

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

FELIPE GUZZO

**MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS: APLICAÇÃO
NO CRESCIMENTO DE FRUTOS DE PIMENTA**

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2019

FELIPE GUZZO

**MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS: APLICAÇÃO
NO CRESCIMENTO DE FRUTOS DE PIMENTA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Paulo Roberto Cecon

Coorientadores: Camila Ferreira Azevedo
Paulo Cesar Emiliano

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2019

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

G993m
2019 Guzzo, Felipe, 1992-
Modelagem com equações diferenciais estocásticas :
aplicação no crescimento de frutos de pimenta / Felipe Guzzo. –
Viçosa, MG, 2019.
38f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Paulo Roberto Cecon.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.37-38.

1. Equações diferenciais estocásticas. 2. Pimenta -
Crescimento - Métodos estatísticos. 3. Distribuição (Teoria da
probabilidade). 4. *Capsicum annum*. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Estatística. Programa de
Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria. II. Título.

CDD 22 ed. 519.2

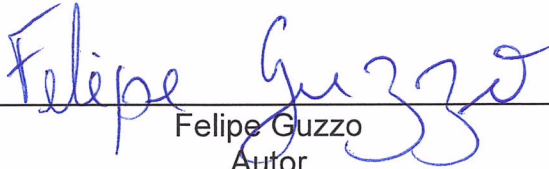
FELIPE GUZZO

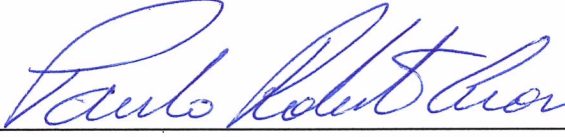
**MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS:
APLICAÇÃO NO CRESCIMENTO DE FRUTOS DE PIMENTA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 19 de julho de 2019.

Assentimento:


Felipe Guzzo
Autor


Paulo Roberto Cecon
Orientador

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais e ao meu irmão, por todo o apoio e pela paciência ao longo da minha trajetória de estudos.

Ao professor Vilson Antonio Klein pelo incentivo e conselhos.

Ao professor Paulo Roberto Cecon pela liberdade, confiança e orientação.

Aos professores Luiz Fernando Finger e Antônio Policarpo Souza Carneiro, por participarem da minha banca de defesa fazendo valiosas contribuições para a versão final da minha dissertação.

À professora Camila Ferreira Azevedo e ao professor Paulo Cesar Emiliano pela ajuda com a revisão da dissertação.

Ao meu amigo Delcio Rudinei Bortolanza, pela amizade, por ler meus manuscritos e pelas discussões animadoras sobre ciência.

À minha colega Ana Carolina por ceder os dados de crescimento de pimentas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

GUZZO, Felipe, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2019. **Modelagem com equações diferenciais estocásticas: aplicação no crescimento de frutos de pimenta.** Orientador: Paulo Roberto Cecon. Coorientadores: Camila Ferreira Azevedo e Paulo Cesar Emiliano.

Equações diferenciais estocásticas (EDEs) são usadas para modelar sistemas com a presença de perturbações aleatórias. Uma maneira de se derivar uma EDE, é adicionando um termo de ruído aleatório a uma equação diferencial determinística (EDD). Assim, a diferença entre EDEs e EDDs, é de que a solução de uma EDE é uma coleção de variáveis aleatórias ou processo estocástico. Dessa maneira, diferente da modelagem com EDDs, onde é obtida uma estimativa para a resposta média da variável de interesse, a modelagem com EDEs permite, de maneira direta, uma estimativa de erro associada à resposta média da variável de interesse. O objetivo deste estudo foi modelar o crescimento de frutos de pimenta (*Capsicum annum* L.) e obter a distribuição de probabilidade para a média do tamanho (i. e., comprimento e diâmetro) de frutos. Nesse trabalho, foi demonstrado como se obter a distribuição da média do comprimento e do diâmetro de frutos de pimenta, representando uma redução de custos, tempo e trabalho em relação aos métodos biométricos tradicionais.

Palavras-chave: *Capsicum annum*. Equação logística. Tempo de Primeira Passagem

ABSTRACT

GUZZO, Felipe, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2019. **Modelling with stochastic differential equations: application in the growth of pepper fruits.** Adviser: Paulo Roberto Cecon. Co-advisers: Camila Ferreira Azevedo and Paulo Cesar Emiliano.

Stochastic differential equations (SDEs) are used to model systems with the presence of random perturbations. One way to derive an SDE is by adding a random noise term to a deterministic differential equation (DDE). Thus, the difference between SDEs and DDEs is that the solution of an SDE is a collection of random variables or stochastic process. Therefore, unlike modeling with DDEs, where an estimate for the mean response of the variable of interest is obtained, modeling with SDEs directly allows an error estimate associated with the mean response of the variable of interest. The aim of this study was to model the growth of pepper fruits (*Capsicum annuum* L.) and to obtain the probability distribution for the mean fruit size (i.e., length and diameter). In this work, it was demonstrated how to obtain the distribution of the mean length and pepper genotypes' fruit diameter, representing a reduction of costs, time and labor in relation to the traditional biometric methods.

Keywords: *Capsicum annuum*. Logistic equation. First passage time

SUMÁRIO

1	Introdução.....	7
2	Referencial teórico.....	9
2.1	Trabalhos anteriores com equações diferenciais estocásticas em agricultura.....	9
2.2	Introdução informal as equações diferenciais estocásticas....	10
2.3	Modelagem do crescimento de plantas com equações diferenciais estocásticas.....	12
3	Material e Métodos.....	13
3.1	Estimativa dos parâmetros da equação diferencial estocástica logística.....	15
3.1.1	Método de Ozaki.....	15
3.1.2	Método de Shoji.....	16
3.2	Simulação das trajetórias.....	17
3.2.1	Método de Euler.....	17
3.3	Qualidade do ajuste.....	18
3.4	Estimativa para o tempo de primeira passagem (first passage time).....	18
3.5	Obtenção da distribuição de probabilidades para o tamanho de frutos.....	18
3.6	Comparação entre o modelo estocástico e o modelo determinístico.....	19
3.6.1	Qualidade das previsões.....	19
3.6.2	Estimando o MSE para a EDD logística.....	19
3.6.3	Estimando o MSE para a EDE logística.....	20
4	Resultados e Discussão.....	20
4.1	Estimativas dos parâmetros da EDE logística.....	20
4.2	Estimativa para o tempo de primeira passagem.....	28
4.3	Distribuição do tamanho dos frutos.....	29
4.4	Estimativa do MSE.....	29
5	Conclusão.....	36
	Referências Bibliográficas.....	37

1 Introdução

A combinação de vários componentes formados por determinado número de interações de processos biológicos, físicos e químicos, dá a origem aos chamados sistemas agrícolas. Tais processos são manipulados por seres humanos para a produção de insumos indispensáveis como comida, fibras e energia. A intensidade do manejo pode variar entre sistemas de produção, mas todos os sistemas são afetados por fatores não controláveis (e.g. ciclos naturais de clima, condições de solo, pragas e doenças) (BRUN et al., 2014). Nesse estudo expressões como, fatores não controláveis, fatores aleatórios, perturbações aleatórias e ruído, serão utilizadas com o mesmo sentido definido acima.

É possível modelar esses sistemas com o propósito de fazer inferência ou de realizar previsões. Frequentemente, esses sistemas são descritos por meio de equações diferenciais ordinárias ou parciais, também chamados de modelos determinísticos. O modelo é determinístico no sentido de que dado um valor inicial, a evolução do modelo, geralmente em relação ao tempo, é sempre a mesma. Uma equação diferencial ordinária geralmente utilizada na modelagem de crescimento de plantas é a equação diferencial logística proposta por Verhulst (1838).

Mas, como apontado, sistemas agrícolas são expostos a uma gama de fatores não controláveis ou aleatórios, sendo esses fatores não levados em consideração nos modelos determinísticos. Segundo Calin (2015), é possível acrescentar esses fatores ao modelo determinístico, como uma variável aleatória, utilizando o Teorema Central do Limite para estimar a influência de todos os fatores não controláveis. Nesse sentido, o Cálculo estocástico é mais acurado que o Cálculo determinístico para modelar sistemas que sofrem a influência de fatores aleatórios.

Em outras palavras, a modelagem de sistemas sujeitos a fatores não controláveis com modelos determinísticos é sempre uma aproximação menos precisa, em sentido estrito (i. e., levando em consideração somente a natureza do sistema), que a modelagem com modelos estocásticos. Mesmo que a

intensidade da influência dos fatores não controláveis seja pequena no sistema estudado, a modelagem com modelos estocásticos deve ser preferida em relação aos modelos determinísticos, devido aos fatores aleatórios intrínsecos ao problema.

A conclusão é direta, se o sistema é estocástico, não importa o tamanho da influência dos fatores não controláveis, os modelos determinísticos são sempre uma aproximação menos precisa do comportamento do sistema que os modelos estocásticos, justamente por não levarem em consideração a natureza estocástica do sistema estudado.

