JOEL ANTÔNIO TEIXEIRA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA SISTEMAS DE LANE-EMDEN

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2019

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Teixeira, Joel Antônio, 1995-

T266e
2019

Existência de soluções positivas para sistemas de Lane-Emden / Joel Antônio Teixeira. – Viçosa, MG, 2019.

xi, 126 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Edir Junior Ferreira Leite.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 124-126.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equações diferenciais hiperbólicas - Soluções numéricas. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.3535

JOEL ANTÔNIO TEIXEIRA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA SISTEMAS DE LANE-EMDEN

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2019.

Margareth da Silva Alves

Olimpio Hiroshi Miyagaki

Edir Júnior Ferreira Leite
(Orientador)

Dedico este trabalho a minha esposa,
Joyce Carmanini.

Agradeço todas as dificuldades
que enfrentei; não fosse por elas,
eu não teria saído do lugar. As
facilidades nos impedem de
caminhar. Mesmo as críticas nos
auxiliam muito.

Chico Xavier

Agradecimentos

Em primeiro lugar sou muitíssimo grato a Deus, por ter chegado até aqui e estar realizando mais uma conquista.

Agradeço aos meus pais Aloísio e Alzira, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são sem dúvida os meus primeiros e eternos professores.

Agradeço ao meu orientador, Edir, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo.

Agradeço de uma forma especial minha esposa, Joyce Carmanini, que sempre esteve ao meu lado me incentivando, dando apoio.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

TEIXEIRA, Joel Antônio, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Existência de soluções positivas para sistemas de Lane-Emden**. Orientador: Edir Junior Ferreira Leite.

Neste trabalho estudamos a existência, unicidade e regularidade de solução ground state positiva para sistemas de Lane-Emden da forma:

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \Omega, \\ Lv = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $Lu = -\Delta u$ ou $Lu = -\Delta u + u$ e p, q satisfazem

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n} \tag{$H1$}$$

e da forma:

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \\ Lv = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde $n \geq 3$, $Lu = -\Delta u$ ou $Lu = -\Delta u + u$. No caso $Lu = -\Delta u + u$, temos que p, q satisfazem $pq > 1$ e $(H1)$. E no caso $Lu = -\Delta u$, temos que p, q satisfazem

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}. \tag{$H2$}$$

Fizemos também uma contribuição no sentido de estabelecer a existência de solução ground state para o seguinte sistema com peso:

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{|v|^{p-1}v}{|x|^{\beta}} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{f(u)}{|x|^{\alpha}} & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $n \geq 4$, $\alpha, \beta < n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave, limitado e contendo a origem e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Palavras chaves: Sistemas elípticos, hipérbole crítica, existência de solução.

Abstract

TEIXEIRA, Joel Antônio, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **Existence of positive solutions for Lane-Emden systems**. Adviser: Edir Junior Ferreira Leite.

The present work deals with existence, uniqueness and regularity of positive ground state solutions for Lane-Emden systems of the form:

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{in} \quad \Omega, \\ Lv = |u|^{q-1}u & \text{in} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a smooth bounded domain, $Lu = -\Delta u$ or $Lu = -\Delta u + u$ and p, q satisfy

$$p, q > 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n} \tag{$H1$}$$

and of the form:

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \\ Lv = |u|^{q-1}u & \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where $n \geq 3$, $Lu = -\Delta u$ or $Lu = -\Delta u + u$. In the case $Lu = -\Delta u + u$, we have p, q satisfy $pq > 1$ and $(H1)$. Now, in the case $Lu = -\Delta u$, we have p, q satisfy

$$p, q > 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}. \tag{$H2$}$$

We made a contribution by establishing the existence of ground state solution for the following system with weights:

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{|v|^{p-1}v}{|x|^{\beta}} & \text{in} \quad \Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{f(u)}{|x|^{\alpha}} & \text{in} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $n \geq 4$, $\alpha, \beta < n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a smooth bounded domain and containing 0 and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function.

Keywords: Elliptic systems, critical hyperbole, existence of solution.

Sumário

Introdução

Operador de Laplace e sistemas o envolvendo tem sido alvo de intensa pesquisa. Nosso trabalho de Mestrado consiste do estudo de uma família fortemente acoplada de tais sistemas. A primeira motivação para este estudo vem do chamado sistema de Lane-Emden:

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $p, q > 0$.

O problema (1) e várias de suas generalizações, foram amplamente investigados na literatura durante as três últimas décadas. Veja como exemplo a obra [11], e as referências nela contidas. Especificamente, as noções de sublinearidade, superlinearidade e criticalidade foram introduzidas em [10, 26, 27, 31]. De fato, o comportamento de (1) é sublinear quando $pq < 1$, superlinear quando $pq > 1$ e crítico (subcrítico, supercrítico) quando $n \geq 3$ e (p, q) está sobre (abaixo, acima) a hipérbole

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n} \tag{2}$$

conhecida como hipérbole crítica associada ao sistema de Lane-Emden (1).

Quando $pq = 1$, seu comportamento é ressonante e o problema do autovalor correspondente foi abordado em [28]. O caso sublinear foi estudado em [10] onde a existência e unicidade de solução clássica positiva são encontradas. O caso superlinear e subcrítico foi completamente estudado nas obras [8], [12], [14] e [17] onde a existência de pelo menos uma solução clássica positiva é encontrada. Por fim, a inexistência de soluções clássicas positivas no caso supercrítico foi estabelecida em [26] em domínios estrelados.

Neste trabalho, estudamos a existência de solução não trivial para quatro tipos de sistemas de Lane-Emden. Dentre eles, destacamos nossa pequena contribuição: estabelecer a existência de solução Ground State em um sistema com peso. Para isso, o trabalho foi dividido em quatro partes. Na primeira parte estuda-se a existência de solução não trivial para o seguinte sistema

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \Omega, \\ Lv = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $Lu = -\Delta u$ ou $Lu = -\Delta u + u$ e p, q satisfazem

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}. \tag{$H1$}$$

Observe que nessa primeira parte estudamos dois sistemas de uma só vez, tal processo é possível devido a equivalência da norma

$$\|u\|_{E_p} := \left(\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} = \|Lu\|_{\frac{p+1}{p}}, \quad u \in E_p$$

com a norma usual em $E_p = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

Na segunda parte estuda-se a existência de solução não trivial para o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + v = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P_2}$$

onde $n \geq 3$, $pq > 1$ e satisfaz a hipótese $(H1)$, descrita acima.

Na terceira parte estuda-se a existência de solução Ground State para o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P_3}$$

onde $n \geq 3$ e p, q satisfazem

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}. \tag{$H2$}$$

Por fim, na quarta parte estuda-se a existênia de solução Ground State para o seguinte sistema com peso

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{|v|^{p-1}v}{|x|^\beta} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{f(u)}{|x|^\alpha} & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_4}$$

onde $n \geq 4$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave, limitado e contendo a origem e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Para $f(s) = |s|^{q-1}s$, o caso geral $\alpha \neq 0$ e/ou $\beta \neq 0$ foi primeiro investigado por Figueiredo et al. [13] e Liu e Yang [24]. Como no caso escalar, a presença das funções peso $\frac{1}{|x|^\alpha}$ e $\frac{1}{|x|^\beta}$ afetam o intervalo de p e q para o qual o sistema (P_4) possui solução. De fato, em [13] e [24] é mostrado que a linha divisória entre a existência e a não-existência de solução é dada pela hipérbole crítica com peso:

$$\frac{n-\beta}{p+1}+\frac{n-\alpha}{q+1}=n-2. \tag{3}$$

A hipérbole crítica (3) é monótona em relação a α e β. Em particular, a hipérbole crítica (2) está acima de qualquer hipérbole crítica (3), com $0<\alpha,\beta<n$.

Em todos os casos o estudo é baseado no método variacional, no entanto, em cada um deles é preciso fazer uso de técnicas para garantir as condições da existência de ponto crítico não trivial, $(u,v)\neq(0,0)$, do problema variacional associado. No sistema (P_1) a existência de ponto crítico não trivial é garantida pela imersão compacta $E_p\hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$. No entando, para o sistema (P_2) há falta de compacidade. Uma forma de contornar essa falta de compacidade é trabalhar com a simetrização de Schwarz e assim aplicar resultados de compacidade devido a simetria dos pontos críticos. No sistema (P_3) aplicamos um resultado dado por Lions [22] que garante a existência desses pontos críticos e assim a existência de solução não trivial. Por fim, no sistema (P_4) aplicamos o Teorema do Passo da Montanha para garantirmos a existência de solução.

No capítulo 1, apresentaremos algumas preliminares, tais como: definições, resultados de Análise Funcional e espaços de funções que iremos trabalhar, como por exemplo espaços de funções de classe $C^m(\Omega)$ e $C^m(\overline{\Omega})$, espaços de Holder $C^{m,\alpha}(\Omega)$ e $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, espaços de Sobolev com peso $W^{k,p}(\Omega,\sigma)$ e os espaços $D^{k,p}(\Omega)$. Além disso, apresentaremos definições e resultados sobre a teoria elíptica padrão e também sobre a simetrização de Schwarz. As principais referências deste capítulo são Brezis [5], Biezuner [2], Gilbarg e Trudinger [15], Botelho et al. [4] e Medeiros e Miranda [25].

A primeira parte do trabalho será vista no Capítulo 2, seguindo Bonheure et al. [3] e Figueiredo e Ruf [14]. A abordagem para fornecer os resultados, de existência de solução é procurar pontos críticos do funcional $\Psi\in C^1(E_p\times E_q,\mathbb{R})$ dado por

$$\Psi(u,v)=\langle u,v\rangle-\frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

onde $\langle u,v\rangle=\int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x$ se $L=-\Delta$ e $\langle u,v\rangle=\int_\Omega(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x$ se $L=-\Delta+I$. Isolando v na primeira equação do sistema (P_1) e substituindo na segunda equação, obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} L\left(|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu\right)=|u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega \qquad\qquad (\widetilde{P_1})\\ u=Lu=0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}.$$

Veremos que as soluções do sistema (P_1) serão dadas por (u,v), onde $v:=|Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$ e u é solução do problema $(\widetilde{P_1})$. Para encontrar as soluções do problema $(\widetilde{P_1})$ buscamos os pontos críticos do funcional $\Phi\in C^1(E_p,\mathbb{R})$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

A existência de tais pontos críticos é equivalente a mostrar que

$$\alpha_{p,q} := \inf\left\{\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x : u \in E_p, \|u\|_{q+1}^{q+1} = 1\right\}$$

é atingido. O que é garantido pela imersão compacta $E_p \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$.

Fizemos também um caso particular, onde $\Omega = B_R(0)$ e assim, obtemos que as soluções são radialmente simétrica.

Para esta primeira parte temos três resultados principais:

Teorema 2.24 : Sejam p, q tais que $pq \neq 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja $u \in E_p \backslash \{0\}$ uma solução de Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$ e seja $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$. Então (u, v) é solução clássica de (P_1) e $uv > 0$ em Ω.

Teorema 2.25 : Sejam $p, q > 0$ tais que $pq < 1$. Então o problema (P_1) no caso em $L = -\Delta$ tem a menos de sinal, uma única solução clássica $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})\right)^2$.

Teorema 2.36 : Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 3)$ um domínio suave limitado. Suponha que Ω é um domínio estrelado em relação a origem, $p, q > 0$ e

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{n-2}{n}.$$

Então, o problema (P_1) no caso $L = -\Delta$ não admite solução positiva de classe $C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$.

A segunda parte será vista no Capítulo 3, seguindo Bonheure et al. [3]. A abordagem para fornecer os resultados de existência de solução é procurar pontos críticos do funcional $F \in C^1\left(W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}\right)$ dado por

$$F(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + uv)\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

Isolando v na primeira equação do sistema (P_2) e substituindo na segunda equação, obtemos o seguinte problema

$$L\left(|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu\right) = |u|^{q-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \qquad (\widetilde{P_2})$$

onde $Lu = -\Delta u + u$.

Para trabalhar com o problema $(\widetilde{P_2})$ usamos o espaço $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$, equipado com a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}}$$

que é equivalente a norma usual do espaço $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Como no sistema (P_1), veremos que as soluções do sistema (P_2) serão dadas por (u,v), onde $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$ e u é solução do problema $(\widetilde{P_2})$. Para encontrar as soluções do problema $(\widetilde{P_2})$ buscamos os pontos críticos do funcional $J \in C^1(W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$J(u) = \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

A existência de tais pontos críticos é equivalente a mostrar que

$$\beta_{p,q} := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{p+1}{p}}dx : u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1}^{q+1} = 1\right\}$$

é atingido. Neste caso, há falta de compacidade da imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$. A forma que usamos para contornar essa falta de compacidade foi trabalhar com a simetrização de Schwarz e assim aplicar resultados de compacidade devido a simetria dos pontos críticos.

Para esta segunda parte temos dois resultados principais:

Teorema 3.14 : A constante de minimização $\beta_{p,q}$ é atingida, isto é, existe $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{q+1} = 1$ e $\beta_{p,q} = \|u\|^{\frac{p+1}{p}}$.

Teorema 3.22 : Sejam p, q tais que $pq > 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ uma solução Ground State de $(\widetilde{P_2})$ e defina $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$. Então, $u \in C^{2,\eta}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^{2,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ para todos η e γ nos intervalos: $0 < \eta \leq \min\{1, p\}$ e $0 < \gamma \leq \min\{1, q\}$. Em particular, (u, v) é solução clássica do sistema (P_2).

A terceira parte será vista no Capítulo 4, seguindo Hulshof e van der Vorst [16]. A abordagem para fornecer os resultados de existência de solução é procurar pontos críticos do funcional $J_{p,q} \in C^1\left(\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}\right)$ dado por

$$J_{p,q}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

Isolando v na primeira equação do sistema (P_3) e substituindo na segunda equação, obtemos o seguinte problema

$$-\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)) = |u|^{q-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \qquad (\widetilde{\mathrm{P}_3})$$

Para trabalhar com o problema $(\widetilde{P_3})$ usamos o espaço $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$, que é definido como o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\Delta.\|_{\frac{p+1}{p}}$.

Como nos sistemas anteriores, veremos que as soluções do sistema (P_3) serão dadas por (u,v), onde $v := |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$ e u é solução do problema $(\widetilde{P_3})$. Para encontrar as soluções do problema $(\widetilde{P_3})$ buscamos os pontos críticos do funcional $T \in C^1(\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$T(u) = \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

A existência de tais pontos críticos é equivalente a mostrar que

$$S_{p,q} := \inf\left\{ \|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} : u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1} = 1 \right\}$$

é atingido. Neste caso, $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ não é um espaço reflexivo. Aqui aplicamos um resultado de Lions [22], para garantir que $S_{p,q}$ é atingido. Tal resultado será enunciado, porém não será provado, isto por causa da complexidade de sua prova.

Para esta terceira parte temos três resultados principais:

Teorema 4.13 : Sejam $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ solução do problema $(\widetilde{P_3})$ e $v = |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$. Então o par (u, v) é uma solução grand state do sistema (P_3). Além disso, o menor valor crítico não zero de $J_{p,q}$ é dado por

$$I_{p,q} = \frac{2}{n} K_{p,q}^{\frac{n}{2}},$$

com

$$K_{p,q} := \inf\left\{ \|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}} : u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1} = 1 \right\}.$$

Teorema 4.16 : Sejam p, q satisfazendo a hipótese $(H2)$. Então o sistema (P_3) possui uma única solução clássica positiva $(u, v) \in (C^2(\mathbb{R}^n))^2$.

Teorema 4.19 : Sejam $p, q > 0$ tais que

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}$$

então o problema (P_3) não admite solução não trivial, positiva e radialmente simétrica de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, a quarta parte será vista no Capítulo 5. A abordagem para fornecer os resultados de existência de solução é procurar pontos críticos do funcional $\Psi \in C^1(E_{p,\beta} \times E_{q,\alpha}, \mathbb{R})$ dado por

$$\Psi(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta}|v|^{p+1}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x.$$

Isolando v na primeira equação do sistema (P_4) e substituindo na segunda equação, obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta\left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}\right) = \frac{1}{|x|^\alpha}f(u) & \text{em} \quad \Omega \qquad\qquad (\widetilde{P_4}) \\ u = -\Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}.$$

Para trabalhar com o problema $(\widetilde{P_4})$ usamos o espaço de Sobolev com peso $E_{p,\beta} = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}}) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{E_{p,\beta}} := \left(\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Como nos sistemas anteriores veremos que as soluções do sistema (P_4) serão dadas por (u, v), onde $v := |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}$ e u é solução do problema $(\widetilde{P_4})$ (Teorema 5.17). Para encontrar as soluções do problema $(\widetilde{P_4})$ buscamos os pontos críticos do funcional $\Phi \in C^1(E_{p,\beta}, \mathbb{R})$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u)\mathrm{d}x.$$

A existência de tais pontos críticos é garantida pelo Teorema do Passo da Montanha, porém devemos analisar separadamente os dois casos, $0 < \beta < n$ e $\beta \leq 0$, devido a resultados de imersões diferentes. Por exemplo, quando $\beta \leq 0$, a imersão $E_{p,\beta} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ é contínua e compacta, no entanto, quando $0 < \beta < n$, não sabemos sequer se tal imersão é contínua. Logo, somente no caso $0 < \beta < n$ teremos que impor uma restrição de crescimento para a função real f.

Os Teoremas abaixo são, nossa principal contribuição neste trabalho:

Teorema 5.7 : Sejam $\alpha < 0$, $\beta \leq 0$, $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$ e $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$. Suponha que f e F satisfazem:

(f1) Existem constantes $\theta > 1 + \frac{1}{p}$ e s_0 tal que

$$\theta F(s) \leq f(s)s, \quad \forall |s| \geq s_0.$$

(f2) Se s está próximo de 0, então

$$f(s) = o(s^{\frac{1}{p}}).$$

Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.

Teorema 5.8 : Sejam $0 \leq \alpha < n$, $\beta \leq 0$, $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$ e $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$. Suponha que f e F satisfazem as condições *(f1)* e *(f2)*. Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.

Teorema 5.15 : Sejam $0 < \alpha, \beta < n$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$, $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, e $p, q > 1$ satisfazendo

$$\frac{n-\beta}{p+1} + \frac{n-\alpha}{q+1} > n - 2.$$

Suponha que f e F satisfazem as condições *(f1)* e *(f3)* Existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$|f(s)| \leq a|s|^q + b.$$

Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.

Teorema 5.16 : Sejam $\alpha \leq 0$, $0 < \beta < n$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$, $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, e $p, q > 1$ satisfazendo

$$\frac{n-\beta}{p+1} + \frac{n}{q+1} > n - 2.$$

Suponha que f e F satisfazem as condições *(f1)* e *(f3)*. Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Análise Funcional

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar Botelho et al. [4].

Definição 1.1. *Um espaço normado X que é também um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach.*

Definição 1.2. *Um espaço com produto interno H que é completo com a métrica induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert.*

Definição 1.3. *Sejam $(X, \|.\|_X)$ e $(Y, \|.\|_Y)$ espaços normados sobre o corpo $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Dizemos que $T : X \to Y$ é um funcional linear, se T for linear, isto é*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ *para quaisquer* $x, y \in X$ *e*
- $T(ax) = aT(x)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$ *e qualquer* $x \in X$.

(*ii*) *Dizemos que $T : X \to Y$ é um funcional linear contínuo, se além de T ser linear T também for contínuo, isto é, para todos $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $\|x - x_0\|_X < \delta$.*

Definição 1.4. (*i*) *Uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

(*ii*) *Um isomorfismo entre espaços normados X e Y é um homeomorfismo linear $T : X \to Y$. Neste caso dizemos que X e Y são isomorfos.*
Se além disso, for uma isometria, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in X$, dizemos que T é um isomorfismo isométrico e que X e Y são isomorfos isometricamente.

Teorema 1.5. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então são equivalentes:*

(a) T *é lipschitziano.*

(b) T *é uniformemente contínuo.*

(c) T *é contínuo.*

(d) T *é contínuo em algum ponto de* X.

(e) T *é contínuo na origem.*

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in X \quad e \quad \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Teorema 2.1.1]. ■

Definição 1.6. *Sejam* $(X, \|.\|)$ *um espaço normados sobre o corpo* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *é um operador linear contínuo se* φ *for linear e contínuo. Além disso, chamamos* $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{\varphi : X \to \mathbb{R}; \varphi$ *é um operador linear e contínuo* $\}$ *de espaço dual de* X.

Teorema 1.7. *Seja* $(X, \|.\|)$ *um espaço normado qualquer. Então* X' *é um espaço de Banach, com a norma*

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Proposição 2.1.4 e Corolário 2.1.5]. ■

Definição 1.8. *Um espaço normado* X *que contém um subconjunto enumerável e denso é dito separável. Mais ainda, um espaço métrico* M *é separável quando contém um subconjunto denso e enumerável.*

Definição 1.9. *Seja* $(X, \|.\|)$ *um espaço normado. Definimos o bidual de* X *por* $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{R}) = \{\psi : X' \to \mathbb{R}; \psi$ *é um funcional linear contínuo* $\}$.

Teorema 1.10. *Seja* X *um espaço normado qualquer. Então* X'' *é um espaço de Banach, com a norma*

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(\varphi)| : \varphi \in X' \quad e \quad \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Demonstração: Note que $X'' = (X')'$. Como X' é um espaço normado, pois $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ define uma norma em X', obtemos pelo Teorema 1.7 que $X'' = (X')'$ é um espaço de Banach, com a norma

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(\varphi)| : \varphi \in X' \quad \text{e} \quad \|\varphi\| \leq 1\}.$$

■

Proposição 1.11. *Para todo espaço normado X, o operador linear*

$$J_X : X \to X'', \quad J_X(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in X',$$

é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de X em X''.
Em particular, X é isometricamente isomorfo a $J_X(X) \subset X''$.

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Proposição 4.3.1]. ■

Definição 1.12. *Um espaço normado X para o qual o mergulho canônico $J_X : X \to X''$ é sobrejetor é chamado espaço reflexivo.*

Proposição 1.13. *Todo espaço reflexivo é Banach.*

Demonstração: Um espaço normado reflexivo é isomorfo isometricamente ao bidual, que é Banach pelo Teorema 1.10. ■

Definição 1.14. *Seja X um espaço normado. Os funcionais $(\varphi)_{\varphi \in X'} = X'$ é uma coleção de funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$. A topologia em X gerada pelos funcionais $\varphi \in X'$ é chamada topologia fraca em X.*
Notação: Denotamos a topologia fraca por $\sigma(X, X')$ e a convergência nessa topologia, chamada convergência fraca por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema 1.15. *(Kakutani) Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca $\sigma(X, X')$.*

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Teorema 6.4.5]. ■

Corolário 1.16. *Se X é reflexivo, então todo subespaço fechado de X é reflexivo.*

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Corolário 6.4.6]. ■

Teorema 1.17. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Teorema 6.5.4]. ■

Definição 1.18. *Dizemos que um espaço normado X é uniformemente convexo se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta,$$

sempre que $x, y \in B_X$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$.
Aqui denotamos $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Teorema 1.19. *Espaços de Banach uniformemente convexos são reflexivos*

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Teorema 6.6.6]. ■

Definição 1.20. *Um operador linear $T : X \to Y$ entre espaços normados é dito compacto se $T(B_X)$ é relativamente compacto em Y, isto é $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y.*

Proposição 1.21. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear e contínuo.*

(i) Se T é compacto, então vale a implicação

$$x_k \rightharpoonup x \quad em \quad X \Rightarrow T(x_k) \longrightarrow T(x) \quad em \quad Y. \tag{1.1}$$

(ii) Se X é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, vale (1.1).

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Proposição 7.2.8]. ■

Definição 1.22. *Sejam X e Y dois espaços normados tais que $X \subset Y$.*

(a) Dizemos que X está imerso continuamente em Y se a aplicação identidade $id : X \to Y$ for um operador linear contínuo. E denotamos por $X \hookrightarrow Y$.

(b) Dizemos que X está imerso compactamente em Y se a aplicação identidade $id : X \to Y$ for um operador linear compacto.

Definição 1.23. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(X, Y) = \{\varphi : X \to Y : \varphi$ é linear e contínuo $\}$. Definimos o operador $T' : Y' \to X'$ por*

$$T'(\psi)(x) = \psi(T(x)) \text{ para todos } x \in X \text{ e } \psi \in Y'.$$

O operador T' é chamado adjunto de T.

Proposição 1.24. *Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isormorfismo (isométrico), então T' também é um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração: Veja Botelho et al. [[4], Proposição 4.3.11]. ■

Definição 1.25. *Sejam X um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto e $\Phi : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Definimos a derivada de Gateaux de Φ em u na direção φ por*

$$\Phi'(u).\varphi = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u + t\varphi) - \Phi(u)}{t}$$

se este limite existir. Dizemos que Φ é Gateaux diferenciável se existe um funcional $A \in X'$ (dual de X) tal que

$$A.v = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t}, \quad \text{para todo} \quad v \in X.$$

Se Φ é Gateaux diferenciável existe apenas um funcional A satisfazendo a igualdade acima. Este funcional é dito a derivada de Gateaux de Φ em u.

Teorema 1.26. *(Teorema do Mutiplicador de Lagrange) Sejam $F, G : X \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e X um espaço de Banach. Se para $x_0 \in X$ tivermos $G(x_0) = 0$, x_0 extremo local de F quando restrita a $C = \{x \in X : G(x) = 0\}$ e $G'(x_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $F'(x_0)v = \lambda G'(x_0)v$, para todo $v \in X$.*

Demonstração: Veja Kavian [[19], Proposição 14.3]. ∎

1.2 Espaços Funcionais

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços funcionais que serão usados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes consultar Brezis [5] e Biezuner [2]. Nestas definições, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Definição 1.27. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u, que será denotado por* $\operatorname{supp}(u)$, *é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se* $\operatorname{supp}(u)$ *for um compacto do Ω então dizemos que u possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ ao espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto.*

Definição 1.28. *$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.*

Definição 1.29. *O conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem todas as derivadas até a ordem m contínuas em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ, é denotado por $C_0^m(\Omega)$ (ou C_0^∞ se $m = \infty$).*

Usaremos a notação de multi-índice para denotar a derivada parcial

$$D^\gamma f(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} ... \partial x_n^{\gamma_n}}(x),$$

onde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$.

Definição 1.30. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que:*

* $\operatorname{supp} \varphi_\nu \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$,

* *Para cada $\gamma \in \mathbb{N}^n$*

$$D^\gamma \varphi_\nu \to 0 \quad \textit{uniformemente em } K.$$

Definição 1.31. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.32. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω com norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para} \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Para $p = \infty$, denotamos por $L^{\infty}(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráves de u definidas sobre Ω que são essecialmente limitadas com a norma dada por

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess} |u(x)| = \inf \{ C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \ q.t.p. \ em \ \Omega \}.$$

Definição 1.33. *Sejam $1 \leq p < \infty$. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotaremos por $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$ tivermos*

$$\int_K |f_1(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Teorema 1.34 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), f_2 \in L^{p_2}(\Omega), \cdots, f_n \in L^{p_n}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, com $p_1, \cdots, p_n > 1$ e $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$. Então $f_1 \cdot ... \cdot f_n \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f_1 \cdot ... \cdot f_n| \, \mathrm{d}x \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot ... \cdot \|f_n\|_{L^{p_n}}.$$

Demonstração: Veja Brezis [[5], p. 92]. ■

Definição 1.35. *Definimos o espaço $C^m(\overline{\Omega})$ como o espaço das funções reais definidas em Ω cujas derivadas parciais até ordem m (inclusive) são limitadas e uniformemente contínuas (isso garante que elas possuem uma única extensão contínua para $\overline{\Omega}$), isto é,*

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{ f \in C^m(\Omega) : D^{\gamma} f \text{ é limitada e uniformemente contínua em } \Omega, \forall |\gamma| \leq m \}.$$

Temos que $C^m(\overline{\Omega})$ é um espaço normado com a seguinte norma

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma| \leq m} \|D^{\gamma} f\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Definição 1.36. *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente α, se*

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^{\alpha}} < \infty$$

para algum $0 < \alpha \leq 1$. Neste caso denotaremos $f \in C^{\alpha}(\Omega)$, se $\alpha < 1$, e $f \in C^{0,1}$, se $\alpha = 1$. Além disso, denotamos também

$$[f]_{C^{\alpha}(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^{\alpha}}.$$

Em particular, note que se f é Hölder contínua com expoente α em Ω, então

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{C^{\alpha}(\Omega)} \|x - y\|^{\alpha}, \quad \text{para todos } x, y \in \Omega.$$

Claramente, se uma função é Hölder contínua em Ω, então ela é contínua em Ω. Na verdade, ela é uniformemente contínua em Ω, o que motiva o nome de função uniformemente contínua de Hölder em Ω, as vezes usado na literatura. Uma função Hölder contínua com expoente $\alpha = 1$ é uma função Lipschitz contínua.

Definição 1.37. *Os espaços de Hölder $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($C^{m,\alpha}(\Omega)$) são definidos como os subespaços de $C^m(\overline{\Omega})$ ($C^m(\Omega)$) das funções cujas derivadas parciais até a ordem m (inclusive) são todas Hölder contínuas com expoente α em Ω :*

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^m(\overline{\Omega}) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \le m\}.$$

$$C^{m,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^m(\Omega) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \le m\}.$$

Temos que $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço normado com a seguinte norma

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\le m}[D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}.$$

Permitindo $\alpha = 0$, podemos incluir os espaços $C^m(\overline{\Omega})$ ($C^m(\Omega)$) entre os espaços Hölder:

$$C^m(\overline{\Omega}) = C^{m,0}(\overline{\Omega}).$$

$$C^m(\Omega) = C^{m,0}(\Omega).$$

Proposição 1.38. *Os espaços de Hölder $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ são espaços de Banach.*

Demonstração: Veja Biezuner [[2], Teorema 9.5]. ■

Teorema 1.39. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então, para $k \in \mathbb{N}$ e para todos $0 < \alpha < \beta \le 1$ valem as seguintes imersões contínuas:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas e se Ω é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas.

Demonstração: Veja Biezuner [[2], Teorema 9.6]. ■

Definição 1.40. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dizemos que $\partial\Omega$ ou Ω é de classe $C^{k,\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$ se para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma bola $B = B(x_0, r)$ e um difeomorfismo $\psi : B \to U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que:*

$$(i) : \psi(B\cap\Omega) \subset \mathbb{R}^n_+ \quad (ii) : \psi(B\cap\partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+ \quad (iii) : \psi \in C^{k,\alpha}(B), \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(U)$$

onde $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.
Em particular $\alpha = 0$ então dizemos que $\partial\Omega$ ou Ω é de classe C^k. Se Ω é de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$, dizemos que Ω é um domínio limitado e suave.

1.3 Espaços de Sobolev $W^{k,p}$

Vejamos agora, definição e resultados sobre os espaços de Sobolev. Para mais detalhes consultar Brezis [5], Biezuner [2], Gilbarg e Trudinger [15], Medeiros e Miranda [25] e Lions [21].

Definição 1.41. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n, p \geq 1$ e $k \geq 0$ um inteiro. Definimos*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\gamma u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\gamma| \leq k\}.$$

Temos que $W^{k,p}(\Omega)$ é um epaço vetorial, munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \int_\Omega |D^\gamma u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

Definimos ainda

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \text{ fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Teorema 1.42. $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Veja Medeiros e Miranda [[25], Proposição 2.2.3 e Teorema 2.2.1]. ∎

Teorema 1.43. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Então $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach se $1 \leq p < \infty$, e reflexivo se $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Veja Medeiros e Miranda [[25], Proposição 2.2.1 e Teorema 2.2.3]. ∎

Teorema 1.44. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Então $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Veja Gilbarg e Trudinger [[15], Teorema 7.9]. ∎

Definição 1.45. *Se $k < \dfrac{n}{p}$ definimos*

$$p^* = \frac{np}{n - kp}.$$

Proposição 1.46. *(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C > 0$ (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Veja Brezis [[5], Corolário 9.19]. ∎

Teorema 1.47. *(Desigualdade de Interpolação) Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a condição do cone interior. Se $p > 1$, então para qualquer $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $1 \leq |\alpha| \leq k-1$, existe uma constante $C_\varepsilon = C(n, k, p, |\alpha|, \Omega, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|D^k u\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Se substituirmos W por W_0, o resultado é válido para abertos arbitrários.

