

Denis Gouvêa Ladeira

Estudo da Distribuição de Pequenos Objetos no Sistema Solar

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do programa de Pós-Graduação em Física Aplicada para a obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2003

À minha esposa,  
Jandira,  
e minha filha,  
Luanna.

# Agradecimentos

- Aos meus pais, João e Fátima, pelo apoio e incentivo que sempre deram aos meus estudos.
- Ao professor Ricardo, pela dedicação que teve comigo.
- A todos os professores do departamento de Física.
- Aos colegas do curso.
- A CAPES, pelo apoio financeiro.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	vi
<b>Lista de Tabelas</b>	x
<b>Resumo</b>	xi
<b>Abstract</b>	xii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O Modelo</b>	<b>8</b>
<b>3 Ressonâncias de Movimento Médio</b>	<b>15</b>
<b>4 O Estudo da Distribuição de Pequenos Corpos no Sistema Solar</b>	<b>24</b>
4.1 O Modelo Planar . . . . .	31
4.1.1 Região Sol-Júpiter . . . . .	31
4.1.2 Região entre Júpiter e Saturno . . . . .	33
4.1.3 Região entre Saturno e Urano . . . . .	36
4.1.4 Região entre Urano e Netuno . . . . .	37
4.1.5 Região Transnetuno . . . . .	39
4.2 O Modelo 3-D . . . . .	41
4.2.1 Região Sol-Júpiter . . . . .	41
4.2.2 Região entre Júpiter e Saturno . . . . .	41
4.2.3 Região entre Saturno e Urano . . . . .	44
4.2.4 Região entre Urano e Netuno . . . . .	46
4.2.5 Região Transnetuno . . . . .	48

4.3	A Robustez do Método da Lei de Potência . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>

# Lista de Figuras

2.1	Influência dos encontros próximos: (a) no semi-eixo maior, (b) na excentricidade e (c) na inclinação. . . . .	14
3.1	A relação linear dada pela expressão 3.1 entre os elementos $\varpi_{m_2}$ e $\lambda_{m_2}$ para as regiões de ressonância de movimento médio: (a) ressonância 3:2 com Júpiter, (b) 4:3 com Júpiter, (c) 4:5 com Saturno e (d) 2:3 com Saturno. . . . .	17
3.2	Ressonâncias com Júpiter na região Sol-Júpiter. . . . .	19
3.3	Ressonâncias na região Júpiter-Saturno: (a) com Júpiter, (b) com Saturno, (c) com Urano e (d) com Netuno. . . . .	20
3.4	Ressonâncias na região Saturno-Urano: (a) com Júpiter, (b) com Saturno, (c) com Urano e (d) com Netuno. . . . .	21
3.5	Ressonâncias na região Urano-Netuno: (a) com Júpiter, (b) com Saturno, (c) com Urano e (d) com Netuno. . . . .	22
3.6	Ressonâncias na região Transnetuno: (a) com Saturno, (b) com Urano e (c) com Netuno. . . . .	23
4.1	Para cada faixa foi adotada uma distribuição aleatória não uniforme para a inclinação. O valor máximo é $30^\circ$ e a curva normal está centrada em $0^\circ$ . O eixo vertical do histograma está normalizado. . . . .	25

4.2	(a) Comparação do coeficiente de correlação, $R^2$ , para sete leis de decaimento. (b) Uma ampliação no eixo vertical de (a) permite-nos visualizar os valores de $R^2$ próximos de 1. Como podemos observar a lei de potência foi a que apresentou o coeficiente de correlação mais próximo de 1 para a maioria das faixas. O retângulo transparente corresponde a região onde o número de encontros próximos é pequeno, fornecendo baixos valores para $R^2$ . . . . .	29
4.3	O ajuste aos dados da integração fornecido pela lei de potência. . . . .	30
4.4	A não correlação entre $N_{nTotal}$ e $t_{máx}$ para a região Sol-Júpiter no modelo não planar. Para as demais regiões, tanto para o modelo planar como para o modelo não planar, $N_{nTotal}$ e $t_{máx}$ são semelhantemente não correlacionados. . . . .	31
4.5	A região interna a Júpiter: (a) gráfico do tempo de depleção, (b) do número relativo de objetos remanecentes e (c) o produto dos gráficos (a) e (b). . . . .	33
4.6	A distribuição dos asteróides numerados para a região entre 0.5 UA e 5.5 UA. . . . .	33
4.7	Os gráficos: (a) do $t_{máx}$ , (b) do $N_{nTotal}$ e (c) do $P_{PL}$ para a região entre Júpiter e Saturno. . . . .	34
4.8	A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio (barras verticais) no estudo da distribuição de objetos (gráfico do $P_{PL}$ ) na região entre Júpiter e Saturno. . . . .	35
4.9	A região entre Saturno e Urano: (a) gráfico do $t_{máx}$ , (b) do $N_{nTotal}$ e (c) do $P_{PL}$ . . . . .	36
4.10	A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no estudo da distribuição de objetos na região entre Saturno e Urano. . . . .	37
4.11	Os resultados obtidos para a região entre Urano e Netuno: (a) para o $t_{máx}$ , (b) para o $N_{nTotal}$ e (c) para o $P_{PL}$ . . . . .	38

4.12	A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no estudo da distribuição de objetos na região entre Urano e Netuno. . . . .	39
4.13	A região transnetuniana: (a) gráfico do $t_{máx}$ , (b) do $N_{nTotal}$ e (c) do $P_{PL}$ . . . . .	40
4.14	A caracterização de ressonâncias de movimento médio na distribuição de pequenos objetos da região Transnetuno. . . . .	40
4.15	A região interna a Júpiter: (a) gráfico do tempo máximo de depleção de objetos, (b) do número relativo de objetos remanentes e (c) o parâmetro de população local. . . . .	42
4.16	Região entre Júpiter e Saturno: (a) gráfico do tempo de depleção, (b) do número relativo de objetos remanentes e (c) o produto dos gráficos (a) e (b). . . . .	43
4.17	A determinação de ressonâncias de movimento médio no gráfico do $P_{PL}$ obtido no estudo da distribuição de pequenos objetos na região Júpiter-Saturno. . . . .	43
4.18	Região entre Saturno e Urano: (a) gráfico do $t_{máx}$ , (b) do $N_{nTotal}$ e (c) do parâmetro de população local, $P_{PL}$ . . . . .	44
4.19	A caracterização dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no gráfico do $P_{PL}$ obtido no estudo da distribuição de objetos na região entre Saturno e Urano. . . . .	45
4.20	Os resultados obtidos para a região entre Urano e Netuno. (a) o gráfico do $t_{máx}$ , (b) do $N_{nTotal}$ e (c) do $P_{PL}$ . . . . .	46
4.21	A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no estudo da distribuição de objetos na região entre Urano e Netuno. . . . .	47
4.22	Os gráficos: (a) do $t_{máx}$ , (b) do $N_{nTotal}$ e (c) do $P_{PL}$ para a região Transnetuno. . . . .	49
4.23	A identificação dos locais que apresentaram ressonâncias de movimento médio no gráfico do parâmetro de população local obtido para a região transnetuniana. . . . .	49

