, \\ (v_0 + 2v_1 + 2v_2) u_1^k(x), & k = 1, \end{cases}$$

e $v_0 = 2(a_{11} - \alpha_{11} - b_{21} + \beta_{21})$, $v_1 = -\pi(a_{11} + b_{21})$ e $v_2 = 2(a_{11} - \alpha_{11} + b_{21} - \beta_{21})$. Observe que, $\varrho_2(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_0^k)$ para $k = 1$ e $\varrho_2(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_2^k)$ para $k \neq 1$. Além disso, $\{v_0, v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Consequentemente, do Lema 3.1, da Proposição 3.1 e do Teorema 2.1, obtemos

$$m_1(m, n) = \begin{cases} 0, & \frac{m}{n} = 1, \\ 2, & \frac{m}{n} \neq 1. \end{cases}$$

Além disso, por (2.3) temos que a função de Melnikov de segunda ordem do sistema (3.7) é calculada por

$$\Delta_2(r) = \Delta_{21,a} + \Delta_{22,a} + \Delta_{21,b} + \Delta_{22,b} + \Delta_{21,c} + \Delta_{22,c} + \Delta_{21,d} + \Delta_{22,d} + \Delta_{21,e},$$

com

$$\Delta_{21,a} = \int_0^{\theta_1(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) \delta_1(\phi) + F_2^-(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{21,b} = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^+(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\phi)] + F_2^+(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21,c} &= \int_{\theta_2(r)}^{\theta_3(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\theta_2(r)) + \delta_3(\phi)] + F_2^-(\phi, r) \right] d\phi, \\ \Delta_{21,d} &= \int_{\theta_3(r)}^{\theta_4(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^+(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\theta_2(r)) + \delta_3(\theta_3(r)) + \delta_4(\phi)] + F_2^+(\phi, r) \right] d\phi, \\ \Delta_{21,e} &= \int_{\theta_4(r)}^T \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\theta_2(r)) + \delta_3(\theta_3(r)) + \delta_4(\theta_4(r)) + \delta_5(\phi)] \right] d\phi + \\ &\quad \int_{\theta_4(r)}^T F_2^-(\phi, r) d\phi, \\ \Delta_{22,a} &= \gamma_1 [F_1^-(\theta_1(r), r) - F_1^+(\theta_1(r), r)], \\ \Delta_{22,b} &= (\gamma_1 + \gamma_2) [F_1^+(\theta_2(r), r) - F_1^-(\theta_2(r), r)] \frac{\partial}{\partial r} (\theta_2(r)), \\ \Delta_{22,c} &= (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) [F_1^-(\theta_3(r), r) - F_1^+(\theta_3(r), r)] \frac{\partial}{\partial r} (\theta_3(r)) e \\ \Delta_{22,d} &= (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) [F_1^+(\theta_4(r), r) - F_1^-(\theta_4(r), r)] \frac{\partial}{\partial r} (\theta_4(r)), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_1(\phi) &= \int_0^\phi F_1^-(\theta, r) d\theta, & \gamma_1 &= \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\phi, r) d\phi, \\ \delta_2(\phi) &= \int_{\theta_1(r)}^\phi F_1^+(\theta, r) d\theta, & \gamma_2 &= \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F_1^+(\phi, r) d\phi, \\ \delta_3(\phi) &= \int_{\theta_2(r)}^\phi F_1^-(\theta, r) d\theta, & \gamma_3 &= \int_{\theta_2(r)}^{\theta_3(r)} F_1^-(\phi, r) d\phi, \\ \delta_4(\phi) &= \int_{\theta_3(r)}^\phi F_1^+(\theta, r) d\theta, & \gamma_4 &= \int_{\theta_3(r)}^{\theta_4(r)} F_1^+(\phi, r) d\phi e \\ \delta_5(\phi) &= \int_{\theta_4(r)}^\phi F_1^-(\theta, r) d\theta. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\cos(\theta_1(r)) = \frac{x}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^k}{\sqrt{x^{2k} + x^2}} e r = \sqrt{x^{2k} + x^2},$$

e que $\Delta_1 \equiv 0$ se, e somente se, $(a_{11}, b_{21}, \alpha_{11}) = (-\beta_{21}, \beta_{21}, -\beta_{21})$ para $k \neq 1$ e $\alpha_{11} = (2 + \pi)^{-1}(-\pi a_{11} + 2a_{11} - 2b_{21} - \pi\beta_{21} + 2\beta_{21} - \pi b_{21})$ para $k = 1$. Neste caso, a Função de