Demonstração: Veja Biezuner [[2], Teorema 11.59]. ■

Proposição 1.48. *(Desigualdade de Gagliardo - Nirenberg - Sobolev) Seja $1 \leq p < n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Além disso, se existe $1 \leq q \leq \infty$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

é válida para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então necessariamente $q = p^*$.

Demonstração: Veja Brezis [[5], Teorema 9.9]. ■

Definição 1.49. *Considere $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Dizemos que A é uma transformação linear ortogonal se, e somente se,*

$$AA^t = A^t A = I.$$

Denotamos por $\mathcal{O}(n)$ o subespaço das transformações lineares ortogonais.

Definição 1.50. *Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é radialmente simétrica se, e somente se,*

$$u(Ax) = u(x), \quad \forall A \in \mathcal{O}(n) \quad q.t.p. \ em \quad \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.51. *Definimos por $W^{k,p}_{rad}(\mathbb{R}^n)$ sendo o subconjunto de $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ formado pelas funções radialmente simétrica, isto é,*

$$W^{k,p}_{rad}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) : u(Ax) = u(x), \forall A \in \mathcal{O}(n) \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^n \right\}.$$

1.3.1 Imersões Contínuas

Teorema 1.52. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^k, $n \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo $q \in [1, p^*]$ se $kp < n$,*

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, \infty)$ *se* $kp = n$,

(iii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ *se* $kp > n$.

No item (iii) m *é um inteiro satisfazendo* $m < k - \frac{n}{p} < m + 1$ *e* α *um real que satisfazendo* $0 < \alpha \leq k - m - \frac{n}{p} = \alpha_0$ *se* $\alpha_0 < 1$ *e* $0 < \alpha < 1$ *se* $\alpha_0 = 1$.

Demonstração: Veja Medeiros e Miranda [[25], Teorema 2.5.1]. ■

Teorema 1.53. *Sejam* $1 \leq p < \infty$, k *um inteiro positivo. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $q \in [p, p^*]$ *se* $kp < n$,

(ii) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $q \in [p, \infty)$ *se* $kp = n$,

(iii) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *se* $kp > n$.

No item (iii) m *é um inteiro satisfazendo* $m < k - \frac{n}{p} < m + 1$ *e* α *um real que satisfazendo* $0 < \alpha \leq k - m - \frac{n}{p} = \alpha_0$ *se* $\alpha_0 < 1$ *e* $0 < \alpha < 1$ *se* $\alpha_0 = 1$.

Demonstração: Veja Medeiros e Miranda [[25], Corolário 5, Teorema 2.3.2 e Teorema 2.3.3]. ■

1.3.2 Imersões Compactas

Teorema 1.54. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^k, *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, p^*)$ *se* $kp < n$,

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, \infty)$ *se* $kp = n$,

(iii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, *para todo* m *inteiro não negativo* $m < k - \frac{n}{p} \leq m + 1$ *se* $kp > n$.

Demonstração: Veja Medeiros e Miranda [[25], Teorema 2.5.5]. ■

Teorema 1.55. *Sejam* $1 \leq p < \infty$, $n \geq 2$ *e* k *um inteiro positivo. Temos que a seguinte imersão é compacta*

$$W^{k,p}_{rad}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n),$$

para todo $p < q < p^*$ *se* $kp < n$ *e* $p < q < \infty$ *se* $kp \geq n$.

Demonstração: Veja Lions [[21], Teorema II.1]. ■

1.4 Espaços de Sobolev com peso

Nesta seção apresentaremos definições e resultados sobre os espaços de Sobolev com peso. Para mais detalhes consulte Kufner [20] e Cavalheiro [7].

Definição 1.56. *Seja σ um vetor não negativo de funções mensuráveis definidos sobre Ω, isto é,*

$$\sigma = \{\sigma_\gamma = \sigma_\gamma(x), x \in \Omega, |\gamma| \leq k\}.$$

Definimos os espaços de Sobolev com peso σ, sendo o conjunto das funções mensuráveis u definidas em Ω tais que

$$\int_\Omega |D^\gamma u(x)|\sigma_\gamma(x)\mathrm{d}x < \infty, \qquad \textit{para todo} \qquad |\gamma| \leq k,$$

ou seja,

$$W^{k,p}(\Omega, \sigma) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |D^\gamma u(x)|\sigma_\gamma(x)\mathrm{d}x < \infty, |\gamma| \leq k \right\}.$$

Este é um espaço normado, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega,\sigma)} := \left(\sum_{|\gamma|\leq k} \int_\Omega |D^\gamma u(x)|^p \sigma_\gamma(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O vetor σ é chamado de peso.
Se $k = 0$, temos $W^{0,p}(\Omega, \sigma) = L^p(\Omega, \sigma)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \sigma_\gamma(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.57. *Se $\sigma_\gamma = 1$, para todo γ, $|\gamma| \leq k$ então $W^{k,p}(\Omega, \sigma) = W^{k,p}(\Omega)$ e consequentemente, se $k = 0$ temos $L^p(\Omega, \sigma) = L^p(\Omega)$.*

Proposição 1.58. *Se $1 < p < \infty$ e $\sigma_\gamma^{\frac{-1}{(p-1)}} \in L^1_{loc}(\Omega)$ $(|\gamma| \leq k)$, então $W^{k,p}(\Omega, \sigma)$ é um espaço de Banach uniformemente convexo.*

Demonstração: Veja Cavalheiro [[7], pag. 120]. ■

Observação 1.59. *Suponha que todas as componentes do vetor σ coincidem, isto é, $\sigma_\gamma(x) = \sigma(x)$, para todo γ, $|\gamma| \leq k$. Se existem constantes c_1, c_2 tais que*

$$0 < c_1 \leq \sigma(x) \leq c_2, \qquad \textit{para todo} \qquad x \in \Omega,$$

então os espaços de Sobolev com peso coincidem com os espaços de Sobolev clássicos, isto é, $W^{k,p}(\Omega, \sigma) = W^{k,p}(\Omega)$.

No que segue, vamos consider $\sigma_\gamma(x) = |x|^\varepsilon$, para todo γ, $|\gamma| \leq k$. Denotaremos o espaço de Sobolev com o peso $|x|^\varepsilon$ por $W^{k,p}(\Omega, |x|^\varepsilon)$ e se $k = 0$, denotaremos por $L^p(\Omega, |x|^\varepsilon)$.

Lema 1.60. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e ζ, η números reais. Então,*

$$L^p(\Omega, |x|^\zeta) \hookrightarrow L^p(\Omega, |x|^\eta),$$

para $\eta \geq \zeta$.

Demonstração: Como Ω é limitado, temos que a função $|x|^\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$ é limitada. Assim, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|x|^\varepsilon \leq C, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Tome $\varepsilon = \eta - \zeta \geq 0$, daí

$$|x|^\eta \leq C|x|^\zeta, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Multiplicando esta inequação por $|u(x)|^p$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\|u\|_{L^p(\Omega,|x|^\eta)} \leq C^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega,|x|^\zeta)}. \tag{1.2}$$

■

Teorema 1.61. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Então,*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega, |x|^\varepsilon), \quad \textit{se} \quad \varepsilon \geq 0 \tag{1.3}$$

e

$$W^{k,p}(\Omega, |x|^\varepsilon) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega), \quad \textit{se} \quad \varepsilon \leq 0. \tag{1.4}$$

Demonstração: Aplicando a inequação (1.2) com $\eta = \varepsilon \geq 0$ e $\zeta = 0$ em $D^\gamma u$ ($|\gamma| \leq k$), obtemos

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega,|x|^\varepsilon)} \leq C^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega,|x|^0)},$$

assim,

$$W^{k,p}(\Omega, |x|^0) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega, |x|^\varepsilon)$$

e temos

$$W^{k,p}(\Omega, |x|^0) = W^{k,p}(\Omega),$$

o que demonstra (1.3). A prova de (1.4) segue de modo análogo, tomando $\eta = 0$ e $\zeta = \varepsilon \leq 0$. ■

Teorema 1.62. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave limitado que contêm a origem. Dados α, β e p, seja q^* tal que*

$$\frac{n - |\alpha|}{q^* + 1} + \frac{n - |\beta|}{p + 1} = n - 2.$$

Então, temos a seguinte imersão contínua

$$W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}}) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega, |x|^{-\alpha}), \quad \textit{para} \quad 0 \leq q \leq q^*.$$

Além disso, se

$$\frac{n-|\alpha|}{q+1}+\frac{n-|\beta|}{p+1}>n-2, \qquad \textit{isto é} \qquad q<q^*,$$

então a imersão é compacta.

Demonstração: Veja Calanchi e Ruf [[6], Lema 4]. ■

1.5 Um pouco sobre a teoria elíptica

Nesta seção apresentaremos definições e resultados sobre problemas envolvendo operadores elípticos, o qual será definido no que segue. Para mais detalhes consultar Gilbarg e Trudinger [15] e Chen e Li [9].

Escrevemos um operador linear L de segunda ordem da seguinte forma

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}D_{ij}u+\sum_{i=1}^{n}b_iD_iu+cu, \tag{1.5}$$

onde $a_{ij}=a_{ij}(x), b_i=b_i(x), c=c(x), D_{ij}u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}, D_iu=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definição 1.63. *Dizemos que o operador L definido em* (1.5) *é elíptico no ponto $x\in\Omega$ se a matriz dos coeficientes $(a_{ij}(x))$ é positiva, isto é, se $\lambda(x),\Lambda(x)$ denotam respectivamente o autovalor mínimo e máximo de $(a_{ij}(x))$ então*

$$0<\lambda(x)\|\xi\|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\Lambda(x)\|\xi\|^2 \quad \forall x\in\Omega, \xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

onde $\|\xi\|^2=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$.
O operador é dito elíptico em Ω se o for em cada ponto $x\in\Omega$.
Dizemos que o operador L é estritamente elíptico em Ω se existe $\lambda_0>0$ (λ_0 não depende de x) tal que $\lambda\geq\lambda_0>0$.
Além disso, se $\dfrac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω, então L é dito uniformemente elíptico.

Definição 1.64. *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e $x_0\in\partial\Omega$. Diremos que $\partial\Omega$ satifaz a condição da esfera interior em x_0 se existe uma bola $B(0,r)\subset\Omega$, $r>0$, de modo que $x_0\in\partial B(0,r)$.*

Lema 1.65. *(Lema de Hopf) Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto, L um operador uniformemente elíptico e $x_0\in\partial\Omega$ tal que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0, que u é contínua em x_0 e que $u(x_0)>u(x)$ para todo $x\in\Omega$. Suponha que u satisfaz $Lu\geq0$ em Ω, e que pelo menos uma das hipóteses abaixo seja válida:*

(*i*) $c=0$,

(*ii*) $c\leq0$ *e* $u(x_0)\geq0$,

(iii) $u(x_0) = 0$.

Então, se existir a derivada normal em x_0, *ela deve satisfazer*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$$

onde η *denota o vetor normal unitário exterior (apontando para fora) de* $\partial\Omega$.

Demonstração: Veja Gilbarg e Trudinger [[15], Lema 3.4]. ■

Teorema 1.66. *(Princípio do Máximo Forte) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Seja* L *um operador uniformemente elíptico tal que* $c = 0$. *Suponha que* u *satisfaz* $Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$ *em* Ω. *Se* u *atinge o seu máximo (mínimo) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*
Se $c \leq 0$ *e* u *atinge um máximo não-negativo (mínimo não-positivo) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*
Independentemente do sinal de c, *se* u *atinge um máximo igual a* 0 *(mínimo igual a* 0*) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*

Demonstração: Veja Gilbarg e Trudinger [[15], Teorema 3.5]. ■

Corolário 1.67. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Suponha que* u *satisfaz* $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ *em* Ω. *Se* u *atinge o seu máximo (mínimo) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*

Demonstração: Aplicação direta do Princípio do Máximo Forte, uma vez que $L = \Delta$ é um operador uniformemente elíptico com $c = 0$. ■

Teorema 1.68. *(Lema de Hopf refinado) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *uma função não identicamente nula e* $c \in L^\infty(\Omega)$. *Suponhamos que*

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Então:

(i) Se para algum $x_0 \in \partial\Omega$, *temos que* $u(x_0) = 0$ *e* Ω *satisfaz a condição da esfera interior em* x_0, *então*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

onde η *denota o vetor normal unitário exterior (apontando para fora) de* $\partial\Omega$.

(ii) Além disso,

$$u > 0 \text{ em } \Omega.$$

Demonstração: Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in \overline{\Omega}$. Defina a função $w(x) = e^{-\lambda x_1} u(x)$, onde $\lambda > 0$ será determinado posteriormente. Então por (1.6), temos

$$\begin{aligned} -cu \geq \Delta u &= \Delta\left(e^{\lambda x_1} w\right) \\ &= w\Delta\left(e^{\lambda x_1}\right) + e^{\lambda x_1}\Delta(w) + 2\nabla\left(e^{\lambda x_1}\right)\nabla w \\ &= \lambda^2 u + 2\lambda e^{\lambda x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + e^{\lambda x_1}\Delta w. \end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda = \|c\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$ então

$$-\Delta w - 2\lambda\frac{\partial w}{\partial x_1} \geq (\lambda^2 + c)w \geq 0.$$

Logo, pelo Príncipio do Máximo Forte, concluímos que $w > 0$ em Ω.
De fato, suponha que para algum $y_0 \in \Omega$ obtemos $w(y_0) = 0$. Como $e^{-\lambda x_1} > 0$, devemos ter $u(y_0) = 0$. Sabemos que $w \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, então y_0 é um ponto de mínimo para w. Portanto, pelo Princípio do Máximo Forte $w = 0$ em Ω. Pela continuidade de w em $\overline{\Omega}$, devemos ter $w = 0$ em $\overline{\Omega}$, o que implica $u = 0$ em $\overline{\Omega}$, o que é uma contradição, pois por hipótese u é uma função não identicamente nula. Logo $w > 0$ em Ω.
Por hipótese, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $w(x_0) = 0$ e $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0. Como $w > 0$ em Ω, temos que $w(x_0) < w(x)$ para todo $x \in \Omega$. Dessa forma, pelo Lema de Hopf, temos

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) < 0.$$

Como $u(x_0) = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) &= \nabla w(x_0) \cdot \eta(x_0) \\ &= \left(-\lambda e^{-\lambda x_1} u(x_0) + e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0), e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_0), ..., e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0)\right) \cdot \eta(x_0) \\ &= e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0), \end{aligned}$$

e daí,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

o que demostra (i).
Agora, como $w > 0$ em Ω, obtemos que

$$u > 0 \text{ em } \Omega$$

o que demonstra (ii). ∎

Teorema 1.69. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com fronteira suave. Seja $u \in$*

$C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *uma função não negativa, tal que*

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}.$$

Se $u \neq 0$ *em* Ω, *então em* $\partial\Omega$, *a derivada normal exterior*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$$

onde η *denota o vetor normal unitário exterior (apontando para fora) de* $\partial\Omega$.

Demonstração: Veja Chen e Li [[9], Teorema 7.3.3]. ∎

Teorema 1.70. *(Princípio do máximo para domínios estreitos) Seja* ϕ *uma função positiva em* $\overline{\Omega}$, *tal que*

$$-\Delta\phi + \lambda(x)\phi \geq 0.$$

Suponha que u *satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u \geq 0 & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde c *é uma função limitada. Sendo* $|\Omega|$ *suficientemente pequeno, se* $c(x) > \lambda(x)$, *então* $u \geq 0$ *em* Ω.

Demonstração: Veja Chen e Li [[9], Corolário 7.4.1]. ∎

Teorema 1.71. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio* $C^{1,1}$ *e seja* L *um operador de segunda ordem estritamente elíptico em* Ω *com coeficientes* $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}), b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ *para todos* $i, j = 1, ..., n$ *e* $c \leq 0$. *Então existe uma constante* C *(independente de* u*) tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|Lu\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), 1 < p < \infty$.

Demonstração: Veja Gilbarg e Trudinger [[15], Lema 9.17]. ∎

Teorema 1.72. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio de classe* $C^{1,1}$ *e* L *um operador estritamente elíptico em* Ω *com coeficientes* $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}), b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, *com* $i, j = 1, ..., n$ *e* $c \leq 0$. *Então, se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, *com* $1 < p < \infty$, *o problema de Dirichlet* $Lu = f$ *em* Ω, $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tem uma única solução* $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Demonstração: Veja Gilbarg e Trudinger [[15], Teorema 9.15]. ∎

Teorema 1.73. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado e suave e* $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Suponha que* $a \in L^\infty(\Omega), a \geq 0$. *Então existe uma única solução* *forte* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$ *do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ *independente de* u *e* f *tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Consequência direta dos Teoremas 1.71 e 1.72. ∎

Teorema 1.74. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* L *um operador estritamente elíptico em* Ω *com coeficientes* $a_{ij}, b_i, c \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$, *com* $i, j = 1, ..., n$ *e* $c \leq 0$. *Então, se* $f \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$ *e* $0 < \alpha < 1$, *e* $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *é solução forte do problema*

$$Lu = f \ em \ \Omega.$$

Então, $u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$.
Além disso, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto de classe* $C^{k+1,\alpha}$, L *um operador estritamente elíptico em* Ω *com coeficientes* $a_{ij}, b_i, c \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $f \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Veja Gilbarg e Trudinger [[15], Teorema 9.19]. ∎

Definição 1.75. *(Notação o pequena de Landau) Sejam* f, g *funções reais, definidas num mesmo subconjunto de* $\mathbb{R}$, *escrevemos*

$$f = o(g) \quad quando \quad x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Observação 1.76. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e defina* $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$. *Suponhamos que* f *e* F *satisfazem a condição (f1), então existem constantes* $c, d_1 > 0$ *tais que*

$$F(s) \geq c|s|^\theta - d_1.$$

Para prova de tal fato, veja Jabri [[18], Observação 7.5].

1.6 Simetrização de Schwarz

Nesta seção, vamos definir e exibir alguns resultados sobre a teoria da simetrização de Schwarz. Para mais detalhes consultar Talenti [32] e Alvino et al. [1].

Definição 1.77. *(Função Distribuição) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{u > t\}$ é definido por*

$$\{u > t\} = \{x \in \Omega : u(x) > t\},$$

a função distribuição de u é dada por

$$\mu_u(t) = |\{u > t\}|.$$

Essa função é não crescente e $Im(\mu_u) = [0, |\Omega|]$.

Definição 1.78. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. O rearranjamento decrescente (unidimensional) de u, denotado por $u^{\#}$, é definido sobre Ω por*

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} ess.sup(u) & se \;\; s = 0, \\ \inf\{t : \mu_u(t) < s\} & se \;\; s > 0. \end{cases}$$

Observação 1.79. (i) *Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $u^{\#}$ é não crescente e contínua à esquerda.*

(ii) *O mapeamento $u \longmapsto u^{\#}$ é não decrescente, isto é, se $u \leq v$, onde u e v são funções com valores reais sobre Ω, então $u^{\#} \leq v^{\#}$.*

Definição 1.80. *Duas funções com valores reais são ditas equimensuráveis, se elas têm a mesma função distribuição. Além disso, funções equimensuráveis são ditas o rearranjamento uma da outra.*

Observação 1.81. *As funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $u^{\#} : [0, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ são equimensuráveis. Consequentemente, se $u \geq 0$ e $u \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, então $u^{\#} \in L^p((0, |\Omega|))$.*

Definição 1.82. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e B a bola centrada na origem com o mesmo volume de Ω, isto é, $|B| = |\Omega|$. A simetrização de Schwarz u^* de u é a função $u^* : B \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u^*(x) = u^{\#}(\omega_n |x|^n), x \in B$$

onde ω_n é a medida da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Observe que, se R é o raio de B, então

$$\begin{aligned} \int_B u^*(x)\mathrm{d}x &= \int_B u^{\#}(\omega_n |x|^n)\mathrm{d}x = \int_0^R u^{\#}(\omega_n r^n) n\omega_n r^{n-1} dr \\ &= \int_0^{|B|} u^{\#}(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{|\Omega|} u^{\#}(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Observação 1.83. (i) *u^* é radialmente simétrica com decrescimento radial,* *(ii)* $u, u^{\#}$ *e* u^* *são equimensuráveis,*

(iii) $u \longmapsto u^*$ *é um mapa não expansivo (lipschitziano com constante de Lipchitz igual a 1) de* $L^p(\Omega)$ *em* $L^p(B)$*, para* $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.84. *Seja o operador diferencial*

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(.)\right) + c(.)$$

e assuma que ele satisfaz

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \geq \xi_1^2 + ... + \xi_n^2, \quad c(x) \geq 0.$$

Sejam B *a bola em* $\mathbb{R}^n$ *centrada na origem com mesmo volume de* Ω, u *solução fraca de*

$$\begin{cases} -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}u\right) + c(x)u = f(x) & em \quad \Omega \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}.$$

onde $f \in L^p(\Omega)$, $p = \frac{2n}{n+2}$ *e* w *é solução fraca do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta w = f^* & em \quad B \\ w = 0 & sobre \quad \partial B \end{cases}.$$

Então $w \geq u^*$ *q.t.p. em* B*. Logo,*

$$\sup\operatorname{ess} w \geq \sup\operatorname{ess}|u|,$$

donde

$$\int_B w^q \mathrm{d}x \geq \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \quad \forall q > 0.$$

Demonstração: Veja Talenti [[32], Teorema 1]. ∎

Corolário 1.85. *Sejam* $B_R(0)$ *a bola aberta de raio* R *centrada na origem em* $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{B_R(0)})$, $f \geq 0$ *e* u, w *satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \quad B_R(0) \\ u = 0 & sobre \quad \partial B_R(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta w = f^* & em \quad B_R(0) \\ w = 0 & sobre \quad \partial B_R(0) \end{cases}.$$

Então $u^* \leq w$ *q.t.p em* $B_R(0)$ *e*

$$\|u^*\|_{L^{q+1}(B_R(0))} \leq \|w\|_{L^{q+1}(B_R(0))}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$-\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

daí $a_{ik} = \delta_{ik}$. Logo,

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\xi_i = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2.$$

Assim, $-\Delta$ é um operador que satifaz as condições do Teorema 1.84.
Além disso, temos que $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in L^p(B_R(0)), \forall p > 0$, uma vez que por hipótese $f \in C(\overline{B_R(0)})$. Assim, estamos nas hipóteses do Teorema 1.84. Portanto, pelo Teorema 1.84, temos que $u^* \leq w$ q.t.p. em $B_R(0)$ e

$$\int_{B_R(0)} |u^*|^{q+1}\mathrm{d}x \leq \int_{B_R(0)} |w|^{q+1}\mathrm{d}x$$

donde, obtemos

$$\|u^*\|_{L^{q+1}(B_R(0))} \leq \|w\|_{L^{q+1}(B_R(0))}.$$

■

Teorema 1.86. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta centrada na origem, tal que $|B| = |\Omega|$. Sejam $p, q > 0$ tais que $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} \geq 1 - \dfrac{2}{n}$. Considere f suave e sejam u e w soluções fortes de*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta w + w = |f|^* & \text{em } B \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B \end{cases}.$$

Então,

$$u^*(s) \leq w^*(s), \quad \forall s \in B.$$

Demonstração: Veja Alvino et al. [[1], Teorema 1]. ■

1.7 Os Espaços $\mathcal{D}^{k,p}$

Nessa seção apresentaremos uma breve introdução dos espaços $\mathcal{D}^{k,p}(\Omega)$, de importância fundamental para o estudo de EDP's em domínios ilimitados. Para mais detalhes, consultar Biezuner [2].

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $p > 1$, o espaço $\mathcal{D}^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ sob a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por conveniência, denotaremos

$$|D^k u|^p = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p.$$

Em vista da Desigualdade de Poincaré e da Desigualdade de Interpolação, se Ω é um aberto limitado, então $\mathcal{D}^{k,p}(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)$. Por outro lado, $\mathcal{D}^{k,p}(\mathbb{R}^n) \neq W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. De fato, para o caso $k = 1$, por exemplo, temos pela Desigualdade de Gagliardo - Nirenberg - Sobolev que a norma

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ não pode ser equivalente à seminorma $\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Temos a seguinte caracterização para os espaços $\mathcal{D}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.87. *Se* $k < \dfrac{n}{p}$ *e* $p > 1$, *então*

$$\mathcal{D}^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{p*}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } |\alpha| = k\},$$

com $p^* = \dfrac{np}{n-kp}$. *Além disso,*

$$\mathcal{D}^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Veja Biezuner [[2], Proposição 11.68]. ■

Proposição 1.88. *Sejam* p, q *números positivos satisfazendo* $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{n-2}{n}$, *então*

$$\mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{p+1}(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^{\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n) : \Delta v \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso,

$$\mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Basta verificarmos as hipóteses da Proposição 1.87. Faremos isso somente para $\mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$, pois para $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ o procedimento é análogo. Temos que $\frac{q+1}{q} > 1$. De $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{n-2}{n}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{n-2}{n} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{p+1} = \frac{n-2}{n} - \frac{1}{q+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} = \frac{qn-2q-2}{n(q+1)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{p+1} = \frac{n - 2(\frac{q+1}{q})}{n(\frac{q+1}{q})}. \end{aligned}$$

Logo,

$$p + 1 = \frac{n(\frac{q+1}{q})}{n - 2(\frac{q+1}{q})} = \left(\frac{q+1}{q}\right)^*.$$

Resta mostrarmos que $2 < \dfrac{n}{\frac{q+1}{q}}$. Com efeito, se $n > 2(\frac{q+1}{q})$, o resultado é óbvio.
Suponhamos que

$$2 < n \leq 2\left(\frac{q+1}{q}\right).$$

Daí,

$$0 < n-2 \leq 2\left(\frac{q+1}{q}\right) - 2 \Leftrightarrow 0 < n-2 \leq \frac{1}{q}.$$

Assim,

$$q \leq \frac{1}{n-2} < \frac{2}{n-2}.$$

Um absurdo, pois $q = \frac{2}{n-2}$ é uma assíntota da hipérbole crítica dada por $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{n-2}{n}$ que está acima da reta $q = \frac{2}{n-2}$, ou seja $q > \frac{2}{n-2}$. ∎

Lema 1.89. *Se $1 < r < \infty$, então $-\Delta : \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Pela própria definição do espaço $\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n)$ temos que o operador $-\Delta$ está bem definido e é claro que $-\Delta$ é linear. Agora, dado $u \in \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|\Delta(u)\|_r = \|u\|_{\mathcal{D}^{2,r}}.$$

Logo, $-\Delta$ é uma isométia. Além disso temos que $-\Delta$ é injetora, pois

$$-\Delta u = 0 \Leftrightarrow \|\Delta u\|_r = 0 \Leftrightarrow \|u\|_{\mathcal{D}^{2,r}} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Para mostrar que $-\Delta$ é sobrejetiva, basta mostrar que $-\Delta\left(\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n)\right)$ é denso em $L^r(\mathbb{R}^n)$.
Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^r(\mathbb{R}^n)$ é suficiente mostrar que

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset -\Delta\left(\mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n)\right)$$

ou seja, dada uma função $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ existe $u \in \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Mas, sabemos que isso é sempre verdade.
Portanto $-\Delta : \mathcal{D}^{2,r}(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo isométrico. ∎

1.8 O Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, apresentaremos um teorema devido a Rabinowitz [29], denominado Teorema do Passo da Montanha.

Definição 1.90. *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale, denotada por (PS) se qualquer sequência $(u_k)_{k=1}^\infty \subset X$ tal que*

$$(\Phi(u_k))_{k=1}^\infty \ \textit{é limitada e } \Phi'(u_k) \longrightarrow 0,$$

admite subsequência convergente.

Teorema 1.91. *(Teorema do Passo da Montanha) Sejam X um espaço de Banach, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e satisfazendo (PS). Suponha que existe $x_1 \in X$, tal que $||x_1|| > \rho > 0$ e*

$$\alpha = \max\{\Phi(0), \Phi(x_1)\} < \inf_{||x||=\rho} \Phi(x) = \beta.$$

Então, Φ possui um valor crítico $c \geq \beta$ caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Upsilon} \max_{x \in \gamma([0,1])} \Phi(x)$$

com

$$\Upsilon = \{\gamma \in C([0,1]; X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = x_1\}.$$

Capítulo 2

O sistema em domínio limitado

2.1 Introdução

Neste capítulo, provamos a existência de solução clássica do problema

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \Omega, \\ Lv = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $Lu = -\Delta u$ ou $Lu = -\Delta u + u$ e p, q satisfazem

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}. \tag{$H1$}$$

Definição 2.1. *Dizemos que o par (u, v) é solução clássica do problema (P_1) se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ e satisfazem o problema (P_1).*

Definição 2.2. *Dizemos que (u, v) é solução forte do problema (P_1) se $u \in E_p = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, $v \in E_q = W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ e (u, v) satisfazem (P_1) q.t.p em Ω.*

Definição 2.3. *Dizemos que o par $(u, v) \in E_p \times E_q$ é solução fraca do problema (P_1), se u e v satisfazem:*

$$\begin{cases} \langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in E_q = W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q+1}{q}}(\Omega), \\ \langle v, \psi \rangle = \int_\Omega |u|^{q-1} u\psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in E_p = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega), \end{cases}$$

onde $\langle \mu, \nu \rangle = \int_\Omega \nabla\mu\nabla\nu \mathrm{d}x$ se $L = -\Delta$ e $\langle \mu, \nu \rangle = \int_\Omega (\nabla\mu\nabla\nu + \mu\nu)\mathrm{d}x$ se $L = -\Delta + I$.

Observação 2.4. *Seja $(u, v) \in E_p \times E_q$ uma solução fraca do problema (P_1), então*

$$\int_\Omega v^{p+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega v(Lu)\mathrm{d}x = \langle u, v \rangle = \int_\Omega u(Lv)\mathrm{d}x = \int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x$$

onde $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x$ *se* $L = -\Delta$ *e* $\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\mathrm{d}x$ *se* $L = -\Delta + I$. *De fato, pela definição* 2.3 *temos que*

$$\begin{cases} \langle u, \varphi\rangle = \int_\Omega |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in E_q, \\ \langle v, \psi\rangle = \int_\Omega |u|^{q-1} u\psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in E_p. \end{cases}$$

Em particular, tomando $\varphi = v \in E_q$ *na primeira equação, obtemos*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega v(Lu)\mathrm{d}x$$

e tomando $\psi = u \in E_p$ *na segunda equação, temos*

$$\langle v, u\rangle = \int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega u(Lv)\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_\Omega v^{p+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega v(Lu)\mathrm{d}x = \langle u, v\rangle = \int_\Omega u(Lv)\mathrm{d}x = \int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x.$$

Considere o funcional $\Psi \in C^1(E_p \times E_q, \mathbb{R})$ dado por

$$\Psi(u, v) = \langle u, v\rangle - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

onde $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x$ se $L = -\Delta$ e $\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\mathrm{d}x$ se $L = -\Delta + I$.

A derivada de Gateaux de Ψ em (u, v) na direção de (ψ, φ) é dada por

$$\Psi'(u, v)(\psi, \varphi) = \langle \psi, v\rangle + \langle u, \varphi\rangle - \int_\Omega |u|^{q-1} u\psi \mathrm{d}x - \int_\Omega |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que se (u, v) é solução fraca do problema (P_1) então (u, v) é um ponto crítico do funcional Ψ.