4.24	A dependência do $P_{PL}$ em relação ao número de condições iniciais $N_{nTotal}$ .	50
4.25	A dependência do $P_{PL}$ em relação ao intervalo de excentricidades iniciais.	51
4.26	A influência do $\Delta t$ nos valores de: (a) $t_{máx}$ , (b) $N_{nTotal}$ e (c) $P_{PL}$ . . . .	51

# Lista de Tabelas

2.1	A divisão do Sistema Solar em regiões. . . . .	8
-----	--	---

# Resumo

LADEIRA, Denis Gouvêa, M.S., Universidade Federal de Viçosa, Dezembro, 2003. **Estudo da Distribuição de Pequenos Objetos no Sistema Solar**. Orientador: Ricardo Reis Cordeiro; Conselheiros: Afrânio Pereira Rodrigues, José Arnaldo Redinz e Marcelo Lobato Martins

No presente trabalho estudamos a distribuição dos pequenos corpos em várias regiões do Sistema Solar utilizando o fato de que, para pequenos intervalos de semi-eixo maior, o número de partículas que sofrem encontros próximos no tempo segue uma lei de potência. O estudo é realizado utilizando modelos planar e não planar. Considerando os sete maiores planetas, empregamos as equações do movimento do problema de  $n$ -corpos em um sistema de referência heliocêntrico para integrar um total de  $10 \times 10^6$  condições iniciais que foram distribuídas entre 0.52 UA e 52 UA. Os resultados obtidos são comparados com a distribuição de asteróides e cometas observada e são determinadas as principais ressonâncias de movimento médio.

# Abstract

LADEIRA, Denis Gouvêa, M.S., Universidade Federal de Viçosa, December, 2003. **Study of the Distribution of Small Bodies in the Solar System.** Adviser: Ricardo Reis Cordeiro; Committee members: Afrânio Pereira Rodrigues, José Arnaldo Redinz e Marcelo Lobato Martins

In the present work we study the distribution of small bodies in several regions of the Solar System considering the fact that, for small intervals of semi-major axis, the particles number that suffer close approaches in the time fulfills a power law. The study is performed by planar and 3-D models. Considering the seven greater planets, we employ the motion's equations for the  $n$ -body problem in a heliocentric frame to integrate the orbits of  $10 \times 10^6$  initial conditions distributed between 0.52 AU e 52 AU. The results were compared with the distribution of observed asteroids and comets, and we determine the main mean motion resonances.

# Capítulo 1

## Introdução

Em muitos problemas da astronomia dinâmica as investigações via simulações computacionais são realizadas integrando sistemas de equações que descrevem o movimento de um conjunto de corpos cuja configuração muda de acordo com o problema que está sendo estudado. Tais simulações normalmente envolvem integrações para largas escalas de tempo, às vezes equivalentes à idade do Sistema Solar. Estes sistemas são normalmente complexos e apresentam dinâmicas bastante ricas, revelando estruturas fractais e comportamentos de natureza caótica (como mostrado por Muriison (1989) e Cordeiro *et al.* (1999)). Podemos citar também o trabalho de Sussman e Wisdom (1988), onde são relatadas evidências numéricas de que o movimento de Plutão é caótico, e o trabalho de Laskar (1989, 1990) no qual é mostrado que o movimento dos planetas internos é também caótico. A notável evolução do desempenho e potencialidade dos computadores e o surgimento de uma nova geração de arquiteturas computacionais paralelas estão permitindo que novos problemas em astronomia sejam estudados.

A não uniforme distribuição dos pequenos objetos no Sistema Solar é algo que tem despertado a curiosidade de muitos astrônomos. Na região interna a Júpiter são conhecidos vários nichos favoráveis à existência de aglomerados de asteróides. Já na região entre Júpiter e Netuno é conhecido um número relativamente pequeno de objetos. Talvez isto possa ser explicado em termos das dificuldades relativas à observação. O fato da distância relativa desta região ao Sol ser grande faz com que

a intensidade da radiação solar seja muito reduzida. Como os asteróides são, em geral, escuros (3/4 dos asteróides conhecidos possuem albedo geométrico em torno de 3.5 %), então a observação de tais objetos nesta região é bastante difícil. Existe também a possibilidade desta região ser dinamicamente instável, ainda que para longos períodos de tempo. Na fria região transnetuniana também é conhecido um número significativo de objetos que, na grande maioria, são núcleos cometários possuindo, em sua composição, uma boa proporção de água no estado sólido. Buscando uma melhor compreensão dos aspectos relacionados à distribuição dos pequenos corpos do Sistema Solar vários modelos foram propostos e desenvolvidos ao longo dos últimos anos.