Entretanto, nem sempre os modelos estocásticos são conhecidos para os sistemas estudados, somente nesse cenário dever-se-ia utilizar os modelos determinísticos, do contrário, não existe argumento contra a utilização dos modelos estocásticos (i. e., argumentar em favor de modelos determinísticos em relação a facilidade de aplicação, ou argumentos nesse sentido, seria um absurdo científico). Neste estudo foi apresentada uma equação diferencial estocástica (EDE) para modelar o crescimento de frutos (i. e., comprimento e diâmetro) de genótipos de pimenta (*Capsicum annuum* L.).

O tamanho dos frutos foi escolhido porque é uma das características que mais influencia na aceitação dos frutos de pimenta pelos consumidores. Logo, escolher os genótipos de maiores tamanhos implica em lucro para o produtor.

Como as EDEs são uma coleção de variáveis aleatórias (i. e., um processo estocástico), é possível obter sua distribuição de probabilidades conjunta. Utilizando essa vantagem em relação as equações diferenciais determinísticas (EDDs), foi obtida também a distribuição de probabilidades para a média do comprimento e diâmetro dos frutos. Assim, foi possível caracterizar a média do tamanho dos frutos (i. e., comprimento e diâmetro) utilizando dados de apenas um experimento. Essa é uma enorme vantagem em relação aos métodos clássicos, onde seria necessário realizar vários experimentos para obter uma distribuição para o tamanho dos frutos.

Além disso, o modelo estocástico foi comparado ao modelo determinístico em relação a predição do tamanho de frutos. Essa última parte funcionou como um treinamento em como utilizar o modelo estocástico para fazer predições, evidenciando a diferença entre os métodos estocásticos e determinísticos.

Porque, como mencionado, não faria sentido realizar um experimento comparando os dois métodos, a decisão sobre qual método utilizar deve ser tomada levando em consideração a natureza do problema a ser resolvido.

Nesse estudo o termo agricultura foi usado no sentido de ser uma atividade que tem por finalidade produzir vegetais e/ou criar animais para satisfazer as necessidades humanas. Por isso, somente foram citados trabalhos que tratam do crescimento de animais, do crescimento e manejo de plantas e do manejo do solo. Mesmo que alguns trabalhos não tenham por objetivo melhorar a produtividade dos sistemas agrícolas, estudar e conhecer os mecanismos basilares do funcionamento dos sistemas agrícolas ou de seus componentes é fundamental para atingir maiores produtividades e/ou reduzir custos.

Assim, o objetivo deste estudo foi modelar o crescimento de frutos de pimenta utilizando uma equação diferencial estocástica e obter a distribuição de probabilidade para a média do tamanho de frutos.

2 Referencial teórico

2.1 Trabalhos anteriores com equações diferenciais estocásticas em agricultura

Apesar da teoria do Cálculo estocástico ter sido formalizado por Kiyosi Itô nas décadas de 1940 e 1950, as aplicações em agricultura ainda são inexpressivas em números. Embora pouco numerosos, a relevância de trabalhos com equações diferenciais estocásticas (EDEs) pode ser verificada em artigos como Tan et al. (2017), onde os autores propõem um método baseado em EDEs para avaliar a persistência de pesticidas em sistemas agrícolas.

Rupšys e Petrauskas (2012) propuseram um modelo baseado em EDEs para avaliar o crescimento de Pinheiro-da-Escócia (*Pinus sylvestris*), segundo os autores, o modelo tem a vantagem de levar em consideração a variabilidade residual proveniente dos erros de medidas, e também analisar a variabilidade individual, que representa a diferença entre os sujeitos do experimento.

Donnet, Foulley e Samson (2010), preocupados com as implicações que uma modelagem errônea do crescimento de animais tem sobre análises genéticas, propõem modelar o crescimento de frangos baseado em EDEs. Os autores concluem que o modelo estocástico foi melhor quando comparado ao modelo determinístico.

Lv, Schneider e Pitchford (2008) estudaram o crescimento e a hierarquia de formação de tamanho (i. e., diferença no tamanho de plantas da mesma população na mesma área) de *Arabidopsis thaliana* utilizando a teoria das EDEs. Os autores concluem que um modelo Gompertz estocasticizado, descreve eficientemente o crescimento, a competição e a variabilidade nas plantas estudadas.

Gutiérrez-Jáimez et al. (2007) propuseram uma variação de um modelo Gompertz estocástico para modelar o crescimento (i. e., ganho de peso) de coelhos.

2.2 Introdução informal as equações diferenciais estocásticas

Segundo Le Gall (2016), equações diferenciais estocásticas tem por finalidade estender uma equação diferencial perturbada por fatores aleatórios, dessa forma, essa equação pode ser utilizada para modelar a evolução de um sistema físico. Adicionando-se um termo de ruído, definido como dW_t , estamos levando em consideração as perturbações aleatórias do sistema. Geralmente, o termo de ruído vem acompanhado de uma constante σ , que corresponde a intensidade dos fatores perturbativos. Uma propriedade interessante de W_t é de que perturbações aleatórias são independentes em intervalos de tempos separados, ou pelo menos assumidas independentes.

Devido as propriedades irregulares das trajetórias de W_t , não é possível resolver essa integral utilizando as técnicas do Cálculo determinístico, em outras palavras, W_t não é diferenciável e por implicação nem X_t (TUCKWELL, 2018). Sendo assim, é necessário lançar mão das técnicas do Cálculo estocástico para resolver essa equação.

Uma equação diferencial estocástica tem a seguinte forma:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Mas esta forma é somente uma maneira abreviada de escrever uma EDE (porque W_t não é diferenciável), a única forma que realmente tem um significado é a seguinte,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

Em que as funções $\mu(s, X_s)$ e $\sigma(s, X_s)$ são chamadas de deriva (*drift*) e difusão (*diffusion*) respectivamente. A primeira é uma integral de Riemann (exatamente a mesma do Cálculo determinístico), ou seja, sua solução é um número real. A segunda integral é uma variável aleatória, também chamada de integral de Itô, implicando em X_t também ser uma variável aleatória. Consequentemente, é possível derivar uma distribuição de probabilidade para X_t , também a sua média e variância. Mais precisamente, X_t é uma coleção de variáveis aleatórias ou processo estocástico.

Um processo estocástico $\{X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias, onde T é um conjunto indexador e Ω é o espaço amostral comum as variáveis aleatórias. Para cada t , $X_t(\omega)$ corresponde a uma variável aleatória em Ω , e para cada $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ corresponde a uma realização do processo, que é uma função definida em T (Neste trabalho foi usada a notação $X_t(t)$ ou simplesmente X_t para representar uma realização do processo estocástico).

Segundo Allen (2010), existem 4 tipos de processos estocásticos, se levarmos em consideração o conjunto indexador T e o espaço de estado (i. e., os valores numéricos que a variável aleatória X_t pode assumir). Os processos podem ser, respectivamente, em relação a T e ao espaço de estado, discretos-discretos, contínuos-discretos, discretos-contínuos e contínuos-contínuos. O último caso também é chamado de processo de difusão, onde a trajetória X_t é a solução de uma EDE.

Os processos de difusão são os processos de interesse nesse estudo, porque, se considerarmos $t \in T = [0, \infty)$ como o tempo (i. e., variável explicativa), e o tamanho do fruto (i. e., variável resposta) assumindo valores no intervalo $[0, k]$, onde k é uma constante, podemos modelar o crescimento dos frutos usando EDEs.

2.3 Modelagem do crescimento de plantas com equações diferenciais estocásticas

Segundo Goudriaan e Van Laar (2012), plantas em crescimento passam por três fases distintas. Devido à baixa ocupação do espaço pelas plantas no começo do desenvolvimento, cada planta aproveita ao máximo a luz solar, implicando em um crescimento exponencial. No meio do período de crescimento, começa a acontecer o sombreamento entre plantas vizinhas, tornando o crescimento linear. No final do ciclo, com a diminuição da área foliar verde, a planta começa a parar o seu crescimento, ao mesmo tempo que inicia a translocação de nutrientes das partes vegetativas para as partes reprodutivas.

Curiosamente, na fase reprodutiva, os frutos de pimenta apresentam um padrão de crescimento similar ao descrito anteriormente. De acordo com Rêgo, Finger e Rêgo (2011), o início do crescimento do fruto é marcado por um período de intensa divisão celular, seguido de um período de aumento do tamanho das células. No período final, acontece uma diminuição drástica da taxa de crescimento dos frutos, finalizando com uma taxa de crescimento nula.

Esse padrão de crescimento justifica, em partes, a escolha da equação logística para modelar o crescimento de plantas, porque a solução da equação diferencial logística resulta em uma curva com o formato sigmoide. Mas como apontado por Lv, Schneider e Pitchford (2008), plantas a nível individual são afetadas por fatores aleatórios intrínsecos, como hereditariedade do potencial de crescimento e condições climáticas.