Definição 2.5. *Assumindo* $(H1)$ *e* $pq \neq 1$, *dizemos que o par* $(u, v) \in E_p \backslash \{0\} \times E_q \backslash \{0\}$ *é solução Ground State do problema* (P_1) *se* (u, v) *é solução fraca de* (P_1) *e atinge o menor valor crítico não nulo do funcional* Ψ.

Neste trabalho, vamos mostrar que o problema (P_1) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} L\left(|Lu|^{\frac{1}{p}-1} Lu\right) = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = Lu = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\widetilde{P_1})$$

no sentido que soluções fracas de $(\widetilde{P_1})$ correspondem a soluções clássicas do problema (P_1).

Para trabalhar com o Problema $(\widetilde{P_1})$, usamos o espaço $E_p = W^{2, \frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap$

$W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{E_p} := \left(\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} = \|Lu\|_{\frac{p+1}{p}}, \quad u \in E_p.$$

Definição 2.6. *Dizemos que $u \in E_p$ é uma solução fraca de $(\widetilde{P_1})$ se*

$$\int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_p.$$

Considere o seguinte funcional $\Phi \in C^1(E_p, \mathbb{R})$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

A derivada de Gateaux de Φ em u na direção de ψ é dada por

$$\Phi'(u)\psi = \int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que u é solução fraca de $(\widetilde{P_1})$ se, e somente se u é um ponto crítico do funcional Φ.

Definição 2.7. *Assumindo $(H1)$ e $pq \neq 1$, dizemos que $u \in E_p \backslash \{0\}$ é solução de Ground State de $(\widetilde{P_1})$ se Φ atingi seu menor valor crítico não nulo em u.*

No restante deste capítulo, estaremos trabalhando na equação $(\widetilde{P_1})$ ou no problema (P_1), sendo assim assumiremos $(H1)$, $pq \neq 1$ e que Ω é um domínio suave limitado.

Uma condição necessária para u ser ponto crítico de Φ é que $\Phi'(u)u = 0$. Assim, definimos a variedade de Nehari associado ao funcional Φ, dado por

$$\mathcal{N}_\Phi := \{u \in E_p \backslash \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

Consideremos os problemas de minimização

$$\mathcal{C}_\Phi := \inf_{u \in \mathcal{N}_\Phi} \Phi(u) \tag{2.1}$$

e

$$\alpha_{p,q} := \inf\left\{\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x : u \in E_p, \|u\|_{q+1}^{q+1} = 1\right\}, \tag{2.2}$$

onde $\|u\|_{q+1}^{q+1} = \int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x$.

Veremos na próxima seção que $\alpha_{p,q}$ e $\mathcal{C}_\Phi$ são atingidas e que isto nos permite concluir que existe solução Ground State do problema (P_1).

2.2 Existência de solução

Nesta seção, vamos mostrar a existência de solução Ground State do problema (P_1) a partir da existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$.

2.2.1 Relações entre as constantes $\alpha_{p,q}$ e $\mathcal{C}_\Phi$

Vejamos alguns resultados que relacionam as constantes $\mathcal{C}_\Phi$ e $\alpha_{p,q}$.

Lema 2.8. *Dado $u \in E_p \backslash \{0\}$, existe único $t = t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}_\Phi$, a saber*

$$t(u) = \left(\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}}.$$

Demonstração: Vejamos primeiramente que $t(u)u \in \mathcal{N}_\Phi$,

$$\begin{aligned}
\Phi'(t(u)u).t(u)u &= \int_\Omega |L(t(u)u)|^{\frac{p+1}{p}} dx - \int_\Omega |t(u)u|^{q+1} dx \\
&= |t(u)|^{\frac{p+1}{p}} \int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}} dx - |t(u)|^{q+1} \int_\Omega |u|^{q+1} dx \\
&= \left(\left(\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}} \right)^{\frac{p+1}{p}} \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \left(\left(\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}} \right)^{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&= \left(\frac{\|u\|_{E_p}}{\|u\|_{q+1}} \right)^{\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}} - \left(\frac{\|u\|_{E_p}}{\|u\|_{q+1}} \right)^{\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $t(u)u \in \mathcal{N}_\Phi$.
Agora, seja $C > 0$ tal que $Cu \in \mathcal{N}_\Phi$, então $\Phi'(Cu).Cu = 0$, daí

$$\begin{aligned}
\Phi'(Cu).Cu = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega |L(Cu)|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x = \int_\Omega |Cu|^{q+1} \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad C^{\frac{p+1}{p}} \int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x = C^{q+1} \int_\Omega |u|^{q+1} \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad C^{\frac{p+1}{p}} \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} = C^{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&\Leftrightarrow \quad C^{\frac{pq-1}{p}} = \frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \\
&\Leftrightarrow \quad C = \left(\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, das equivalências acima, temos a unicidade de $t(u)$. ∎

Lema 2.9. *Seja $u \in \mathcal{N}_\Phi$, então*

(i) $\Phi(u) = \dfrac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}$,

(ii) $\dfrac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\dfrac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}$.

Demonstração: Note que se $u \in \mathcal{N}_\Phi$ então $\Phi'(u)u = 0$, daí

$$\begin{aligned}
\Phi'(u)u &= \int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}dx - \int_\Omega |u|^{q+1}dx = 0 \\
&\Leftrightarrow \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \|u\|_{q+1}^{q+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} = \|u\|_{q+1}^{q+1}.
\end{aligned}$$

(i) : Usando a igualdade obtida acima, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&= \frac{p}{p+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \\
&= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a prova de (i).
(ii) : Temos

$$\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{E_p}^{(\frac{p+1}{p})^2\cdot\frac{1}{q+1}}} = \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}\left(1-\frac{p+1}{p(q+1)}\right)} = \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}(\frac{pq-1}{p(q+1)})}.$$

Agora, usando (i) temos que

$$\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} = \frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi(u).$$

Portanto,

$$\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}.$$

■

Lema 2.10. *Os problemas de minimização* (2.1) *e* (2.2) *são equivalentes no sentido de:*

(i) *Dada uma sequência de minimização* $(u_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{N}_\Phi$ *de* (2.1), *temos que* $(\|u_k\|_{q+1}^{-1}u_k)_{k=1}^\infty$ *é uma sequência de minimização de* (2.2).

(*ii*) *Dada uma sequência de minimização* $(\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *de* (2.2), *temos que* $(\|\overline{u}_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k)_k^{\infty}$ *é uma sequência de minimização de* (2.1).

(*iii*) *Temos a igualdade:*

$$\mathcal{C}_{\Phi} = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\alpha_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}}$$

(*iv*) *A constante* $\alpha_{p,q}$ *é atingida se, e somente se,* $\mathcal{C}_{\Phi}$ *é atingido. Além disso, se* $\overline{u}$ *é solução de* (2.2), *então* $\|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u} = \alpha_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}$ *é solução de* (2.1), *e por outro lado, se* u *é solução de* (2.1), *então* $\|u\|_{q+1}^{-1}u$ *é solução de* (2.2).

Demonstração: Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_{\Phi}$ uma sequência de minimização de (2.1), então pelo Lema 2.9 (*ii*) temos

$$\begin{aligned} \alpha_{p,q} &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\|u_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u_k\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi(u_k)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} \qquad (2.3)\\ &= \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\mathcal{C}_{\Phi}\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $(\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de minimização de (2.2), então pelo Lema 2.8, temos que $(\|\overline{u}_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_{\Phi}$ e pelo Lema 2.9 (*i*) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Phi} &\leq \lim_{k\to\infty}\Phi(\|\overline{u}_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k) = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\lim_{k\to\infty}\|\overline{u}_k\|_{E_p}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}\cdot\frac{p+1}{p}} \qquad (2.4)\\ &= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\alpha_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}}. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.3) e (2.4), obtemos a prova de $(i), (ii)$ e (iii).
Agora, suponha que $\overline{u} \in E_p$ é tal que $\|\overline{u}\|_{q+1} = 1$ e $\alpha_{p,q} = \|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}$, então pelo Lema 2.8 temos que $\|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u} = \alpha_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u} \in \mathcal{N}_{\Phi}$. Assim, para cada $u \in \mathcal{N}_{\Phi}$, temos pelo Lema 2.9 (*ii*) que

$$\begin{aligned} \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi\left(\alpha_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}\right)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} = \\ = \alpha_{p,q} \leq \frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}, \end{aligned}$$

daí, $\Phi\left(\alpha_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}\right) \leq \Phi(u), \forall u \in \mathcal{N}_{\Phi}$. Portanto, $\Phi\left(\alpha_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}\right) = \mathcal{C}_{\Phi}$.
Por outro lado, suponha $u \in \mathcal{N}_{\Phi}$ tal que $\Phi(u) = \mathcal{C}_{\Phi}$, então pelo Lema 2.9 (*ii*) e pelo item (*iii*) já provado, temos

$$\frac{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\Phi(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\mathcal{C}_{\Phi}\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \alpha_{p,q}.$$

E, portanto, temos a prova de (iv). ■

2.2.2 Existência de solução Ground State

Apresentaremos aqui a prova da existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$, e a partir desta mostraremos a existência de solução Ground State do problema (P_1).

Teorema 2.11. *A constante $\alpha_{p,q}$ é atingida, isto é, existe $u \in E_p$ tal que $\|u\|_{q+1} = 1$ e $\alpha_{p,q} = \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}$.*

Demonstração: Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset E_p$ uma sequência tal que $\|u_k\|_{q+1} = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\|u_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \longrightarrow \alpha_{p,q}$. Como, E_p é reflexivo, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em E_p. Agora, como Ω é um domínio limitado, temos que a imersão $E_p \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é compacta, daí obtemos que $u_{k_j} \longrightarrow u$ em $L^{q+1}(\Omega)$. Logo, $\|u\|_{q+1} = 1$.
Assim,

$$\alpha_{p,q} \leq \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_{k_j}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} = \alpha_{p,q}.$$

Portanto,

$$\alpha_{p,q} = \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}.$$

■

Lema 2.12. *Seja $u \in \mathcal{N}_\Phi$ tal que $\Phi(u) = \mathcal{C}_\Phi$, então u é solução Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$. Reciprocamente, se u é Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$, então $u \in \mathcal{N}_\Phi$ e $\Phi(u) = \mathcal{C}_\Phi$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Basta mostrar que u é solução fraca do problema $(\widetilde{P_1})$. Seja $G(u) = \Phi'(u)u = \int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x$. Então

$$G'(u)\psi = \frac{p+1}{p}\int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - (q+1)\int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x.$$

Assim, para $u \in \mathcal{N}_\Phi$, temos

$$\begin{aligned} G'(u)u &= \frac{p+1}{p}\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - (q+1)\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p+1}{p}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - (q+1)\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \\ &= \frac{1-pq}{p}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange (Teorema 1.26), existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(u)\psi = \lambda G'(u)\psi, \quad \forall \psi \in E_p.$$

Suponha que $\lambda \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
\Phi'(u)\psi &= \int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x \\
&= \lambda\left(\frac{p+1}{p}\int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - (q+1)\int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x\right) \\
&= \lambda G'(u)\psi.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\lambda = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{q+1}.$$

Porém,

$$\frac{p}{p+1} = \frac{1}{q+1} \Leftrightarrow p(q+1) = p+1 \Leftrightarrow pq+p = p+1 \Leftrightarrow pq = 1 \quad \text{absurdo!.}$$

Portanto $\lambda = 0$ e

$$\Phi'(u)\psi = 0, \quad \forall \psi \in E_p,$$

isto é, u é solução fraca do problema $(\widetilde{P_1})$.

($\Leftarrow$) Pelo Teorema 2.11, existe $\overline{u} \in E_p$ tal que $\|\overline{u}\|_{q+1} = 1$ e $\alpha_{p,q} = \|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}$. Agora, pelo Lema 2.10 (iv), $u = \alpha_{p,q}\overline{u}$ é solução de (2.1), isto é, $u \in \mathcal{N}_\Phi$ e $\Phi(u) = \mathcal{C}_\Phi$. ■

Teorema 2.13. *Sejam p, q tais que $pq \neq 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Então o problema $(\widetilde{P_1})$ tem uma solução de Ground State.*

Demonstração: Pelo Lema 2.12 basta mostrar que $\mathcal{C}_\Phi$ é atingido. Agora, pelo Lema 2.10 (iv) basta mostrar que a constante $\alpha_{p,q}$ é atingida, o que é garantido pelo Teorema 2.11. ■

Uma vez, mostrada a existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$, vamos mostrar também a existência de solução Ground State do problema (P_1).

Proposição 2.14. *Seja $u \in E_p$ uma solução fraca do problema $(\widetilde{P_1})$. Então $(u, v) \in E_p \times E_q$ é solução fraca do problema (P_1), onde $v = |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$.*

Demonstração: Como u é solução fraca de $(\widetilde{P_1})$, temos

$$\int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_p.$$

Como $v = |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$, segue

$$\int_\Omega vL\psi\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_p.$$

Pela Observação 2.4, obtemos

$$\langle v, \psi \rangle = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_p. \tag{2.5}$$

Agora, para todo $\varphi \in E_q$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x &= \int_\Omega \left| |Lu|^{\frac{1}{p}-1} Lu \right|^{p-1} |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)\varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |Lu|^{\frac{-(p-1)^2}{p}+p-1+\frac{1-p}{p}}(Lu)\varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (Lu)\varphi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Novamente pela Observação 2.4, obtemos

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in E_q. \tag{2.6}$$

Portanto, de (2.5) e (2.6), temos a prova. ■

Teorema 2.15. *Seja $u \in E_p$ uma solução Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$ e defina $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$, então o par (u, v) é solução Ground State do problema (P_1).*

Demonstração: Temos que $v \in E_q \backslash \{0\}$. Mostremos que (u, v) é um ponto crítico do funcional Ψ. Temos

$$\Psi'(u,v)(\psi,\varphi) = \langle \psi, v\rangle + \langle u, \varphi\rangle - \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi \mathrm{d}x - \int_\Omega |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x.$$

Pela Proposição 2.14 temos que (u, v) é solução fraca do problema (P_1), daí

$$\Psi'(u,v)(\psi,\varphi) = 0, \quad \forall (\psi,\varphi) \in E_p \times E_q.$$

Logo, (u, v) é ponto crítico de $\Psi(u, v)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}\Psi(u,v) &= \langle u, v\rangle - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &= \langle u, v\rangle - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega |v|^{p+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |v|^{p-1}vv\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega (Lu)v\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega (Lu)|Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \Phi(u).\end{aligned}$$

Portanto, da igualdade $\Psi(u, v) = \Phi(u)$, concluímos que (u, v) atinge o menor valor crítico não nulo de Ψ, uma vez que u atinge o menor valor crítico não nulo de Φ. ■

2.3 Existência de solução pelo Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, apresentaremos a existência de solução Ground State do problema (P_1) com $L = -\Delta$ aplicando o Teorema do Passo da Montanha.

Teorema 2.16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, com $n \geq 3$. Se $pq < 1$ então o problema (P_1) com $L = -\Delta$ tem solução Ground State.*

Demonstração: Devido ao Teorema 2.15, basta mostrar que o problema $(\widetilde{P_1})$ com $L = -\Delta$ e $pq < 1$ tem solução Ground State.

A prova segue aplicando método de minimização direta ao funcional Φ em E_p.

Primeiramente, vamos mostrar que Φ e coercivo, isto é, $\|\Phi(u)\| \to +\infty$ quando $\|u\|_{E_p} \to +\infty$.
Note que, $q+1 < \dfrac{1}{p}+1 = \dfrac{p+1}{p}$, desde que $pq < 1$. Daí, a imersão $E_p \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é contínua.
Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \leq C\|u\|_{E_p}^{q+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&\geq \frac{p}{p+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{C}{q+1}\|u\|_{E_p}^{q+1} \\
&= \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}\left(\frac{p}{p+1} - \frac{C}{q+1}\|u\|_{E_p}^{q+1-\frac{p+1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

para todo $u \in E_p$.
Como $q+1 < \dfrac{p+1}{p}$, obtemos que $\Phi(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_{E_p} \to +\infty$.
Portanto, Φ é coercivo e limitado inferiormente.

Seja $(u_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de minimização de Φ. Daí, $(\Phi(u_k))_{k=1}^\infty$ é limitada e portanto $(u_k)_{k=1}^\infty$ é limitada, pois Φ é coercivo.
Assim, $(u_k)_{k=1}^\infty$ é limitada em E_p, o qual é reflexivo. Passando a subsequência se necessário temos que existe $u_0 \in E_p$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad E_p.$$

Agora, a imersão $E_p \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é compacta, pois Ω é limitado, donde

$$u_k \to u_0 \quad \text{em} \quad L^{q+1}(\Omega).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \Phi(u_k) &= \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} \|u_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} \right) - \frac{1}{q+1} \|u_0\|_{q+1}^{q+1} \\
&\geq \frac{p}{p+1} \|u_0\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1} \|u_0\|_{q+1}^{q+1} \\
&= \Phi(u_0),
\end{aligned}$$

e daí u_0 é mínimo de Φ em E_p.
Resta mostrarmos que $u_0 \neq 0$.
Sejam $u_1 \in E_p$ não zero e não negativo e $\varepsilon > 0$ pequeno suficiente, tal que

$$\varepsilon^{\frac{p+1}{p} - (q+1)} < \frac{p+1}{p(q+1)} \frac{\|u_1\|_{q+1}^{q+1}}{\|u_1\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}.$$

Então,

$$\Phi(\varepsilon u_1) = \frac{p\varepsilon^{\frac{p+1}{p}}}{p+1} \|u_1\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{\varepsilon^{q+1}}{q+1} \|u_1\|_{q+1}^{q+1} < 0.$$

Portanto, $u_0 \neq 0$, já que,

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(\varepsilon u_1) < 0 = \Phi(0).$$

■

Teorema 2.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, com $n \geq 3$. Se $pq > 1$ e $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}$ então o problema (P_1) com $L = -\Delta$ tem solução Ground State.*

Demonstração: Devido ao Teorema 2.15, basta mostrar que o problema $(\widetilde{P_1})$ com $L = -\Delta$, $pq > 1$ e $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}$ tem solução Ground State.

A prova segue aplicando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.91) ao funcional Φ em E_p.

Como $pq > 1$ temos $q > \dfrac{1}{p}$, e daí $q + 1 > \dfrac{p+1}{p}$.
Agora, como a imersão $E_p \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é contínua, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \leq C \|u\|_{E_p}^{q+1}.$$

Considere o conjunto $\Gamma := \{u \in E_p : \|u\|_{E_p} = \rho\}$.

Então, em Γ, nós temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&\geq \frac{p}{p+1}\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{C}{q+1}\|u\|_{E_p}^{q+1} \\
&= \|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}\left(\frac{p}{p+1} - \frac{C}{q+1}\frac{1}{\|u\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}-(q+1)}}\right) \\
&= \rho^{\frac{p+1}{p}}\left(\frac{p}{p+1} - \frac{C}{q+1}\rho^{q+1-\frac{p+1}{p}}\right) > 0 = \Phi(0)
\end{aligned}$$

para $\rho > 0$ pequeno suficiente tal que

$$\rho^{q+1-\frac{p+1}{p}} < \frac{p(q+1)}{C(p+1)}.$$

Assim, a origem $u_0 = 0$ é um mínimo local. Em particular,

$$\inf_\Gamma \Phi > 0 = \Phi(0).$$

Note que Γ é um subconjunto fechado em E_p e decompõe E_p em duas componentes

$$\{u \in E_p : \|u\|_{E_p} < \rho\} \quad \text{e} \quad \{u \in E_p : \|u\|_{E_p} > \rho\}.$$

Seja $u_1 = t\overline{u}$, com $t > 0$ e $\overline{u} \in E_p$ uma função não nula e não negativa. Como $pq > 1$, para t suficientemente grande tal que

$$t^{q+1-\frac{p+1}{p}} > \frac{p(q+1)}{p+1}\frac{\|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}}{\|\overline{u}\|_{q+1}^{q+1}}$$

obtemos

$$\Phi(u_1) = \frac{pt^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}\|\overline{u}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\|\overline{u}\|_{q+1}^{q+1} < 0.$$

Temos $u_1 \in \{u \in E_p : \|u\|_{E_p} > \rho\}$. Além disso,

$$\inf_\Gamma \Phi > \max\{\Phi(u_0), \Phi(u_1)\}.$$

Assim, a geometria do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita.

Resta verificarmos a condição (PS).

Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência (PS), isto é,

$$|\Phi(u_k)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\Phi'(u_k) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Vamos mostrar que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente em E_p.

Note que, $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Phi'(u_k)\|_{E_p'} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{\varphi \in E_p \\ \|\varphi\|_{E_p} \neq 0}} \frac{|\Phi'(u_k)\varphi|}{\|\varphi\|_{E_p}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Assim,

$$\frac{|\Phi'(u_k)\varphi|}{\|\varphi\|_{E_p}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in E_p \backslash \{0\},$$

isto é,

$$|\Phi'(u_k)\varphi| \leq \varepsilon \|\varphi\|_{E_p}, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in E_p.$$

Sendo, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em E_p, obtemos

$$|\Phi'(u_k)u_k| \leq \varepsilon \|u_k\|_{E_p}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Daí, para $k \geq k_0$ temos

$$\begin{aligned} |(q+1)\Phi(u_k) - \Phi'(u_k)u_k| &\leq (q+1)|\Phi(u_k)| + |\Phi'(u_k)u_k| \\ &\leq (q+1)M + \varepsilon \|u_k\|_{E_p}. \end{aligned}$$

Assumindo $pq > 1$, temos

$$\begin{aligned} (q+1)M + \varepsilon \|u_k\|_{E_p} &\geq |(q+1)\Phi(u_k) - \Phi'(u_k)u_k| \\ &= \left| \frac{p(q+1)}{p+1} \int_{\Omega} |-\Delta u_k|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - \int_{\Omega)} |-\Delta u_k|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \right| \\ &\geq \left(\frac{p(q+1)}{p+1} - 1 \right) \int_{\Omega} |-\Delta u_k|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Fazendo $C_0 = (q+1)M$ e $C = \dfrac{p(q+1)}{p+1} - 1$, temos

$$C_0 + \varepsilon \|u_k\|_{E_p} \geq C \|u_k\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}}.$$

Daqui, concluímos que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é limitada em E_p. Como E_p é reflexivo, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ admite uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ fracamente convergente em E_p, isto é, existe $u_0 \in E_p$ tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad E_p.$$

Agora, como a imersão $E_p \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é compacta, obtemos

$$u_{k_j} \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad L^{q+1}(\Omega).$$

Por hipótese $(\Phi(u_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ é limitada. Assim, passando a subsequência se necessário obtemos que $(\Phi(u_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ é convergente.
Observe que

$$\Phi(u_{k_j}) = \frac{p}{p+1}\|u_{k_j}\|_{E_p}^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u_{k_j}\|_{q+1}^{q+1}.$$

Donde obtemos que $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ converge forte em E_p. Como $u_{k_j} \rightharpoonup u_0$, temos pela unicidade do limite que

$$u_{k_j} \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad E_p.$$

■

2.4 Regularidade de solução

Vejamos agora resultados que provam a regularidade das soluções Ground State do problema (P_1), as quais existências foram garantidas na seção anterior.

Proposição 2.18. *A aplicação $L : E \to L^r(\Omega)$ é um isomorfismo isométrico para $1 < r < +\infty$, onde $L = -\Delta$ ou $L = -\Delta + I$ e $E = W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Temos que L é linear, pois $L = -\Delta$ ou $L = -\Delta + I$ e tanto $-\Delta$ quanto I são aplicações lineares. Note que estamos considerando o espaço E com a norma dado por $\|u\|_E = \|Lu\|_r$. Disto segue que L é uma isometria. Além disso temos que L é injetora, pois

$$Lu = 0 \Leftrightarrow \|Lu\|_r = 0 \Leftrightarrow \|u\|_E = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Para mostrar que L é sobrejetiva, basta mostrar que $L\,(E)$ é denso em $L^r(\Omega)$.
Como $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^r(\Omega)$ é suficiente mostrar que

$$C_0^{\infty}(\Omega) \subset L\,(E)$$

ou seja, dada uma função $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ existe $u \in E$ tal que

$$Lu = f \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Mas sabemos que isso é sempre verdade.
Portanto $L : E \to L^r(\Omega)$ é um isomorfismo isométrico.
■

Proposição 2.19. *Sejam $s > 0$ tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ e $L' : L^s(\Omega) \to E'$ o operador adjunto de L, com E' o dual de E. Então, L' é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Pela Proposição 2.18 temos que L é um isomorfismo isométrico e pela Proposição 1.24 obtemos que L' também é um isomorfismo isométrico. ■

Lema 2.20. *Sejam $1 < r < +\infty$ e $E = W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$. Dado $\varphi \in E'$ existe uma única $u \in E$ tal que*

$$\langle \varphi, w \rangle = \int_{\Omega} |Lu|^{r-2}(Lu)(Lw)\mathrm{d}x, \quad \forall w \in E.$$

onde $L = -\Delta$ *ou* $L = -\Delta + I$.

Demonstração: Seja $s > 0$ tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, das Proposições 2.18 e 2.19 temos que L e L' são isomorfismos isométricos. Daí, dado $\varphi \in E'$ existe uma única $v \in L^s(\Omega)$ tal que $\varphi = L'v$. Agora, para esta $v \in L^s(\Omega)$, temos que $v^{\frac{1}{r-1}} \in L^r(\Omega)$ e assim existe uma única $u \in E$ tal que $v^{\frac{1}{r-1}} = Lu$, isto é, $v = |Lu|^{r-2}Lu$. Portanto,

$$\langle \varphi, w \rangle = \langle L'v, w \rangle = \langle v, Lw \rangle = \int_\Omega v(Lw)\mathrm{d}x = \int_\Omega |Lu|^{r-2}(Lu)(Lw)\mathrm{d}x, \quad \forall w \in E.$$

■

Teorema 2.21. *Sejam* $p, q > 0$ *satisfazendo a hipótese* $(H1)$. *Se* $u \in E_p$ *solução Ground State do problema* $(\widetilde{P_1})$ *e* $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$, *então* $(u, v) \in E_p \times E_q$ *é solução forte do problema* (P_1). *Além disso,* $(u, v) \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, *para todo* $1 \leq r < \infty$.

Demonstração: Dividiremos a prova em dois caso:

1º caso: $p \leq \frac{2}{n-2}$ $\big($ ou $q \leq \frac{2}{n-2}\big)$
Neste caso, pelo Teorema 1.52 itens (ii) e (iii) concluímos que $E_p \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < \infty$ (ou $E_q \hookrightarrow L^r(\Omega),$ para todo $r \in [1, \infty)$) . Assim, $|u|^{q-1}u \in L^{\frac{r}{q}}(\Omega)$, para todo $1 \leq r < \infty$. Aplicando o Terorema 1.73 no sistema

$$\begin{cases} Lw = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

vamos obter única solução forte $w \in W^{2,\frac{r}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{r}{q}}(\overline{\Omega})$. Se $q > 1$, então tomando $r \geq q$, obtemos $w \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$. Se $0 < q \leq 1$, então $\frac{r}{q} \geq r \geq 1$ e portanto, $w \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.
Assim, $w \in L^r(\Omega)$, para todo $1 \leq r < \infty$, logo $|w|^{p-1}w \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$. Aplicando novamente o Teorema 1.73 no seguinte sistema

$$\begin{cases} Lz = |w|^{p-1}w & \text{em} \quad \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

vamos obter única solução forte $z \in W^{2,\frac{r}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{r}{p}}(\overline{\Omega})$. Fazendo os casos $p > 1$ e $0 < p \leq 1$ da mesma forma que fizemos para q, obtemos que $z \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.

Agora, como $E_1 = \{\varphi \in C^2(\overline{\Omega}) : \varphi(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\}$ é denso em

$E_r = W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$ para todo $r \geq 1$ e temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Lz|^{\frac{p+1}{p}-2}(Lz)(L\varphi)\mathrm{d}x &= \int_\Omega |Lz|^{\frac{1}{p}-1}(Lz)(L\varphi)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega w(L\varphi)\mathrm{d}x \\
&= \langle w, \varphi \rangle \\
&= \int_\Omega (Lw)\varphi\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega u^{q-1}u\varphi\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\varphi)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |Lu|^{\frac{p+1}{p}-2}(Lu)(L\varphi)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

vale para todo $\varphi \in E_1$, concluimos do Lema 2.20 que $u = z$. Disso, segue que $w = |Lz|^{\frac{1}{p}-1}(Lz) = |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu) = v$.

Portanto, $u, v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$. Em particular, temos que $(u, v) \in E_p \times E_q$ é solução forte do problema (P_1).

2º caso: $p > \frac{2}{n-2}$ e $q > \frac{2}{n-2}$
Pelas hipóteses $p, q > 0$ e $(H1)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{p+1} > \frac{nq-2q-2}{nq+n} \\
&\Leftrightarrow \quad p+1 < \frac{nq+n}{nq-2q-2} \\
&\Leftrightarrow \quad p < \frac{n+2q+2}{(n-2)q-2}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $p \in (0, p_0)$, com

$$p_0 = \frac{n+2q+2}{(n-2)q-2}$$

e, respectivamente, $q \in (0, q_0)$, com

$$q_0 = \frac{n+2p+2}{(n-2)p-2}.$$

Pelo Teorema 1.52 item (i) temos que $u \in L^r(\Omega)$, para $r \in [1, p_1]$, onde

$$p_1 = \left(\frac{p+1}{p}\right)^* = \frac{n(p+1)}{np-2(p+1)}$$

e respectivamente, $v \in L^r(\Omega)$, para $r \in [1, q_1]$, onde

$$q_1 = \left(\frac{q+1}{q}\right)^* = \frac{n(q+1)}{nq-2(q+1)}.$$

Agora, observe que $p_1 > q+1$ e $q_1 > p+1$. De fato, como estamos no caso $p > \frac{2}{n-2}$ e $q > \frac{2}{n-2}$, existem $\overline{p} > p$ e $\overline{q} > q$ tais que

$$\frac{1}{\overline{p}+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{\overline{q}+1} = 1 - \frac{2}{n},$$

isto é, $p_1 = \left(\frac{p+1}{p}\right)^* = \overline{q}+1 > q+1$ e $q_1 = \left(\frac{q+1}{q}\right)^* = \overline{p}+1 > p+1$.

Iniciaremos agora um processo *bootstrap* para a prova do Teorema. Note que, se em qualquer fase desse processo o denominador for não positivo, por exemplo, $np - 2(p+1) \leq 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{2}{n-2}$, então voltamos ao *1º caso* e podemos concluir $u, v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.

Como $v \in L^{q_1}(\Omega)$ segue que $|v|^{p-1}v \in L^{\frac{q_1}{p}}(\Omega)$. Aplicando o Teorema 1.73 no sistema

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

obtemos $u \in W^{2,\frac{q_1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q_1}{p}}(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema 1.52 item (i) temos que $u \in L^{p_2}(\Omega)$, com

$$p_2 = \left(\frac{q_1}{p}\right)^* = \frac{nq_1}{np - 2q_1}.$$

Se $np - 2q_1 \leq 0$ voltamos ao *1º caso* e concluimos $u, v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.