Lecar e Franklin (1973) apresentaram os resultados de um estudo para as regiões entre Marte e Júpiter e entre Júpiter e Saturno. A região entre Marte e Júpiter foi estudada usando 260 partículas, as quais tiveram valores de semi-eixo maior uniformemente distribuídos no intervalo de 2.862 UA a 4.423 UA. As excentricidades foram aleatoriamente escolhidas entre 0.0 a 0.3. Já para a região entre Júpiter e Saturno eles empregaram 100 partículas com semi-eixo maior variando de 5.723 UA a 9.105 UA e excentricidades aleatoriamente escolhidas no intervalo de 0.0 a 0.1. Além disso eles assumiram Saturno com uma massa de 30% da massa de Júpiter e com semi-eixo maior igual a 9.521 UA. O planeta Saturno foi considerado apenas no estudo da região situada entre Júpiter e Saturno. Eles observaram que entre Marte e Júpiter, na região entre 4.0 UA e 5.2 UA, uma grande quantidade de objetos é ejetada até 2400 anos. Na ressonância 3:2 com Júpiter poucas órbitas foram ejetadas em 2400 anos e, no mesmo intervalo de tempo, nenhuma partícula deixou a região da ressonância 2:1 com Júpiter. Para a região entre Júpiter e Saturno eles verificaram que cerca de 85% dos objetos abandonam a região até 6000 anos.

No mesmo ano, Everhart (1973), embora preocupado principalmente com órbitas do tipo ferradura e com os asteróides Troianos, apresentou um estudo da região entre Júpiter e Saturno no qual órbitas de baixa excentricidade permaneceram nas integrações por um tempo da ordem de  $10^5$  anos.

Shoemaker e Wolfe (1984) simularam a evolução de 2000 partículas na região situada entre Urano e Netuno para um tempo de  $4.5 \times 10^9$  anos. De acordo com seus

resultados uma grande quantidade de objetos é eliminada da região, sobrevivendo por toda a simulação apenas 9% das condições iniciais.

Franklin *et al.* (1989) estenderam o trabalho que haviam realizado em 1973, estudando a região situada entre 7.0 UA e 7.5 UA. Eles verificaram que órbitas com valores de excentricidades próximas aos dos planetas vizinhos eram mais estáveis que órbitas menos excêntricas. Eles observaram, também, que partículas dotadas de inclinações mais elevadas são capazes de permanecer em órbita por tempos mais longos.

No mesmo ano, Duncan *et al.* (1989) usaram um modelo simplificado de dois planetas que se aproximava bastante do problema restrito de três corpos e trataram as órbitas das partículas como Keplerianas. As perturbações provocadas nas partículas foram aproximadas por impulsos a cada conjunção. Além disso, no modelo os planetas e as partículas teste estavam confinados no plano. Com este método eles estudaram as regiões situadas entre cada par de planetas adjacentes, incluindo apenas estes dois planetas como perturbadores. Os planetas tiveram suas órbitas restritas a movimentos circulares, e as partículas assumiram órbitas de baixa excentricidade. Realizando integrações para um tempo de  $4.5 \times 10^9$  anos, eles verificaram que muitas partículas com órbitas no regime quase circular sobreviveram por um tempo da ordem da idade do Sistema Solar.

Um ano mais tarde Weibel *et al.* (1990) desenvolveram um experimento no qual consideraram o Sol, Júpiter e Saturno como mutuamente perturbadores. O modelo consistiu em integrar o movimento orbital de 125 partículas teste situadas, inicialmente, no intervalo de 5.7 UA e 8.8 UA. A excentricidade das partículas foi aleatoriamente escolhida no intervalo de 0.0 a 0.02, e as inclinações entre  $0.0^\circ$  e aproximadamente  $3.61^\circ$ . Segundo o modelo proposto, a região entre Júpiter e Saturno não fornece nenhuma condição para que eventuais aglomerados de objetos se formem, exceto nas regiões próximas aos pontos Lagrangeanos de Júpiter. Estes autores concluem que uma busca realmente minuciosa por órbitas estáveis na região entre Júpiter e Saturno exige simulações com maiores intervalos de excentricidade e inclinação.

Soper *et al.* (1990) analisaram a região entre Júpiter e Saturno e utilizaram

este estudo como fundo para checar de que forma os erros da precisão do método numérico poderiam afetar órbitas de natureza estável. Eles encontraram que órbitas situadas nas proximidades de 7.2 UA e 7.54 UA são capazes de permanecer por 800000 períodos de Júpiter sem cruzar com a órbita dos planetas. O modelo usado por eles foi o mesmo de Lecar e Franklin (1973).

Gladman e Duncan (1990), usando um método de mapeamento simplético de quarta ordem desenvolvido por Candy e Rozmus (1990), apresentaram resultados que diferiram bastante de Duncan *et al.* (1989). O estudo foi realizado via integração direta das equações de movimento tridimensionais para um problema de  $n$  - corpos. A região entre Júpiter e Saturno foi estudada utilizando 900 partículas que foram distribuídas entre 6.76 UA e 8.06 UA. O Sol, Júpiter e Saturno foram considerados como mutuamente interagentes. O estudo consistiu, também, em simular 90 partículas para a região situada entre Saturno e Urano e mais 90 para a região entre Urano e Netuno. Os planetas tiveram liberdade para descreverem suas trajetórias no espaço tridimensional e as órbitas das partículas foram, inicialmente, coplanares e de baixa excentricidade. Neste modelo as partículas eram removidas da simulação por eventuais encontros próximos que ocorriam com planetas ou caso elas abandonassem o Sistema Solar. A integração foi processada por um tempo equivalente a  $22.5 \times 10^6$  anos. Gladman e Duncan (1990) foram os primeiros a utilizarem o conceito de encontro próximo como critério para excluir objetos da integração, o que constitui uma aproximação mais realística que os trabalhos mencionados anteriormente, nos quais as partículas eram removidas caso cruzassem órbitas de planetas. Eles verificaram que a maioria das partículas teste situadas entre os planetas gigantes são eliminadas da integração em uma escala de tempo da ordem de  $10^6$  anos devido a ocorrência de encontros próximos.