Uma maneira de resolver esse problema sem aumentar a complexidade do modelo (i.e., sem adicionar mais variáveis explicativas) é incrementar o modelo com um termo para representar a parte estocástica (PANIK, 2017). Esse mesmo autor propõe aumentar a equação diferencial logística de Velhust,

$$dX(t) = r X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) dt,$$

adicionando o termo aleatório (para representar os fatores aleatórios externos à população) à equação de Velhust, como mostrado abaixo:

$$dX(t) = r X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{k}\right) dt + \sigma X(t) dW(t), \quad N(0) = N_0, \quad t \geq 0$$

Em que:

t é o tempo;

$X(t)$ representa o tamanho do fruto tempo t ;

$dW(t)$ é uma variável aleatória $N(0, dt)$;

$X(0) = X_0$ é a população no tempo inicial;

r é uma constante que representa a taxa de crescimento do fruto;

σ é uma constante que representa a magnitude do componente estocástico;

k representa um limite superior para o crescimento do fruto.

Essa equação é chamada de equação diferencial estocástica (EDE) ou, especificamente nesse caso, pode ser chamada de equação diferencial estocástica logística (EDE logística).

É possível demonstrar que

$$E[X(t)] = \frac{k}{1 + \left[\left(\frac{k}{X_0}\right) - 1\right]e^{-rt}}$$

e

$$V[X(t)] = k^2 e^{2rt} \left\{ \frac{k}{X_0} + e^{rt} - 1 \right\}^{-2} (e^{\sigma^2 t} - 1),$$

em que $E[.]$ e $V[.]$ representam o valor esperado e a variância do processo, respectivamente.

3 Material e Métodos

Uma EDE logística foi ajustada aos dados de crescimento de frutos de genótipos de pimenta (*Capsicum annum L.*), obtidos de um experimento realizado no período de dezembro de 2017 a julho de 2018 em casa de vegetação pertencente ao setor de olericultura do Departamento de Fitotecnia da Universidade Federal de Viçosa (UFV), município de Viçosa, Zona da Mata de Minas Gerais, cujas coordenadas geográficas são: 20° 45' de latitude sul e 42° 51' de longitude oeste, altitude média de 650 m.

O crescimento dos frutos de pimenta foi definido como comprimento e largura medidos em mm. As medições foram realizadas em cada um dos

genótipos em dez períodos iniciando-se aos sete dias após o florescimento, com avaliações semanais. Ou seja, os frutos foram avaliados nos dias 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 e 70 após a floração.

O comprimento dos frutos foi medido da base do pecíolo até o ápice. Após isso, o diâmetro foi medido na parte mediana do fruto usando um paquímetro. As figuras 1 e 2 mostram exemplos para alguns dos frutos.

Figura 1: Comprimento do fruto mensurado da base do pecíolo até o ápice. Diâmetro mensurado na parte mediana do fruto.



Figura 2: Comprimento do fruto mensurado da base do pecíolo até o ápice. Diâmetro mensurado na parte mediana do fruto.



De posse dos valores estimados dos parâmetros da EDE logística, foi simulada a distribuição de probabilidade dos frutos, e assim, foi possível estimar a média e a variância do tamanho dos frutos.

As estimativas dos parâmetros e as simulações das trajetórias foram realizadas utilizando o pacote Sim.DiffProc versão 4.4, disponível para a linguagem de programação R.

3.1 Estimativa dos parâmetros da equação diferencial estocástica logística

A maneira mais intuitiva e direta de se estimar os parâmetros de uma EDE é utilizando o método da máxima verossimilhança (MV). Para usar o método da MV basta conhecer a forma da função de transição de densidade do processo $P(t, X(t)|X(0) = x_0)$. Mas, para uma grande gama de EDEs, não existe uma forma analítica para a função de densidade de transição. Por isso, nesse estudo foi necessário utilizar métodos alternativos ao método da MV. Nesse trabalho foram usados os métodos de Ozaki e Shoji para derivar uma função de densidade de transição para a EDE logística. Nos próximos tópicos os métodos serão brevemente apresentados. Este trabalho não tem a intenção de esgotar a discussão sobre os métodos. Maiores detalhes sobre os métodos poderão ser acessados nos trabalhos originais dos autores, que serão devidamente citados, ou, poderão ser consultados no trabalho de IACUS (2008), onde o autor traz uma compilação de métodos para se trabalhar com EDEs utilizando a linguagem de programação R.

3.1.1 Método de Ozaki

O método de Ozaki (1992), se baseia na aproximação da solução de uma EDE para fazer as estimativas dos parâmetros da equação. A aproximação de Ozaki para a solução de uma EDE da forma

$$dX_t = f(X_t, \boldsymbol{\theta})dt + \sigma dW_t \text{ com } X(0) = x_0, \boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_p\}^t$$

um vetor de parâmetros, $f(\cdot)$ uma função de X_t duas vezes diferenciável, σ uma constante e $W_t \sim N(0, \Delta t)$, é obtida fazendo

$$X_{t+\Delta t} = A_t X_t + B_t W_{t+\Delta t}, \text{ onde}$$

$$A_t = e^{K_t \Delta t},$$

$$B_t = \sigma \left(\frac{e^{2K_t \Delta t} - 1}{2K_t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$K_t = \frac{1}{\Delta t} \ln \left[1 + \frac{f(X_t)}{X_t f_X(X_t)} (e^{f_X(X_t) \Delta t} - 1) \right],$$

Em que f_X é a primeira derivada de $f(\cdot)$ em relação a X .

A partir dessa aproximação é possível demonstrar que $X_{t+\Delta t_i} | X_t = x_i$ tem uma distribuição Normal com média

$$E_i = x_i + \frac{f(x_i)}{f_X(x_i)} (e^{f_X(x_i) \Delta t} - 1) \text{ e variância}$$

$$V_i = \frac{\sigma^2 (e^{2K_i \Delta t} - 1)}{2K_i}.$$

Então a função de verossimilhança para a aproximação de Ozaki fica

$$L(X_t | \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi V_{i-1}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X_i - E_{i-1})^2}{V_{i-1}}},$$

em seguida aplica-se a função logaritmo aos dois lados da equação, e as estimativas para θ são obtidas maximizando-se $l(X_t | \theta) = \ln(L(X_t | \theta))$ em relação a θ , i. e., $\text{argmax}_{\theta}(l(X_t | \theta))$.

Deve-se notar que se a EDE tiver o coeficiente de difusão não constante, é sempre possível transformar a EDE para uma equação com coeficiente de difusão constante usando a chamada transformação de Lamperti, desde que a EDE utilizada dependa somente de uma variável explicativa (MØLLER; MADSEN, 2010).

3.1.2 Método de Shoji

O método de Shoji e Ozaki (1998), ou neste trabalho somente método de Shoji, é uma extensão do método de Ozaki no sentido que permite estimar os parâmetros de uma EDE da forma $dX_t = f(t, X_t, \theta)dt + g(X_t, \theta)dW_t$ e $X(0) = x_0$, i. e., o coeficiente de difusão não precisa ser constante e a componente de deriva pode ser uma função da variável tempo t . A aproximação de Shoji para a solução da EDE fica,

$$X_{t+\Delta t} = A(t, X_t)X_t + B(X_t)W_{t+\Delta t},$$

Assim,

$$A(t, X_t) = 1 + \frac{f(t, X_t)}{X_t L_t} (e^{L_t \Delta t} - 1) + \frac{M_t}{X_t L_t^2} [(e^{L_t \Delta t} - 1) - L_t \Delta t],$$

$$B(X_t) = g(X_t) \left(\frac{e^{2L_t \Delta t} - 1}{2L_t} \right),$$

$$L_t = f_X(t, X_t), \text{ e}$$

$$M_t = \frac{g_X^2(X_t)}{2} f_{XX}(t, X_t), \text{ } f_{XX} \text{ é a segunda derivada de } f(\cdot) \text{ em relação a } X_t. \text{ Então,}$$

$X_{t+\Delta t} | X_t \sim N(E_i x_i, V_i^2)$, i. e., a aproximação de Shoji para a solução de uma EDE tem uma distribuição Normal em que,

$$E_i = x_i + \frac{f(x_i)}{L_i} (e^{L_i \Delta t} - 1) + \frac{M_i}{L_i^2} [(e^{L_i \Delta t} - 1) - L_i \Delta t],$$

$$V_i = g^2(x_i) \frac{\sqrt{e^{2L_i \Delta t} - 1}}{2L_i}.$$

Agora basta maximizar $l(X_t | \theta) = \ln(L(X_t | \theta))$ em relação a θ , i. e., $\text{argmax}_{\theta} (l(X_t | \theta))$, como no método anterior para obter as estimativas para θ .

3.2 Simulação das trajetórias

As trajetórias para as EDEs foram simuladas pelo método de Euler com $\Delta t = 1$, usando os parâmetros estimados por cada um dos métodos apresentados nos tópicos anteriores.

3.2.1 Método de Euler

O método de Euler consiste em aproximar $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ usando o seguinte esquema iterativo $X_{i+1} = X_i + f(t_i, X_i)\Delta t + g(t_i, X_i)\Delta W_i$, com $X_0 = x_0$. Ou seja, para aproximar X_t é necessário apenas simular valores da variável aleatória $\Delta W_i \sim N(0, \Delta t)$ (IACUS, 2008).