Se $np - 2q_1 > 0$, devemos continuar com o processo. Note que, $p_2 > q+1$. De fato,

$$\begin{aligned} p_2 > q+1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{nq_1}{np-2q_1} > q+1 \\ &\Leftrightarrow \quad q < \frac{nq_1 - np + 2q_1}{np - 2q_1} \\ &\Leftrightarrow \quad q < \frac{(n+2)q_1 - np}{np - 2q_1} = P, \end{aligned}$$

e a última desigualdade é válida se $q_0 < P$, mas isto é equivalente a $q_1 > p+1$. De fato,

$$\begin{aligned} q_0 < P \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n+2p+2}{(n-2)p-2} < \frac{(n+2)q_1 - np}{np - 2q_1} \\ &\Leftrightarrow \quad (n+2p+2)(np-2q_1) < ((n-2)p-2)((n+2)q_1 - np) \\ &\Leftrightarrow \quad n^2p < n^2pq_1 - n^2p^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 < q_1 - p \\ &\Leftrightarrow \quad p+1 < q_1. \end{aligned}$$

Assim, como $u \in L^{p_2}(\Omega)$, segue que $|u|^{q-1}u \in L^{\frac{p_2}{q}}(\Omega)$. Aplicando o Teorema 1.73

no sistema

$$\begin{cases} Lv = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

obtemos $v \in W^{2,\frac{p_2}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p_2}{q}}(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema 1.52 item (i) temos $v \in L^{q_2}(\Omega)$ com

$$q_2 = \left(\frac{p_2}{q}\right)^* = \frac{np_2}{nq - 2p_2}.$$

Se $nq - 2p_2 \leq 0$ voltamos ao *1º caso* e concluímos $u, v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.

Se $nq - 2p_2 > 0$ devemos continuar com o processo. Afirmamos que, $q_2 > q_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} q_2 > q_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{np_2}{nq - 2p_2} > q_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n\left(\frac{nq_1}{np-2q_1}\right)}{nq - 2\left(\frac{nq_1}{np-2q_1}\right)} > q_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{nq_1}{nqp - 2qq_1 - 2q_1} > q_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{npq - (2q+2)q_1} > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad q_1 > \frac{n(pq-1)}{2q+2} = f_p(q). \end{aligned}$$

Então, consideremos a função $f_p(q)$, vemos que ela é crescente, de fato

$$f_p'(q) = \frac{np(2q+2) - 2n(pq-1)}{4(q+1)^2} = \frac{n(p+1)}{2(q+1)^2} > 0.$$

Em particular, $f_p(q)$ é crescente em $[0, q_0]$, assim $f_p(q)$ atinge o máximo em q_0. Além disso, $f_p(q_0) = p + 1$, pois

$$\begin{aligned} f_p(q_0) &= \frac{n(pq_0 - 1)}{2q_0 + 2} \\ &= \frac{n\left(p\frac{n+2p+2}{(n-2)p-2} - 1\right)}{2\left(\frac{n+2p+2}{(n-2)p-2}\right) + 2} \\ &= \frac{np(n+2p+2) - n((n-2)p-2)}{2(n+2p+2+(n-2)p-2)} \\ &= \frac{p^2 + 2p + 2}{p+1} \\ &= p + 1, \end{aligned}$$

o que comprova a afirmação, uma vez que mostramos $q_1 > p + 1$.

Utilizando agora nosso argumento *bootstrap*, temos que $|v|^{p-1}v \in L^{\frac{q_2}{p}}(\Omega)$ donde por argumentos anteriores concluimos que $u \in W^{2,\frac{q_2}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q_2}{p}}(\overline{\Omega})$ e por imersão temos que $u \in L^{p_3}(\Omega)$ com

$$p_3 = \left(\frac{q_2}{p}\right)^* = \frac{nq_2}{np - 2q_2}.$$

Se $np - 2q_2 \leq 0$, voltamos ao *1º caso* e concluimos $u, v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.

Se $np - 2q_2 > 0$, devemos continuar com o processo. Note que, $p_3 > p_2$, de fato

$$\begin{aligned} p_3 > p_2 &\Leftrightarrow \frac{nq_2}{np-2q_2} > \frac{nq_1}{np-2q_1} \\ &\Leftrightarrow nq_2(np-2q_1) > nq_1(np-2q_2) \\ &\Leftrightarrow n^2pq_2 > n^2pq_1 \\ &\Leftrightarrow q_2 > q_1, \end{aligned}$$

o que já foi provado. Continuando esse processo, temos $v \in L^{q_3}(\Omega)$, com $q_3 > q_2$ equivalente a $p_3 > p_2$.

De tal forma construímos duas sequências $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(q_k)_{k=1}^{\infty}$, tais que

$$p_{k+1} = \frac{nq_k}{np - 2q_k} \quad \text{e} \quad p_{k+1} > p_k \quad \text{para} \quad k \geq 2,$$

$$q_{k+1} = \frac{np_{k+1}}{nq - 2p_{k+1}} \quad \text{e} \quad q_{k+1} > q_k \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Assim, se uma dessas sequências tem um limite, então a outra sequência também terá um limite. Suponha que $p_k \to l_1$ e $q_k \to l_2$ quando $k \to \infty$. Então, temos

$$l_1 = \frac{nl_2}{np - 2l_2} \quad \text{e} \quad l_2 = \frac{nl_1}{nq - 2l_1}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{n\left(\frac{nl_2}{np-2l_2}\right)}{nq - 2\left(\frac{nl_2}{np-2l_2}\right)} \\ &= \frac{nl_2}{npq - 2ql_2 - 2l_2}. \end{aligned}$$

Donde,

$$1 = \frac{n}{npq - 2ql_2 - 2l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{n(pq-1)}{2q+2} = f_p(q).$$

Isso implica que,

$$l_2 = f_p(q) \leq f_p(q_0) = p + 1$$

o que contradiz o fato de $q_{k+1} > q_k, \forall k$.

Assim, concluímos que ambas as sequências tendem ao infinito.
Logo, $u, v \in L^r(\Omega)$ para r arbitrariamente grande e a teoria elíptica padrão (argumentos utilizados no *1º caso*) implica que $u, v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\overline{\Omega})$, para todo $1 \leq r < \infty$.

Em particular, temos que $(u, v) \in E_p \times E_q$ é solução forte do problema (P_1).
■

Teorema 2.22. *Sejam $p, q > 0$ satisfazendo a hipótese $(H1)$. Se $u \in E_p$ solução Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$ e $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$, então $u, v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ e (u, v) é solução clássica do problema (P_1). Além disso, $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $v \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ para todos α e β nos intervalos: $0 < \alpha \leq \min\{1, p\}$ e $0 < \beta \leq \min\{1, q\}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.21, temos que (u, v) é solução forte do problema (P_1) e $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ para todo $1 \leq r < \infty$. Agora, pelo Teorema 1.52 item (iii) obtemos que $u, v \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ para $0 < \gamma < 1$.
Observe que se $r > 1$ e $w \in C^{1,\gamma}(\Omega)$ então $|w|^{r-1}w \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, onde

$$\alpha = \min\{\gamma, f(r)\}, \quad f(r) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad r \in \mathbb{N} \\ r - [r], & \text{se} \quad r \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Em particula, $|w|^{r-1}w \in C^{0,1}(\Omega)$. Enquanto que $0 < r \leq 1$ e $w \in C^{0,1}(\Omega)$ então a inequação

$$\big||a|^{r-1}a - |b|^{r-1}b\big| \leq 2^{1-r}|a - b|^r \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

nós dá que $|w|^{r-1}w \in C^{0,r}(\Omega)$.
Combinando esta observação e o fato que $u, v \in C^{1,\gamma}(\Omega)$, temos que $|u|^{q-1}u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ se $q > 1$ e $|u|^{q-1}u \in C^{0,q}(\overline{\Omega})$ se $0 < q \leq 1$, $|v|^{p-1}v \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ se $p > 1$ e $|v|^{p-1}v \in C^{0,p}(\overline{\Omega})$ se $0 < p \leq 1$. Logo, $|u|^{q-1}u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ com $\beta = \min\{1, q\}$ e $|v|^{p-1}v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\alpha = \min\{1, p\}$. Aplicando o Teorema 1.74 nos seguintes sistemas

$$\begin{cases} Lv = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

obtemos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $v \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema 1.39 concluimos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $v \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, com $0 < \alpha \leq \min\{1, p\}$ e $0 < \beta \leq \min\{1, q\}$.

Em particular, temos que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ e (u, v) é solução clássica do problema (P_1). ■

Lema 2.23. *Seja $u \in \mathcal{N}_\Phi$ tal que $\Phi(u) = \mathcal{C}_\Phi$. Então $u, Lu > 0$ em Ω, ou $u, Lu < 0$ em Ω.*

Demonstração: Basta mostrar que $u, -\Delta u > 0$ em Ω, ou $u, -\Delta u < 0$ em Ω. Do Lema 2.12 e do Teorema 2.22 temos que o par (u, v), onde $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$ é solução clássica do Problema (P_1). Além disso, temos que $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para adequado $\alpha \in (0, 1)$. Assim, podemos usar o Princípio do Máximo Forte (Teorema 1.66), donde basta mostrar que $-\Delta u$ não muda de sinal em Ω. Seja $w \in E$ tal que $-\Delta w = |\Delta u|$, daí $-\Delta(w \pm u) \geq 0$. Argumentando por contradição, suponha que $-\Delta u$ muda de sinal em Ω. Então $-\Delta(w \pm u) \neq 0$ e pelo Princípio do Máximo Forte implica que $w > |u|$. Então, usando o Lema 2.10 (iv),

$$\int_\Omega \left| \Delta \left(\frac{w}{\|w\|_{q+1}} \right) \right|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\frac{|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}}{\|w\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} \right) \mathrm{d}x < \int_\Omega \left(\frac{|\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} \right) \mathrm{d}x = \alpha_{p,q}.$$

O que contradiz a definição de $\alpha_{p,q}$ e a prova está completa. ∎

Teorema 2.24. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq \neq 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja $u \in E_p \backslash \{0\}$ uma solução de Ground State do problema $(\widetilde{P_1})$ e seja $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$. Então (u, v) é solução clássica de (P_1) e $uv > 0$ em Ω.*

Demonstração: Pelo Lema 2.12 juntamente com a Teorema 2.22 concluimos que o par (u, v) é solução clássica do Problema (P_1). Agora, pelo Lema 2.23 concluimos que $uv > 0$ em Ω. ∎

2.5 Unicidade de solução

Nesta seção, mostraremos que a menos de sinal o problema (P_1) tem uma única solução clássica (u, v) no caso $L = -\Delta$, $p, q > 0$ e satisfazendo $pq < 1$. Tal seção foi baseada nos trabalhos de Felmer e Martínez [10] e Leite e Montenegro [23].

2.5.1 Um pouco sobre a função de Green

Faremos uma breve construção da função de Green. Para mais detalhes, vide Gilbarg e Trudinger [15].

Uma função de Green, $G(x, s)$, de um operador diferencial linear $L = L(x)$, atuando em distribuições de um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, em um ponto s, é qualquer solução de

$$LG(x, s) = \delta(x - s) \tag{2.7}$$

onde δ é a função delta de Dirac. A qual pode ser resumida por

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Esta propriedade de uma função de Green pode ser explorada para resolver equações diferenciais da forma

$$Lu(x) = f(x). \tag{2.8}$$

Se o núcleo de L é não-trivial, então a função de Green não é única. No entanto, na prática, uma combinação de simetria, condições de contorno e/ou outros critérios impostos a priori dará uma função de Green única. Além disso, funções de Green em geral são distribuições, não necessariamente funções próprias.

Grosso modo, se tal função G pode ser encontrada para o operador L, então se multiplicarmos a equação (2.7) pela função de Green por $f(s)$ e em seguida realizarmos uma integração na variável s, obtemos,

$$\int LG(x,s)f(s)ds = \int \delta(x-s)f(s)\,ds = f(x).$$

O membro direito é agora dado pela equação (2.8), sendo então igual a $Lu(x)$. Assim:

$$Lu(x) = \int LG(x,s)f(s)\,ds.$$

Como o operador $L = L(x)$ é linear e atua sobre a variável x sozinha (e não sobre a variável de integração s), podemos retirar o operador L do sinal de integração no 2º membro, obtendo-se

$$Lu(x) = L\left(\int G(x,s)f(s)\,ds\right).$$

E isto sugere que

$$u(x) = \int G(x,s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.9}$$

Assim, podemos obter a função $u(x)$ através da função de Green que deve ser obtida da equação (2.7) e do termo fonte do segundo membro da equação (2.8). Este processo reside na linearidade do operador L.

Em outras palavras, a solução da equação (2.8), $u(x)$, pode ser determinada pela integral dada na equação (2.9). Embora $f(x)$ seja conhecida, esta integração não pode ser realizada, a menos que G seja também conhecida. O problema agora reside em encontrar a função de Green G que satisfaz a equação (2.7). Por esta razão, a função de Green é chamada também às vezes de solução fundamental associada ao operador L.

Nem todo operador L admite uma função de Green. Uma função de Green também pode ser pensada como sendo um inverso pela direita de L. Além das dificuldades de encontrar-se uma função de Green para um determinado operador, a integral na equação (2.9) pode ser bastante difícil de se calcular. No entanto, o método fornece um resultado teoricamente exato.

Isto pode ser pensado como uma expansão de f de acordo com uma base de funções delta de Dirac (projetando-se f sobre $\delta(x-s)$) e uma superposição da solução de cada projetor. Tal equação integral é conhecida como equação integral de Fredholm; o seu estudo constitui a teoria de Fredholm.

No caso do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

a função de Green é conhecida e é dada por

$$G(x,y) := \Gamma(x-y) + h^x(y), \quad x, y \in \Omega, x \neq y,$$

em que

$$\Gamma := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{se} \quad n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & \text{se} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

é a solução fundamental do Laplaciano e a função $h^x(y)$, chamada parte regular da função de Green, satifaz

$$\begin{cases} \Delta h^x(y) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ h^x(y) = -\Gamma(x-y) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

sempre que existir a função h^x acima.
Além disso, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema, então u é dada explícitamente por

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial \eta}\mathrm{d}s.$$

Observe que se $g = 0$, então

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega G(x,y)f(u(y))\mathrm{d}y.$$

2.5.2 A unicidade de solução a menos de sinal quando $pq < 1$

O próximo resultado mostra a unicidade de solução clássica a menos de sinal.

Teorema 2.25. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq < 1$. Então o problema (P_1) no caso em $L = -\Delta$ tem a menos de sinal, uma única solução clássica $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})\right)^2$.*

Demonstração: Sejam $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ duas soluções positivas do problema (P_1) no caso $L = -\Delta$. Defina

$$\Lambda = \{\lambda \in (0, 1] : u_1 - tu_2, v_1 - tv_2 \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega} \text{ para todo } t \in [0, \lambda]\}.$$

Mostremos primeiramente que Λ é não vazio.
Note que

$$\begin{cases} \Delta u_i \leq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u_i \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

Daí pelo Lema de Hopf (Lema 1.65), obtemos que $u_i > 0$ em Ω para $i = 1, 2$. Logo, existe $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $u_1 - \varepsilon_1 u_2 \geq 0$. Da mesma forma, podemos obter $\varepsilon_2 > 0$ tal que $v_1 - \varepsilon_2 v_2 \geq 0$. Assim, tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ temos que $\varepsilon \in \Lambda$ e Λ é não vazio.
Seja $\tau = \sup \Lambda$ e suponha $\tau < 1$. Temos

$$u_1 - \tau u_2, v_1 - \tau v_2 \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{2.10}$$

Escrevendo $f(t) = |t|^{q-1}t$ e $g(t) = |t|^{p-1}t$ temos que

$$f(0), g(0) \geq 0 \text{ e } f(t), g(t) \text{ são não decrescentes para } t \in [0, \infty), \tag{2.11}$$

mais ainda, para $\tau \in (0, 1)$ nós temos

$$f(\tau t) \geq \tau^q f(t) \text{ e } g(\tau t) \geq \tau^p g(t) \text{ para } t > 0. \tag{2.12}$$

Assim, de $(2.10), (2.11)$ e (3.10), temos

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_\Omega G(x, y) g(v_1(y)) \mathrm{d}y \\ &\geq \int_\Omega G(x, y) g(\tau v_2(y)) \mathrm{d}y \\ &\geq \tau^p \int_\Omega G(x, y) g(v_2(y)) \mathrm{d}y = \tau^p u_2(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, onde $G(x, y)$ é a função de Green do operador $-\Delta$ com condições de Dirichlet. De mesma forma, obtemos $v_1 \geq \tau^q v_2$ em $\overline{\Omega}$. Agora,

$$-\Delta(u_1 - \tau u_2) = g(v_1) - \tau g(v_2) \geq g(\tau^q v_2) - \tau g(v_2) \geq (\tau^{pq} - \tau) g(v_2)$$

e

$$-\Delta(v_1 - \tau v_2) = f(u_1) - \tau f(u_2) \geq f(\tau^p u_2) - \tau f(u_2) \geq (\tau^{pq} - \tau) f(u_2).$$

Por (2.11), existem $x, y \in \Omega$ tais que

$$f(u_2(x)) > 0 \text{ e } g(v_2(y)) > 0.$$

Como $pq < 1$, segue que $\tau^{pq} - \tau > 0$, usando o princípio do máximo forte, obtemos

$$u_1 - \tau u_2, v_1 - \tau v_2 > 0 \text{ em } \Omega.$$

Pelo Teorema 1.69 temos

$$\frac{\partial(u_1 - \tau u_2)}{\partial \eta}, \frac{\partial(v_1 - \tau v_2)}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Portanto, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$u_1 - (\tau + \varepsilon)u_2, v_1 - (\tau + \varepsilon)v_2 \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

isto é, existe $\mu > \tau$ tal que $[0, \mu] \subset \Lambda$ e temos uma contradição, pois τ é definido como o supremo do conjunto Λ. Logo, $\Lambda = [0, 1]$ e nós temos

$$u_1 - u_2, v_1 - v_2 \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$u_2 - u_1, v_2 - v_1 \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Portanto, $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$. ■

2.6 O caso particular $\Omega = B_R(0)$

Nessa seção, vamos abordar um caso particular do problema (P_1) com $L = -\Delta$. Aqui iremos considerar o problema com Ω sendo a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem de raio R, isto é,

$$\Omega = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}.$$

Mostraremos que se $p, q > 0$ tais que $pq \neq 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$, então o problema (P_1) com as particularidades descritas acima tem no máximo uma única solução clássica positiva radialmente simétrica.

2.6.1 Lema de Gronwall e simétria de soluções

Aqui veremos o Lema de Gronwall e resultados sobre simétrias de soluções de um determinado problema descrito no que segue.

Lema 2.26. *(Lema de Gronwall) Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}$ e $\beta : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo $I = [a, b)$ com $a < b \leq \infty$. Suponha que $\beta(t) \geq 0$, $t \in I$,* *e que $u : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s$$

para $t \in I$. Então,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

Demonstração: Considere a função

$$v(t) = \exp\left(-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right)\int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s$$

que é derivável, pois é primitiva de uma função contínua derivável. Sua derivada é

$$\begin{aligned} v'(t) &= -\beta(t)\exp\left(\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right)\int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s + \beta(t)u(t)\exp\left(-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right) \\ &= \beta(t)\left(u(t) - \int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

Como $\beta(t) \geq 0$, a desigualdade da hipótese implica que

$$v'(t) \leq \beta(t)\alpha(t)\exp\left(-\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right).$$

Agora, como $v(a) = 0$, temos

$$v(t) = \int_a^t v'(s)\mathrm{d}s.$$

Daí, obtemos

$$v(t) \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left(-\int_a^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

Em vista da definição de v essa desigualdade é equivalente a

$$\int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s \leq \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

Por fim, substituindo esta última desigualdade na desigualdade da hipótese, concluimos

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s \\ &\leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.27. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, convexo na direção x_1 e simétrico com respeito ao hiperplano $x_1 = 0$. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente de Lipschitz. Então

$$u(x_1, x') \leq u(-x_1, x')$$

para todo $x = (x_1, x') \in \Omega$ tal que $x_1 > 0$.
Além disso, $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$ tal que $x_1 > 0$.

Demonstração: Provaremos que

$$u(x_1, x') < u(y_1, x')$$

para todo $x = (x_1, x') \in \Omega$ tal que $x_1 > 0$ e $-x_1 < y_1 < x_1$. O resultado segue da continuidade de u fazendo $y_1 \to -x_1$.
Definimos w_λ em $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega : x_1 > \lambda\}$ por

$$w_\lambda = u(x) - u(x_\lambda)$$

onde $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, ..., x_n)$ é a reflexão do ponto $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_\lambda$ com respeito ao hiperplano $T_\lambda = \{x \in \Omega : x_1 = \lambda\}$.
Temos $w_\lambda$está bem definido, pois por causa da convexidade e simétria de Ω, se $x \in \Omega_\lambda$ então $x_\lambda \in \Omega$.
Temos

$$\begin{aligned} -\Delta w_\lambda(x) &= -\Delta u(x) + \Delta u(x_\lambda) = f(u(x)) - f(u(x_\lambda)) = c_\lambda(x)[u(x) - u(x_\lambda)] \\ &= c_\lambda(x) w_\lambda(x), \end{aligned}$$

onde

$$c_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{f(u(x)) - f(u(x_\lambda))}{u(x) - u(x_\lambda)}, & \text{se } u(x) \neq u(x_\lambda) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que c_λ é uma função limitada em Ω_λ porque f é localmente Lipschitziana. De fato, temos $u(\overline{\Omega}) \subset [\alpha, \beta]$ para $\alpha = \min\limits_{\overline{\Omega}} u$ e $\beta = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, e para cada $t_0 \in [\alpha, \beta]$ existem números $c(t_0), \delta_{t_0}$ tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq c(t_0)|t - s| \qquad \forall t, s \in [t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}].$$

Cobrindo $[\alpha, \beta]$ por um número finito de intervalos, digamos $[\alpha_1, \beta_1], ..., [\alpha_N, \beta_N]$ de tal modo que $\beta_{i+1} > \alpha_i$ para $i = 1, ..., N$, através de interações sucessivas concluimos que se $C = \max\{c(t_1), c(t_2), ..., c(t_N)\}$ então

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right| \leq N.C \qquad \forall t, s \in [\alpha, \beta].$$

Além disso, como $u(x) = u(x_\lambda)$ para $x \in T_\lambda$ e $u(x) = 0, u(x_\lambda) > 0$ para $x \in \partial\Omega_\lambda - T_\lambda$ (pois neste caso x_λ está no interior de Ω onde u é positiva), segue que $w_\lambda \leq 0$ sobre $\partial\Omega_\lambda$.
Resumindo, e substituindo c_λ por $-c_\lambda$ por conveniência de notação, w_λ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda(x) + c_\lambda(x) w_\lambda(x) = 0, & \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ w_\lambda(x) \leq 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_\lambda, \end{cases}$$

com $w_\lambda \neq 0$ sobre $\partial\Omega_\lambda$, porque $w_\lambda < 0$ em $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\lambda$ (já que $u > 0$ em Ω e $u = 0$ em $\partial\Omega$) e $w_\lambda = 0$ em T_λ.
Para provar o teorema, temos que mostrar que

$$w_\lambda < 0 \text{ em } \Omega_\lambda \text{ para todo } 0 < \lambda < a.$$

Para isso, movemos os planos a partir da direita, começando em a. Para dar o empurrão inicial ao processo, precisamos do seguinte passo:
Passo 1: *$w_\lambda < 0$ em Ω_λ para todo λ suficientemente próximo de a.*
Isso segue imediatamente do Princípio do Máximo Fraco para Domínios Estreitos (não podemos usar o princípio do máximo fraco usual porque o sinal de c_λ é desconhecido). Em vista do Passo 1, podemos definir

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda > 0 : w_\mu < 0 \text{ em } \Omega_\mu \text{ para todo } \lambda < \mu < a\},$$

e temos $\lambda_0 \geq 0$. Para concluir a primeira parte do teorema, temos apenas que mostrar que $\lambda_0 = 0$. Assuma por contradição que $\lambda_0 > 0$.
Passo 2: *$w_{\lambda_0} < 0$ em Ω_{λ_0}*
Por continuidade, $w_{\lambda_0} \leq 0$ em Ω_{λ_0} e $w_{\lambda_0} \neq 0$ sobre $\partial\Omega_{\lambda_0}$. Segue do Princípio do Máximo Forte (w_{λ_0} não pode assumir o máximo 0 no interior de Ω_{λ_0}, independentemente do sinal de c_λ) que

$$w_{\lambda_0} < 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0}.$$

Passo 3: *Existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0$ em $\Omega_{\lambda_0-\varepsilon}$, contradizendo a escolha de λ_0.*
Fixe $\delta > 0$, cujo valor será determinado mais tarde. Seja $K \subset \Omega_{\lambda_0}$ um subconjunto compacto tal que

$$|\Omega_{\lambda_0} \backslash K| < \frac{\delta}{2}.$$

O fato que $w_{\lambda_0} < 0$ em Ω_{λ_0} implica

$$w_{\lambda_0} \leq -c < 0 \text{ em } K,$$

logo, por continuidade, temos

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0 \text{ em } K,$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.
Agora, $w_{\lambda_0-\varepsilon}$ satifaz

$$\begin{cases} -\Delta w_{\lambda_0-\varepsilon}(x) + c_{\lambda_0-\varepsilon}(x) w_{\lambda_0-\varepsilon}(x) = 0, & \text{em} \quad \Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \backslash K, \\ w_{\lambda_0-\varepsilon}(x) \leq 0, & \text{sobre} \quad \partial(\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \backslash K), \end{cases}$$

onde $\partial(\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \backslash K) = \partial\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \cup \partial K$. Já vimos que $w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0$ em K. Se $\varepsilon > 0$ ésuficientemente pequeno, então $|\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \backslash K| < \delta$; logo, escolhendo $\delta > 0$ de tal modo que o Princípio do Máximo para Domínios com Volume Pequeno se aplica, concluímos que

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} \leq 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \backslash K,$$

donde

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} \leq 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon}.$$

Pelo princípio do máximo forte e o fato que $w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0$ em K, segue que

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon},$$

concluindo a demonstração do Passo 3.
Finalmente, se $w_\lambda < 0$ em Ω_λ para todo $0 < \lambda < a$, então em particular w_λ assume o seu máximo em $T_\lambda \cap \Omega$. Pelo Lema de Hopf,

$$0 < \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1}(x) = 2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x).$$

■

Corolário 2.28. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, convexo na direção x_1 e simétrico com respeito ao hiperplano $x_1 = 0$. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente de Lipschitz. Então u é simétrica com respeito ao hiperplano $x_1 = 0$ e decrescente na direção x_1 para $x_1 > 0$.

Demonstração: Pelo teorema anterior,

$$u(x_1, x') \leq u(-x_1, x')$$

para todo $x = (x_1, x') \in \Omega$ tal que $x_1 > 0$. Tomando $v(x_1, x') = u(-x_1, x')$, segue que $-\Delta v(x_1, x') = -\Delta u(-x_1, x')$, e portanto v satifaz

$$\begin{cases} -\Delta v = f(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

logo a conclusão do teorema anterior vale para v, isto é,

$$v(x_1, x') \leq v(-x_1, x')$$

donde

$$u(-x_1, x') \leq u(x_1, x')$$

e portanto

$$u(x_1, x') = u(-x_1, x').$$

■

Corolário 2.29. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \textit{em} \quad B_R(0), \\ u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial B_R(0), \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz. Então u é radialmente simétrica e radialmente decrescente em $B_R(0)$.

Demonstração: Usando o fato que o Laplaciano é invariante sob rotações, podemos definir como no corolário anterior $v(x) = u(T(x))$, onde T é a rotação que leva qualquer vetor $\eta \in S^{n-1}$ no vetor $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ e aplicar o Teorema anterior para concluir que u é simétrica nesta direção e satisfaz $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$ para todo x que é múltiplo escalar positivo do vetor η. Se u é simétrica em relação a todos as direções, então necessariamente u é radialmente simétrica. ■

2.6.2 A existência e unicidade de solução radialmente simétrica

Os dois resultados que seguem mostram a existência de solução clássica radialmente simétrica e que o problema tratado tem no máximo uma única solução clássica positiva e radialmente simétrica, respectivamente.

Teorema 2.30. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq \neq 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Considere $\Omega = B_R(0)$, então o problema (P_1) no caso $L = -\Delta$ tem solução clássica (u, v) com $uv > 0$. Além disso, se $u > 0$ então u e v são radialmente simétrica.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.24, já temos a existência solução clássica e satisfazendo $uv > 0$. Assim, considerando $u > 0$ segue que $v > 0$. Sejam os sistemas

$$\begin{cases} -\Delta(u+v) = v^p + u^q & \text{em} \quad B_R(0) \\ u+v=0 & \text{sobre } \partial B_R(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta(u-v) = v^p - u^q & \text{em} \quad B_R(0) \\ u-v=0 & \text{sobre } \partial B_R(0) \end{cases}$$

pelo Corolário 2.29 temos que $u+v$ e $u-v$ são radialmente simétricas em $B_R(0)$. Portanto $u = \dfrac{(u+v)+(u-v)}{2}$ e $v = \dfrac{(u+v)-(u-v)}{2}$ também o são. ■

Teorema 2.31. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq \neq 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Considere $\Omega = B_R(0)$, então o problema (P_1) no caso $L = -\Delta$ tem no máximo uma solução clássica positiva radialmente simétrica.*

Demonstração: Sejam (u_1, v_1) e (u_2, v_2) duas soluções clássicas positivas e radialmente simétricas do problema (P_1) no caso $L = -\Delta$ e $r = \|x\|$. Defina

$$s = 2.\frac{p+1}{pq-1} \quad \text{e} \quad t = 2.\frac{q+1}{pq-1}. \tag{2.13}$$

Para $\lambda > 0$ consideremos

$$\tilde{u}_2(r) = \lambda^s u_2(\lambda r) \quad \text{e} \quad \tilde{v}_2(r) = \lambda^t v_2(\lambda r), \quad 0 \leq r \leq \frac{R}{\lambda}.$$

Note que, para $0 \leq r \leq \dfrac{R}{\lambda}$ temos

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{u}_2(r) + \tilde{v}_2(r)^p &= \Delta\left(\lambda^s u_2(\lambda r)\right) + \left(\lambda^t v_2(\lambda r)\right)^p \\ &= \lambda^s \Delta u_2(\lambda r) + \lambda^{t.p} v_2(\lambda r)^p \\ &= \lambda^s\left(\Delta u_2(\lambda r) + v_2(\lambda r)^p\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{v}_2(r) + \tilde{u}_2(r)^q &= \Delta\left(\lambda^t v_2(\lambda r)\right) + \left(\lambda^s u_2(\lambda r)\right)^q \\ &= \lambda^t \Delta v_2(\lambda r) + \lambda^{s.q} u_2(\lambda r)^q \\ &= \lambda^t\left(\Delta v_2(\lambda r) + u_2(\lambda r)^q\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{u}_2$ e $\tilde{v}_2$ satisfazem

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_2(r) + \tilde{v}_2(r)^p = 0, & 0 \leq r \leq \frac{R}{\lambda} \\ \Delta\tilde{v}_2(r) + \tilde{u}_2(r)^q = 0, & 0 \leq r \leq \frac{R}{\lambda} \\ \tilde{u}_2(\frac{R}{\lambda}) = \tilde{v}_2(\frac{R}{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Considere a forma polar do Laplaciano

$$\Delta = r^{1-n}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d}{dr}\right).$$

Escolha λ tal que $\lambda^s u_2(0) = u_1(0)$. Então nós temos

$$\tilde{u}_2(0) = u_1(0). \tag{2.14}$$

Mostraremos agora que

$$\tilde{v}_2(0) = v_1(0). \tag{2.15}$$

Suponha que $\tilde{v}_2(0) < v_1(0)$. Se existe $a \in (0, \min(R, \frac{R}{\lambda})]$ tal que $\tilde{v}_2 - v_1 < 0$ em $[0, a)$ e $(\tilde{v}_2 - v_1)(a) = 0$, então $\tilde{u}_2 - u_1 > 0$ em $(0, a]$. Com efeito, assuma o contrário. Então existe $b \in (0, a]$ tal que $(\tilde{u}_2 - u_1)(b) \leq 0$. Desde $\Delta(\tilde{u}_2 - u_1) = v_1^p - \tilde{v}_2^p > 0$ em $[0, b)$, pelo princípio do máximo forte temos que $\tilde{u}_2 - u_1 < 0$ em $[0, b)$, e isto contradiz (2.14).