Melnikov de segunda ordem (3.7) se reduz a

$$\Delta_2(x) = \frac{\varrho_5(x)}{x^{-3}\sqrt{x^{2k} + x^2}(mx^{2k} + nx^2)}, \quad x > 0,$$

com

$$\varrho_5(x) = \begin{cases} \ell_0 u_{10}^k(x) + \ell_1 u_1^k(x) + \ell_2 u_{12}^k(x) + \ell_3 u_6^k(x) + \ell_4 u_3^k(x), & k \neq 1, \\ \ell_5 u_3^k(x) + \ell_6 u_1^k(x), & k = 1, \end{cases}$$

e

$$\ell_0 = -\pi(a_{12} + b_{22}),$$

$$\ell_1 = 2n(a_{12} - \alpha_{12} - 2b_{11}\beta_{21} + 2\beta_{11}\beta_{21} - b_{22} + \beta_{22}),$$

$$\ell_2 = 2n(a_{12} - \alpha_{12} + b_{22} - \beta_{22}),$$

$$\ell_3 = 2m(a_{12} - \alpha_{12} + 2a_{21}\beta_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{21} - b_{22} + \beta_{22}),$$

$$\ell_4 = 4a_{01}b_{01}m - 4\alpha_{01}(b_{01}(m - n) + \beta_{01}n),$$

$$\ell_5 = 4n(a_{01}b_{01} - \alpha_{01}\beta_{01}) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \ell_6 = & -n(2 + \pi)^{-1}(a_{11}((\pi - 2)(\pi\alpha_{21} - (4 + \pi)\beta_{11}) - \pi(2 + \pi)a_{21} + (\pi - 4)(2 + \pi)b_{11}) \\ & + 2(\pi^2 - 4)a_{12} + 2\pi^2\alpha_{12} + 8\pi\alpha_{12} + 8\alpha_{12} - \pi^2a_{21}b_{21} - 8a_{21}b_{21} - 6\pi a_{21}b_{21} \\ & + 8\alpha_{21}\beta_{21} + \pi^2b_{11}b_{21} + 2\pi b_{11}b_{21} + 8\beta_{11}\beta_{21} + \pi^2\alpha_{21}b_{21} + 2\pi\alpha_{21}b_{21} - \pi\beta_{11}b_{21} \\ & - 6\pi\beta_{11}b_{21} - 8\beta_{11}b_{21} + 2\pi^2b_{22} + 8b_{22} + 2(\pi^2 - 4)\beta_{22} + 8\pi b_{22}). \end{aligned}$$

Logo, $\varrho_5(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_{10}^k)$ para $k = 1$, $\varrho_5(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_8^k)$ para $k \neq 1$. Além disso, os conjuntos $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ e $\{\ell_5, \ell_6\}$ são linearmente independentes. Conseqüentemente, do Lema 3.1, das Proposições 3.1 e 3.2 e do Teorema 2.1, obtemos

$$m_2(m, n) = \begin{cases} 1, & \frac{m}{n} = 1, \\ 4, & \frac{m}{n} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2] \cup [3, 5], \\ 5, & \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 3) \cup (5, \infty). \end{cases}$$