3.3 Qualidade do ajuste

A qualidade do ajuste foi acessada através do *AIC (Akaike Information Criterion)*, $AIC(M) = -2 l_{m\acute{a}x}(M) + 2 \dim(M)$, onde M representa o modelo ajustado, $l_{m\acute{a}x}(M)$ é o valor máximo da função de log-verossimilhança para o modelo M e $\dim(M)$ é o número de parâmetros estimados do modelo (AKAIKE, 1998).

3.4 Estimativa para o tempo de primeira passagem (*first passage time*)

O tempo $t = t_{fpt}$ em que o fruto atinge seu tamanho máximo, representado pelo parâmetro k da EDE logística, foi obtido utilizando a função $\tau_{S(t)} = \begin{cases} \inf\{t: X_t \geq S(t) | X_0 = x_0\} & \text{se } x_0 \leq S(t_0) \\ \inf\{t: X_t \geq S(t) | X_0 = x_0\} & \text{se } x_0 \geq S(t_0) \end{cases}$ (GUIDOUM; OUKHETALA, 2019), em que $S(t) = k$. Em palavras, a função retorna o primeiro valor de t em que X_t assume o valor k .

Em teoria, o valor de t em que $X_t = k$ somente é alcançado com $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = k$, ou seja, não tem qualquer utilidade prática. Mas utilizando a função $\tau_{S(t)}$ e as trajetórias simuladas, é possível determinar um valor para $t = t_{fpt}$, ou seja, um valor para t tal que, em média, o fruto alcança seu tamanho máximo k .

3.5 Obtenção da distribuição de probabilidades para o tamanho de frutos

A distribuição de probabilidade para a média do tamanho de frutos foi obtida simulando-se $M = 1000$ trajetórias para X_t entre $t = 7$ e $t = t_{fpt}$ pelo método de Euler, e obtida a média desses valores em $X(t = t_{fpt})$, $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^M \frac{X_i}{M}$. Após isso, esse procedimento foi repetido $N = 1000$ vezes, sendo assim, a média do processo foi estimado da seguinte forma,

$$M\acute{e}dia_{t=t_{fpt}}^{sim} = \sum_{j=1}^N \frac{\bar{X}_j}{N}$$

O intervalo de confiança para o $M\acute{e}dia_{t=t_{fpt}}^{sim}$ foi obtido escolhendo os valores correspondentes aos percentis 0,025 e 0,975, do vetor das N estimativas,

dessa maneira, o intervalo de confiança tem $\alpha = 0,05$. Além disso, com posse das N estimativas, foi construída a densidade para a média do tamanho dos frutos de X_t em $t = t_{fpt}$.

3.6 Comparação entre o modelo estocástico e o modelo determinístico

Para comparar o desempenho de predição entre a EDE logística e a EDD logística, os modelos foram ajustados novamente aos dados dos genótipos de pimenta, mas com o último valor para cada genótipo deixado de fora. Após isso, os modelos foram usados para prever o valor deixado de fora na etapa do ajuste dos modelos (GUTIÉRREZ-JÁIMEZ et al., 2007).

3.6.1 Qualidade das predições

A qualidade das predições foi acessada usando a estatística MSE (*Mean Square Error*), $MSE = \sum_{i=1}^n \frac{(obs_i - pred_i)^2}{n}$, onde obs_i é o valor observado e $pred_i$ é o valor predito pelo modelo para cada uma das n observações (JAMES et al., 2013). Neste trabalho, $obs_i = obs$, porque foi usado somente um valor observado para se calcular o MSE.

3.6.2 Estimando o MSE para a EDD logística

Para estimar o MSE para EDD logística foi utilizado o método de *bootstrap* para modelos de regressão CHERNICK e LABUDDE (2011). Foram obtidas $B = 1000$ estimativas *bootstrap* para a EDD logística. Então, a estimativa do MSE foi calculada da seguinte forma

$$MSE^{boot} = \sum_{i=1}^B \frac{(obs - pred_i^{boot})^2}{B}.$$

O intervalo de confiança para o MSE^{boot} foi obtido escolhendo os valores correspondentes aos percentis 0,025 e 0,975, do vetor das B estimativas *bootstrap*, sendo assim, o intervalo de confiança tem $\alpha = 0,05$.

3.6.3 Estimando o MSE para a EDE logística

Para comparar o modelo estocástico com o determinístico, foi necessário obter a média da EDE logística, porque a solução da EDD logística estima a média dos valores observados em cada tempo. Sendo assim, foram simulados $M = 1000$ valores, utilizando o método de Euler, para a EDE logística e obtida a média desses valores, $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^M \frac{X_i}{M}$. Em seguida, esse processo foi repetido $N = 1000$ vezes, sendo assim, o valor do MSE foi estimado da seguinte forma,

$$MSE^{sim} = \sum_{j=1}^N \frac{(obs - \bar{X}_j)^2}{N}.$$

O intervalo de confiança para o MSE^{sim} foi obtido escolhendo os valores correspondentes aos percentis 0,025 e 0,975, do vetor das N estimativas, sendo assim, o intervalo de confiança tem $\alpha = 0,05$.

4 Resultados e Discussão

4.1 Estimativas dos parâmetros da EDE logística

No geral o método de Shoji obteve menores valores de AIC e menor amplitude para os intervalos de confiança para o comprimento dos frutos dos genótipos de pimenta (Tabela 1), mas sem uma diferença significativa prática para o método de Ozaki.

Esses resultados são semelhantes aos do estudo de simulação de Shoji e Ozaki (1997), onde os autores compararam o desempenho dos métodos de Shoji e de Ozaki. No estudo os valores de AIC para ambos os métodos foram muito semelhantes, mas a precisão das estimativas dos parâmetros foi melhor para o método de Shoji, novamente sem uma diferença significativa.

Os resultados para o diâmetro dos frutos dos genótipos de pimenta (Tabela 2) foram similares aos resultados para o comprimento. O método de Ozaki resultou em valores de AIC ligeiramente mais elevados do que o método de Shoji, mas os intervalos de confiança são muito similares entre os dois métodos. A similaridade entre os métodos de Shoji e Ozaki pode ser melhor observadas nas Figuras 3 e 4. As figuras foram confeccionadas simulando 5

trajetórias entre $t = 7$ e $t = 70$, para cada um dos genótipos utilizando o método de Euler. Nas figuras 5 e 6 estão representadas a média do processo (linha azul), e também os intervalos de confiança não paramétricos (linhas vermelhas) para a média do processo, para os métodos de Ozaki e Shoji.

Tabela 1: Estimativa do AIC e dos intervalos de confiança para os parâmetros da EDE logística para o comprimento dos genótipos de pimenta, utilizando os métodos de Ozaki e Shoji.

	Ozaki			Shoji		
	Inf 2,5 %	Estimado	Sup 97,5 %	Inf 2,5 %	Estimado	Sup 97,5 %
G4						
AIC	-	26.3119	-	-	23.3806	-
r	0.160779	0.174144	0.187509	0.162381	0.177413	0.192445
k	19.4813	20.374	21.2667	19.542	20.2578	20.9736
σ	0.00902709	0.0166158	0.0242045	0.0116505	0.0215267	0.0314029
G19						
AIC	-	47.2316	-	-	42.7448	-
r	0.165365	0.173932	0.182498	0.166319	0.175185	0.18405
k	71.689	75.1086	78.5282	72.3378	74.8082	77.2786
σ	0.0091872	0.0168619	0.0245365	0.0104084	0.0191512	0.027894
G27						
AIC	-	51.1997	-	-	46.8221	-
r	0.141126	0.157021	0.172916	0.143855	0.160092	0.176329
k	47.8309	52.5608	57.2907	48.7239	52.1157	55.5074
σ	0.0167007	0.0309851	0.0452695	0.0184991	0.0342753	0.0500514
G28						
AIC	-	5.48819	-	-	5.8867	-
r	0.229414	0.23675	0.244085	0.226474	0.235947	0.245421
k	18.873	19.0932	19.3134	18.9027	19.113	19.3233
σ	0.00306802	0.00512793	0.00718783	0.00504619	0.00895724	0.0128683

Tabela 2: Estimativa do AIC e dos intervalos de confiança para os parâmetros da EDE logística para o diâmetro dos genótipos de pimenta, utilizando os métodos de Ozaki e Shoji.