Agora temos $\Delta(\tilde{v}_2 - v_1) = u_1^q - \tilde{u}_2^q < 0$ em $(0, a]$ e pelo princípio do máximo forte temos que $\tilde{v}_2 - v_1 > (\tilde{v}_2 - v_1)(a) = 0$ em $[0, a)$, o que é uma contradição.

Portanto $\tilde{v}_2 - v_1 < 0$ em $[0, \min(R, \frac{R}{\lambda})]$.

Observe que

$$(\tilde{v}_2 - v_1)(\min(R, \frac{R}{\lambda}) = \begin{cases} -v_1(\frac{R}{\lambda}), & \text{se } \lambda > 1 \\ 0, & \text{se } \lambda = 1 \\ \tilde{v}_2(R), & \text{se } \lambda < 1 \end{cases}$$

Daí, obtemos $\lambda > 1$.

Mostramos também que $\tilde{u}_2 - u_1 > 0$ em $(0, \min(R, \frac{R}{\lambda})]$. E temos

$$(\tilde{u}_2 - u_1)(\min(R, \frac{R}{\lambda}) = \begin{cases} -u_1(\frac{R}{\lambda}), & \text{se } \lambda > 1 \\ 0, & \text{se } \lambda = 1 \\ \tilde{u}_2(R), & \text{se } \lambda < 1 \end{cases}$$

E daqui obtemos $\lambda < 1$ e assim temos uma contradição.

O caso $\tilde{v}_2(0) > v_1(0)$ pode ser tratado de mesma forma. Portanto, concluimos a prova de (2.15).

Agora, nós definimos U, W, F e G_n por

$$U(r) = (u_1(r), v_1(r)), \quad 0 \leq r \leq R$$

$$W(r) = (\tilde{u}_2(r), \tilde{v}_2(r)), \quad 0 \leq r \leq \frac{R}{\lambda}$$

$$F(x, y) = (y^p, x^q), \quad x, y \geq 0$$

e

$$G_n(r, s) = \begin{cases} r - s, & \text{se } n = 1 \\ s \ln(\frac{r}{s}), & \text{se } n = 2 \\ \dfrac{s}{n-2}\left(1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{n-2}\right), & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

para $0 \leq s \leq r$.

Usando (2.14) e (2.15) e o fato de $u_1'(0) = \tilde{u}_2'(0) = v_1'(0) = \tilde{v}_2'(0) = 0$ nós obtemos facilmente

$$U(r) - W(r) = \int_0^r G_n(r,s)[F(W(s)) - F(U(s))]\mathrm{d}s$$

para $r \in [0, \min(R, \frac{R}{\lambda})]$.

Quando $p, q \geq 1$, F é localmente contínua de Lipschitz, e usando o Lema de Gronwall (Lema 2.26) obtemos $U = W$ em $[0, \min(R, \frac{R}{\lambda})]$.

Quando p ou/e $q \in (0,1)$, seja $a \in (0, \min(R, \frac{R}{\lambda}))$ fixo. Então, para $r \in [0, a]$ temos

$$u_1(0) \geq u_1(r) \geq u_1(a) > 0$$
$$\tilde{u}_2(0) = u_1(0) \geq \tilde{u}_2(r) \geq \tilde{u}_2(a) > 0$$
$$v_1(0) \geq v_1(r) \geq v_1(a) > 0$$
$$\tilde{v}_2(0) = v_1(0) \geq \tilde{v}_2(r) \geq \tilde{v}_2(a) > 0.$$

Desde que F é localmente contínua de Lipschitz em $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ como antes obtemos que $U = W$ em $[0, a]$. Por continuidade nós temos $U = W$ em $[0, \min(R, \frac{R}{\lambda})]$.

Agora, deduzimos $\lambda = 1$ e portanto $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ em $[0, R]$. ∎

2.7 A não existência de solução positiva

Nesta seção, vamos mostrar a não existência de solução positiva do problema (P_1) no caso que $L = -\Delta$ e Ω é um domínio estrelado em relação a origem que será definido abaixo, com $n \geq 3$, $p, q > 0$ e satisfazendo

$$\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} \leq 1 - \frac{2}{n}.$$

2.7.1 Identidade de Pohozaev

Veremos aqui a definição e resultado sobre um conjunto aberto estrelado em relação a origem, e a identidade de Pohozaev, a qual é de extrema importância na prova de não existência de solução positiva.

Definição 2.32. *Dizemos que um conjunto aberto Ω é estrelado em relação a origem se, para cada $x \in \overline{\Omega}$, o segmento de reta $\{\lambda x; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido em $\overline{\Omega}$.*

Proposição 2.33. *Suponha que a fronteira $\partial\Omega$ seja de classe C^1 e que Ω seja* *estrelado em relação a origem. Então,*

$$x \cdot \eta \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

sendo η o vetor unitário normal exterior (apontando para fora) à fronteira de Ω.

Demonstração: Temos que $\partial\Omega \in C^1$. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$||x-y|| < \delta \Rightarrow \eta(x) \cdot \frac{(y-x)}{||x-y||} \leq \varepsilon.$$

Em particular,

$$\limsup_{y \to x} \eta(x) \cdot \frac{(y-x)}{||x-y||} \leq 0.$$

Considere $y = \lambda x$, onde $\lambda \in (0,1)$, então $y \in \overline{\Omega}$, assim

$$\eta(x) \cdot \frac{x}{||x||} = -\limsup_{\lambda \to 1^-} \eta(x) \cdot \frac{(\lambda x - x)}{||\lambda x - x||} \geq 0.$$

Portanto

$$x \cdot \eta(x) \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

■

A seguinte identidade pode ser encontrada em [30].

Teorema 2.34. *(Identidade de Pohozaev) Sejam Ω um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^n$. Se u é solução clássica do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

então, a seguinte identidade é válida

$$2\int_\Omega (x \cdot \nabla u)(\Delta u) \mathrm{d}x = (n-2)\int_\Omega u f(u) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 (x \cdot \eta) \mathrm{d}s, \tag{2.17}$$

onde η é o vetor normal unitário apontando para fora de $\partial\Omega$.
Além disso,

$$\int_\Omega (x \cdot \nabla u)(\Delta u) \mathrm{d}x = n \int_\Omega F(u) \mathrm{d}x$$

com $F(t) = \int_0^t f$.

Demonstração: Como u é solução clássica, temos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Assim, temos

$$\Delta(x \cdot \nabla u) = 2\Delta u + x \cdot \nabla(\Delta u).$$

Então, integrando por partes e usando $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, nos obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x \cdot \nabla u)\Delta u \mathrm{d}x &= 2\int_\Omega u\Delta u \mathrm{d}x + \int_\Omega ux \cdot \nabla(\Delta u) + \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \eta)\mathrm{d}s \\ &= (2-n)\int_\Omega u\Delta u \mathrm{d}x - \int_\Omega (x \cdot \nabla u)\Delta u \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot \eta)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Agora, usando que $|\nabla u| = \nabla u \cdot \eta = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ sobre $\partial\Omega$ e que $-\Delta u = f(u)$, concluímos

$$2\int_\Omega (x \cdot \nabla u)(\Delta u)\mathrm{d}x = (n-2)\int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 (x \cdot \eta)\mathrm{d}s.$$

Além disso, se $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, temos

$$\int_\Omega (x \cdot \nabla u)(\Delta u)\mathrm{d}x = -\int_\Omega (x \cdot \nabla u)f(u)\mathrm{d}x = -\int_\Omega x \cdot \nabla F(u)\mathrm{d}x = n\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

■

2.7.2 A não existência de solução positiva em domínios estrelados

Mostraremos agora a não existência de solução positiva do problema (P_1) no caso $L = -\Delta$. Essa seção basea-se nos trabalhos de Mitidieri [26] e Leite e Montenegro [23]. Mas antes, vejamos um resultado essencial para prova de tal afirmação.

Proposição 2.35. *(Identidade de Rellich) Seja Ω um domínio suave limitado e estrelado em relação a origem em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Então, toda solução (u, v) positiva do problema (P_1) com $L = -\Delta$ satisfaz*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}(x \cdot \eta)\mathrm{d}s = \left(\frac{n}{q+1} + \frac{n}{p+1} - (n-2)\right)\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x,$$

com η é o vetor normal unitário exterior (apontando para fora) de $\partial\Omega$.

Demonstração: Aplicando a Identidade de Pohozaev (2.17) nos sistemas abaixo

$$\begin{cases} -\Delta(u+v) = v^p + u^q & \text{em} \quad \Omega \\ u + v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta(u-v) = v^p - u^q & \text{em} \quad \Omega \\ u - v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

obtemos,

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega (x\cdot\nabla(u+v))((-\Delta u)+(-\Delta v))\mathrm{d}x = & - \frac{2-n}{2}\int_\Omega (u+v)(v^p+u^q)\mathrm{d}x \\
& + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial(u+v)}{\partial\eta}\right)^2 (x.\eta)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega (x\cdot\nabla(u-v))((-\Delta u)-(-\Delta v))\mathrm{d}x = & - \frac{2-n}{2}\int_\Omega (u-v)(v^p-u^q)\mathrm{d}x \\
& + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial(u-v)}{\partial\eta}\right)^2 (x\cdot\eta)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Agora, subtraindo a primeira equação da segunda, temos

$$
\begin{aligned}
-2\int_\Omega [(x\cdot\nabla u)(-\Delta v)+(x\cdot\nabla v)(-\Delta u)]\mathrm{d}x = & -(2-n)\int_\Omega [u(-\Delta v)+v(-\Delta u)]\mathrm{d}x \\
& + 2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}(x\cdot\eta)\mathrm{d}s. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Como $v=u=0$ sobre $\partial\Omega$, nós temos

$$
\int_\Omega (x\cdot\nabla u)(-\Delta v)\mathrm{d}x = \int_\Omega (x\cdot\nabla u)u^q\mathrm{d}x = \frac{1}{q+1}\int_\Omega (x\cdot\nabla u^{q+1})\mathrm{d}x = -\frac{n}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x
$$

e

$$
\int_\Omega (x\cdot\nabla v)(-\Delta u)\mathrm{d}x = \int_\Omega (x\cdot\nabla v)v^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}\int_\Omega (x\cdot\nabla v^{p+1})\mathrm{d}x = -\frac{n}{p+1}\int_\Omega v^{p+1}\mathrm{d}x.
$$

Agora, como cada solução do problema (P_1) no caso $L=-\Delta$ é também uma solução fraca limitada, pela Observação 2.4, obtemos

$$
\int_\Omega v^{p+1}\mathrm{d}x = \int_\Omega v(-\Delta u)\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x = \int_\Omega u(-\Delta v)\mathrm{d}x = \int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x.
$$

Portanto, usando essas igualdades em (2.18), concluimos

$$
\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}(x\cdot\eta)\mathrm{d}s = \left(\frac{n}{q+1}+\frac{n}{p+1}-(n-2)\right)\int_\Omega u^{q+1}\mathrm{d}x.
$$

■

Teorema 2.36. *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n (n\geq 3)$ um domínio suave limitado. Suponha que*

Ω é um domínio estrelado em relação a origem, $p, q > 0$ e

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{n-2}{n}.$$

Então, o problema (P_1) no caso $L = -\Delta$ não admite solução positiva de classe $C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Como Ω é um domínio estrelado em relação a origem, temos $(x \cdot \eta) \geq 0$ para qualquer $x \in \partial\Omega$, onde η é o vetor normal unitário exterior (apontando para fora) de $\partial\Omega$ em x.
Argumentamos por contradição, suponha (u, v) uma solução positiva de classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ do problema (P_1) no caso $L = -\Delta$. Pelo Lema de Hopf, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0.$$

Dessa forma, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}(x \cdot \eta)\mathrm{d}s > 0$$

Como $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{n-2}{n}$, segue que

$$\frac{n}{q+1} + \frac{n}{p+1} - (n-2) \leq 0,$$

o que pela Identidade de Rellich nos dá uma contradição. ∎

Capítulo 3

O sistema em todo $\mathbb{R}^n$ com $L = -\Delta + I$

3.1 Introdução

Neste capítulo, provamos a existência de solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + v = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P_2}$$

onde $n \geq 3$, e p, q satifazem $pq > 1$ e

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}. \tag{$H1$}$$

Definição 3.1. *Dizemos que o par (u, v) é solução clássica do problema (P_2) se $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem o problema (P_2).*

Definição 3.2. *Dizemos que (u, v) é solução forte do problema (P_2) se $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ e (u, v) satisfazem (P_2) q.t.p em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 3.3. *Dizemos que o par $(u, v) \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ é solução fraca do problema (P_2), se u e v satisfazem:*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} v\varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n), \\ \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla v \nabla \psi + v\psi) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} u\psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Observação 3.4. *Seja $(u, v) \in W^{2\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ uma solução fraca do problema (P_2), então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^{p+1} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} v(Lu) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + uv) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(Lv) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1} \mathrm{d}x$$

onde $Lu := -\Delta u + u$.

De fato, pela definição 3.3 *temos que*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p-1}v\varphi\mathrm{d}x, & \forall\varphi\in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n),\\ \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla v\nabla\psi+v\psi)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, & \forall\psi\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n).\end{cases}$$

Em particular, tomando $\varphi=v\in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ *na primeira equação, obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p+1}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}v(Lu)\mathrm{d}x$$

e tomando $\psi=u\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ *na segunda equação, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla v\nabla u+vu)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}u(Lv)\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n}v^{p+1}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}v(Lu)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}u(Lv)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}u^{q+1}\mathrm{d}x.$$

Considere o funcional $F\in C^1\left(W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\times W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n),\mathbb{R}\right)$ dado por

$$F(u,v)=\langle u,v\rangle-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p+1}\mathrm{d}x,$$

onde $\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x$.

A derivada de Gateaux de F em (u,v) na direção de (ψ,φ) é dada por

$$F'(u,v)(\psi,\varphi)=\langle v,\psi\rangle+\langle u,\varphi\rangle-\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p-1}v\varphi\mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que se (u,v) é solução fraca do problema (P_2) então (u,v) é um ponto crítico do funcional F.

Definição 3.5. *Assumindo* $(H1)$ *e* $pq>1$, *dizemos que o par* $(u,v)\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}\times W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ *é solução Ground State do problema* (P_2) *se* (u,v) *é solução fraca do problema* (P_2) *e atinge o menor valor crítico não nulo do funcional* F.

Da primeira equação do problema (P_2), temos

$$v=|-\Delta u+u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u+u)=|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu,$$

daí substituindo na segunda equação, obtemos

$$-\Delta\left(|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu\right)+|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu=|u|^{q-1}u\Leftrightarrow L\left(|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu\right)=|u|^{q-1}u.$$

Assim, primeiramente vamos buscar solução fraca da equação

$$L\left(|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu\right) = |u|^{q-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \qquad (\widetilde{P_2})$$

onde $Lu = -\Delta u + u$.
Para trabalhar com o problema $(\widetilde{P_2})$ usamos o espaço $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$, equipado com a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

O próximo resultado nos diz que esta norma é equivalente à norma

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^{\frac{p+1}{p}} + |\nabla u|^{\frac{p+1}{p}} + |u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Proposição 3.6. *A norma*

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}},$$

definida em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ *é equivalente à norma*

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^{\frac{p+1}{p}} + |\nabla u|^{\frac{p+1}{p}} + |u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Demonstração: Pela própria definição de $\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)}$ temos que

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}} \leq \|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.1}$$

Seja T o operador elíptico de segunda ordem definido por

$$T(u) = \Delta u - u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} - u(x).$$

Temos que $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ $b_i = 0, \forall i = 1, ..., n$ e $c = -1$.
Afirmação: T é estritamente elíptico.
Com efeito,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \|\xi\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, tomando $\theta_0 = 1$ na Definição 1.63 concluímos a afirmação.
Assim, estamos nas condições do Teorema 1.71, com $\Omega = \mathbb{R}^n$. Logo, pelo Teorema 1.71, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Tu\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)} = C\|-\Delta u + u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $1 < \frac{p+1}{p} < \infty$ para $p > 0$. Como $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\| - \Delta u + u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.2}$$

para todo $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Portanto de (3.1) e (3.2) temos a equivalência das normas. ■

Definição 3.7. *Dizemos que $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ é solução fraca de $(\widetilde{P_2})$ se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u+u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u+u)(-\Delta\psi+\psi)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall\psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Considere o seguinte funcional $J \in C^1(W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$J(u) = \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} | - \Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

A derivada de Gateaux de J em u na direção de ψ é dada por

$$J'(u)\psi = \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u + u)(-\Delta\psi + \psi)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que u é solução fraca de $(\widetilde{P_2})$ se, e somente se u é um ponto crítico do funcional J.

Definição 3.8. *Dizemos que $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ é solução de Ground State de $(\widetilde{P_2})$ se J atingi seu menor valor crítico não nulo em u.*

Como no capítulo anterior definimos a variedade de Nehari associado ao funcional J, dado por

$$\mathcal{N}_J := \left\{u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\} : J'(u)u = 0\right\}.$$

e consideremos os seguintes problemas de minimização

$$\mathcal{C}_J := \inf_{u\in\mathcal{N}_J} J(u) \tag{3.3}$$

e

$$\beta_{p,q} := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{p+1}{p}}dx : u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1}^{q+1} = 1\right\}, \tag{3.4}$$

onde $\|u\|_{q+1}^{q+1} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}dx$.

Na próxima seção provaremos que as constantes $\beta_{p,q}$ e $\mathcal{C}_J$ são atingidas e com isso mostraremos a existência de solução Ground State do problema (P_2).

3.2 Existência de solução

Nesta seção, vamos mostrar a existência de solução Ground State do problema (P_2) a partir da existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_2})$.

3.2.1 Relações entre as constantes $\beta_{p,q}$ e $\mathcal{C}_J$

Como feito no capítulo anterior para as constantes $\alpha_{p,q}$ e $\mathcal{C}_J$, nessa seção vejamos alguns resultados que relacionam as constantes $\mathcal{C}_J$ e $\beta_{p,q}$.

Lema 3.9. *Dado $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, existe único $t = t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}_J$, a saber*

$$t(u) = \left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{pq-1}}.$$

Demonstração: Vejamos primeiramente que $t(u)u \in \mathcal{N}_J$,

$$\begin{aligned}
J'(t(u)u).t(u)u &= \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta(t(u)u) + t(u)u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |t(u)u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= |t(u)|^{\frac{p+1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - |t(u)|^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&= \left(\left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{pq-1}}\right)^{\frac{p+1}{p}} \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \left(\left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{pq-1}}\right)^{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&= \left(\frac{\|u\|}{\|u\|_{q+1}}\right)^{\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}} - \left(\frac{\|u\|}{\|u\|_{q+1}}\right)^{\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $t(u)u \in \mathcal{N}_J$.
Agora, seja $C > 0$ tal que $Cu \in \mathcal{N}_J$, então $J'(Cu).Cu = 0$, daí

$$\begin{aligned}
J'(Cu).Cu = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta(Cu) + Cu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |Cu|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow C^{\frac{p+1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x = C^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow C^{\frac{p+1}{p}} \|u\|^{\frac{p+1}{p}} = C^{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&\Leftrightarrow C^{\frac{pq-1}{p}} = \frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \\
&\Leftrightarrow C = \left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{pq-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, das equivalências acima, temos a unicidade de $t(u)$. ■

Lema 3.10. *Seja $u \in \mathcal{N}_J$, então* (*i*) $J(u) = \dfrac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\|u\|^{\frac{p+1}{p}}$,

(*ii*) $\dfrac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\dfrac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}$.

Demonstração: Note que se $u \in \mathcal{N}_J$ então $J'(u)u = 0$, daí

$$\begin{aligned} J'(u)u &= \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \|u\|_{q+1}^{q+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u\|^{\frac{p+1}{p}} = \|u\|_{q+1}^{q+1}. \end{aligned}$$

(*i*) : Usando a igualdade obtida acima, temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u + u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{p+1}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &= \frac{p}{p+1}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} \\ &= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\|u\|^{\frac{p+1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto, temos a prova de (*i*).
(*ii*) : Temos

$$\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|^{(\frac{p+1}{p})^2\cdot\frac{1}{q+1}}} = \|u\|^{\frac{p+1}{p}\left(1-\frac{p+1}{p(q+1)}\right)} = \|u\|^{\frac{p+1}{p}(\frac{pq-1}{p(q+1)})}.$$

Agora, usando (*i*) temos que

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}} = \frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J(u).$$

Portanto,

$$\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}.$$

■

Lema 3.11. *Os problemas de minimização* (3.3) *e* (3.4) *são equivalentes no sentido de:*

(*i*) *Dada uma sequência de minimização* $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_J$ *de* (3.3), *temos que* $(\|u_k\|_{q+1}^{-1}u_k)_{k=1}^{\infty}$ *é uma sequência de minimização de* (3.4).

(*ii*) *Dada uma sequência de minimização* $(\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *de* (3.4), *temos que* $(\|\overline{u}_k\|^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *é uma sequência de minimização de* (3.3).

(*iii*) *Temos a igualdade:*

$$\mathcal{C}_J = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\beta_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}}$$

(*iv*) *A constante* $\beta_{p,q}$ *é atingida se, e somente se,* $\mathcal{C}_J$ *é atingido. Além disso, se* $\overline{u}$ *é solução de* (3.4)*, então* $\|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u} = \beta_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}$ *é solução de* (3.3)*, e por outro lado, se* u *é solução de* (3.3)*, então* $\|u\|_{q+1}^{-1}u$ *é solução de* (3.4)*.*

Demonstração: Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_J$ uma sequência de minimização de (3.3), então pelo Lema 3.10 (ii) temos

$$\begin{aligned}\beta_{p,q} &\leq \lim_{k\to\infty}\frac{\|u_k\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u_k\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J(u_k)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} \\ &= \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\mathcal{C}_J\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado, seja $(\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de minimização de (3.4), então pelo Lema 3.9, temos que $(\|\overline{u}_k\|^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_J$ e pelo Lema 3.10 (i) temos

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_J &\leq \lim_{k\to\infty} J(\|\overline{u}_k\|^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k) = \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\lim_{k\to\infty}\|\overline{u}_k\|^{\frac{p(q+1)}{pq-1}\cdot\frac{p+1}{p}} \\ &= \frac{pq-1}{(p+1)(q+1)}\beta_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, de (3.5) e (3.6), obtemos a prova de $(i), (ii)$ e (iii).
Agora, suponha que $\overline{u} \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\|\overline{u}\|_{q+1} = 1$ e $\beta_{p,q} = \|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}}$, então pelo Lema 3.9 temos que $\|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u} = \beta_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u} \in \mathcal{N}_J$. Assim, para cada $u \in \mathcal{N}_J$, temos pelo Lema 3.10 (ii) que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J\left(\beta_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}\right)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} = \\ &= \beta_{p,q} \leq \frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}},\end{aligned}$$

daí, $J\left(\beta_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}\right) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{N}_J$. Portanto, $J\left(\beta_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}\right) = \mathcal{C}_J$.
Por outro lado, suponha $u \in \mathcal{N}_J$ tal que $J(u) = \mathcal{C}_J$, então pelo Lema 3.10 (ii) e pelo item (iii) já provado, temos

$$\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}J(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \left(\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}\mathcal{C}_J\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \beta_{p,q}.$$

E, portanto, temos a prova de (iv). ■

3.2.2 Existência de solução Ground State

Apresentaremos aqui a prova da existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_2})$, e a partir desta mostraremos a existência de solução Ground State do problema (P_2).

Lema 3.12. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta centrada na origem, tal que $|B| = |\Omega|$. Sejam $p, q > 0$ tais que $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} \geq 1 - \dfrac{2}{n}$. Considere $f \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e sejam u e w soluções fortes de*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta w + w = |f|^* & \text{em } B \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B \end{cases}.$$

Então,

$$\int_\Omega |u|^{q+1} \leq \int_B |w|^{q+1}.$$

Demonstração: Para o caso de f suave, temos pelo Teorema 1.86 que $u^* \leq w^*$. Daí,

$$\int_\Omega |u|^{q+1} = \int_B |u^*|^{q+1} \leq \int_B |w^*|^{q+1} = \int_B |w|^{q+1}. \tag{3.7}$$

Se f não é suave, como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, existe uma sequência $(f_k)_{k=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $f_k \longrightarrow f$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos f_k suave, então para cada $k \in \mathbb{N}$ o seguinte problema possui solução em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u_k + u_k = f_k & \text{em } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $f_k \longrightarrow f$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, obtemos $u_k \longrightarrow u$ em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.
Agora, como a imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é contínua, existe $C \geq 0$ tal que

$$\|u_k - u\|_{q+1} \leq C\|u_k - u\| \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^{q+1}(\Omega). \tag{3.8}$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$ considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_k + w_k = |f_k|^* & \text{em } B, \\ w_k = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Pela continuidade da simetrização de Schwarz

$$\begin{array}{rccc} * \ : & L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{p+1}{p}}(B), \\ & f & \longmapsto & |f|^* \end{array}$$

existe $M \geq 0$ tal que

$$\||f_k|^* - |f|^*\|_{\frac{p+1}{p}} \leq M\|f_k - f\|_{\frac{p+1}{p}} \longrightarrow 0.$$

Assim, $|f_k|^* \longrightarrow |f|^*$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(B)$. Logo, $w_k \longrightarrow w$ em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(B)$.
Agora, pela continuidade da imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(B) \hookrightarrow L^{q+1}(B)$, obtemos

$$w_k \longrightarrow w \quad \text{em} \quad L^{q+1}(B). \tag{3.9}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |u|^{q+1}\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega |u_k|^{q+1}\mathrm{d}x \leq \lim_{k\to\infty}\int_B |w_k|^{q+1}\mathrm{d}x = \int_B |w|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

Onde a primeira igualdade é dada por (3.8), a desigualdade é dada por (3.7) uma vez que as f_k são suaves para todo $k \in \mathbb{N}$ e a segunda igualdade é dada por (3.9).
■

Lema 3.13. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq \geq 1$ e $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} \geq 1 - \dfrac{2}{n}$. Considere $f \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ e sejam u e $\overline{u}$ soluções fortes de*

$$-\Delta u + u = f, \quad -\Delta\overline{u} + \overline{u} = |f|^* \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}|^{q+1}\mathrm{d}x.$$

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $f_k := f|_{B_k}$, onde B_k é a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem de raio k. Denote por $\widetilde{h}$ a extensão por zero de uma determinada função $h : B_k \to \mathbb{R}$, isto é,

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } \ x \in B_k \\ 0 & \text{se } \ x \in \mathbb{R}^n \backslash B_k \end{cases}.$$

Afirmação 1: $\widetilde{|f_k|^*} = \widetilde{|f_k|^*}^{\,*} = |\widetilde{f_k}|^*$ em $\mathbb{R}^n$.

De fato, como $\widetilde{|f_k|^*}$ é radialmente simétrica e radialmente decrescente em relação a origem, obtemos $\widetilde{|f_k|^*} = \widetilde{|f_k|^*}^{\,*}$. Agora, como $|\widetilde{f_k}|$ e $\widetilde{|f_k|^*}$ possuem a mesma função de distribuição, obtemos $\widetilde{|f_k|^*}^{\,*} = |\widetilde{f_k}|^*$.

Observe que usamos a mesma notação para representar ambas as simetrizações de Schwarz em $\mathbb{R}^n$ e em B_k. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sejam $u_k, \overline{u}_k$ e w_k soluções fortes de

$$\begin{cases} -\Delta u_k + u_k = f_k & \text{em} \quad B_k \\ u_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_k \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta w_k + w_k = |f_k|^* & \text{em} \quad B_k \\ w_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_k \end{cases}$$

e

$$-\Delta \overline{u}_k + \overline{u}_k = \widetilde{|f_k|^*} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Decorre do Princípio do Máximo Forte (Teorema 1.66)que $\overline{u}_k \geq w_k$ em B_k. Daí, pelo Lema 3.12, temos

$$\int_{B_n} |u_k|^{q+1} \mathrm{d}x \leq \int_{B_k} |w_k|^{q+1} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}_k|^{q+1} \mathrm{d}x, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Pela continuidade da simetrização de Schwarz $* : L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \to L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ e desde que $\widetilde{f}_k \longrightarrow f$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$, juntamente com a Afirmação 1 segue que

$$\|\overline{u}_k - \overline{u}\| = \|\widetilde{|f_k|^*} - |f|^*\|_{\frac{p+1}{p}} = \|\widetilde{f}_k|^* - |f|^*\|_{\frac{p+1}{p}} \leq C\|\widetilde{f}_k - f\|_{\frac{p+1}{p}} \longrightarrow 0$$

para algum $C \geq 0$. Logo,

$$\overline{u}_k \longrightarrow \overline{u} \quad \text{em} \quad W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n). \tag{3.11}$$

Agora, como a imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, temos que $\overline{u}_k \longrightarrow \overline{u}$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 2: $\widetilde{u}_k \rightharpoonup u$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, seja $q' > 0$ tal que $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'+1} = 1$ pelo Lema 1.89 temos que $-\Delta + I : W^{2,q'+1}(\mathbb{R}^n) \to L^{q'+1}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo isométrico. Assim, para cada $\psi \in L^{q'+1}(\mathbb{R}^n)$ existe $\varphi \in W^{2,q'+1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = -\Delta\varphi + \varphi$. Para mostrar que $\psi(\widetilde{u}_k) \longrightarrow \psi(u), \quad \forall \psi \in {}^{q'+1}(\mathbb{R}^n)$, basta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\varphi(\widetilde{u}_k) + \varphi(\widetilde{u}_k)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\varphi(u) + \varphi(u)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W^{2,q'+1}(\mathbb{R}^n).$$

Com efeito, como o operador $-\Delta + I$ é simétrico e $\widetilde{f}_k \longrightarrow f$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} [-\Delta\varphi(\widetilde{u}_k) + \Delta\varphi(u) + \varphi(\widetilde{u}_k) - \varphi(u)]\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta(\varphi(\widetilde{u}_k) - \varphi(u)) + (\varphi(\widetilde{u}_k) - \varphi(u))\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\varphi(\widetilde{u}_k - u) + \varphi(\widetilde{u}_k - u)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta(\widetilde{u}_k - u)\varphi + (\widetilde{u}_k - u)\varphi\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta(\widetilde{u}_k) + \widetilde{u}_k + \Delta(u) - u)\varphi\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\widetilde{f}_k - f)\varphi\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\widetilde{f}_k - f)\mathrm{d}x \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\psi(\widetilde{u}_k) \longrightarrow \psi(u), \quad \forall \psi \in {}^{q'+1}(\mathbb{R}^n)$.

Segue da Afirmação 2 que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \mathrm{d}x \leq \liminf_{k \to \infty} \int_{B_k} |u_k|^{q+1} \mathrm{d}x.$$

Portanto de (3.10) e (3.11) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \mathrm{d}x \leq \liminf_{k \to \infty} \int_{B_k} |u_k|^{q+1} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}|^{q+1} \mathrm{d}x.$$

■

O próximo resultado nos diz que a constante $\beta_{p,q}$ é atingida.

Teorema 3.14. *A constante de minimização $\beta_{p,q}$ é atingida, isto é, existe $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{q+1} = 1$ e $\beta_{p,q} = \|u\|^{\frac{p+1}{p}}$.*

Demonstração: Defina

$$\beta_{p,q,r} := \inf \left\{ \|u\|^{\frac{p+1}{p}} : u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}_{rad}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1} = 1 \right\}. \tag{3.12}$$

Pelo Teorema 1.55 segue que a imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}_{rad}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ é compacta. Daí, temos que $\beta_{p,q,r}$ é atingido.