Holman e Wisdom (1993) usaram uma técnica de mapeamento simplético que eles já haviam desenvolvido anteriormente (Wisdom e Holman (1991)) para integrar o movimento de partículas e planetas em coordenadas de Jacobi. As simulações foram processadas no espaço tridimensional sendo as condições iniciais da posição e velocidade dos planetas extraídas de Cohen *et al.* (1973). As partículas estavam

inicialmente em órbitas circulares e com inclinações iguais a zero. O trabalho foi realizado em duas partes. Na primeira foi apresentado um estudo da estabilidade dos pontos Lagrangeanos  $L_4$  e  $L_5$  dos planetas Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Para isto, os autores integraram as órbitas de 4000 partículas teste que foram distribuídas nas proximidades de tais pontos. Os valores iniciais de semi-eixo foram escolhidos no intervalo de 0.96 a 1.04 do semi-eixo do planeta do qual os pontos  $L_4$  e  $L_5$  estavam sendo estudados. Os resultados obtidos mostraram que os pontos Lagrangeanos  $L_4$  e  $L_5$  de Júpiter, Urano e Netuno são estáveis por  $20 \times 10^6$  anos. Os pontos  $L_4$  e  $L_5$  de Saturno mostraram-se instáveis, embora que, curiosamente, a vizinhança destes pontos tenham se revelado estáveis por  $20 \times 10^6$  anos. Este resultado foi confirmado por de la Barre *et al.* (1996), que realizaram integrações de  $412 \times 10^6$  anos. Na segunda parte do trabalho de Holman e Wisdom foi analisado o comportamento de 3000 partículas teste que possuíam semi-eixo maior inicial no limite de 5 UA a 50 UA. Para as regiões exteriores a Netuno o tempo de integração adotado foi de  $200 \times 10^6$  anos. Já para as regiões interiores o tempo de integração foi de  $800 \times 10^6$  anos. Eles verificaram que numerosas partículas situadas entre os planetas exteriores e além Netuno até 43 UA foram removidas da integração por encontros próximos, exceto em pequenas regiões entre Urano e Netuno nas quais poucas partículas permaneceram por  $800 \times 10^6$  anos.

Holman (1997) usou o mesmo esquema simplético de Wisdom e Holman para simular órbitas de milhares de partículas teste na região entre Urano e Netuno, situadas entre 24 UA e 27 UA. As partículas tiveram, inicialmente, inclinações variando de  $0^\circ$  a  $10^\circ$  e excentricidades inferiores a 0.05. A simulação foi processada por um tempo equivalente a  $4.5 \times 10^9$  anos. Os resultados alcançados revelaram que partículas com excentricidade inicial  $e_o > 0.03$  ou inclinação inicial  $i_o > 3^\circ$  são removidas em  $1 \times 10^9$  anos, enquanto que partículas com excentricidade inicial  $e_o > 0.01$  ou inclinação inicial  $i_o > 1^\circ$  são removidas até  $4.5 \times 10^9$  anos.

Mais recentemente, Grazier *et al.* (1999) publicaram um estudo onde foi utilizado um processo de integração otimizado de  $13^a$  ordem associado a métodos capazes de minimizar os erros, o qual foi derivado do método de Störmer (1907). O sistema

Solar foi modelado no espaço tridimensional, incorporando o efeito gravitacional de todos os planetas jovianos. A massa dos planetas terrestres foi adicionada à massa do Sol e as partículas foram consideradas sem massa. O estudo foi realizado para as regiões entre Júpiter e Saturno, entre Saturno e Urano e entre Urano e Netuno. A distribuição dos valores iniciais do semi-eixo maior das partículas foi uma gaussiana centrada no valor médio de semi-eixo maior do par de planetas que delimitam cada região de tal forma que a distância entre estes planetas correspondesse a  $6\sigma_a$ , onde  $\sigma_a$  corresponde ao desvio padrão da gaussiana. As inclinações iniciais foram distribuídas de forma gaussiana com média em  $0^\circ$  e desvio padrão  $\sigma_i$  de  $10^\circ$ . Além disso, os valores iniciais da excentricidade foram aleatoriamente escolhidos de 0.0 a 1.0 usando uma distribuição exponencial que privilegia excentricidades mais baixas. As fases iniciais, bem como as longitudes do periélio e do nodo ascendente, foram distribuídas uniforme e randomicamente de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . As integrações foram realizadas para um tempo de  $1 \times 10^9$  anos. No estudo da região entre Júpiter e Saturno, 100000 condições iniciais foram integradas utilizando, para isto, 10 estações de trabalho em paralelo. Para as regiões entre Saturno e Urano e entre Urano e Netuno, eles empregaram 10000 partículas usando 50 estações de trabalho simultaneamente, e mesmo assim gastaram 30 vezes mais tempo de CPU com relação à região entre Júpiter e Saturno. Eles verificaram que poucos objetos podem permanecer estáveis sobre uma fração significativa da idade do Sistema Solar. Na região entre Saturno e Urano eles observaram que objetos podem permanecer estáveis até  $100 \times 10^6$  anos em 12.5 UA, 14.4 UA e 16 UA. Eles constataram também a existência de órbitas estáveis até  $5 \times 10^6$  anos em 22.4 UA, 23.2 UA, 24.5 UA e 26 UA.

O presente trabalho também tem como objetivo analisar a distribuição de pequenos objetos no Sistema Solar. O estudo é realizado considerando que a taxa de encontros próximos de partículas que apresentam semi-eixo maior inicial dentro de um pequeno intervalo segue uma lei de potência. No capítulo 2 apresentamos o modelo dinâmico empregado e uma descrição da técnica de integração utilizada. No capítulo 3 apresentamos os resultados obtidos no estudo de identificação das principais ressonâncias de movimento médio. No capítulo 4 descrevemos o procedimento adotado

no estudo da distribuição de pequenos corpos no Sistema Solar, apresentamos os resultados obtidos neste estudo, identificamos as principais ressonâncias de movimento médio associadas a regiões de baixa densidade de objetos bem como aquelas que estão associadas a regiões que apresentam maior densidade de objetos e ainda discutimos como a arbitrariedade de certos parâmetros pode afetar os resultados. Por fim, apresentamos as nossas conclusões no capítulo 5.

# Capítulo 2

## O Modelo

Em nosso trabalho dividimos o Sistema Solar em cinco regiões caracterizando-as por intervalos delimitados pelos valores de semi-eixo maior dos quatro planetas gigantes. Mostramos, na tabela que se segue, o que cada uma destas regiões abrange:

<b>Região</b>	<b>Abrangência</b>	<b>Semi-eixo maior (UA)</b>
<i>Sol - Júpiter</i>	Desde as proximidades do Sol até pouco além de Júpiter	De 0.52 a 5.72
<i>Júpiter - Saturno</i>	Desde Júpiter até pouco além de Saturno	De 5.2 a 10.4
<i>Saturno - Urano</i>	Aproximadamente entre Saturno e Urano	De 9.36 a 19.25
<i>Urano - Netuno</i>	Aproximadamente entre Urano e Netuno	De 19.25 a 30.17
<i>Transnetuno</i>	Além de Netuno englobando a região do cinturão de Kuiper	De 30.17 a 52.0

Tabela 2.1: A divisão do Sistema Solar em regiões.