	Ozaki			Shoji		
	Inf 2,5 %	Estimado	Sup 97,5 %	Inf 2,5 %	Estimado	Sup 97,5 %
G4						
AIC	-	29.3186	-	-	26.0234	-
r	0.091589	0.128091	0.164594	0.0981026	0.135582	0.173061
k	7.64876	9.07635	10.5039	7.95602	9.0127	10.0694
σ	0.0252284	0.046976	0.0687236	0.0287179	0.0537237	0.0787295
G19						
AIC	-	15.2527	-	-	12.8826	-
r	0.11502	0.127546	0.140071	0.113943	0.126663	0.139383
k	10.1517	10.8824	11.613	10.3488	10.9522	11.5556
σ	0.0104361	0.0192615	0.028087	0.0120959	0.0223634	0.0326309
G27						
AIC	-	50.0622	-	-	46.8511	-
r	0.0728505	0.115668	0.158486	0.0809165	0.123625	0.166333
k	15.2662	20.9967	26.7273	16.8968	20.9411	24.9854
σ	0.039185	0.0733408	0.107497	0.0425322	0.0794872	0.116442
G28						
AIC	-	-8.92422	-	-	-8.20577	-
r	0.199896	0.206907	0.213919	0.197365	0.20676	0.216155
k	7.21718	7.32462	7.43206	7.22272	7.32874	7.43475
σ	0.00355768	0.00614757	0.00873746	0.00573852	0.0103967	0.0150548

Figura 3: Trajetórias simuladas da EDE logística para o comprimento dos frutos usando o método de Euler, utilizando os parâmetros estimados pelos métodos de Ozaki e Shoji, para os 4 genótipos de pimenta.

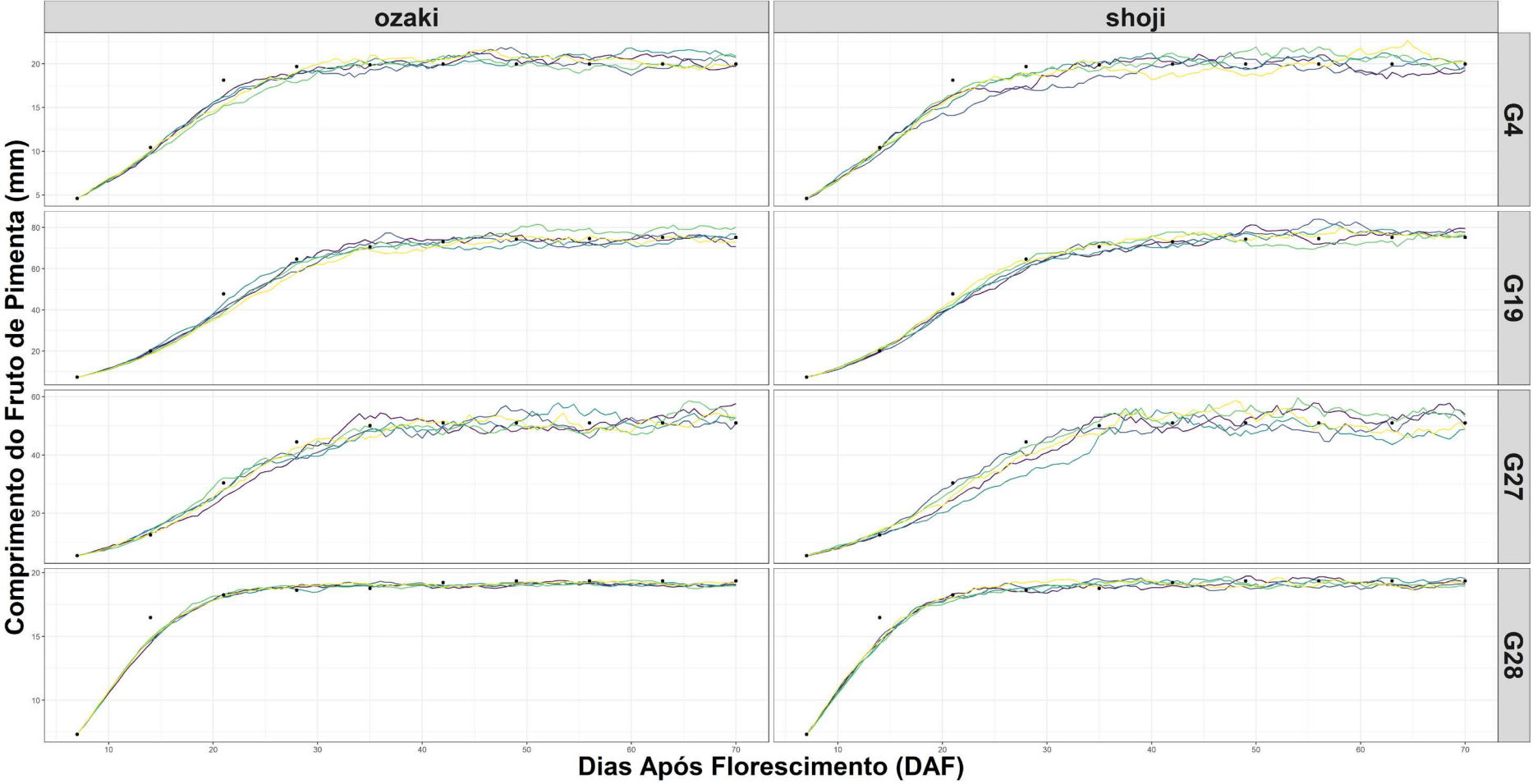


Figura 4: Trajetórias simuladas da EDE logística para o diâmetro dos frutos usando o método Euler, utilizando os parâmetros estimados pelos métodos de Ozaki e Shoji, para os 4 genótipos de pimenta.

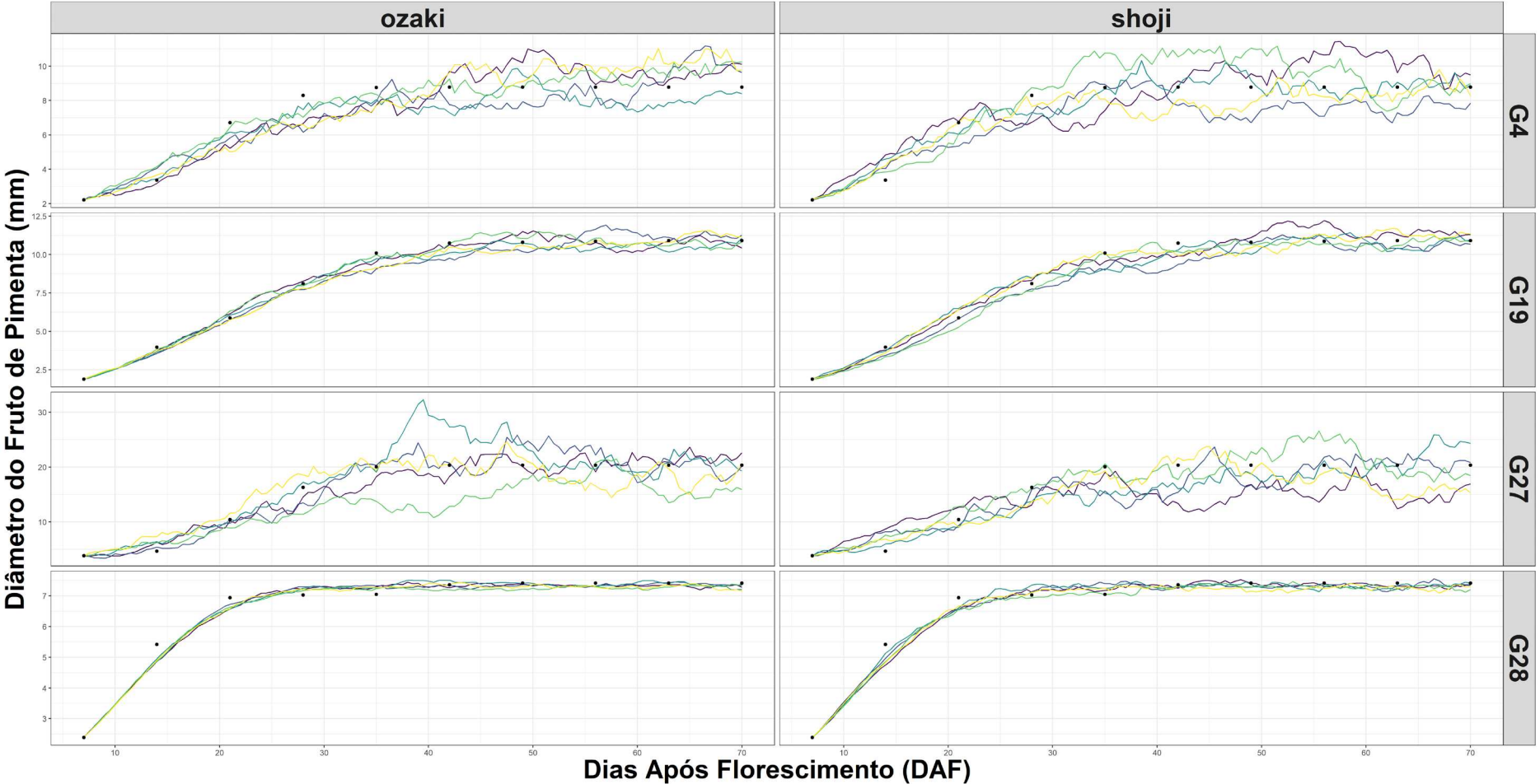


Figura 5: Médias (linha azul) e intervalos de confiança (linhas vermelhas) da EDE logística para o comprimento dos frutos, utilizando os parâmetros estimados pelos métodos de Ozaki e Shoji, para os 4 genótipos de pimenta.