De fato, seja $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset W^{2,\frac{p+1}{p}}_{rad}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência tal que $\|u_k\|_{q+1} = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\|u_k\|^{\frac{p+1}{p}} \longrightarrow \beta_{p,q,r}$. Como, $W^{2,\frac{p+1}{p}}_{rad}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $W^{2,\frac{p+1}{p}}_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Por compacidade, obtemos que $u_{k_j} \longrightarrow u$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\|u\|_{q+1} = 1$.
Assim,

$$\beta_{p,q,r} \leq \|u\|^{\frac{p+1}{p}} \leq \liminf_{j \to \infty} \|u_{k_j}\|^{\frac{p+1}{p}} = \beta_{p,q,r}.$$

Portanto,

$$\beta_{p,q,r} = \|u\|^{\frac{p+1}{p}}.$$

Além disso, é claro que

$$\beta_{p,q} \leq \beta_{p,q,r}.$$

Para mostrar a desigualdade inversa, tomemos uma sequência de minimização $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ para $\beta_{p,q}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $f_k := -\Delta(u_k) + u_k$ e sejam $\overline{u}_k \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ solução forte de $-\Delta(\overline{u}_k) + \overline{u}_k = |f_k|^*$ em $\mathbb{R}^n$ e $w_k := \frac{\overline{u}_k}{\|\overline{u}_k\|_{q+1}}$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que $w_k \in W^{2,\frac{p+1}{p}}_{rad}(\mathbb{R}^n)$ e $\|w_k\|_{q+1} = 1$. Agora, pelo Lema 3.13, temos

$$\beta_{p,q,r} \leq \|w_k\|^{\frac{p+1}{p}} = \frac{\|\overline{u}_k\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|\overline{u}_k\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} \leq \frac{\|\overline{u}_k\|^{\frac{p+1}{p}}}{\|u_k\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \|\overline{u}_k\|^{\frac{p+1}{p}} = \|u_k\|^{\frac{p+1}{p}} \longrightarrow \beta_{p,q}$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Portanto $\beta_{p,q,r} = \beta_{p,q}$ e assim a constante $\beta_{p,q}$ é atingida. ■

Lema 3.15. *Seja $u \in \mathcal{N}_J$ tal que $J(u) = \mathcal{C}_J$, então u é solução Ground State do problema $(\widetilde{P_2})$. Reciprocamente, se u é Ground State do problema $(\widetilde{P_2})$, então $u \in \mathcal{N}_J$ e $J(u) = \mathcal{C}_J$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Basta mostrar que u é solução fraca do problema $(\widetilde{P_2})$. Seja $G(u) = J'(u)u = \int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x$. Então

$$G'(u)\psi = \frac{p+1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - (q+1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x.$$

Assim, para $u \in \mathcal{N}_J$, temos

$$\begin{aligned} G'(u)u &= \frac{p+1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - (q+1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{p+1}{p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - (q+1)\|u\|^{\frac{p+1}{p}} \\ &= \frac{1-pq}{p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange (Teorema 1.26), existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u)\psi = \lambda G'(u)\psi, \quad \forall \psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Se $\lambda \neq 0$, então

$$\begin{aligned} J'(u)\psi &= \int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x \\ &= \lambda\left(\frac{p+1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x - (q+1)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x\right) \\ &= \lambda G'(u)\psi. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\lambda = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{q+1}.$$

Porém,

$$\frac{p}{p+1} = \frac{1}{q+1} \Leftrightarrow p(q+1) = p+1 \Leftrightarrow pq + p = p+1 \Leftrightarrow pq = 1 \qquad \text{absurdo!.}$$

Portanto $\lambda = 0$ e

$$J'(u)\psi = 0, \quad \forall \psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n),$$

isto é, u é solução fraca do problema $(\widetilde{P_2})$.

$(\Leftarrow)$ Pelo Teorema 3.14, existe $\overline{u} \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\overline{u}\|_{q+1} = 1$ e $\beta_{p,q} = \|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}}$. Agora, pelo Lema 3.11 (iv), $u = \beta_{p,q}\overline{u}$ é solução de (3.3), isto é, $u \in \mathcal{N}_J$ e $J(u) = \mathcal{C}_J$. ■

Teorema 3.16. *Sejam p, q tais que $pq > 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Então, o problema $(\widetilde{P_2})$ tem solução de Groun State.*

Demonstração: De acordo com o Lema 3.15 basta mostrar que $\mathcal{C}_J$ é atingido.

Agora, pelo Lema 3.3 (iv) temos que $\mathcal{C}_J$ é atingido se, e somente se, $\beta_{p,q}$ é atingido. Portanto do Teorema 3.14, concluimos a prova. ■

Proposição 3.17. *Seja $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ solução de fraca do problema $(\widetilde{P_2})$, então o par (u,v), com $v = |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$ é solução fraca do problema (P_2).*

Demonstração: Como u é solução fraca de $(\widetilde{P_2})$, temos

$$\int_\Omega |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)(L\psi)\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Como $v = |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$, segue

$$\int_\Omega vL\psi\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Pela Observação 3.4, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\psi + v\psi\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n). \tag{3.13}$$

Agora, para todo $\varphi \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v|^{p-1}v\varphi\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left||Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu\right|^{p-1}|Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)\varphi\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |Lu|^{\frac{-(p-1)^2}{p}+p-1+\frac{1-p}{p}}(Lu)\varphi\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (Lu)\varphi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Novamente, pela Observação 3.4, temos

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + u\varphi\mathrm{d}x = \int_\Omega |v|^{p-1}v\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n). \tag{3.14}$$

Portanto, de (3.13) e (3.14), temos a prova. ■

Teorema 3.18. *Seja $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ uma solução Ground State do problema $(\widetilde{P_2})$ e defina $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)$, então o par (u,v) é solução Ground State do problema (P_2).*

Demonstração: Temos $v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que (u,v) é um ponto crítico do funcional F. Temos

$$F'(u,v)(\psi,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\psi\nabla v+\psi v)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p-1}v\varphi\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$F'(u,v)(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

Pela Proposição 3.17 temos que (u,v) é solução fraca do problema (P_2), daí da observação 3.4 segue que
$$F'(u,v)(u,v)=0.$$
Logo, (u,v) é ponto crítico de $F(u,v)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p+1}\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&= \left(1-\frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p-1}vv\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}(Lu)v\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}(Lu)|Lu|^{\frac{1}{p}-1}(Lu)\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|Lu|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&= J(u).
\end{aligned}$$

Portanto, da igualdade $F(u,v)=J(u)$, concluímos que (u,v) atinge o menor valor crítico não nulo de F, uma vez que u atinge o menor valor crítico não nulo de J. ■

3.3 Regularidade de solução

Vejamos agora resultados que provam a regularidade das soluções Ground State do problema (P_2), as quais existências foram garantidas na seção anterior.

Lema 3.19. *Sejam p,q tais que $pq>1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja (u,v) solução forte do Problema (P_2). Se para cada $m\in\mathbb{N}, u\in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todo*

$$\begin{array}{rclccc}
\frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m} & \leq & s\leq\frac{p+1}{p} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m-1}}>1 & e\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m}>1,\\
\max\{1,p^{-1}\} & < & s\leq\frac{p+1}{p} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m-1}}\leq 1 & e\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m}\leq 1.
\end{array}\tag{3.15}$$

Então $v\in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todo

$$\begin{array}{rclccc}
\frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^m} & \leq & t\leq\frac{q+1}{q} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m}}>1 & e\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m}>1,\\
\max\{1,q^{-1}\} & < & t\leq\frac{q+1}{q} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m}}\leq 1 & e\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m}\leq 1,
\end{array}\tag{3.16}$$

e $u\in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todo

$$\begin{array}{rclccc}
\frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m+1}} & \leq & s\leq\frac{p+1}{p} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m}}>1 & e\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^{m+1}}>1,\\
\max\{1,p^{-1}\} & < & s\leq\frac{p+1}{p} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m}}\leq 1 & e\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^{m+1}}\leq 1.
\end{array}$$

Além disso, se substituirmos em (3.15) do lardo esquerdo de s, $\frac{p+1}{p}$ por ∞ (desigualdade estrita) então podemos substituir em (3.16) do lado esquerdo de t, $\frac{q+1}{q}$ por ∞ (desigualdade estrita).

Demonstração: Desde que a imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ seja contínua, segue do Problema (P_2) e Teorema 1.72 que $v \in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todo

$$\begin{array}{lll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^m} \le t \le \frac{q+1}{q} & \text{se} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^m} > 1 \;\; \text{e} \;\; \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m} > 1, \\ \max\{1, q^{-1}\} < t \le \frac{q+1}{q} & \text{se} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^m} \le 1 \;\; \text{e} \;\; \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m} \le 1. \end{array}$$

Agora, desde que a imersão $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ seja contínua, segue do Problema (P_2) e Teorema 1.72 que $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todo

$$\begin{array}{lll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m+1}} \le s \le \frac{p+1}{p} & \text{se} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^m} > 1 \;\; \text{e} \;\; \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^{m+1}} > 1, \\ \max\{1, p^{-1}\} < s \le \frac{p+1}{p} & \text{se} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^m} \le 1 \;\; \text{e} \;\; \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^{m+1}} \le 1. \end{array}$$

■

Lema 3.20. *Sejam p, q tais que $pq > 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja (u, v) solução forte do Problema (P_2). Suponha que $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\frac{p+1}{p} \le s \le \frac{r+1}{r}$, para cada $0 < r \le p$. Considere que $r(n-2) - 2 > 0$, seja $\overline{s} > r$ tal que $\frac{1}{r+1} + \frac{1}{\overline{s}+1} = 1 - \frac{2}{n}$. Então $v \in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todos os valores de t no intervalo*

$$\begin{array}{lll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le t \le \frac{\overline{s}+1}{q} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} > 1 \;\; e \;\; r(n-2)-2 > 0, \\ \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le t < \infty & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} > 1 \;\; e \;\; r(n-2)-2 \le 0, \\ \max\{1, q^{-1}\} < t \le \frac{\overline{s}+1}{q} & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1 \;\; e \;\; r(n-2)-2 > 0, \\ \max\{1, q^{-1}\} < t < \infty & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1 \;\; e \;\; r(n-2)-2 \le 0, \end{array} \tag{3.17}$$

e $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todos os valores de s no intervalo

$$\left\{ \begin{array}{lll} s \ge \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq}, & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} > 1 \;\; e \;\; \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} > 1, \\ s > \max\{1, p^{-1}\}, & se & \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1 \;\; e \;\; \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} \le 1, \\ e & & \\ s \le \frac{(\overline{s}+1)n}{qn-2(\overline{s}+1)}\frac{1}{p}, & se & r(n-2)-2 > 0 \;\; e \;\; qn - 2(\overline{s}+1) > 0, \\ s < \infty, & se & r(n-2)-2 \le 0 \;\; e \;\; qn - 2(\overline{s}+1) \le 0. \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Além disso, no caso em que $r(n-2) - 2 > 0$ e $qn - 2(\overline{s}+1) > 0$, a relação entre $\frac{(\overline{s}+1)n}{qn-2(\overline{s}+1)}\frac{1}{p}$ e $\frac{r+1}{r}$ é mais do que $\gamma := \frac{\overline{q}+1}{p+1}\frac{\overline{p}+1}{q+1} > 1$, onde $\overline{q} > q$ e $\overline{p} > p$ são tais que

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\overline{q}+1} = 1 - \frac{2}{n}, \quad \frac{1}{\overline{p}+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Demonstração: O lado esquerdo de (3.17) e (3.18) seguem do Lema 3.19 com $m = 0$. Se $r(n-2) - 2 \le 0$ então $W^{2,\frac{r+1}{r}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $\frac{r+1}{r} \le t < \infty$ daí concluimos o lado direito de (3.17) e (3.18). Se $r(n-2) - 2 > 0$, então existe $\overline{s} > r$ tal que

$$\frac{1}{r+1} + \frac{1}{\overline{s}+1} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Desde $r \leq p$, temos $\overline{s} \geq \overline{q}$, e pelo Teorema 1.72 temos $v \in W^{2,\frac{\overline{s}+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$. Agora, pelo Teorema 1.72 concluimos que $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ como no lado direito de (3.18). Quando a conclusão do Lema 3.20, segue de $\frac{1}{r+1} + \frac{1}{\overline{s}+1} = 1 - \frac{2}{n}$ que

$$\overline{s} + 1 = \frac{(r+1)n}{r(n-2)-2}.$$

Daí,

$$\frac{(\overline{s}+1)n}{qn - 2(\overline{s}+1)} \frac{1}{p} \frac{r}{r+1} = \frac{r}{q(r(n-2)-2) - 2(r+1)} \frac{n}{p}.$$

Considere a função $f(t) := \frac{t}{q(t(n-2)-2)-2(t+1)}$, temos que f é decrescente em $[r,p]$. De fato,

$$f'(t) = \frac{-2(q+1)}{[q(t(n-2)-2)-2(t+1)]^2} < 0.$$

Temos de $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\overline{q}+1} = 1 - \frac{2}{n}$ e $\frac{1}{\overline{p}+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}$ que

$$\frac{\overline{q}+1}{p+1} = \frac{n}{p(n-2)-2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{p}+1}{q+1} = \frac{n}{q(n-2)-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{(\overline{s}+1)n}{qn-2(\overline{s}+1)} \frac{1}{p} \frac{r}{r+1} &= \frac{r}{q(r(n-2)-2)-2(r+1)} \frac{n}{p} \\
&\geq \frac{p}{q(p(n-2)-2)-2(p+1)} \frac{n}{p} \\
&= \frac{n^2}{nq(p(n-2)-2)-2n(p+1)} \\
&= \frac{n^2}{nq(p(n-2)-2) - 2\frac{n(p+1)}{np-2(p+1)}(p(n-2)-2)} \\
&= \frac{n^2}{nq(p(n-2)-2) - 2(p(n-2)-2)(\overline{q}+1)} \\
&= \frac{n^2}{[p(n-2)-2][qn-2(\overline{q}+1)]} \\
&= \frac{n}{p(n-2)-2} \frac{n}{qn-2(\overline{q}+1)} \\
&= \frac{\overline{q}+1}{p+1} \frac{n}{q(n-2)-2-2(\overline{q}-q)} \\
&> \frac{\overline{q}+1}{p+1} \frac{n}{q(n-2)-2} \\
&= \frac{\overline{q}+1}{p+1} \frac{\overline{p}+1}{q+1} := \gamma > 1.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.21. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq > 1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ uma solução fraca de $(\widetilde{P_2})$ e defina $v := |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$. Então $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todos s e t nos intervalos: max$\{1, \frac{1}{p}\} < s < \infty$,*

$max\{1, \frac{1}{q}\} < t < \infty$.

Demonstração: Dividimos a prova em dois caso, $p(n-2)-2 \le 0$ e $p(n-2)-2>0$.

Caso 1: $p(n-2)-2 \le 0$

A condição $p(n-2)-2 \le 0$ garante a imersão contínua $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $\frac{p+1}{p} \le r < \infty$. Por outro lado, pelo Teorema 1.72 temos que existe uma única solução forte de $Lw = |u|^{q-1}u$ em $\mathbb{R}^n$ e $w \in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\begin{array}{lcll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} & \le & t<\infty & \text{se} \quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} > 1, \\ 1 & < & t < \infty & \text{se} \quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1. \end{array}$$

No caso $\frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1$ nós temos $|u|^{q-1}u \in L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \le t < \infty$.

Agora, novamente pelo Teorema 1.72 existe uma única solução forte de $Lz = |w|^{p-1}w$ em $\mathbb{R}^n$ e $z \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\begin{array}{lcllll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} & \le & s<\infty & \text{se} \quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} > 1 & \text{e} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} > 1, \\ \max\{1,p^{-1}\} & < & s < \infty & \text{se} \quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1 & \text{e} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} \le 1. \end{array}$$

Desde que $pq > 1$, e daí segue que $z \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Dada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, seja $\varphi \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ solução forte de $L\varphi = \psi$ em $\mathbb{R}^n$. Assim, para toda $\psi = L\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |Lz|^{\frac{1}{p}-1} Lz L\varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} w L\varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (Lw)\varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |Lu|^{\frac{1}{p}-1} Lu L\varphi dx. \end{aligned}$$

Logo, obtemos $z = u$ e $w = |Lz|^{\frac{1}{p}-1}Lz = |Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu = v$. Portanto, (u, v) é solução forte do Problema (P_2) e $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todo

$$\begin{array}{lcllll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} & \le & s<\infty & \text{se} \quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} > 1 & \text{e} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} > 1, \\ \max\{1,p^{-1}\} & < & s < \infty & \text{se} \quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} \le 1 & \text{e} & \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq} \le 1. \end{array}$$

Seja $k = \min\{m \in \mathbb{N} : \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\frac{1}{(pq)^{m-1}} \le 1 \text{ e } \frac{p+1}{p}\frac{1}{(pq)^m} \le 1\}$. Aplicando k vezes consecutivas o Lema 3.19 e usando o fato de $pq > 1$, obtemos que $u \in W^{2,s}(\mathbb{R}^n), v \in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todos $\max\{1, p^{-1}\} < s < \infty, \max\{1, q^{-1}\} < t < \infty$.

Caso 2: $p(n-2)-2>0$.

Fixamos $\overline{q}>q$ e $\overline{p}>p$ tais que

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{\overline{q}+1}=1-\frac{2}{n},\quad \frac{1}{\overline{p}+1}+\frac{1}{q+1}=1-\frac{2}{n}.$$

Assim, temos a continuidade da imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^{\overline{q}+1}(\mathbb{R}^n)$.

Seja w como definido no caso 1. Então $w\in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\begin{array}{lcll} \frac{p+1}{p}\frac{1}{q} & \leq & t\leq \frac{\overline{q}+1}{q} & \text{se}\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}>1,\\ 1 & < & t\leq \frac{\overline{q}+1}{q} & \text{se}\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\leq 1.\end{array}$$

Seja z como definido no caso 1. Usando a imersão de Sobolev de $W^{2,\frac{\overline{q}+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$, segue que $z\in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ para todos os valores de s nos intervalos:

$$\begin{cases} s\geq \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq}, & \text{se}\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}>1 \quad \text{e}\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq}>1,\\ s>\max\{1,p^{-1}\}, & \text{se}\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{q}\leq 1 \quad \text{e}\quad \frac{p+1}{p}\frac{1}{pq}\leq 1,\\ \text{e} & \\ s\leq \frac{\tilde{q}+1}{p}:=\frac{(\overline{q}+1)n}{qn-2(\overline{q}+1)}\frac{1}{p}, & \text{se}\quad qn-2(\overline{q}+1)>0,\\ s<\infty, & \text{se}\quad qn-2(\overline{q}+1)\leq 0.\end{cases}$$

Quando a fração $\frac{\tilde{q}+1}{p}$ corresponde ao caso $qn-2(\overline{q}+1)>0$, nós temos $\frac{\tilde{q}+1}{p}>\frac{p+1}{p}$. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{q}+1}{p+1} &= \frac{(\overline{q}+1)n}{qn-2(\overline{q}+1)}\frac{1}{p+1}=\frac{\overline{q}+1}{p+1}\frac{n}{q(n-2)-2(\overline{q}-q)-2}\\ &> \frac{\overline{q}+1}{p+1}\frac{n}{q(n-2)-2}=\frac{\overline{q}+1}{p+1}\frac{\overline{p}+1}{q+1}=:\gamma>1. \end{aligned}\tag{3.19}$$

Nós concluimos que $z\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ e do caso 1 segue que $z=u$. Portanto, da mesma forma obtemos (u,v) é solução forte do Problema (P_2), com $v:=|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$. Agora, aplicando os Lemas 3.19 e 3.20 obtemos que $u\in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$, $v\in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todos $\max\{1,p^{-1}\}<s<\infty, \max\{1,q^{-1}\}<t<\infty$. ■

Teorema 3.22. *Sejam $p,q>0$ tais que $pq>1$ e satisfazem a hipótese $(H1)$. Seja $u\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ uma solução Ground State de $(\widetilde{P_2})$ e defina $v:=|Lu|^{\frac{1}{p}-1}Lu$. Então $u\in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $v\in C^{2,\beta}(\mathbb{R}^n)$ para todos α e β nos intervalos: $0<\alpha\leq \min\{1,p\}$ e $0<\beta\leq\min\{1,q\}$.*
Em particular (u,v) é solução clássica do sistema (P_2).

Demonstração: Pelo Teorema 3.21 temos que $u\in W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ e $v\in W^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ para todos $max\{1,\frac{1}{p}\}<s<\infty$ e $max\{1,\frac{1}{q}\}<t<\infty$. Agora, pelo Teorema 1.53 item (iii) obtemos que $u,v\in C^{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ para cada $0<\gamma<1$.

Agora, observe que se $r > 1$ e $w \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ então $|w|^{r-1}w \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\alpha = \min\{\gamma, f(r)\}, \quad f(r) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad r \in \mathbb{N} \\ r - [r], & \text{se} \quad r \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Em particula, $|w|^{r-1}w \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. Enquanto que $0 < r \leq 1$ e $w \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ então a inequação

$$\big||a|^{r-1}a - |b|^{r-1}b\big| \leq 2^{1-r}|a-b|^r \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

nós dá que $|w|^{r-1}w \in C^{0,r}(\mathbb{R}^n)$.
Assim, como $u, v \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, temos que $|u|^{q-1}u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ se $q > 1$ e $|u|^{q-1}u \in C^{0,q}(\mathbb{R}^n)$ se $0 < q \leq 1$, $|v|^{p-1}v \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ se $p > 1$ e $|v|^{p-1}v \in C^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ se $0 < p \leq 1$. Logo, $|u|^{q-1}u \in C^{0,\beta}(\mathbb{R}^n)$ e $|v|^{p-1}v \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ com $\beta = \min\{1, q\}$ e $\alpha = \min\{1, p\}$.
Portanto, aplicando o Teorema 1.74 nos problemas $Lv = |u|^{q-1}u$ em $\mathbb{R}^n$ e $Lu = |v|^{p-1}v$ em $\mathbb{R}^n$, obtemos que $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^{2,\beta}(\mathbb{R}^n)$, com $0 < \alpha \leq \min\{1, p\}$ e $0 < \beta \leq \min\{1, q\}$. ■

Capítulo 4

O sistema em todo $\mathbb{R}^n$ com $L = -\Delta$

4.1 Introdução

Neste capítulo, dedicamos ao estudo de existência e unicidade do seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (P_3)$$

Aqui $u = u(x), v = v(x), x \in \mathbb{R}^n, (n \geq 3)$, Δ é o operador de Laplace e p, q satisfazem

$$p, q > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}. \qquad (H2)$$

Definição 4.1. *Dizemos que o par (u, v) é solução clássica do problema (P_3) se $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem o problema (P_3).*

Definição 4.2. *Dizemos que (u, v) é solução forte do problema (P_3) se $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ e (u, v) satisfazem (P_3) q.t.p em Ω.*

Definição 4.3. *Dizemos que o par $(u, v) \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ é solução fraca do problema (P_3), se u e v satisfazem:*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n), \\ \int_\Omega \nabla v \nabla \psi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} u \psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Observação 4.4. *Seja $(u, v) \in \mathcal{D}^{2\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ uma solução fraca do problema (P_3), então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^{p+1} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} v(-\Delta u) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta v) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1} \mathrm{d}x.$$

De fato, pela definição 4.3 temos que

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n), \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla \psi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} u \psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Em particular, tomando $\varphi = v \in \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ na primeira equação, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} v(-\Delta u) \mathrm{d}x$$

e tomando $\psi = u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ na segunda equação, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla u \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta v) \mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^{p+1} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} v(-\Delta u) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta v) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1} \mathrm{d}x.$$

Considere o funcional $J_{p,q} \in C^1 \left(\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R} \right)$ dado por

$$J_{p,q}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1} \mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

A derivada de Gateaux de $J_{p,q}$ em (u,v) na direção de (ψ, φ) é dada por

$$J'_{p,q}(u,v)(\psi,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \psi \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} u \psi \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que se (u,v) é solução fraca do problema (P_3) então (u,v) é um ponto crítico do funcional $J_{p,q}$.

Definição 4.5. *Um par $(u,v) \neq (0,0)$ é chamado de Ground State de (P_3) se*

(a) $(u,v) \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$, com p,q satisfazendo $(H2)$.

(b) (u,v) atinge o menor valor crítico não nulo de $J_{p,q}$.

Aqui os espaços $\mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ são definidos como o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com as respectivas normas $\|\Delta.\|_{\frac{q+1}{q}}$ e $\|\Delta.\|_{\frac{p+1}{p}}$, ou ainda, pela Proposição 1.88, temos

$$\mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^{p+1}(\mathbb{R}^n) : \Delta v \in L^{\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)\}, \quad \tfrac{1}{p+1} + \tfrac{1}{q+1} = \tfrac{n-2}{n},$$

$$\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\}, \quad \tfrac{1}{p+1} + \tfrac{1}{q+1} = \tfrac{n-2}{n}.$$

No problema (P_3), da primeira igualdade temos $v = |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$. Assim, substituindo esta na segunda equação, obtemos a equação escalar

$$-\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)) = |u|^{q-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \qquad (\widetilde{P_3})$$

Assim, primeiramente vamos buscar solução fraca da equação $(\widetilde{P_3})$. Para trabalhar com a equação $(\widetilde{P_3})$ usamos o espaço $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4.6. *Dizemos que $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ é solução fraca de $(\widetilde{P_3})$ se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n).$$

Considere o seguinte funcional $T \in C^1(\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$T(u) = \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x. \qquad (4.2)$$

A derivada de Gateaux de T em u na direção de ψ é dada por

$$T'(u)\psi = \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}u\psi\mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que u é solução fraca de $(\widetilde{P_3})$ se, e somente se, u é um ponto crítico do funcional T.

Definição 4.7. *Dizemos que $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ é solução de Ground State de $(\widetilde{P_3})$ se T atinge seu menor valor crítico não nulo em u.*

Como nos capítulos anteriores definimos a variedade de Nehari associado ao funcional T, dado por

$$\mathcal{N}_T := \left\{u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\} : T'(u)u = 0\right\}.$$

e consideremos os seguintes problemas de minimização

$$\mathcal{C}_T := \inf_{u\in\mathcal{N}_T} T(u) \qquad (4.3)$$

e

$$S_{p,q} := \inf\left\{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} : u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1} = 1\right\} \qquad (4.4)$$

onde $\|u\|_{q+1} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}dx$.

Na próxima seção provaremos que as constantes $S_{p,q}$ e $\mathcal{C}_T$ são atingidas e com isso mostraremos a existência de solução Ground State do problema (P_3).

4.2 Existência de solução

Nesta seção, vamos mostrar a existência de solução Ground State do problema (P_3) a partir da existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_3})$.

4.2.1 Relações entre as constantes $S_{p,q}$ e $\mathcal{C}_T$

Como feito nos capítulos anteriores, nessa seção vejamos alguns resultados que relacionam as constantes $\mathcal{C}_T$ e $S_{p,q}$.

Lema 4.8. *Dado* $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, *existe único* $t = t(u) > 0$ *tal que* $t(u)u \in \mathcal{N}_T$, *a saber*

$$t(u) = \left(\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}}.$$

Demonstração: Vejamos primeiramente que $t(u)u \in \mathcal{N}_J$,

$$\begin{aligned}
T'(t(u)u).t(u)u &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta t(u)u|^{\frac{p+1}{p}} - \int_{\mathbb{R}^n} |t(u)u|^{q+1} \\
&= |t(u)|^{\frac{p+1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - |t(u)|^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \\
&= \left(\left(\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}} \right)^{\frac{p+1}{p}} \|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} - \left(\left(\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}} \right)^{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&= \left(\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}} \right)^{\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}} - \left(\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}} \right)^{\frac{(p+1)(q+1)}{pq-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $t(u)u \in \mathcal{N}_T$.
Agora, seja $C > 0$ tal que $Cu \in \mathcal{N}_T$, então $T'(Cu).Cu = 0$, daí

$$\begin{aligned}
T'(Cu).Cu = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta(Cu)|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |Cu|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad C^{\frac{p+1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}x = C^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad C^{\frac{p+1}{p}} \|\Delta u\| + \frac{p+1}{p}^{\frac{p+1}{p}} = C^{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&\Leftrightarrow \quad C^{\frac{pq-1}{p}} = \frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \\
&\Leftrightarrow \quad C = \left(\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{pq-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, das equivalências acima, temos a unicidade de $t(u)$. ■

Lema 4.9. *Seja $u \in \mathcal{N}_T$, então*

(*i*) $T(u) = \dfrac{2}{n}\|u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}$,

(*ii*) $\dfrac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{n}{2}T(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}$.

Demonstração: Note que se $u \in \mathcal{N}_T$ então $T'(u)u = 0$, daí

$$\begin{aligned}
0 &= T'(u)u = \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta u) - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}uu \\
&= T'(u)u = \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1}.$$

(*i*) : Usando a igualdade obtida acima, temos

$$\begin{aligned}
T(u) &= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \\
&= \frac{p}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \\
&= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \\
&= \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a prova de (i).

(ii) : De fato, como $u \in \mathcal{N}_T$, temos pelo item (i) que $T(u) = \frac{2}{n}\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} &= \frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{1}{q+1}(\frac{p+1}{p})^2}} = \left(\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}\right)^{1-\frac{1}{q+1}\cdot\frac{p+1}{p}} \\
&= \left(\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \left(\frac{n}{2}T(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.10. *Os problemas de minimização* (4.3) *e* (4.4) *são equivalentes no sentido de:*

(i) *Dada uma sequência de minimização* $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_T$ *de* (4.3), *temos que* $(\|u_k\|_{q+1}^{-1}u_k)_{k=1}^{\infty}$ *é uma sequência de minimização de* (4.4).

(ii) *Dada uma sequência de minimização* $(\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *de* (4.4), *temos que* $(\|\Delta\overline{u}_k\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *é uma sequência de minimização de* (4.3).

(iii) *Temos a igualdade:*

$$\mathcal{C}_T = \frac{2}{n}S_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}}$$

(iv) *A constante* $S_{p,q}$ *é atingida se, e somente se,* $\mathcal{C}_T$ *é atingido. Além disso, se* $\overline{u}$ *é solução de* (4.4), *então* $\|\Delta\overline{u}\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u} = S_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}}\overline{u}$ *é solução de* (4.3), *e por outro lado, se* u *é solução de* (4.3), *então* $\|u\|_{q+1}^{-1}u$ *é solução de* (4.4).

Demonstração: Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_T$ uma sequência de minimização de (4.3), então pelo Lema 4.9 (ii) temos

$$
\begin{aligned}
S_{p,q} &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\|\Delta u_k\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u_k\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{n}{2}T(u_k)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} \\
&= \left(\frac{n}{2}\mathcal{C}_T\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}}.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Por outro lado, seja $(\overline{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de minimização de (4.4), então pelo Lema 4.8, temos que $(\|\Delta\overline{u}_k\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k)_k^{\infty} \subset \mathcal{N}_T$ e pelo Lema 4.9 (i) temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_T &\leq \lim_{k\to\infty} T(\|\Delta\overline{u}_k\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}}\overline{u}_k) = \frac{2}{n}\lim_{k\to\infty}\|\Delta\overline{u}_k\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}\cdot\frac{p+1}{p}} \\
&= \frac{2}{n}S_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Portanto, de (4.5) e (4.6), obtemos a prova de $(i), (ii)$ e (iii).
Agora, suponha que $\overline{u} \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\|\overline{u}\|_{q+1} = 1$ e $S_{p,q} = \|\Delta \overline{u}\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}$, então pelo Lema 4.8 temos que $\|\Delta \overline{u}\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{pq-1}} \overline{u} = S_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}} \overline{u} \in \mathcal{N}_T$. Assim, para cada $u \in \mathcal{N}_T$, temos pelo Lema 4.9 (ii) que

$$\left(\frac{n}{2} T\left(S_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}} \overline{u}\right)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \|\Delta \overline{u}\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} =$$

$$= S_{p,q} \leq \frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{n}{2} T(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}},$$

daí, $T\left(S_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}} \overline{u}\right) \leq T(u), \forall u \in \mathcal{N}_T$. Portanto, $T\left(S_{p,q}^{\frac{p}{pq-1}} \overline{u}\right) = \mathcal{C}_T$.
Por outro lado, suponha $u \in \mathcal{N}_T$ tal que $T(u) = \mathcal{C}_T$, então pelo Lema 4.9 (ii) e pelo item (iii) já provado, temos

$$\frac{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}}}{\|u\|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}} = \left(\frac{n}{2} T(u)\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = \left(\frac{n}{2} \mathcal{C}_T\right)^{\frac{pq-1}{p(q+1)}} = S_{p,q}.$$

E, portanto, temos a prova de (iv). ∎

4.2.2 A constante $S_{p,q}$

Apresentaremos aqui, o resultado de Lions [22], juntamente com sua apliação, garantido assim que a constante $S_{p,q}$ é atingida.