Consideramos em nosso estudo os sete maiores planetas do Sistema Solar (Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno), admitindo-os como corpos pontuais e mutuamente perturbadores. Devido ao fato de que, no Sistema Solar real, os pequenos objetos apresentam massas relativamente pequenas quando comparadas às massas dos planetas, desconsideramos, então, os efeitos gravitacionais destes sobre as órbitas dos planetas. O estudo foi realizado considerando um sistema de referência

heliocêntrico onde a dinâmica de cada corpo é descrita pelo sistema de equações diferenciais para o problema de  $n$ -corpos abaixo (Danby, 1994, Murray e Dermott, (1999)):

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \quad (2.1)$$

$$\dot{\vec{v}}_i = -k^2 \frac{(m_0 + m_i)}{\|\vec{r}_i\|^3} \vec{r}_i + k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_{ij}\|^3} - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\vec{r}_j}{\|\vec{r}_j\|^3} \quad (2.2)$$

onde  $m_0$  é a massa do Sol,  $m_i$  é a massa do  $i$ -ésimo corpo,  $\vec{r}_i$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo corpo com relação ao Sol,  $k^2$  é a constante da gravitação universal,  $\vec{r}_{ij}$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo corpo com relação ao corpo  $j$ . O primeiro termo da segunda expressão é a interação gravitacional entre o Sol e o corpo  $i$ . O primeiro somatório corresponde aos termos diretos da perturbação que os outros  $n - 2$  corpos exercem no  $i$ -ésimo corpo. O segundo somatório corresponde aos termos indiretos, o qual origina-se ao adotarmos o sistema de referência não inercial. Se o corpo  $i$  for uma partícula teste então  $m_i = 0$ .

Existem muitos integradores que podem ser utilizados para determinar a solução numérica do sistema de equações diferenciais acima. Tais integradores são caracterizados pela capacidade de resolver qualquer sistema de equações diferenciais ordinárias. Embora sejam precisos, estes integradores demandam um tempo de computação apreciável. Este é o preço a ser pago pela generalidade que eles apresentam.

Com a intenção de implementar algoritmos mais velozes para o estudo de problemas Hamiltonianos, Neri (1988), Forest e Ruth (1990), Yoshida (1990) propuseram um algoritmo simplético para o estudo de problemas dinâmicos para os quais a Hamiltoniana  $H(\vec{q}, \vec{p})$  pode ser escrita como a soma de duas funções, uma das quais depende apenas do momento  $\vec{p}$  e outra que depende apenas da coordenada  $\vec{q}$

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q}).$$

Assim, se o sistema evolui de um tempo inicial  $t_o$  para um tempo posterior  $t_o + \tau$ , onde  $\tau$  é o passo de tempo, então o intervalo entre  $t_o$  e  $t_o + \tau$  pode ser dividido em um número inteiro  $n$  de subintervalos, onde o valor de  $n$ , o qual define a ordem do mapa proposto, deve ser o maior possível que satisfaça a relação

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{L(\tau)}{\tau^n} \leq k', \quad \text{com } k' \text{ finito e real,}$$

onde  $L(\tau)$  é dado por

$$L(\tau) = \max \| \vec{q}(k \cdot \frac{\tau}{n}) - \vec{q}_k \|, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

em que  $\vec{q}(k \cdot \frac{\tau}{n})$  é a solução exata e  $\vec{q}_k$  é o valor fornecido pelo mapa. O esquema simplético proposto estabelece que a evolução dos vetores  $\vec{q}$  e  $\vec{p}$ , em um passo de tempo, é dada por:

$$\begin{array}{ll} \vec{q}_1 = \vec{q}_0 + c_1 \tau \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(\vec{p}_0, \vec{q}_0)} & \vec{p}_1 = \vec{p}_0 - d_1 \tau \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(\vec{p}_0, \vec{q}_1)} \\ \vec{q}_2 = \vec{q}_1 + c_2 \tau \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(\vec{p}_1, \vec{q}_1)} & \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - d_2 \tau \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(\vec{p}_1, \vec{q}_2)} \\ \vec{q}_3 = \vec{q}_2 + c_3 \tau \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(\vec{p}_2, \vec{q}_2)} & \vec{p}_3 = \vec{p}_2 - d_3 \tau \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(\vec{p}_2, \vec{q}_3)} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \vec{q}_n = \vec{q}_{n-1} + c_n \tau \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(\vec{p}_{n-1}, \vec{q}_{n-1})} & \vec{p}_n = \vec{p}_{n-1} - d_n \tau \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(\vec{p}_{n-1}, \vec{q}_n)} \end{array}$$

onde

$$\vec{q}_i = \vec{q}(t_o + i \frac{\tau}{n})$$

como o intervalo de tempo entre  $t_o$  e  $t_o + \tau$  está sendo dividido em  $n$  subintervalos temos que:

$$\sum_{i=1}^n \tau c_i = \sum_{i=1}^n \tau d_i = \tau.$$

Portanto, os coeficientes  $c_i$  e  $d_i$  obedecem a seguinte propriedade:

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n d_i = 1,$$

No caso particular em que o mapa utilizado é de 1ª ordem,  $n = 1$ , temos que

$$c_1 = 1$$

$$e$$

$$d_1 = 1.$$

Se o mapa for de  $2^a$  ordem,  $n = 2$ ,

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2},$$

$$d_1 = 1 \text{ e } d_2 = 0.$$

E, se for de  $4^a$  ordem,  $n = 4$ ,

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2-2^{1/3})}, \quad c_2 = c_3 = \frac{1-2^{1/3}}{2(2-2^{1/3})},$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1}{2-2^{1/3}}, \quad d_2 = -\frac{2^{1/3}}{2-2^{1/3}}, \quad \text{e } d_4 = 0.$$

Para  $n = 3$  não existe uma forma analítica para os coeficientes  $c_i$  e  $d_i$ . Normalmente a precisão de um mapa cresce quanto maior for a sua ordem. Por outro lado, podemos observar que a complexidade do mapa também cresce com  $n$ , o que pode não ser interessante, em função do tempo de processamento que será consumido na integração.