Concluindo então a prova do Teorema 2. □

Prova do Teorema 3. Sejam n ímpar e m par inteiros positivos, com $n \leq m$. Então, o

sistema (3.5) torna-se equivalente à

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & 0 < \theta(r) < \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^+(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & 0 < \theta(r) < 2\pi - \theta_1(r), \\ \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i F_i^-(r, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), & 2\pi - \theta_1(r) < \theta(r) < 2\pi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Análogo aos casos anteriores, temos que $\theta_1(r) = \tan^{-1}(x^{k-1})$ é a solução da equação $r^n \sin^n(\theta) - r^m \cos^m(\theta) = 0$ no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. A figura 3.7 representa, através do gráfico $y = x^2$, a divisão do sistema em 3 partes para o caso em que m é um número inteiro positivo par e n é um número inteiro positivo ímpar.

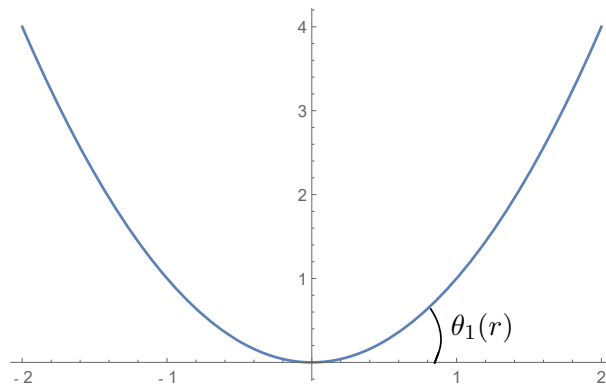


Figura 3.7: Curva $y = x^2$.

Desta forma, a função de Melnikov de primeira ordem é

$$\Delta_1(r) = \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\theta, r) d\theta + \int_{\theta_1(r)}^{2\pi - \theta_1(r)} F_1^+(\theta, r) d\theta + \int_{2\pi - \theta_1(r)}^{2\pi} F_1^-(\theta, r) d\theta.$$

Considerando

$$\cos(\theta_1(r)) = \frac{x}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^k}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad r = \sqrt{x^{2k} + x^2} \text{ e } \theta_1(r) = \tan^{-1}(x^{k-1}),$$

temos que a Função de Melnikov de primeira ordem do sistema (3.8) se reduz a

$$\Delta_1(x) = \frac{\varrho_3(x)}{x^{-1}\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad x > 0,$$

onde $k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : (p, q) = 1, (p, 2) = 1 \right\}$ e

$$\varrho_3(x) = v_0 u_0^k(x) + v_1 u_1^k(x) + v_2 u_8^k(x) + v_3 u_{11}^k(x)$$

sendo $v_0 = -2(b_{01} - \beta_{01})$, $v_1 = a_{11} - \alpha_{11} - b_{21} + \beta_{21}$, $v_2 = -\frac{\pi}{2}(a_{11} + b_{21} + \alpha_{11} + \beta_{21})$ e $v_3 = a_{11} - \alpha_{11} + b_{21} - \beta_{21}$. Logo, $\varrho_3(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_4^k)$. Note que $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente. Consequentemente, da Proposição 3.1 e do Teorema 2.1, obtemos

$$m_1(m, n) = \begin{cases} 3, & \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right], \\ 4, & \frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Ainda, por (2.3), temos que a função de Melnikov de segunda ordem do sistema (3.8) é calculada por

$$\Delta_2(r) = \Delta_{21,a} + \Delta_{22,a} + \Delta_{21,b} + \Delta_{22,b} + \Delta_{21,c},$$

com

$$\Delta_{21,a} = \int_0^{\theta_1(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) \delta_1(\phi) + F_2^-(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{21,b} = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^+(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\phi)] + F_2^+(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{21,c} = \int_{\theta_2(r)}^{\theta_3(r)} \left[\frac{\partial}{\partial r} F_1^-(\phi, r) [\delta_1(\theta_1(r)) + \delta_2(\theta_2(r)) + \delta_3(\phi)] + F_2^-(\phi, r) \right] d\phi,$$