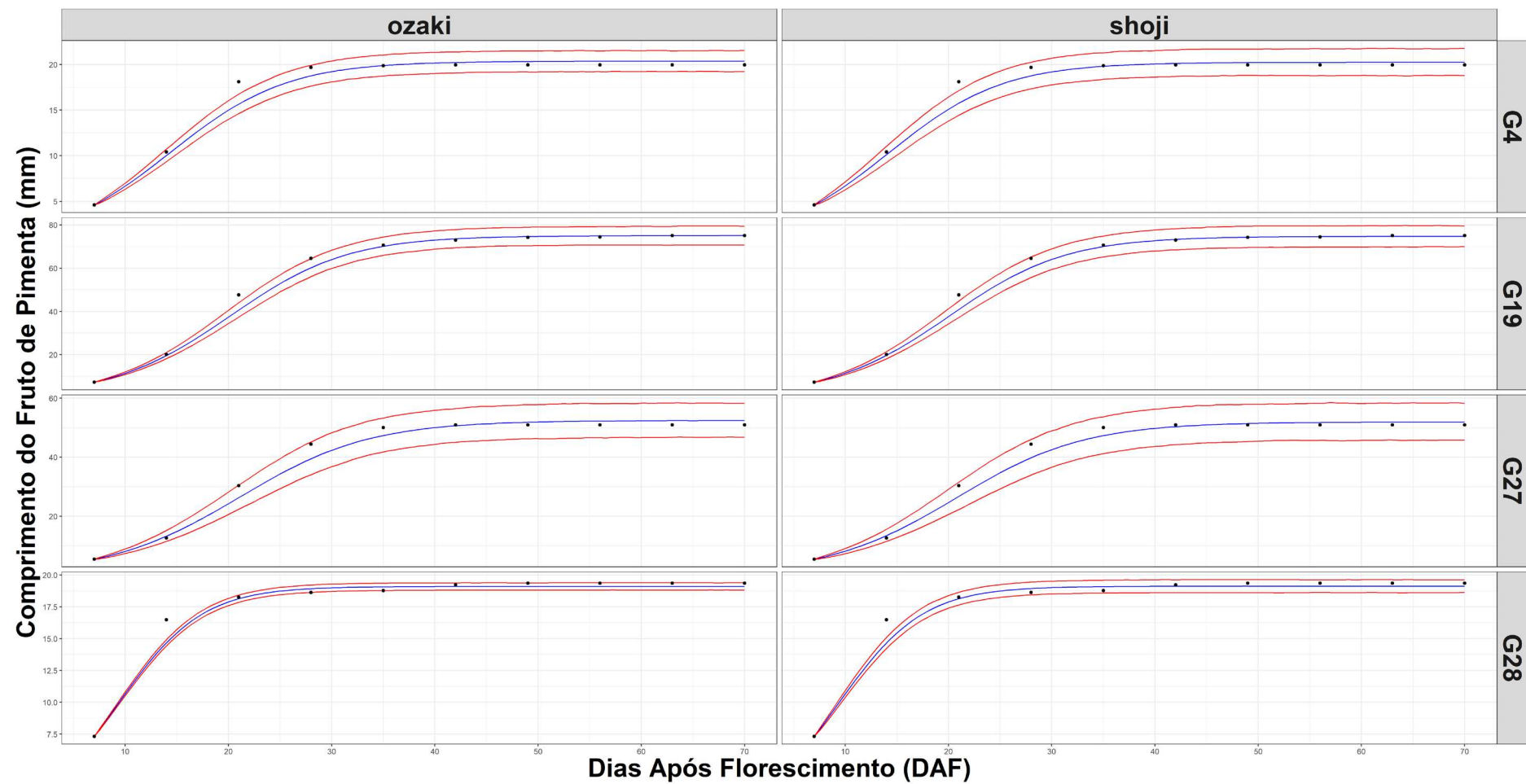
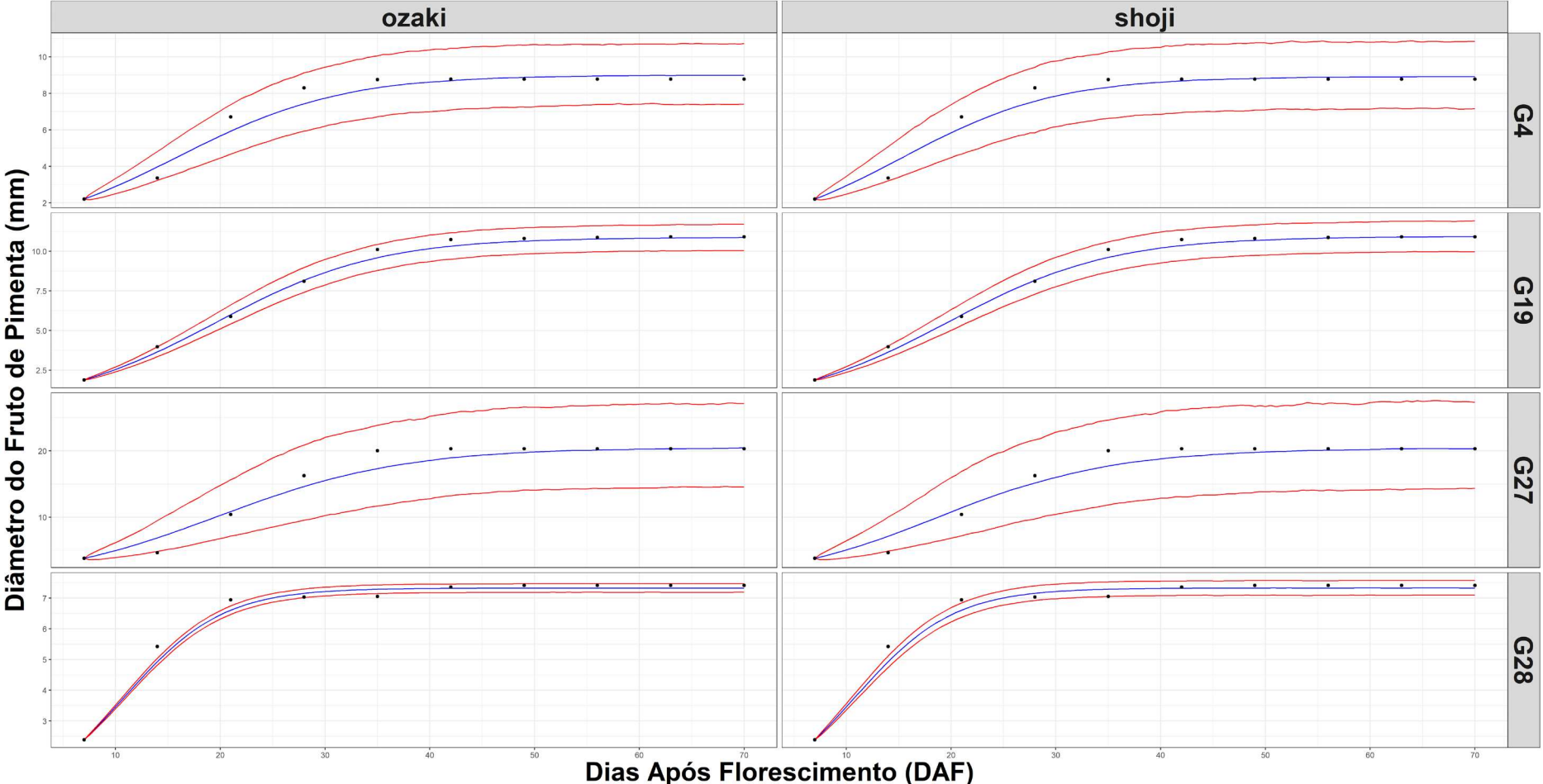


Figura 6: Médias (linha azul) e intervalos de confiança (linhas vermelhas) da EDE logística para o diâmetro dos frutos, utilizando os parâmetros estimados pelos métodos de Ozaki e Shoji, para os 4 genótipos de pimenta.