O método de integração que adotamos é baseado no mapeamento de  $2^a$  ordem de Wisdom e Holman (1992). Neste mapeamento o intervalo de tempo  $\tau$  (passo do integrador) é dividido em duas partes e o processo de integração é caracterizado por três etapas:

- 1 - Na primeira etapa, em um intervalo de tempo igual a  $\frac{\tau}{2}$ , cada corpo evolui sua órbita em torno do Sol independentemente dos demais. Em outras palavras, o sistema evolui desconsiderando as interações mútuas entre os planetas bem como a influência dos planetas nas órbitas das partículas. O estudo é, portanto, considerado como  $n - 1$  problemas de dois corpos e, utilizando o algoritmo apresentado em Danby (1988), a evolução do sistema é determinada pelas funções  $f$  e  $g$  de Gauss.
- 2 - Em seguida as perturbações mútuas são introduzidas considerando que, em um intervalo de tempo igual a  $\tau$ , são efetuadas as correções nas velocidades de

todos os corpos. Estas correções consistem em somar, às velocidades finais determinadas no primeiro estágio, o termo das perturbações multiplicadas por  $\tau$ .

- 3 - Finalmente repete-se a primeira etapa onde novamente as interações mútuas entre os corpos são desconsideradas e, para um intervalo de tempo igual a  $\frac{\tau}{2}$ , as funções  $f$  e  $g$  de Gauss são empregadas determinando, assim, a evolução do sistema para a outra metade do intervalo de tempo.

No modelo computacional empregado as integrações são efetuadas de forma simultânea para o movimento dos planetas e das partículas e, monitorando em cada passo de tempo a distância relativa das partículas aos planetas, somos capazes de detectar a ocorrência de encontros próximos.

Consideramos, em nosso estudo, o encontro próximo como a situação onde uma partícula é encontrada dentro da esfera de influência de algum planeta. O valor do raio da esfera de influência de um planeta foi considerado como a distância do “ponto de equilíbrio instável interno”,  $L_1$ , ao respectivo planeta. Como o nosso problema é elíptico então calculamos o ponto de equilíbrio  $L_1$  “instantâneo”, o qual é determinado em cada passo de integração supondo, apenas para efeito de cálculo de  $L_1$ , que a órbita do planeta é circular. Esta definição apresenta um valor que não difere muito do raio da esfera de Hill. Com este critério a excentricidade do planeta produz um efeito oscilante no raio da esfera de influência.

Como é bem conhecido, quando uma partícula penetra na esfera de influência de algum planeta os valores do semi-eixo maior e da excentricidade desta partícula, muitas das vezes, sofrem abruptas mudanças, passando a descrever uma órbita com característica completamente diferente da que possuía anteriormente ao encontro, podendo culminar em uma colisão com o Sol ou com algum planeta, ou até mesmo adquirir uma órbita hiperbólica (em relação ao Sol), fazendo com que esta partícula seja ejetada do Sistema Solar. Na figura 2.1 nós mostramos os resultados de uma integração onde são ilustrados os efeitos dos encontros próximos nos elementos orbitais, particularmente no semi-eixo maior, na excentricidade e na inclinação. Nesta figura

as linhas largas mostram em (a) a evolução do semi-eixo maior, em (b) da excentricidade e (c) da inclinação de uma órbita com  $a_o = 4.5$  UA,  $e_o = 0.05$ ,  $i_o = 1.65^\circ$ ,  $\Omega_o = 78.0^\circ$ ,  $\lambda_o = 199.4^\circ$  e  $\varpi_o = 122.2^\circ$ . Os encontros próximos são marcados quando as linhas finas se tornam verticais. O valor 4 nos gráficos de linha fina indica que a partícula penetrou na esfera de influência de Júpiter e o valor 5 indica que este fenômeno ocorreu com Saturno. Como podemos perceber, os instantes dos encontros próximos estão, na maioria dos casos, associados a mudanças substanciais nos valores dos parâmetros orbitais  $a$ ,  $e$  e  $i$ .

Como nosso trabalho consiste em estudar a distribuição dos pequenos corpos em várias regiões do Sistema Solar, então o nosso interesse é identificar quais órbitas são estáveis, no sentido de não apresentarem encontro próximo, uma vez que tais órbitas contribuem de modo mais significativo para a caracterização da população de objetos em uma subregião do Sistema Solar. Em função deste fato, o que acontece após o encontro próximo não será objeto de estudo neste trabalho. Assim, as integrações efetuadas ao longo deste trabalho são interrompidas após o instante em que a partícula penetra na esfera de influência de algum planeta.