$$\Delta_{22,a} = \gamma_1 [F_1^-(\theta_1(r), r) - F_1^+(\theta_1(r), r)] \text{ e}$$

$$\Delta_{22,b} = (\gamma_1 + \gamma_2) [F_1^+(\theta_2(r), r) - F_1^-(\theta_2(r), r)] \frac{\partial}{\partial r}(\theta_2(r)).$$

onde

$$\delta_1(\phi) = \int_0^\phi F_1^-(\theta, r) d\theta, \quad \gamma_1 = \int_0^{\theta_1(r)} F_1^-(\phi, r) d\phi,$$

$$\delta_2(\phi) = \int_{\theta_1(r)}^\phi F_1^+(\theta, r) d\theta, \quad \gamma_2 = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F_1^+(\phi, r) d\phi \text{ e}$$

$$\delta_3(\phi) = \int_{\theta_2(r)}^{\phi} F_1^-(\theta, r) d\theta.$$

Sabendo que

$$\cos(\theta_1(r)) = \frac{x}{\sqrt{x^{2k} + x^2}}, \quad \sin(\theta_1(r)) = \frac{x^k}{\sqrt{x^{2k} + x^2}} \text{ e } r = \sqrt{x^{2k} + x^2},$$

e, também, que $\Delta_1 \equiv 0$ se, e somente se, $(b_{01}, a_{11}, b_{21}, \alpha_{11}) = (\beta_{01}, -\beta_{21}, \beta_{21}, -\beta_{21})$. Então a Função de Melnikov de segunda ordem do sistema (3.8) se reduz a

$$\Delta_2(x) = \frac{\varrho_6(x)}{2x^{-3}\sqrt{x^{2k} + x^2}(mx^{2k} + nx^2)}, \quad x > 0,$$

com

$$\varrho_6(x) = \begin{cases} \ell_0 u_{10}^k + \ell_1 u_5^k + \ell_2 u_{12}^k + \ell_3 u_6^k + \ell_4 u_3^k + \ell_5 u_0^k + \ell_6 u_1^k, & k \neq \frac{2}{3}, 2, \\ \ell_0 u_{10}^k + \ell_1 u_5^k + \ell_2 u_{12}^k + (\ell_3 + \ell_5) u_0^k + \ell_4 u_3^k + \ell_6 u_1^k, & k = \frac{2}{3}, \\ \ell_0 u_{10}^k + (\ell_1 + \ell_6) u_5^k + \ell_2 u_{12}^k + \ell_3 u_6^k + (\ell_4 + \ell_5) u_0^k, & k = 2, \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \ell_0 &= -\pi n(a_{12} + \alpha_{12} + b_{22} + \beta_{22}), \\ \ell_1 &= 4m(a_{01}\beta_{21} - \alpha_{01}\beta_{21} + a_{21}\beta_{01} - \alpha_{21}\beta_{01} - b_{02} + \beta_{02}), \\ \ell_2 &= 2n(a_{12} - \alpha_{12} + b_{22} - \beta_{22}), \\ \ell_3 &= 2m(a_{12} - \alpha_{12} + 2a_{21}\beta_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{21} - b_{22} + \beta_{22}), \\ \ell_4 &= 4m\beta_{01}(a_{01} - \alpha_{01}), \\ \ell_5 &= 4n(\beta_{01}\beta_{11} - b_{02} + \beta_{02} - \beta_{01}b_{11}) \text{ e} \\ \ell_6 &= 2n(a_{12} - \alpha_{12} - 2b_{11}\beta_{21} + 2\beta_{11}\beta_{21} - b_{22} + \beta_{22}). \end{aligned}$$