4.2 Estimativa para o tempo de primeira passagem

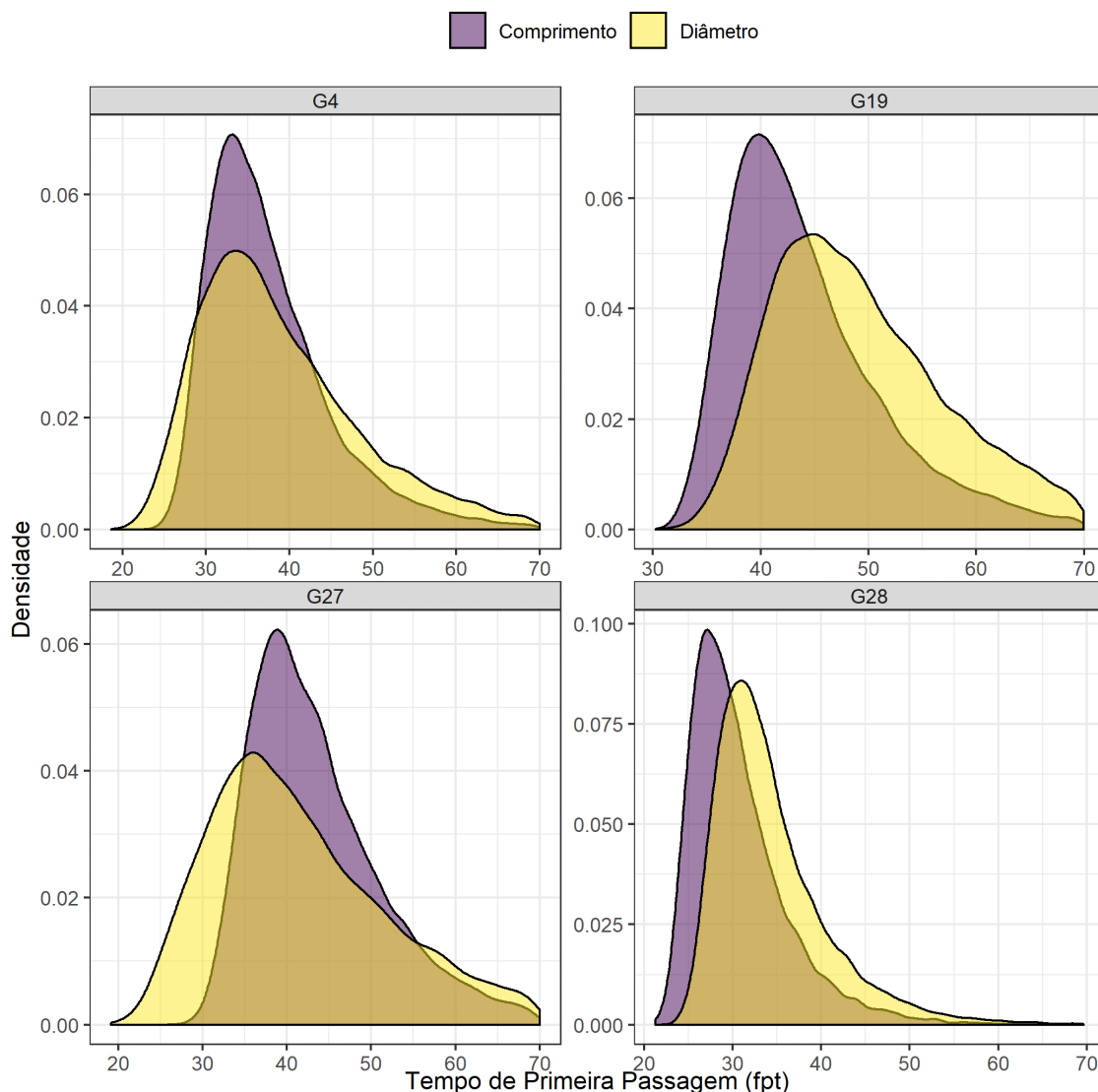
O tempo em que o fruto atinge seu tamanho máximo foi estimado utilizando a função $\tau_{S(t)}$ e os parâmetros estimados pelo método de Shoji, pelos motivos apresentados na discussão do tópico 4.1.

Observando a tabela 3 ou a figura 7, é possível perceber que o genótipo G4 é o mais precoce, atingindo seu tamanho máximo em média com 31 dias para o comprimento e 34 dias para o diâmetro. O genótipo G19 é o mais tardio, atingindo seu tamanho máximo com 44 dias para o comprimento e 49 dias para o diâmetro. Também é interessante notar que, o comprimento e o diâmetro do fruto atingem seus tamanhos máximos praticamente no mesmo tempo (ausência de fase *lag*) para todos os genótipos estudados.

Tabela 3: Estimativas do intervalo de confiança, média e mediana do tempo de primeira passagem para o comprimento e diâmetro dos frutos de pimenta.

	Inf 2,5 %	Média	Mediana	Sup 97,5 %
G4				
Comprimento	28	37	36	57
Diâmetro	25	39	37	62
G19				
Comprimento	35	44	43	62
Diâmetro	37	49	48	67
G27				
Comprimento	33	43	42	63
Diâmetro	26	41	40	65
G28				
Comprimento	24	31	29	45
Diâmetro	26	34	33	51

Figura 7: Densidades para o tempo de primeira passagem (fpt) para o comprimento e o diâmetro dos genótipos de pimenta.



4.3 Distribuição do tamanho dos frutos

Para estimar a média dos frutos em $t = t_{fpt}$, foram utilizados os resultados das estimativas dos parâmetros pelo método de Shoji.

A estatística descritiva para a média do tamanho de frutos pode ser consultada nas tabelas 5 e 6. Também pode-se observar a densidade para a média do tamanho e do diâmetro dos frutos nas Figuras 8 e 9, respectivamente.

4.4 Estimativa do MSE

A EDE logística obteve um melhor resultado para predição (i. e., menor MSE e menores intervalos de confiança para o MSE) em 7 dos 8 cenários

avaliados. No último cenário estudado, i. e., diâmetro do fruto do genótipo G28, as estimativas do MSE foram iguais para a EDE e EDD logísticas. Observando os intervalos de confiança para as médias (Tabelas 7 e 8), nota-se que os intervalos de confiança para as médias da EDE logística estão contidos no intervalo de confiança para a média da EDD logística, em outras palavras, não existe uma diferença significativa entre a EDE e a EDD logística. Além disso, percebe-se que o limite superior do intervalo de confiança para a média da EDD logística é sempre maior que o limite superior da EDE logística em 6 dos 8 cenários estudados, ou seja, a EDD logística tende a superestimar os valores observados para os frutos de pimenta.

Como foi argumentado neste trabalho, a modelagem de fenômenos sujeitos a perturbações aleatórias será sempre mais acurada lançando mão de modelos estocásticos, (i. e., modelos que levem em consideração as perturbações aleatórias intrínsecas ao sistema problema analisado). Mesmo assim a análise foi realizada como um treinamento em como se utilizar EDEs para fazer previsões, evidenciando a diferença para as EDDs.

Tabela 5: Estimativas para os intervalos de confiança, curtose e assimetria da média do comprimento dos frutos dos genótipos de pimenta, usando os valores dos parâmetros estimados pelo método de Shoji em $t = t_{fpt}$, tamanho máximo do fruto (parâmetro k) e valor observado em $t = 70$.

	Comprimento						
	Inf 2,5 %	k	$Média_{t=fpt}$	$Obs_{t=70}$	Sup 97,5%	Curtose	Assimetria
G4	19.82	20.26	19.87	19.94	19.92	2.896	0.007027
G19	73.43	74.81	73.58	75.15	73.73	3.026	0.00351
G27	50.17	52.12	50.37	50.96	50.56	3.189	-0.02244
G28	18.96	19.11	18.97	19.35	18.99	2.858	0.08061

Tabela 6: Estimativas para os intervalos de confiança, curtose e assimetria da média do diâmetro dos frutos dos genótipos de pimenta, usando os valores dos parâmetros estimados pelo método de Shoji em $t = t_{fpt}$, tamanho máximo do fruto (parâmetro k) e valor observado em $t = 70$.

	Diâmetro						
	Inf 2,5 %	k	$Média_{t=fpt}$	$Obs_{t=70}$	Sup 97,5%	Curtose	Assimetria
G4	8.42	9.013	8.475	8.78	8.529	2.893	-0.03789
G19	10.63	10.95	10.66	10.91	10.69	2.999	-0.006551
G27	18.67	20.94	18.88	20.32	19.09	2.843	0.08767
G28	7.261	7.329	7.268	7.41	7.276	2.984	0.06105

Figura 8: Densidades para o comprimento dos frutos dos 4 genótipos de pimenta usando os parâmetros estimados pelo método de Shoji.

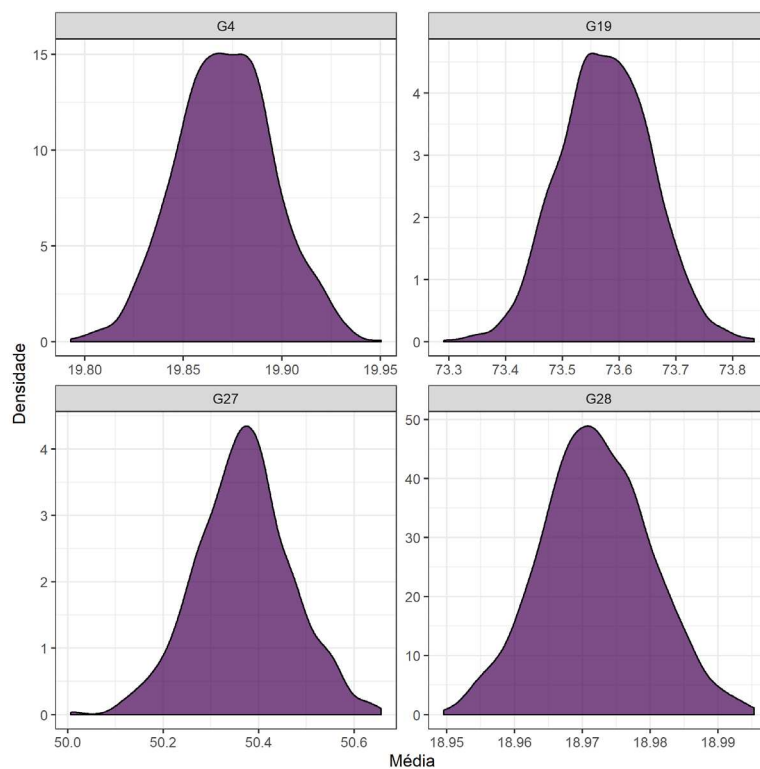


Figura 9: Densidades para o diâmetro dos frutos dos 4 genótipos de pimenta usando os parâmetros estimados pelo método de Shoji.