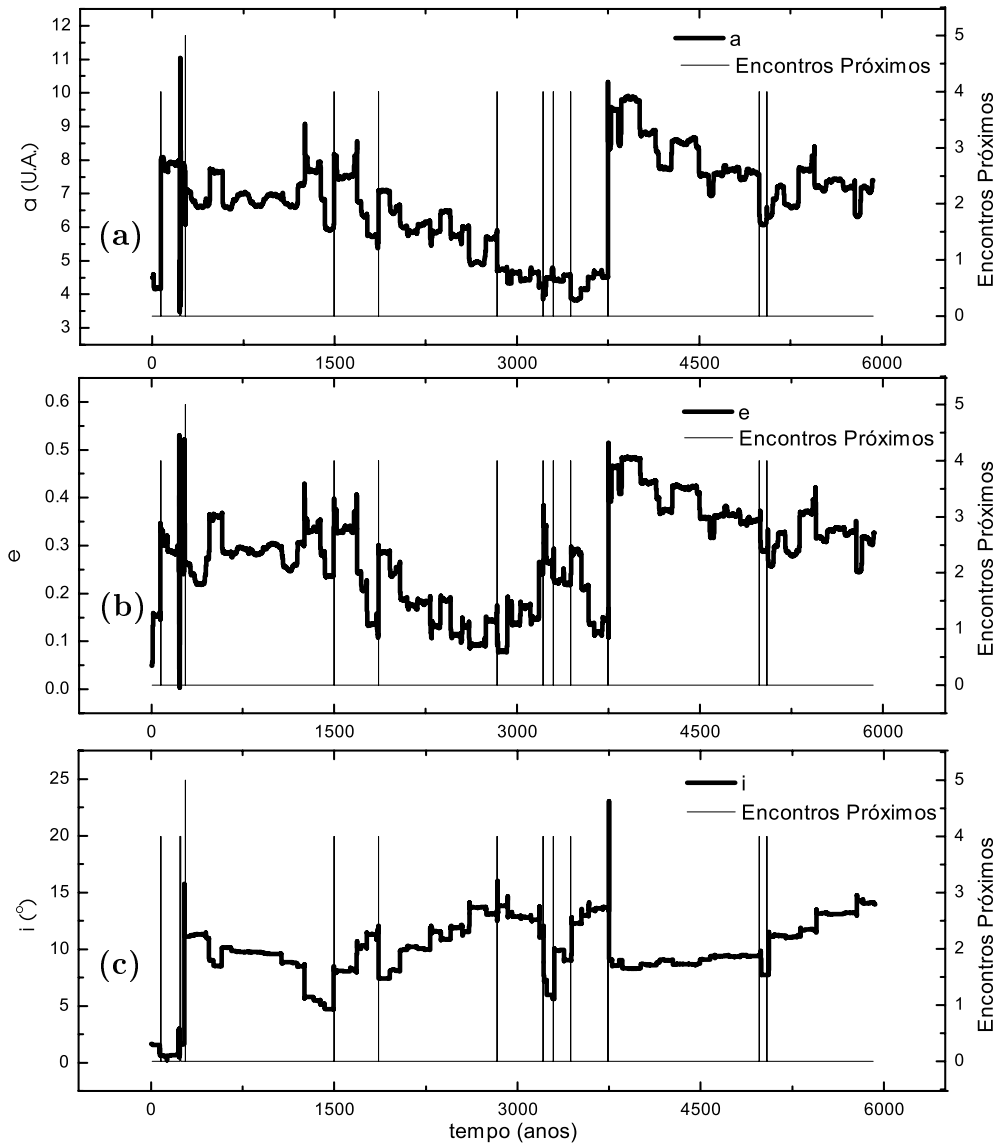


Figura 2.1: Influência dos encontros próximos: (a) no semi-eixo maior, (b) na excentricidade e (c) na inclinação.

## Capítulo 3

# Ressonâncias de Movimento Médio

Como é bem conhecido (ver, por exemplo, Michelle Moons (1997)), os fenômenos de ressonâncias de movimento médio são de grande importância nos estudos da distribuição dos pequenos corpos no Sistema Solar. O critério que adotamos na identificação das ressonâncias de movimento médio consiste em determinar se o ângulo ressonante  $\phi$  libra em torno de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  durante um determinado período de integração. A expressão do ângulo  $\phi$ , a qual pode ser obtida do estudo da teoria de perturbação para o problema de três corpos, relaciona as longitudes médias do planeta e da partícula,  $\lambda_{m_1}$  e  $\lambda_{m_2}$ , e a longitude do periélio da partícula,  $\varpi_{m_2}$ , da seguinte forma:

$$\phi = p\lambda_{m_1} - q\lambda_{m_2} - (p - q)\varpi_{m_2}$$

onde  $p$  e  $q$  são inteiros tais que

$$\frac{p}{q} \approx \frac{n_{m_2}}{n_{m_1}},$$

onde  $n_{m_1}$  é o movimento médio do planeta e  $n_{m_2}$  o movimento médio da partícula.

Da expressão do ângulo ressonante  $\phi$  acima temos que:

$$\varpi_{m_2} = \frac{p}{p-q}\lambda_{m_1} - \frac{q}{p-q}\lambda_{m_2} - \frac{\phi}{p-q} \quad (3.1)$$

Vemos, portanto, que existe uma relação linear entre a longitude do periélio,  $\varpi_{m_2}$ , e a longitude média,  $\lambda_{m_2}$ , da partícula. Na figura 3.1 mostramos o resultado de quatro simulações onde as equações (2.1) e (2.2) foram integradas no espaço tridimensional por um tempo de, aproximadamente, 47600 anos. As integrações foram realizadas empregando, para cada gráfico da figura 3.1, 10000 partículas. As longitudes iniciais (do periélio, média e do nodo ascendente) das partículas foram escolhidas uniforme e aleatoriamente entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . As excentricidades iniciais foram distribuídas de forma uniforme no intervalo entre 0 e 0.4 e as inclinações iniciais foram determinadas randomicamente entre  $0^\circ$  e  $30^\circ$ , porém obedecendo uma distribuição gaussiana com  $\langle i \rangle = 0^\circ$  e desvio padrão  $\sigma_i = 10^\circ$ . As condições iniciais dos planetas foram extraídas do *The Astronomical Almanac* (1996) para a data 07/02/1996. Cada gráfico mostrado na figura 3.1 corresponde a uma ressonância de movimento médio: a figura 3.1-a corresponde à ressonância 3:2 com Júpiter (grupo de Hilda, próxima de 4 UA), a figura 3.1-b corresponde à ressonância 4:3 com Júpiter (Thule, próxima de 4.3 UA), a 3.1-c à 4:5 com Saturno (situada perto de 11.2 UA) e a 3.1-d à 2:3 com Saturno (nas proximidades de 12.7 UA). Os pontos pretos correspondem a condições iniciais de partículas que não sofreram encontro próximo durante o tempo de integração adotado. As linhas largas correspondem aos valores de  $\varpi_{m_2}$  em função de  $\lambda_{m_2}$  dados por 3.1 no caso em que  $\phi = 0^\circ$ . As linhas estreitas, analogamente às linhas largas, correspondem ao caso em que  $\phi = 180^\circ$  na expressão 3.1.