Logo, $\varrho_6(x) \in \text{Span}(\mathcal{G}_9^k)$. Além disso, os conjuntos $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$, $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3 + \ell_5, \ell_4, \ell_6\}$ e $\{\ell_0, \ell_1 + \ell_6, \ell_2, \ell_3, \ell_4 + \ell_5\}$ são linearmente independentes. Consequentemente, das Proposições 3.1, 3.3 e 3.5 e do Teorema 2.1, obtemos

$$m_2(m, n) = \begin{cases} 4, & \frac{m}{n} = 2, \\ 5, & \frac{m}{n} = \frac{2}{3}, \\ 6, & \frac{m}{n} \in \left(\frac{1}{5}, k_2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, k_3\right), \\ 7, & \frac{m}{n} \in \left(k_1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (k_5, \infty), \end{cases}$$

e, além disso,

$$7 \leq m_2(m, n) \leq 8, \quad \frac{m}{n} \in \left(k_2, \frac{1}{3}\right) \cup (k_3, 2) \cup (2, 3),$$

$$7 \leq m_2(m, n) \leq 9, \quad \frac{m}{n} \in (k_4, k_5),$$

$$6 \leq m_2(m, n) \leq 11, \quad \frac{m}{n} \in (0, k_0) \cup (k_0, k_1) \cup (3, k_4).$$

Finalizando, assim, a prova do Teorema 3. □

Considerações Finais

Motivados pelo 16^o problema de Hilbert, ao longo deste trabalho investigamos o número máximo de ciclos limites, $H(m, n)$, para uma classe de sistemas diferenciais suaves por partes com curva de descontinuidade não-linear. Mais precisamente, fornecemos, utilizando a Teoria de Melnikov, uma estimativa mínima de $H(m, n)$ estudando perturbações lineares de um centro linear de sistemas diferenciais planares lineares por partes com duas zonas separados pela curva $y^n - x^m = 0$, com $m, n \in \mathbb{N}$.

Para cumprir o objetivo deste trabalho, estudamos vários artigos e livros que foram citados no seu desenvolvimento e são encontrados nas Referências Bibliográficas. Vale ressaltar que durante a realização do presente trabalho participamos da I Reunião Mineira de Matemática, VI Escola Brasileira de Sistemas Dinâmicos, Second Virtual Workshop on Dynamical Systems e XIII Workshop de Verão em Matemática da UFV onde apresentamos alguns resultados da nossa pesquisa.

Para estabelecer uma estimativa mínima de $H(m, n)$ estudamos a Teoria de Melnikov, em especial as funções de Melnikov de primeira e segunda ordens abordadas no Capítulo 2. A partir dessas funções e com o auxílio do software Wolfram Mathematica, conseguimos provar as proposições e teoremas contidos no Capítulo 3. Nossas contribuições foram apresentadas nos Teoremas 1, 2 e 3 e resumidas nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 do mesmo capítulo.

Nesse contexto, fica como desdobramento futuro a tarefa de calcular as funções de Melnikov de ordem superior a 2 de sistemas diferenciais planares lineares por partes com duas zonas separadas pela curva $y^n - x^m = 0$, com $m, n \in \mathbb{N}$.

Em suma, os conhecimentos aqui tratados são importantes para o estudo das funções de Melnikov de primeira e segunda ordens e como aplicá-las. Por fim, esperamos que este trabalho sirva como motivação e base para estudos futuros nesta área.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, K. S.; CESPEDES, O. A.; CRUZ, D. R.; NOVAES, D. D. Higher order melnikov analysis for planar piecewise linear vector fields with nonlinear switching curve. *Journal of Differential Equations* 287 (2021), 1–36.
- [2] ARTÉS, J. C.; LLIBRE, J.; MEDRADO, J. C.; TEIXEIRA, M. A. Piecewise linear differential systems with two real saddles. *Mathematics and Computers in Simulation* 95 (2014), 13–22.
- [3] BASTOS, J. L.; BUZZI, C. A.; LLIBRE, J.; NOVAES, D. D. Melnikov analysis in nonsmooth differential systems with nonlinear switching manifold. *Journal of Differential Equations* 267, 6 (2019), 3748–3767.
- [4] BRAGA, D. C.; MELLO, L. F. Limit cycles in a family of discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane. *Nonlinear Dynamics* 73(3) (2013), 1283–1288.
- [5] BUZZI, C.; PESSOA, C.; TORREGROSA, J. Piecewise linear perturbations of a linear center. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 33(9) (2013), 3915–3936.
- [6] COLOMBO, A.; JEFFREY, M.; LÁZARO, J. T.; OLM., J. M. *Extended abstracts spring 2016: nonsmooth dynamics*, vol. 8.
- [7] COUTINHO, A. C. A regra dos sinais de descartes. Dissertação de mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2016.
- [8] CRUZ, D. R. *Análise de Melnikov em Sistemas Diferenciais Descontínuos com Variedade de Descontinuidade Não-Linear*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2021.
- [9] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. Canonical discontinuous planar piecewise linear systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 11(1) (2012), 181–211.
- [10] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. The discontinuous matching of two planar linear foci can have three nested crossing limit cycles. *Publicacions matemàtiques* (2014), 221–253.