Defina

$$I := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^{\frac{p+1}{p}} dx : u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} dx = 1 \right\}. \tag{4.7}$$

Por Lions [22] (Teorema I.1 e Corolário I.2) temos os seguintes resultados:

Teorema 4.11. *Toda sequência de minimização* $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ *de* (4.7) *é relativamente compacta em* $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ *a menos de uma translação e uma expansão, isto é, existem sequências* $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ *em* $(0, \infty)$ *tais que a nova sequência* $(\tilde{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *dada por*

$$\tilde{u}_k(.) = \sigma_k^{\frac{-n}{q+1}} u_k\left(. - \frac{y_k}{\sigma_k}\right)$$

é relativamente compacta em $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$.
Em particular, existe o mínimo de (4.7).

Demonstração: Veja Lions [[22], Teorema I.1]. ∎

Corolário 4.12. *Seja* $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de minimização de* (4.4). *Então existem sequências* $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ *em* $(0,\infty)$ *tais que a nova sequência* $(\tilde{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ *dada por*

$$\tilde{u}_k(.) = \sigma_k^{\frac{-n}{q+1}} u_k\left(. - \frac{y_k}{\sigma_k}\right)$$

é relativamente compacta em $\mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$. *Em particular o mínimo de* (4.4) *é atingido.*
Além disso, se $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ *é um mínimo de* (4.4), *então existe* $y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\tilde{u}(.) = u(. - y)$ *satisfaz:*
$-\Delta\tilde{u}$ *é radialmente simétrica, não negativa e decrescente em norma.*

Demonstração: Veja Lions [[22], Corolário I.2]. ■

4.2.3 Existência de Soluções Ground State

Apresentaremos aqui o resultado de existência de solução Ground State do problema (P_3), com p, q satisfazendo a hipérbole $(H2)$.

Teorema 4.13. *Sejam* $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$ *solução da equação escalar* $(\widetilde{P_3})$ *e* $v = |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)$. *Então o par* (u,v) *é solução grand state do problema* (P_3). *Além disso, o menor valor crítico não zero de* $J_{p,q}$ *é dado por*

$$I_{p,q} = \frac{2}{n} K_{p,q}^{\frac{n}{2}},$$

com

$$K_{p,q} := \inf\left\{\|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}} : u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{q+1} = 1\right\}.$$

Demonstração: Já temos que $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Daí, $v = |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u) \in L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. Agora, pela equação escalar $(\widetilde{P_3})$ temos $-\Delta v = -\Delta(|\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u) = |u|^{q-1}u \in L^{\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$, já que $u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $(u,v) \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$.
Agora, resta mostrar que o par (u,v) atinge o menor valor crítico não zero de $J_{p,q}(u,v)$. Temos

$$J'_{p,q}(u,v).(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\varphi\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla\psi dx - \int_{\mathbb{R}^n} |u^{q-1} u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} v\psi dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J'_{p,q}(u,v).(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} u u \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} v v \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^n} v \Delta u \mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta u) \mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, (u,v) é ponto crítico de $J_{p,q}(u,v)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
J_{p,q}(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+1} \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+1} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x \\
&= \left(1 - \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x = \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \\
&= T(u).
\end{aligned}$$

Logo, da igualdade $J_{p,q}(u,v) = T(u)$, concluímos que (u,v) atinge o menor valor crítico não nulo de $J_{p,q}$, uma vez que u atinge o menor valor crítico não nulo de T.

Além disso, como $\frac{p+1}{p}.\frac{p(q+1)}{pq-1} = \frac{n}{2}$, obtemos que o menor valor crítico não zero de $J_{p,q}$ é dado por

$$I_{p,q} = \mathcal{C}_T = \frac{2}{n} S_{p,q}^{\frac{p(q+1)}{pq-1}} = \frac{2}{n} K_{p,q}^{\frac{n}{2}}.$$

■

4.3 Unicidade de Solução

Vejamos agora um resutado sobre a unicidade de solução clássica positiva e radialmente simétrica do problema (P_3).

Definição 4.14. *Seja $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função radial, dizemos que $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\zeta(r) = w(x)$, com $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é a **função normalizada** de w.*

Vamos escrever a equação de Laplace em coordenadas radiais.
Seja $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função radial, considere $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a função normalizada de w. Para cada $i = 1, ..., n$ usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_i} = \zeta'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}.$$

Derivando novamente, obtemos

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i^2} = \zeta''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \zeta'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}.$$

Agora,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\zeta''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \zeta'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\right] \\
&= \zeta''(r)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2} + \zeta'(r)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= \zeta''(r) + \zeta'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right) \\
&= \zeta''(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)\zeta'(r).
\end{aligned}$$

De agora em diante, vamos considerar o sistema normalizado e vamos definir $u(0) = 1$. Assim, o nosso problema passa a ser o sequinte sistema

$$\begin{cases} -v'' - \frac{n-1}{r}v' = |u|^{q-1}u & \text{em} \quad \mathbb{R}, \\ -u'' - \frac{n-1}{r}u' = |v|^{p-1}v & \text{em} \quad \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.8}$$

com condições de contorno

$$u'(0) = v'(0) = u(\infty) = v(\infty) = 0.$$

Proposição 4.15. *Sejam $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ tais que*

$$\begin{cases} -v'' - \frac{n-1}{r}v' = |u|^{q-1}u & \textit{em} \quad \mathbb{R}, \\ -u'' - \frac{n-1}{r}u' = |v|^{p-1}v & \textit{em} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Então,

$$v'(r) = -r^{1-n}\int_0^r s^{n-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds$$

e

$$u'(r) = -r^{1-n}\int_0^r s^{n-1}|v(s)|^{p-1}v(s)ds.$$

Demonstração: Faremos o cálculo de $v'(r)$, pois para $u'(r)$ é análogo.

Considere a EDO de segunda ordem não homogênea,

$$-v'' - \frac{n-1}{r}v' = |u|^{q-1}u$$

como queremos encontrar $v'(r)$ podemos olhar para esta EDO como sendo uma de primeira ordem não homogênea, da seguinte forma

$$y' + \frac{n-1}{x}y = -f(x)$$

onde $x = r$, $y = u'$ e $f(x) = |u|^{q-1}u$.
Fator integrante: $e^{\int \frac{n-1}{x}dx} = e^{(n-1)ln(x)} = x^{n-1}$.
Multiplicando por x^{n-1} na equação $y' + \frac{n-1}{x}y = -f(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} x^{n-1}y' + (n-1)x^{n-2}y &= -x^{n-1}f(x), \\ \left(x^{n-1}y\right)' &= -x^{n-1}f(x), \\ x^{n-1}y &= -\int_0^x s^{n-1}f(s)ds, \\ y &= -x^{1-n}\int_0^x s^{n-1}f(s)ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v'(r) = -r^{1-n}\int_0^r s^{n-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds.$$

■

Teorema 4.16. *Sejam p, q satisfazendo a hipótese $(H2)$. Então o sistema (P_3) tem no máximo uma única solução clássica $(u, v) \in \left(C^2(\mathbb{R}^n)\right)^2$ positiva.*

Demonstração: Suponha que existam duas soluções (u_1, v_1) e (u_2, v_2) do problema (P_3). Então as soluções normalizadas, que também denotaremos por (u_1, v_1) e (u_2, v_2) são soluções de (4.8).
Assim, $u_1(0) = u_2(0) = 1$ e escrevendo $v_1(0) = \sigma_1$ e $v_2(0) = \sigma_2$ devemos ter $\sigma_1 \neq \sigma_2$, então podemos assumir $\sigma_1 < \sigma_2$.

Agora, suponha que exista um primeiro ponto $0 < r_0 < \infty$ tal que $v_1(r_0) = v_2(r_0)$, então:

(a) $v_1'(r_0) \geq v_2'(r_0)$.

(b) Para $r \leq r_0$, temos

$$\begin{aligned} u_1'(r) &= -r^{1-n}\int_0^r s^{n-1}|v_1(s)|^{p-1}v_1(s)ds > -r^{1-n}\int_0^r s^{n-1}|v_2(s)|^{p-1}v_2(s)ds \\ &= u_2'(r). \end{aligned}$$

Com efeito, como $v_1(0) < v_2(0)$ e $v_1(r_0) = v_2(r_0)$ com $r_0 > 0$, obtemos que v_1 é crescente em $(0, r_0)$ ou v_2 é decrescente em $(0, r_0)$, o que implica $v_1'(r_0) \geq v_2'(r_0)$.

Para (b), basta usar a Proposição 4.15 e observar que $v_1(r) < v_2(r)$, para todo $r \in [0, r_0)$.

Disso, concluimos que $u_1(r) > u_2(r)$ para $r \in (0, r_0]$. Um raciocínio semelhante nós da $v_1'(r_0) < v_2'(r_0)$, que é uma contradição. Assim, $v_1(r) < v_2(r)$ para $0 \leq r < \infty$, e consequentemente $u_1'(r) > u_2'(r)$ e $u_1(r) > u_2(r)$ para $0 < r < \infty$.

Integrando u_1' e u_2' sobre $[r, R)$ e fazendo R tender a ∞, e usando as condições de contorno, obtemos $u_1(r) < u_2(r)$, o que novamente é uma contradição, completando a prova da unicidade. ■

4.4 A não existência de solução

Nessa seção apresentaremos o resultado de não existência de solução clássica positiva e radialmente simétrica do problema (P_3). Tal seção foi baseada no trabalho de Mitidieri [26].

Lema 4.17. *Seja $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $(n \geq 3)$, positiva, radialmente simétrica e tal que $\Delta\psi \leq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $r \in (0, \infty)$ temos*

$$r\psi'(r) + (n-2)\psi(r) \geq 0. \tag{4.9}$$

Demonstração: Como ψ é radialmente simétrica, temos

$$r\psi''(r) + (n-1)\psi'(r) = r\Delta\psi \leq 0, \quad \forall r > 0.$$

Assim,

$$(r\psi'(r) + (n-2)\psi(r))' = r\psi''(r) + (n-1)\psi'(r) \leq 0, \quad \forall r > 0. \tag{4.10}$$

Faremos a prova por contradição. Suponha que existe $r_0 > 0$ tal que

$$M = r_0\psi'(r_0) + (n-2)\psi(r) < 0, \tag{4.11}$$

então, pela positividade de ψ e por (4.10) temos

$$r\psi'(r) \leq r\psi'(r) + (n-2)\psi(r) \leq M, \quad \forall r > r_0.$$

Integrando a desigualdade $r\psi'(r) \leq M$ em (s, t) obtemos

$$-\psi(s) \leq \psi(t) - \psi(s) \leq M[\ln(t) - \ln(s)].$$

Fazendo $t \to \infty$ e recordando $M < 0$ obtemos uma contradição.
Portanto, concluimos a prova de (4.9). ■

Lema 4.18. *Seja $(u, v) \in \left(C^2(\mathbb{R}^n)\right)^2, n \geq 3$, solução positiva radialmente simétrica do problema (P_3), então existe $C > 0$ (dependendo de n, p e q) tal* *que*

$$u(r) \leq Cr^{-\frac{2(p+1)}{pq-1}}, \quad v(r) \leq Cr^{-\frac{2(q+1)}{pq-1}}. \tag{4.12}$$

$$|r^{n-1}u'v|, |r^{n-1}uv'|, |r^n u'v'| \leq Cr^{n-2-\frac{2(p+q+2)}{pq-1}} \tag{4.13}$$

para todo $r > 0$.

Demonstração: Como (u, v) é solução positiva radialmente simétrica do problema (P_3), então para todo $r > 0$ temos

$$-(u'r^{n-1})' = v^p r^{n-1},$$

$$-(v'r^{n-1})' = u^q r^{n-1},$$

e

$$u'(0) = v'(0) = 0.$$

Integrando ambas igualdades acima em $(0, r)$, e usando o fato que $u', v' < 0$ em $(0, \infty)$, obtemos

$$-u'(r)r^{n-1} = \frac{r^n}{n}v^p(r) - \frac{p}{n}\int_0^r v'(s)v^{p-1}(s)s^n \mathrm{d}s \geq \frac{r^n}{n}v^p(r), \tag{4.14}$$

$$-v'(r)r^{n-1} = \frac{r^n}{n}u^q(r) - \frac{q}{n}\int_0^r u'(s)u^{q-1}(s)s^n \mathrm{d}s \geq \frac{r^n}{n}u^q(r). \tag{4.15}$$

Aplicando o Lema 4.17 em u e v, temos para todo $r > 0$

$$ru'(r) + (n-2)u(r) \geq 0, \tag{4.16}$$

$$rv'(r) + (n-2)v(r) \geq 0. \tag{4.17}$$

Usando (4.16) e (4.17), juntamente com (4.14) e (4.15) obtemos

$$0 \geq (2-n)u(r) - ru'(r) \geq \frac{r^2}{n}v^p(r) + (2-n)u(r),$$

$$0 \geq (2-n)v(r) - rv'(r) \geq \frac{r^2}{n}u^q(r) + (2-n)v(r).$$

Agora, estas desigualdades implicam

$$r^2 v^p(r) \leq n(n-2)u(r),$$

$$r^2 u^q(r) \leq n(n-2)v(r).$$

Assim,

$$v(r) \leq [n(n-2)]^{\frac{1}{p}} r^{-\frac{2}{p}} u^{\frac{1}{p}}(r),$$

$$u(r) \leq [n(n-2)]^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{2}{q}} v^{\frac{1}{q}}(r),$$

e

$$v^{\frac{1}{q}}(r) \leq [n(n-2)]^{\frac{1}{pq}} r^{-\frac{2}{pq}} u^{\frac{1}{pq}}(r),$$
$$u^{\frac{1}{p}}(r) \leq [n(n-2)]^{\frac{1}{pq}} r^{-\frac{2}{pq}} v^{\frac{1}{pq}}(r).$$

Daí,

$$v(r) \leq [n(n-2)]^{\frac{q+1}{pq}} r^{-\frac{2(q+1)}{pq}} v^{\frac{1}{pq}}(r),$$
$$u(r) \leq [n(n-2)]^{\frac{(q+1)}{pq}} r^{-\frac{2(p+1)}{pq}} u^{\frac{1}{pq}}(r).$$

Tomando $C = [n(n-2)]^{\frac{q+1}{pq-1}}$ obtemos

$$u(r) \leq C r^{-\frac{2(p+1)}{pq-1}},$$

$$v(r) \leq C r^{-\frac{2(q+1)}{pq-1}}.$$

Provando então (4.12). Para prova de (4.13) é suficiente multiplicar (4.16) (respectivamente (4.17)) por vr^{n-2} (respectivamente $r^{n-2}u$). ∎

Teorema 4.19. *Sejam $p, q > 0$ tais que $pq \neq 1$ e*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}$$

então o problema (P_3) não admite solução positiva e radialmente simétrica de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Faremos a prova por contradição. Seja $(u, v) \in (C^2(\mathbb{R}^n))^2$ uma solução não trivial, positiva e radialmente simétrica do problema (P_3). Então, para todo $r > 0$ temos

$$-(u' r^{n-1})' = v^p r^{n-1},$$
$$-(v' r^{n-1})' = u^q r^{n-1},$$

e

$$u'(0) = v'(0) = 0.$$

Multiplicando por v (respectivamente u) e integrando ambas igualdades acima por partes em $(0, r)$ obtemos

$$-u'(r)v(r)r^{n-1} + \int_0^r u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s = \int_0^r v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s, \tag{4.18}$$

$$-v'(r)u(r)r^{n-1} + \int_0^r u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s = \int_0^r u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s. \tag{4.19}$$

Usando o fato

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{(p+1)(q+1)}{pq-1} > \frac{n}{2} \Rightarrow n - 2 < \frac{2(p+q+2)}{pq-1}$$

e (4.13) obtemos

$$\lim_{r\to\infty} u'(r)v(r)r^{n-1} = \lim_{r\to\infty} v'(r)u(r)r^{n-1} = 0,$$

$$\int_0^\infty u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s, \int_0^\infty v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s < \infty.$$

Agora, de (4.18) e (4.19) temos

$$\int_0^\infty u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s = \int_0^\infty v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s = \int_0^\infty u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s. \tag{4.20}$$

Além disso, integrando por partes o lado direito de (4.18) e (4.19) temos

$$-\int_0^R v^p(s)v'(s)s^n\mathrm{d}s - \int_0^R u^q(s)u'(s)s^n\mathrm{d}s$$

$$= \frac{n}{p+1}\int_0^R v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s + \frac{n}{q+1}\int_0^R u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s - \frac{u^{q+1}(R)R^n}{q+1} - \frac{v^{p+1}(R)R^n.}{p+1}$$

Por outro lado, aplicando a Identidade de Rellich (Proposição 2.35), na bola $B_R(0)$ temos

$$-\int_0^R v^p(s)v'(s)s^n\mathrm{d}s - \int_0^R u^q(s)u'(s)s^n\mathrm{d}s$$

$$= (n-2)\int_0^R u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s + R^n u'(R)v'(R).$$

Logo,

$$\frac{n}{p+1}\int_0^R v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s + \frac{n}{q+1}\int_0^R u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s$$

$$= (n-2)\int_0^R u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s + \frac{1}{p+1}R^n v^{p+1}(R) + \frac{1}{q+1}R^n u^{q+1}(R) + R^n u'(R)v'(R).$$

Assim,

$$\left|\frac{n}{p+1}\int_0^R v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s + \frac{n}{q+1}\int_0^R u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s - (n-2)\int_0^R u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s\right|$$
$$= \left|\frac{1}{p+1}R^n v^{p+1}(R) + \frac{1}{q+1}R^n u^{q+1}(R) + R^n u'(R)v'(R)\right|$$
$$\leq \frac{1}{p+1}\left|R^n v^{p+1}(R)\right| + \frac{1}{q+1}|R^n u^{q+1}(R)| + |R^n u'(R)v'(R)|.$$

Usando as desigualdades (4.12) e (4.13) do Lema 4.18, obtemos

$$|R^n v^{p+1}(R)| \leq CR^{n-\frac{2(q+1)(p+1)}{pq-1}} = CR^{n-2-\frac{2(p+q+2)}{pq-1}},$$

$$|R^n u^{q+1}(R)| \leq CR^{n-\frac{2(p+1)(q+1)}{pq-1}} = CR^{n-2-\frac{2(p+q+2)}{pq-1}},$$

$$|R^n u'(R)v'(R)| \leq CR^{n-2-\frac{2(p+q+2)}{pq-1}}.$$

Logo,

$$\left|\frac{n}{p+1}\int_0^R v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s + \frac{n}{q+1}\int_0^R u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s - (n-2)\int_0^R u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s\right|$$
$$\leq C\left(1+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}\right)R^{n-2-\frac{2(p+q+2)}{pq-1}}.$$

Agora, fazendo $R \to \infty$ e usando $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1} > 1-\frac{2}{n} \Rightarrow n-2 < \frac{2(p+q+2)}{pq-1}$ obtemos

$$\frac{n}{p+1}\int_0^\infty v^{p+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s+\frac{n}{q+1}\int_0^\infty u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s-(n-2)\int_0^\infty u'(s)v'(s)s^{n-1}\mathrm{d}s \leq 0.$$

E por (4.20) concluimos

$$\left(\frac{n}{p+1}+\frac{n}{q+1}-(n-2)\right)\int_0^\infty u^{q+1}(s)s^{n-1}\mathrm{d}s \leq 0$$

o que contradiz $\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{q+1} > 1-\dfrac{2}{n}$.

■

Capítulo 5

Sistema com peso

Este capítulo é, nossa principal contribuição neste trabalho.

5.1 Introdução

Neste capítulo, provamos a existência de solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{|v|^{p-1}v}{|x|^{\beta}} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{f(u)}{|x|^{\alpha}} & \text{em} \quad \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_4}$$

onde $n \geq 4$, $\alpha, \beta < n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave, limitado e contendo a origem e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Para garantir a existência de solução do sistema (P_4), dividiremos em dois casos: $\beta \leq 0$ e $0 < \beta < n$.

5.2 Caso $\beta \leq 0$

No caso em que $\beta \leq 0$, mostraremos a existência de solução do sistema (P_4), supondo que f e $F = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, satisfazem as condições

(f1) Existem constantes $\theta > 1 + \frac{1}{p}$ e s_0 tal que

$$\theta F(s) \leq f(s)s, \quad \forall |s| \geq s_0.$$

(f2) Se s está próximo de 0, então

$$f(s) = o(s^{\frac{1}{p}}).$$

No restante da seção, estaremos considerando $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$ e $q \geq 1$.

Definição 5.1. *Denotando* $E_{p,\beta} = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}}) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ *e* $E_{q,\alpha} = W^{2,q}(\Omega, |x|^{-\alpha}) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$*, dizemos que o par* $(u,v) \in E_{p,\beta} \times E_{q,\alpha}$ *é solução fraca do problema* (P_4)*, se* u *e* v *satisfazem:*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in E_{q,\alpha}, \\ \int_\Omega \nabla v \nabla \psi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u) \psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in E_{p,\beta}. \end{cases}$$

O funcional natural associado ao problema (P_4) é dado por

$$\Psi(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |v|^{p+1} \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x.$$

Se supormos que este funcional está bem definido é além disto, se $\Psi \in C^1(E_{p,\beta} \times E_{q,\alpha}, \mathbb{R})$, então a derivada de Gateaux de Ψ em (u,v) na direção de (ψ, φ) é dada por

$$\Psi'(u,v)(\psi,\varphi) = \langle \psi, v \rangle + \langle u, \varphi \rangle - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u) \psi \mathrm{d}x,$$

onde $\langle \mu, \vartheta \rangle = \int_\Omega \nabla \mu \nabla \vartheta \mathrm{d}x$.
Assim, observamos que se (u,v) é solução fraca do problema (P_4) então (u,v) é um ponto crítico do funcional Ψ.

Definição 5.2. *Dizemos que o par* $(u,v) \in E_{p,\beta} \backslash \{0\} \times E_{q,\alpha} \backslash \{0\}$ *é solução Ground State do problema* (P_4) *se* (u,v) *é solução fraca de* (P_4) *e atinge o menor valor crítico não nulo do funcional* Ψ.

Da primeira equação do problema (P_4), temos

$$v = |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}},$$

daí substituindo na segunda equação, obtemos

$$-\Delta \left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}} \right) = \frac{1}{|x|^\alpha} f(u).$$

Assim, obtemos uma equação equivalente:

$$\begin{cases} -\Delta \left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}} \right) = \frac{1}{|x|^\alpha} f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = -\Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (\widetilde{P_4})$$

Para trabalhar com o problema $(\widetilde{P_4})$ usamos o espaço $E_{p,\beta} = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}}) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{E_{p,\beta}} := \left(\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p+1}},$$

a qual é equivalente a norma

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega,|x|^{\frac{\beta}{p}})} = \left(\sum_{|\gamma|\leq 2} \int_\Omega |D^\gamma u(x)|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Definição 5.3. *Dizemos que $u \in E_{p,\beta}$ é uma solução fraca de $(\widetilde{P_4})$ se*

$$\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_{p,\beta}.$$

O funcional natural do problema $(\widetilde{P_4})$ é dado por:

$$\Phi(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x.$$

Se supormos que este funcional está bem definido é além disto, se $\Phi \in C^1(E_{p,\beta}, \mathbb{R})$, então a derivada de Gateaux de Φ em u na direção de ψ é dada por

$$\Phi'(u)\psi = \int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que u é solução fraca de $(\widetilde{P_4})$ se, e somente se u é um ponto crítico do funcional Φ.

Definição 5.4. *Dizemos que $u \in E_{p,\beta}\backslash\{0\}$ é solução de Ground State de $(\widetilde{P_4})$ se Φ atingi seu menor valor crítico não nulo em u.*

Proposição 5.5. *O espaço $E_{p,\beta}$ é reflexivo.*

Demonstração: Note que $\left(|x|^{\frac{\beta}{p}}\right)^{\frac{-1}{\frac{p+1}{p}-1}} = |x|^{-\beta} \in L^1(\Omega)$, pois $\beta \leq 0$. Assim, pela Proposição 1.58 obtemos que $E_{p,\beta}$ é um espaço de Banach uniformemente convexo e, portanto pelo Teorema 1.19, temos que $E_{p,\beta}$ é reflexivo. ∎

Proposição 5.6. *Sejam $n \geq 4$, $\alpha < n$ e $\beta \leq 0$. Então, os funcionais Ψ e Φ dados anteriormente estão bem definidos e são de classe C^1.*

Demonstração: Para provarmos que Ψ e Φ está bem definido, basta mostrar que $F(u) \in L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$ e $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$.

Mostremos primeiramente que $F(u) \in L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$.

Temos que $u \in E_{p,\beta}$, daí $F(u) \in E_{p,\beta}$.

Como $\beta \leq 0$, pelo Teorema 1.61 segue que $E_{p,\beta} \hookrightarrow W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Além disso, como $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$, pelo Teorema 1.54 tem-se $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Logo, $F(u) \in C(\overline{\Omega})$, e, portanto $F(u) \in L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$, uma vez que $\alpha < n$.

Mostremos que $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$.

Como $\beta \leq 0$, temos $v \in W^{2,q}(\Omega, |x|^{-\alpha})$, para todo $q \geq 1$. Assim, $|v|^{p+1} \in W^{2,\frac{q}{p+1}}(\Omega, |x|^{-\alpha})$, para todo $q \geq 1$. Logo, $|v|^{p+1} \in L^s(\Omega, |x|^{-\alpha})$, para todo $s \geq 1$.

Se $\alpha \geq 0$, pelo Teorema 1.61 temos $W^{2,\frac{q}{p+1}}(\Omega, |x|^{-\alpha}) \hookrightarrow W^{2,\frac{q}{p+1}}(\Omega)$, para todo $q \geq 1$. Tomando $q > \dfrac{n(p+1)}{2}$, temos que $W^{2,\frac{q}{p+1}}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Logo, $|v|^{p+1} \in C(\overline{\Omega})$, e, portanto $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$, uma vez que $\beta < n$.

Se $\alpha < 0$, tomando $q = 2(p+1)$, obtemos que $|v|^{p+1} \in W^{2,\frac{1+1}{1}}(\Omega, |x|^{-\alpha})$. Pelo Teorema 1.62, temos que $W^{2,\frac{1+1}{1}}(\Omega, |x|^{-\alpha}) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\beta})$, com $0 \leq p \leq p^*$, onde p^* é tal que

$$\frac{n-|\alpha|}{2} + \frac{n-|\beta|}{p^*+1} = n-2.$$

Resta verificarmos que $p^* > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{n-|\alpha|}{2} + \frac{n-|\beta|}{p^*+1} = n-2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n+\alpha}{2} + \frac{n-|\beta|}{p^*+1} = n-2 \\
&\Leftrightarrow \quad (p^*+1)(\alpha - n + 4) = 2|\beta| - 2n \\
&\Leftrightarrow \quad p^*+1 = \frac{2|\beta|-2n}{\alpha-n+4} \\
&\Leftrightarrow \quad p^* = \frac{2|\beta|-n-\alpha-4}{\alpha-n+4} \\
&\Leftrightarrow \quad p^* = \frac{2(|\beta|-n-4)}{\alpha-n+4} + 1 > 1,
\end{aligned}$$

pois, $|\beta| - n - 4 < 0$ e $\alpha - n + 4 < 0$. Portanto, $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$.

Agora, uma vez Φ e Ψ estando bem definidos, temos que estes são de classe C^1, pois F é de classe C^1. ∎

Apresentaremos dois resultados de existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_4})$, aplicando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.91).

Teorema 5.7. *(Sistema tipo Hénon) Sejam $\alpha < 0$, $\beta \leq 0$, $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$ e $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$. Suponha que f e F satisfazem as condições (f1) e (f2). Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.*

Demonstração: A prova segue aplicando o Teorema do Passo da Montanha ao funcional Φ em $E_{p,\beta}$.

Como $\beta \leq 0$, pelo Teorema 1.61 segue que $E_{p,\beta} \hookrightarrow W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Além disso, como $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$, temos pelo Teorema 1.54 a seguinte imersão compacta $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Logo, $E_{p,\beta} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, e portanto, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C_0 \|u\|_{E_{p,\beta}}.$$

Por hipótese, se s está próximo de 0, então $f(s) = o(s^{\frac{1}{p}})$, isto é,

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s^{\frac{1}{p}}} = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(s)|}{|s^{\frac{1}{p}}|} < \varepsilon,$$

sempre que $|s| < \delta$. Integrando, obtemos

$$F(s) < \varepsilon \frac{p}{p+1} |s|^{\frac{p+1}{p}},$$

sempre que $|s| < \delta$. Considere $\Gamma := \{u \in E_{p,\beta} : \|u\|_{E_{p,\beta}} = \frac{\delta}{2C_0}\}$. Então,

$$-\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x > -C_1 \frac{\varepsilon p}{p+1} \int_\Omega |u|^{\frac{p+1}{p}} \mathrm{d}x = -C_1 \frac{\varepsilon p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)}$$

para todo $u \in \Gamma$. Agora, $E_{p,\beta} \hookrightarrow W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, implica que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}}.$$

Daí,

$$-\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x > -\frac{C_1 C_2 \varepsilon p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}},$$

para todo $u \in \Gamma$. Além disso, como $\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}} \geq C_3 \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{C(\Omega)}$, segue que

$$-\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x > -\frac{C_1 C_2 C_3 \varepsilon p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{C(\Omega)},$$

para todo $u \in \Gamma$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{p}{p+1} \int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x \\
&> C_3 \frac{p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{C(\Omega)} - \frac{C_1 C_2 C_3 \varepsilon p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{C(\Omega)} \\
&= \frac{C_3 p}{p+1} \|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{C(\Omega)} (1 - C_1 C_2 \varepsilon),
\end{aligned}$$

para todo $u \in \Gamma$. Tomando $\varepsilon < \frac{1}{C_1 C_2}$, temos que

$$\Phi(u) \geq 0 = \Phi(0),$$

para todo $u \in \Gamma$. Logo, a origem $u_0 = 0$ é um mínimo local.
Agora, seja $u_1 \in E_{p,\beta}$ fixo. Temos que

$$\Phi(su_1) = s^{\frac{p+1}{p}} \frac{p}{p+1} \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(su_1) \mathrm{d}x.$$

Pela Observação 1.76, existem constantes $c, d_1 > 0$ tais que

$$F(su_1) \geq c s^\theta |u_1|^\theta - d_1.$$

Assim,

$$-\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(su_1) \mathrm{d}x \leq -c s^\theta \|u_1\|_{L^\theta(\Omega, |x|^{-\alpha})}^\theta + d \leq -C_1 s^\theta \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^\theta + d.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(su_1) &= s^{\frac{p+1}{p}} \frac{p}{p+1} \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(su_1) \mathrm{d}x \\ &\leq s^{\frac{p+1}{p}} \frac{p}{p+1} \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - s^\theta C_1 \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^\theta + d. \end{aligned}$$

Fazendo, $s \to +\infty$, obtemos que $\Phi(su_1) \to -\infty$.