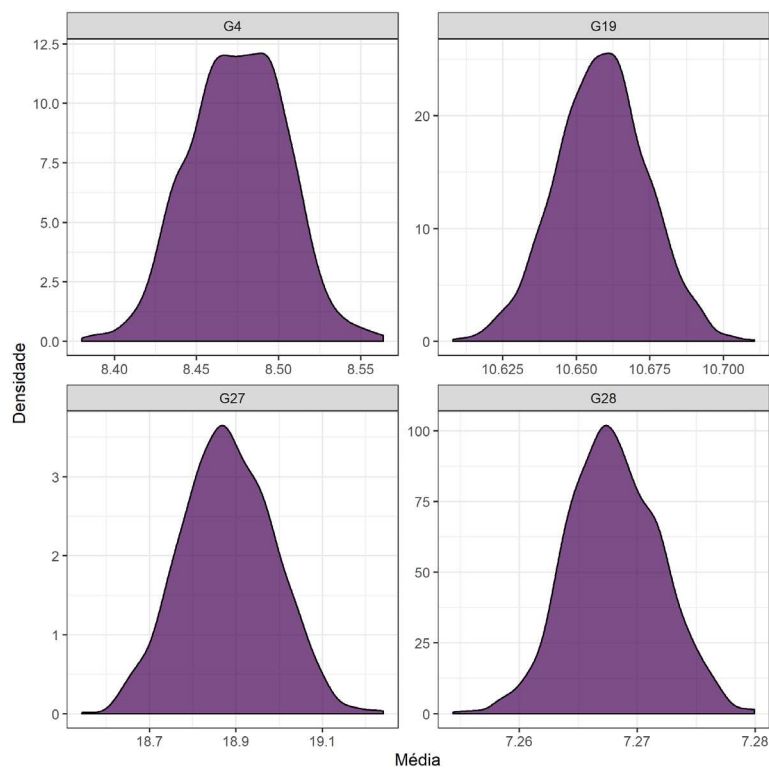


Tabela 7: Estimativas pontuais e intervalos de confiança para a média (em $t = 70$) e o MSE para a EDE e a EDD logísticas para o comprimento dos 4 genótipos de pimenta.

	Comprimento					
	Inf 2.5% ^{Média}	Média	Sup 97.5% ^{Média}	Inf 2.5% ^{MSE}	MSE	Sup 97.5% ^{MSE}
G4						
log [†]	19,73	20,09	20,46	0,06	0,06	0,06
ozaki [‡]	20,35	20,39	20,43	0,20	0,20	0,20
shoji [‡]	20,18	20,23	20,28	0,08	0,08	0,08
G19						
log [†]	73,42	74,20	74,98	1,04	1,06	1,07
ozaki [‡]	74,40	74,55	74,69	0,36	0,36	0,37
shoji [‡]	73,89	74,05	74,20	1,21	1,22	1,23
G27						
log [†]	50,89	51,41	52,07	0,29	0,30	0,30
ozaki [‡]	51,72	51,90	52,09	0,89	0,90	0,91
shoji [‡]	51,03	51,22	51,41	0,08	0,08	0,08
G28						
log [†]	18,83	19,06	19,27	0,10	0,10	0,10
ozaki [‡]	18,99	18,99	19,00	0,13	0,13	0,13
shoji [‡]	19,05	19,07	19,08	0,08	0,08	0,08

[†]Média e intervalo de confiança das B estimativas bootstrap

[‡]Média e intervalo de confiança obtidos a partir das M simulações

Tabela 8: Estimativas pontuais e intervalos de confiança para a média (em $t = 70$) e o MSE para a EDE e a EDD logísticas para o diâmetro dos 4 genótipos de pimenta.

	Diâmetro					
	Inf 2.5% ^{Média}	Média	Sup 97.5% ^{Média}	Inf 2.5% ^{MSE}	MSE	Sup 97.5% ^{MSE}
G4						
log [†]	8,63	8,91	9,19	0,04	0,04	0,04
ozaki [‡]	8,94	9,00	9,05	0,05	0,05	0,05
shoji [‡]	8,83	8,89	8,94	0,01	0,01	0,01
G19						
log [†]	10,86	11,08	11,33	0,04	0,04	0,05
ozaki [‡]	10,81	10,83	10,86	0,01	0,01	0,01
shoji [‡]	10,87	10,90	10,93	0,00	0,00	0,00
G27						
log [†]	20,19	20,84	21,75	0,43	0,44	0,45
ozaki [‡]	19,76	19,98	20,18	0,12	0,13	0,13
shoji [‡]	19,58	19,78	20,00	0,29	0,30	0,31
G28						
log [†]	7,20	7,30	7,39	0,01	0,01	0,01
ozaki [‡]	7,31	7,31	7,32	0,01	0,01	0,01
shoji [‡]	7,31	7,31	7,32	0,01	0,01	0,01

[†]Média e intervalo de confiança das B estimativas bootstrap

[‡]Média e intervalo de confiança obtidos a partir das M simulações

5 Conclusão

O crescimento de frutos de pimenta foi modelado satisfatoriamente utilizando uma equação diferencial estocástica logística.

Referências Bibliográficas

AKAIKE, H. A New Look at the Statistical Model Identification. In: PARZEN, E.; TANABE, K.; KITAGAWA, G. (Eds.). **Selected Papers of Hirotugu Akaike**. Springer Series in Statistics New York, NY: Springer New York, 1998. p. 215–222.

ALLEN, L. J. S. **An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology**. 2 edition ed. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2010.

BRUN, F. et al. **Working with dynamic crop models: evaluation, analysis, parameterization, and applications**. 2. ed. [s.l.] : Elsevier, 2014.

CALIN, O. **An informal introduction to stochastic calculus with applications**. [s.l.] : World Scientific, 2015.

CHERNICK, M. R.; LABUDDE, R. A. An Introduction to Bootstrap Methods with Applications to R. [s. l.], 2011.

DONNET, S.; FOULLEY, J.-L.; SAMSON, A. Bayesian analysis of growth curves using mixed models defined by stochastic differential equations. **Biometrics**, [s. l.], v. 66, n. 3, p. 733–741, 2010.

GOUDRIAAN, J.; VAN LAAR, H. H. **Modelling potential crop growth processes: textbook with exercises**. [s.l.] : Springer Science & Business Media, 2012. v. 2

GUIDOUM, A. C.; BOUKHETALA, K. **Sim.DiffProc: Simulation of Diffusion Processes**. 4.4. [s.l: s.n.]. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=Sim.DiffProc>>. Acesso em: 15 set. 2019.

GUTIÉRREZ-JÁIMEZ, R. et al. A new Gompertz-type diffusion process with application to random growth. **Mathematical Biosciences**, [s. l.], v. 208, n. 1, p. 147–165, 2007.

IACUS, S. M. **Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples**. New York: Springer-Verlag, 2008.

JAMES, G. et al. **An introduction to statistical learning**. [s.l.] : Springer, 2013. v. 112

LV, Q.; SCHNEIDER, M. K.; PITCHFORD, J. W. Individualism in plant populations: using stochastic differential equations to model individual neighbourhood-dependent plant growth. **Theoretical population biology**, [s. l.], v. 74, n. 1, p. 74–83, 2008.

MØLLER, J. K.; MADSEN, H. From state dependent diffusion to constant diffusion in stochastic differential equations by the Lamperti transform. [s. l.], 2010.

PANIK, M. J. **Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling**. [s.l.] : John Wiley & Sons, 2017.

RÊGO, E. R.; FINGER, L. F.; RÊGO, M. M. Produção, genética e melhoramento de pimentas (*Capsicum* spp.). **Recife: Imprima**, [s. l.], 2011.

RUPŠYS, P.; PETRAUSKAS, E. Analysis of height curves by stochastic differential equations. **International Journal of Biomathematics**, [s. l.], v. 5, n. 05, 2012.

SHOJI, I.; OZAKI, T. Comparative study of estimation methods for continuous time stochastic processes. **Journal of time series analysis**, [s. l.], v. 18, n. 5, p. 485–506, 1997.

SHOJI, I.; OZAKI, T. Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method. **Stochastic Analysis and Applications**, [s. l.], v. 16, n. 4, p. 733–752, 1998.

TAN, X. et al. A stochastic differential equation model for pest management. **Advances in Difference Equations**, [s. l.], v. 2017, n. 1, p. 197, 2017.

TUCKWELL, H. C. **Elementary applications of probability theory**. [s.l.] : Routledge, 2018.