- [11] GIANNAKOPOULOS, F.; PLIETE, K. Planar systems of piecewise linear differential equations with a line of discontinuity. *Nonlinearity* 14(6) (2001), 1611.
- [12] GINÉ, J. On some open problems in planar differential systems and hilbert's 16th problem. *Chaos, Solitons & Fractals* 31, 5 (2007), 1118–1134.
- [13] HAN, M.; ZHANG, W. On hopf bifurcation in non-smooth planar systems. *Journal of Differential Equations* 248(9) (2010), 2399–2416.
- [14] HUAN, S.-M.; YANG, X.-S. Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 92 (2013), 82–95.
- [15] HUAN, S.-M.; YANG, X.-S. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node-node type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 411(1) (2014), 340–353.
- [16] KARLIN, S.; STUDDEN, W. *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*. Interscience, New York, 1966.
- [17] LARROSA, J. F. Sistemas planares de filippov e bifurcações genéricas de baixa codimensão. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2012.
- [18] LI, L. Three crossing limit cycles in planar piecewise linear systems with saddle-focus type. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* 2014(70) (2014), 1–14.
- [19] LIMA, E. L. *Análise Real, volume 2: Funções de n Variáveis*, 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [20] LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; RODRIGUES, C. A. B. Averaging theory at any order for computing limit cycles of discontinuous piecewise differential systems with many zones. *Phys. D* 353/354 (2017), 1–10.
- [21] LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differentiable center with two zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 25(11) (2015), 1550144.
- [22] LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems. *Nonlinear Dynam.* 82(3) (2015), 1159–1175.
- [23] LLIBRE, J.; PONCE, E. Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms* 19(3) (2012), 325–335.

- [24] LLIBRE, J.; RAMÍREZ, R.; SADOVSKAIA, N. On the 16th hilbert problem for algebraic limit cycles. *Journal of Differential Equations* 248, 6 (2010), 1401–1409.
- [25] LLIBRE, J.; TEIXEIRA, M. A.; TORREGROSA, J. Lower bounds for the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems with a straight line of separation. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 23(04) (2013), 1350066.
- [26] LLIBRE, J.; ZHANG, X. Limit cycles for discontinuous planar piecewise linear differential systems separated by an algebraic curve. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 467(01) (2018), 537–549.
- [27] NOVAES, D. D.; TORREGROSA, J. On extended chebyshev systems with positive accuracy. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 448, 1 (2017), 171–186.
- [28] OLIVEIRA, A. P. M. Órbitas homoclínicas e heteroclínicas em sistemas dinâmicos suaves por partes. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2017.
- [29] SIMPSON, D. J. W. *Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems*, vol. 70. World Scientific, 2010.
- [30] TEIXEIRA, M. A. *Perturbation Theory for Non-smooth Systems*. Springer New York, 2011.
- [31] WOLFRAM, S. Wolfram mathematica, 2021–2022.
- [32] ZHANG, X. The 16th hilbert problem on algebraic limit cycles. *Journal of Differential Equations* 251, 7 (2011), 1778–1789.