Resta verificarmos que Φ satifaz a condição (PS).

Seja $(u_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência (PS), isto é,

$$|\Phi(u_k)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\Phi'(u_k) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Vamos mostrar que $(u_k)_{k=1}^\infty$ possui subsequência convergente em $E_{p,\beta}$.

Note que, $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Phi'(u_k)\|_{E'_{p,\beta}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{\varphi \in E_{p,\beta} \\ \|\varphi\|_{E_{p,\beta}} \neq 0}} \frac{|\Phi'(u_k)\varphi|}{\|\varphi\|_{E_{p,\beta}}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Assim,

$$\frac{|\Phi'(u_k)\varphi|}{\|\varphi\|_{E_{p,\beta}}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in E_{p,\beta} \backslash \{0\},$$

isto é,

$$|\Phi'(u_k)\varphi| \leq \varepsilon \|\varphi\|_{E_{p,\beta}}, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in E_{p,\beta}.$$

Sendo, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $E_{p,\beta}$, obtemos

$$|\Phi'(u_k)u_k| \leq \varepsilon \|u_k\|_{E_{p,\beta}}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Daí, para $k \geq k_0$ temos

$$\begin{aligned} |\theta\Phi(u_k) - \Phi'(u_k)u_k| &\leq \theta|\Phi(u_k)| + |\Phi'(u_k)u_k| \\ &\leq \theta M + \varepsilon\|u_k\|_{E_{p,\beta}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \theta M + \varepsilon\|u_k\|_{E_{p,\beta}} &\geq |\theta\Phi(u_k) - \Phi'(u_k)u_k| \\ &= \left| \frac{\theta p}{p+1}\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \theta\int_{\Omega)} \frac{F(u_k)}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x - \|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} + \int_\Omega \frac{f(u_k)u_k}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right)\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \right| \\ &\geq \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right)\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \left| \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \right|. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x &= \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|>s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \\ &\leq 0 + \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando Holder e o fato que $\alpha < n$, obtemos

$$\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k)}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \leq$$
$$\left(\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x\right) \leq C.K|\Omega|.$$

Onde

$$K = \max_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \theta M + \varepsilon\|u_k\|_{E_{p,\beta}} &\geq \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right)\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \left| \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \right| \\ &\geq \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right)\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - CK|\Omega|. \end{aligned}$$

Daqui, concluímos que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é limitada em $E_{p,\beta}$. Como $E_{p,\beta}$ é reflexivo, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ admite uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ fracamente convergente em $E_{p,\beta}$, isto é, existe $u_0 \in E_{p,\beta}$ tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad E_{p,\beta}.$$

Agora, como $E_{p,\beta} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ é compacta, $C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$ é contínua e F é diferenciável obtemos

$$F(u_{k_j}) \longrightarrow F(u_0) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega, |x|^{-\alpha}).$$

Por hipótese $(\Phi(u_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ é limitada. Assim, passando a subsequência se necessário obtemos que $(\Phi(u_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$ é convergente.
Observe que

$$\Phi(u_{k_j}) = \frac{p}{p+1}\|u_{k_j}\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \|F(u_{k_j})\|_{L^1(\Omega,|x|^{-\alpha})}.$$

Donde obtemos que $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ converge forte em $E_{p,\beta}$. Como $u_{k_j} \rightharpoonup u_0$, temos pela unicidade do limite que

$$u_{k_j} \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad E_{p,\beta}.$$

■

Teorema 5.8. *(Sistema tipo Hardy-Hénon 1) Sejam $0 \leq \alpha < n$, $\beta \leq 0$, $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$ e $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$. Suponha que f e F satisfazem as condições (f1) e (f2). Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.*

Demonstração: A prova deste é análoga a prova do Teorema 5.7 (Sistema tipo Hénon) . ■

5.3 Caso $0 < \beta < n$

No caso em que $0 < \beta < n$, mostraremos a existência de solução do sistema (P_4), supondo que f e F satisfazem as condições *(f1)* e

(f3) Existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$|f(s)| \leq a|s|^q + b.$$

No restante da seção, estaremos considerando $p, q > 1$ e satisfazendo

$$\frac{n-|\beta|}{p+1} + \frac{n-|\alpha|}{q+1} > n-2.$$

Definição 5.9. *Denotando $E_{p,\beta} = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}}) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $E_{q,\alpha} = W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{\frac{\alpha}{q}}) \cap W_0^{1,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, dizemos que o par $(u, v) \in E_{p,\beta} \times E_{q,\alpha}$ é solução* *fraca do problema (P_4), se u e v satisfazem:*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x, & \forall \varphi \in E_{q,\alpha}, \\ \int_\Omega \nabla v \nabla \psi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u) \psi \mathrm{d}x, & \forall \psi \in E_{p,\beta}. \end{cases}$$

Assim, como na seção anterior o funcional natural associado ao problema (P_4) é dado por

$$\Psi(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |v|^{p+1} \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u) \mathrm{d}x.$$

Se supormos que este funcional está bem definido é além disto, se $\Psi \in C^1(E_{p,\beta} \times E_{q,\alpha}, \mathbb{R})$, então a derivada de Gateaux de Ψ em (u,v) na direção de (ψ, φ) é dada por

$$\Psi'(u,v)(\psi,\varphi) = \langle \psi, v \rangle + \langle u, \varphi \rangle - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta} |v|^{p-1} v \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u) \psi \mathrm{d}x,$$

onde $\langle \mu, \vartheta \rangle = \int_\Omega \nabla \mu \nabla \vartheta \mathrm{d}x$.
Assim, observamos que se (u,v) é solução fraca do problema (P_4) então (u,v) é um ponto crítico do funcional Ψ.

Definição 5.10. *Dizemos que o par $(u,v) \in E_{p,\beta} \backslash \{0\} \times E_{q,\alpha} \backslash \{0\}$ é solução Ground State do problema (P_4) se (u,v) é solução fraca de (P_4) e atinge o menor valor crítico não nulo do funcional Ψ.*

Como na seção anterior, primeiramente vamos buscar solução para o problema equivalente

$$\begin{cases} -\Delta \left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1} (-\Delta u) |x|^{\frac{\beta}{p}} \right) = \frac{1}{|x|^\alpha} f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = -\Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (\widetilde{P_4}) \quad .$$

Para trabalhar com o problema $(\widetilde{P_4})$ usamos o espaço $E_{p,\beta} = W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}}) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{E_{p,\beta}} := \left(\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p+1}},$$

a qual é equivalente a norma

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega, |x|^{\frac{\beta}{p}})} = \left(\sum_{|\gamma| \leq 2} \int_\Omega |D^\gamma u(x)|^{\frac{p+1}{p}} |x|^{\frac{\beta}{p}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Definição 5.11. *Dizemos que $u \in E_{p,\beta}$ é uma solução fraca de $(\widetilde{P_4})$ se*

$$\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_{p,\beta}.$$

O funcional natural do problema $(\widetilde{P_4})$ é dado por:

$$\Phi(u) = \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x.$$

Se supormos que este funcional está bem definido é além disto, se $\Phi \in C^1(E_{p,\beta},\mathbb{R})$, então a derivada de Gateaux de Φ em u na direção de ψ é dada por

$$\Phi'(u)\psi = \int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x.$$

Assim, observamos que u é solução fraca de $(\widetilde{P_4})$ se, e somente se u é um ponto crítico do funcional Φ.

Definição 5.12. *Dizemos que $u \in E_{p,\beta}\backslash\{0\}$ é solução de Ground State de $(\widetilde{P_4})$ se Φ atingi seu menor valor crítico não nulo em u.*

Proposição 5.13. *O espaço $E_{p,\beta}$ é reflexivo.*

Demonstração: Note que $\left(|x|^{\frac{\beta}{p}}\right)^{\frac{-1}{\frac{p+1}{p}-1}} = |x|^{-\beta} \in L^1(\Omega)$, pois $0 \leq \beta < n$. Assim, pela Proposição 1.58 obtemos que $E_{p,\beta}$ é um espaço de Banach uniformemente convexo e, portanto pelo Teorema 1.19, temos que $E_{p,\beta}$ é reflexivo. ■

Proposição 5.14. *Sejam $n \geq 4$, $\alpha < n$ e $\beta \geq 0$. Então, os funcionais Ψ e Φ dados anteriormente estão bem definidos e são de classe C^1.*

Demonstração: Para provarmos que Ψ e Φ está bem definido, basta mostrar que $F(u) \in L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$ e $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$.

Mostremos primeiramente que $F(u) \in L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$.

Temos que $u \in E_{p,\beta}$, daí $F(u) \in E_{p,\beta}$.

Como $\beta \geq 0$, pelo Teorema 1.62 tem-se $E_{p,\beta} \hookrightarrow L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$. Logo, $F(u) \in L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$.

Mostremos que $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$.

Como $\beta \geq 0$, temos que $v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{\frac{\alpha}{q}})$. Pelo Teorema 1.62 temos que $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega, |x|^{\frac{\alpha}{q}}) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega, |x|^{-\beta})$. Logo, $|v|^{p+1} \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta})$.

Agora, uma vez Φ e Ψ estando bem definidos, temos que estes são de classe C^1, pois F é de classe C^1. ■

Apresentaremos dois resultados de existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_4})$, aplicando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.91).

Teorema 5.15. *(Sistema tipo Hardy) Sejam $0 < \alpha, \beta < n$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$, $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, e $p, q > 1$ satisfazendo*

$$\frac{n-\beta}{p+1} + \frac{n-\alpha}{q+1} > n-2.$$

Suponha que f e F satisfazem as condições (f1) e (f3). Então o problema $(\widetilde{P_4})$ tem solução Ground State.

Demonstração:

A prova segue aplicando o Teorema do Passo da Montanha ao funcional Φ em $E_{p,\beta}$.

Por hipótese, $|f(s)| \leq a|s|^q + b$. Integrando, obtemos

$$F(s) \leq \frac{a}{q+1}|s|^q s + bs$$

Então,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(u)\mathrm{d}x &> -\frac{a}{q+1}\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}|u|^q u\mathrm{d}x - b\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} u\mathrm{d}x \\ &\geq -\frac{a}{q+1}\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega,|x|^{-\alpha})} - b\|u\|_{L^1(\Omega,|x|^{-\alpha})}, \end{aligned}$$

para todo $u \in E_{p,\beta}$. Agora, pelo Teorema 1.62 temos

$$E_{p,\beta} \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega, |x|^{-\alpha}) \hookrightarrow L^1(\Omega, |x|^{-\alpha}),$$

donde existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega,|x|^{-\alpha})} \leq C_1 \|u\|^{q+1}_{E_{p,\beta}}$$

$$\|u\|_{L^1(\Omega,|x|^{-\alpha})} \leq C_2\|u\|_{E_{p,\beta}} \leq C_2\|u\|^{q+1}_{E_{p,\beta}}.$$

Daí,

$$-\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x > -\left(\frac{aC_1}{q+1} + bC_2\right)\|u\|^{q+1}_{E_{p,\beta}}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{p+1}\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\ &> \frac{p}{p+1}\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}} - \left(\frac{aC_1}{q+1} + bC_2\right)\|u\|^{q+1}_{E_{p,\beta}} \\ &= \left[\frac{p}{p+1} - \left(\frac{aC_1}{q+1} + bC_2\right)\|u\|^{\frac{pq-1}{p}}_{E_{p,\beta}}\right]\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{E_{p,\beta}} \end{aligned}$$

para todo $u \in E_{p,\beta}$. Note que, $pq-1>0$, pois, $p,q>1$.
Tomando $\rho = \|u\|_{E_{p,\beta}}$, suficientemente pequeno, temos que

$$\Phi(u) \geq 0 = \Phi(0),$$

Logo, a origem $u_0 = 0$ é um mínimo local.

Agora, seja $u_1 \in E_{p,\beta}$ fixo. Temos que

$$\Phi(su_1) = s^{\frac{p+1}{p}} \frac{p}{p+1} \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(su_1)\mathrm{d}x.$$

Pela Observação 1.76, existem constantes $c, d_1 > 0$ tais que

$$F(su_1) \geq cs^\theta |u_1|^\theta - d_1.$$

Assim,

$$-\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(su_1)\mathrm{d}x \leq -cs^\theta \|u_1\|^\theta_{L^\theta(\Omega,|x|^{-\alpha})} + d \leq -Cs^\theta \|u_1\|^\theta_{E_{p,\beta}} + d.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Phi(su_1) &= s^{\frac{p+1}{p}} \frac{p}{p+1} \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} F(su_1)\mathrm{d}x \\ &\leq s^{\frac{p+1}{p}} \frac{p}{p+1} \|u_1\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - Cs^\theta \|u_1\|^\theta_{E_{p,\beta}} + d. \end{aligned}$$

Fazendo, $s \to +\infty$, obtemos que $\Phi(su_1) \to -\infty$.

Resta verificarmos que Φ satifaz a condição (PS).

Seja $(u_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência (PS), isto é,

$$|\Phi(u_k)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\Phi'(u_k) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Vamos mostrar que $(u_k)_{k=1}^\infty$ possui subsequência convergente em $E_{p,\beta}$.

Note que, $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Phi'(u_k)\|_{E'_{p,\beta}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{\varphi \in E_{p,\beta} \\ \|\varphi\|_{E_{p,\beta}} \neq 0}} \frac{|\Phi'(u_k)\varphi|}{\|\varphi\|_{E_{p,\beta}}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Assim,

$$\frac{|\Phi'(u_k)\varphi|}{\|\varphi\|_{E_{p,\beta}}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in E_{p,\beta}\backslash\{0\},$$

isto é,

$$|\Phi'(u_k)\varphi| \leq \varepsilon\|\varphi\|_{E_{p,\beta}}, \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in E_{p,\beta}.$$

Sendo, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $E_{p,\beta}$, obtemos

$$|\Phi'(u_k)u_k| \leq \varepsilon\|u_k\|_{E_{p,\beta}}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Daí, para $k \geq k_0$ temos

$$\begin{aligned} |\theta\Phi(u_k) - \Phi'(u_k)u_k| &\leq \theta|\Phi(u_k)| + |\Phi'(u_k)u_k| \\ &\leq \theta M + \varepsilon\|u_k\|_{E_{p,\beta}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \theta M + \varepsilon\|u_k\|_{E_{p,\beta}} &\geq |\theta\Phi(u_k) - \Phi'(u_k)u_k| \\ &= \left|\frac{\theta p}{p+1}\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \theta\int_{\Omega)}\frac{F(u_k)}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x - \|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} + \int_\Omega \frac{f(u_k)u_k}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right)\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\geq \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right)\|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \left|\int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x\right|. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x &= \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|>s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x \\ &\leq 0 + \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando Holder e o fato que $\alpha < n$, obtemos

$$\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k)}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \leq$$
$$\left(\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right)\mathrm{d}x\right) \leq C.K|\Omega|.$$

Onde

$$K = \max_{\{x\in\Omega:|u(x)|\leq s_0\}} \left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\theta M + \varepsilon \|u_k\|_{E_{p,\beta}} &\geq \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right) \|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \left| \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} \left(\theta F(u_k) - f(u_k)u_k\right) \mathrm{d}x \right| \\ &\geq \left(\frac{\theta p}{p+1} - 1\right) \|u_k\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - CK|\Omega|.\end{aligned}$$

Daqui, concluímos que $(u_k)_{k=1}^\infty$ é limitada em $E_{p,\beta}$. Como $E_{p,\beta}$ é reflexivo, $(u_k)_{k=1}^\infty$ admite uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ fracamente convergente em $E_{p,\beta}$, isto é, existe $u_0 \in E_{p,\beta}$ tal que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad E_{p,\beta}.$$

Agora, pelo Teorema 1.62, temos que a imersão $E_{p,\beta} \hookrightarrow L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})$ é compacta, e como F é diferenciável obtemos

$$F(u_{k_j}) \longrightarrow F(u_0) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega, |x|^{-\alpha}).$$

Por hipótese $(\Phi(u_{k_j}))_{j=1}^\infty$ é limitada. Assim, passando a subsequência se necessário obtemos que $(\Phi(u_{k_j}))_{j=1}^\infty$ é convergente.
Observe que

$$\Phi(u_{k_j}) = \frac{p}{p+1} \|u_{k_j}\|_{E_{p,\beta}}^{\frac{p+1}{p}} - \|F(u_{k_j})\|_{L^1(\Omega, |x|^{-\alpha})}.$$

Donde obtemos que $(u_{k_j})_{j=1}^\infty$ converge forte em $E_{p,\beta}$. Como $u_{k_j} \rightharpoonup u_0$, temos pela unicidade do limite que

$$u_{k_j} \longrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad E_{p,\beta}.$$

■

Teorema 5.16. *(Sistema tipo Hardy-Hénon 2) Sejam* $\alpha \leq 0$, $0 < \beta < n$, $n \geq 4$, $f \in C(\mathbb{R})$, $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$, *e* $p, q > 1$ *satisfazendo*

$$\frac{n-\beta}{p+1} + \frac{n}{q+1} > n - 2.$$

Suponha que f *e* F *satisfazem as condições (f1) e (f3). Então o problema* $(\widetilde{P_4})$ *tem solução Ground State.*

Demonstração: A prova deste é análoga a prova do Teorema 5.15 (Sistema tipo Hardy). ■

5.4 Existência de solução Ground State

Nesta seção, apresentaremos a prova de existência de solução Ground State do sistema (P_4), uma vez garantido a existência de solução Ground State do problema $(\widetilde{P_4})$ nas seções anteriores.

Teorema 5.17. *Seja $u \in E_{p,\beta}$ uma solução Ground State do problema $(\widetilde{P_4})$ e defina $v := |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}$, então o par (u,v) é solução Ground State do problema (P_4).*

Demonstração: Como u é solução fraca de $(\widetilde{P_4})$, temos

$$\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)(-\Delta\psi)|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_{p,\beta}.$$

Como $v = |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}$, segue

$$\int_\Omega v(-\Delta\psi)\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_{p,\beta}.$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha} f(u)\psi \mathrm{d}x, \quad \forall \psi \in E_{p,\beta}. \tag{5.1}$$

Agora, para todo $\varphi \in E_{q,\alpha}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta}|v|^{p-1}v\varphi \mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta}\left||-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}\right|^{p-1}|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}\varphi \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{-(p-1)^2}{p}+p-1+\frac{1-p}{p}}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta(p-1)}{p}+\frac{\beta}{p}-\beta}\varphi \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta}|v|^{p-1}v\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in E_{q,\alpha}. \tag{5.2}$$

Portanto, de (5.1) e (5.2), temos que (u,v) é solução fraca do problema (P_4). Assim,

$$\Psi'(u,v)(\psi,\varphi) = 0, \quad \forall (\psi,\varphi) \in E_{p,\beta} \times E_{q,\alpha}.$$

Logo, (u,v) é ponto crítico de $\Psi(u,v)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\Psi(u,v) &= \langle u,v\rangle - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta}|v|^{p+1}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega v(-\Delta u)\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{1}{|x|^\beta}|v|^{p-1}vv\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega v(-\Delta u)\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_\Omega v(-\Delta u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\
&= \left(1-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega v(-\Delta u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}(-\Delta u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\
&= \frac{p}{p+1}\int_\Omega |-\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}|x|^{\frac{\beta}{p}}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{|x|^\alpha}F(u)\mathrm{d}x \\
&= \Phi(u).
\end{aligned}$$

Portanto, da igualdade $\Psi(u,v) = \Phi(u)$, concluimos que (u,v) atinge o menor valor crítico não nulo de Ψ, uma vez que u atinge o menor valor crítico não nulo de Φ. ■

5.5 O caso $f(t) = t^q e^{|t|}$

Nessa seção, trazemos um exemplo da nossa contribuição, considerando $f(t) = t^q e^{|t|}$, com $q \in \mathbb{N}, q > 1$ ímpar.

Teorema 5.18. *Sejam $\alpha < n$, $\beta \leq 0$, $n \geq 4$. Consideremos $f(t) = t^q e^{|t|}$ com $q \in \mathbb{N}, q > 1$ e q ímpar. Então o problema (P_4) têm solução Ground State para todo $\frac{1}{q} < p < \frac{2}{n-2}$.*

Demonstração: Em vista do Teorema (5.17), segue que o par $(u,v) \in E_{p,\beta}\times E_{q,\alpha}$ é solução Ground State do sistema (P_4), com $v := |-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}$ e $u \in E_{p,\beta}$ uma solução Ground State do problema:

$$\begin{cases} -\Delta\left(|-\Delta u|^{\frac{1}{p}-1}(-\Delta u)|x|^{\frac{\beta}{p}}\right) = \frac{1}{|x|^\alpha}f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = -\Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}.$$

Agora, para garantirmos a validade dos Teoremas 5.7 e 5.8, basta que f seja contínua e que as condições *(f1)* e *(f2)* sejam satisfeitas.

Temos que $f(t) = t^q e^{|t|}$ é contínua para todo $q > 0$, pois f é produto e composta de funções contínuas (polinomial, modular e exponencial).

Defina $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$. Assim,

$$F(s) = \begin{cases} \left(s^q - qs^{q-1} + q(q-1)s^{q-2} - \ldots + q!s - q!\right)e^{|s|} + q! & \text{se} \quad s \geq 0, \\ \left(-s^q - qs^{q-1} - q(q-1)s^{q-2} - \ldots - q!s - q!\right)e^{|s|} + q! & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$

Note que, para todo $\theta > 1 + \frac{1}{p}$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty} \frac{\theta F(s)}{f(s)s} &= \lim_{s\to+\infty} \theta \frac{s^q - qs^{q-1} + q(q-1)s^{q-2} - \ldots + q!s - q!}{s^{q+1}} + \lim_{s\to+\infty} \theta \frac{q!}{s^{q+1}e^{|s|}} \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{s\to-\infty} \frac{\theta F(s)}{f(s)s} &= \lim_{s\to-\infty} \theta \frac{-s^q - qs^{q-1} - q(q-1)s^{q-2} - \ldots - q!s - q!}{s^{q+1}} + \lim_{s\to-\infty} \theta \frac{q!}{s^{q+1}e^{|s|}} \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Donde,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{\theta F(s)}{f(s)s} = 0.$$

Logo, para $\varepsilon = 1$, existe $s_0 > 0$ tal que se $|s| > s_0$, temos que

$$\frac{|\theta F(s)|}{|f(s)s|} < 1.$$

Assim, como q é ímpar, segue que $q+1$ é par, e, portanto $f(s)s = s^{q+1}e^{|s|} > 0$, donde

$$\theta F(s) \leq |\theta F(s)| < |f(s)s| = f(s)s, \quad \forall |s| > s_0.$$

Logo, a condição *(f1)* é satisfeita.

Agora, usando que $\frac{1}{q} < p$, temos

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s^{\frac{1}{p}}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^q e^{|s|}}{s^{\frac{1}{p}}} = \lim_{s\to 0} s^{q-\frac{1}{p}} e^{|s|} = 0.$$

Logo, $f(s) = o(s^{\frac{1}{p}})$ quando s esta próximo de 0, e, portanto a condição *(f2)* é satisfeita. ■

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho, usamos métodos variacionais para mostrar a existência de soluções para quatro tipos de sistemas de Lane-Emden. A hipérbole crítica para essa classe de sistemas, dada por

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}$$

é de extrema importância para tais resultados. Tal hipérbole acima juntamente com a hipérbole $pq = 1$ divide o primeiro quadrante do plano pq em regiões nas quais podemos classificar quanto a existência, não existência e unicidade de solução.

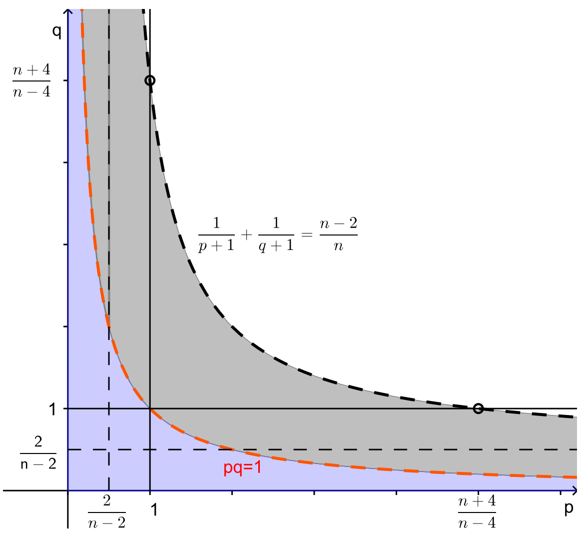

Figura 5.1: caso $n > 4$

Tivemos como resultados desses sistemas os que seguem:

Resultados do sistema (P_1) :

- O sistema (P_1) admite solução clássica $(u, v) \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ para $p, q > 0$, (p, q) abaixo da hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n})$ e $pq \neq 1$.

- O sistema (P_1) com $L = -\Delta$ têm a menos de sinal uma única solução clássica $(u,v) \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ para $p,q > 0$ e $pq < 1$.
- O sistema (P_1) com $L = -\Delta$ não admite solução clássica positiva para (p,q) acima ou sobre a hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq 1 - \frac{2}{n})$ em domínios estrelados.
- O sistema (P_1) com $L = -\Delta$ e $\Omega = B_R(0)$ têm uma única solução clássica positiva $(u,v) \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ para $p,q > 0$, $pq \neq 1$ e (p,q) abaixo da hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n})$.

Resultado do sistema (P_2) :

- O sistema (P_2) admite solução clássica $(u,v) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ para $pq > 1$ e (p,q) abaixo da hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n})$.

Resultados do sistema (P_3) :

- O sistema (P_3) admite solução Ground State $(u,v) \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^n)$ para (p,q) sobre a hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n})$.
- O sistema (P_3) tem uma única solução clássica positiva (radialmente simétrica) $(u,v) \in \left(C^2(\mathbb{R}^n)\right)^2$ para (p,q) sobre a hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n})$.
- O sistema (P_3) não admite solução clássica $(u,v) \in \left(C^2(\mathbb{R}^n)\right)^2$ positiva e radialmente simétrica para $p,q > 0$, $pq \neq 1$ e (p,q) abaixo da hipérbole crítica $(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n})$.

Fizemos também uma contribuição no sentido de estabelecer resultados de existência de solução Ground State do sistema (P_4).

Resultados do sistema (P_4) :

- O sistema (P_4), com f e F satisfazendo as condições *(f1)* e *(f2)* admite solução grond state para $\alpha < n$ e $\beta \leq 0$, onde $0 < p < \dfrac{2}{n-2}$.
- O sistema (P_4), com f e F satisfazendo as condições *(f1)* e *(f3)* admite solução grond state para $0 < \alpha, \beta < n$, onde $p,q > 1$ e satisfazem
$$\frac{n-\beta}{p+1} + \frac{n-\alpha}{q+1} > n-2.$$
- O sistema (P_4), com f e F satisfazendo as condições *(f1)* e *(f3)* admite solução grond state para $\alpha \leq 0$ e $0 < \beta < n$, onde $p,q > 1$ e satisfazem
$$\frac{n-\beta}{p+1} + \frac{n}{q+1} > n-2.$$

Uma observação muito interessante é que devido a continuidade e compacidade da imersão $E_{p,\beta} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, quando $\beta \leq 0$, a função real f não possui nenhum tipo de restrição de crescimento.

Além disso, uma extensão natural desse trabalho é estudar o problema (P_1) quando $L = -\Delta$ e (p, q) está acima da hipérbole crítica, isto é, (p, q) satisfazendo

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < 1 - \frac{2}{n}.$$

Pois nessas condições temos um problema em aberto no sentido de estabelecer a existência ou não de solução não trivial.

Outra perspectiva de futuros estudos é fazer a não existência de solução positiva do problema (P_4), com $\alpha < n$, $\beta < 0$ e $p > \dfrac{2}{n-2}$, sendo Ω um domínio estrelado em relação a origem, suave, limitado e contendo a origem.

Referências Bibliográficas

[1] A. Alvino; G. Trombetti; P.L. Lions -*Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization*, Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire, 7 (1990), 37-65.

[2] R.J. Biezuner -*Notas de Aula, Equações Diferenciais Parciais I/II.* 2010.

[3] D. Bonheure; E.M. Santos; M. Ramos -*Ground State and non-ground State solutions of some strongly coupled elliptic systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 447-491.

[4] G. Botelho; D. Pelegrino; E. Teixeira -*Fundamentos de Análise Funcional*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] H. Brezis -*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York, NY, 2010.

[6] M. Calanchi; B. Ruf -*Radial and non radial solutions for Hardy-Hénon type elliptic systems.* Springer, 2009.

[7] A.C. Cavalheiro -*Weighted Sobolev Spaces and Degenerate Elliptic Equations*, Bol. Soc. Paran. Mat. 26 (2008), 117-132.

[8] Ph. Clément; D.G. de Figueiredo; E. Mitidieri -*Positive solutions of semilinear elliptic systems*, Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), 923-940.

[9] W. Chen; C. Li -*Methods on Nonlinear Elliptic Equation*, American Institute od Mathematical Sciences. New York, 2010, (Series on Differential Equations and Dynamical Systems, vol.4).

[10] P. Felmer; S. Martínez -*Existence and uniqueness of positive solutions to certain differential systems*, Adv. Differential Equations 4 (1998), 575-593.

[11] D.G. de Figueiredo -*Semilinear elliptic systems*, Nonl. Funct. Anal. Appl. Diff. Eq. World Sci. Publishing, River Edge (1998), 122-152.

[12] D.G. de Figueiredo; P. Felmer -*On superquadratic elliptic systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 99-116.

[13] D.G. de Figueiredo; I. Peral; J.D. Rossi -*The critical hyperbola for a Hamiltonian elliptic system with weights*, Annali di Matematica 187 (2008), 531-545.

[14] D.G. Figueiredo; B. Ruf -*Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth*, Mediterr. J. Math. 1 (2004), 417-431.

[15] D. Gilbarg, N.S. Trudinger -*Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1977.

[16] J. Hulshof; R.C.A.M. van der Vorst -*Asymptotic behaviour of ground states*, Proceedings of the American Mathematical Society 124 (1996).

[17] J. Hulshof; R. van der Vorst -*Differential Systems with Strongly Indefinite Variational Structure*, J. Funct. Anal. 114 (1993), 32-58.

[18] Y. Jabri -*The Mountain Pass Theorem, Variants, Generalizations and Some Applications*, Cambridge University Press, 2003.

[19] O. Kavian -*Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer, Heidelberg, 1993.

[20] A. Kufner -*Weighted Sobolev Spaces*. Prague, 1983.

[21] P.L. Lions -*Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*, Paris. Journal of Functional Analysis 49 (1982), 315-334.

[22] P.L. Lions -*The concentration-compactness principle in the calculus of variations, part 1*, Rev. Mat. Iberoam. 1 (1985), 145-201.

[23] E.J.F. Leite; M. Montenegro -*On positive viscosity solutions of fractional Lane-Emden systems*, accepted to publication in TMNA.

[24] F. Liu, J. Yang -*Nontrivial solutions of Hardy-Hénon type elliptic systems*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 27 (2007), 673-688.

[25] L.A. Medeiros; M. Milla Miranda -*Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000.

[26] E. Mitidieri -*A Rellich type identity and applications*, Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), 125-151.

[27] E. Mitidieri -*Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in RN*, Differential and Integral Equations 9 (1996), 465-479.

[28] M. Montenegro -*The construction of principal spectra curves for Lane-Emden systems and applications*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 29 (2000), 193-229.

[29] A. Rabinowitz -*Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society, 1988.

[30] X. Ros-Oton; J. Serra -*The Pohozaev identity for the fractional Laplacian*, Arch. Ration. Mech. Anal. 213 (2014), 587-628.

[31] J. Serrin; H. Zou -*Existence of positive entire solutions of elliptic Hamiltonian systems*, Comm. Partial Differential Equations 23 (1998), 577-599.

[32] G. Talenti -*Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 4 (1976), 697-718.