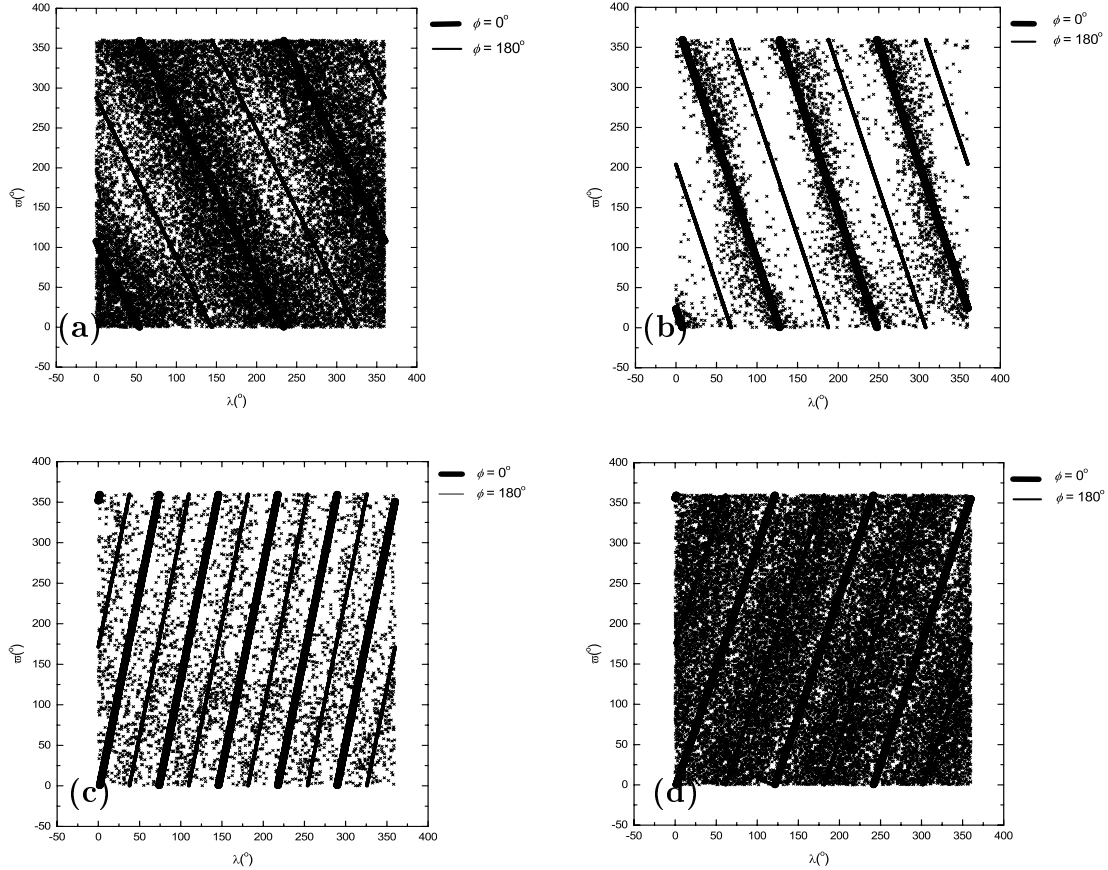


Figura 3.1: A relação linear dada pela expressão 3.1 entre os elementos  $\varpi_{m_2}$  e  $\lambda_{m_2}$  para as regiões de ressonância de movimento médio: (a) ressonância 3:2 com Júpiter, (b) 4:3 com Júpiter, (c) 4:5 com Saturno e (d) 2:3 com Saturno.

Com o objetivo de identificar as principais ressonâncias no Sistema Solar, utilizamos um modelo planar, restrito e elíptico, onde os sete maiores planetas e as partículas evoluem suas órbitas em torno do Sol, o qual constitui a origem do nosso sistema de referência. As órbitas das partículas são perturbadas por todos os planetas, os quais também se perturbam mutuamente. O conjunto de equações diferenciais que descreve a dinâmica do sistema é dado pelas equações 2.1 e 2.2, onde os vetores  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\dot{\vec{v}}$  estão confinados em um mesmo plano. As condições iniciais dos planetas foram obtidas, projetando na eclíptica, os valores de posição e velocidade calculados a partir dos dados extraídos do *The Astronomical Almanac*, 1996. Para cada região descrita na tabela 2.1, 200 x 200 partículas foram uniformemente distribuídas no espaço a-e (semi-eixo maior x excentricidade). As longitudes iniciais do periélio foram, de forma

aleatória e uniforme, escolhidas entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  e a integração do movimento de todas partículas iniciou no perihélio. Nesta etapa do trabalho adotamos, para a região interior a Saturno, o passo de tempo como um cinquenta avos do período de Júpiter, o que corresponde a, aproximadamente, 0.2372 anos. Para as regiões exteriores a Saturno o passo foi de um décimo do período de Júpiter ( $\approx 1.186$  anos). As integrações foram processadas para um tempo total correspondente a 1000 passos.

As comensurabilidades analisadas no estudo da identificação das principais ressonâncias de movimento médio foram: 1:1, 1:2, 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9, 2:3, 2:5, 2:7, 2:9, 3:4, 3:5, 3:7, 3:8, 4:5, 4:7, 4:9, 5:6, 5:7, 5:8, 5:9, 6:7, 7:8, 7:9, 8:9 e também as razões inversas. O programa desenvolvido é capaz de verificar, para cada uma das 40000 condições iniciais em uma dada região, se existe alguma razão de movimento médio entre as mencionadas acima para a qual o ângulo ressonante  $\phi$  libra, durante o tempo de integração, em torno de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ .

Nas figuras que se seguem mostramos os resultados obtidos no estudo da identificação de ressonâncias de movimento médio. Para melhorar a visualização, nestas figuras estão mostradas apenas as ressonâncias que apresentaram maior número de condições iniciais, visto que algumas regiões apresentam um número relativamente grande de ressonâncias de movimento médio. Desta forma as regiões brancas correspondem a ressonâncias que apresentam menor número de condições iniciais com o ângulo  $\phi$  librando em torno de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  ou a condições iniciais para as quais o ângulo  $\phi$  apresenta circulação.

As ressonâncias 3:1, 5:2 e 2:1 na figura 3.2 estão associadas às *gaps* de Kirkwood no cinturão principal. Podemos também verificar ressonâncias que estão associadas a populações conhecidas de objetos, como por exemplo, as ressonâncias 3:2 e 1:1, as quais correspondem, respectivamente, ao grupo de Hilda e aos asteróides Troianos.

## Ressonâncias com Júpiter Região entre o Sol e Júpiter

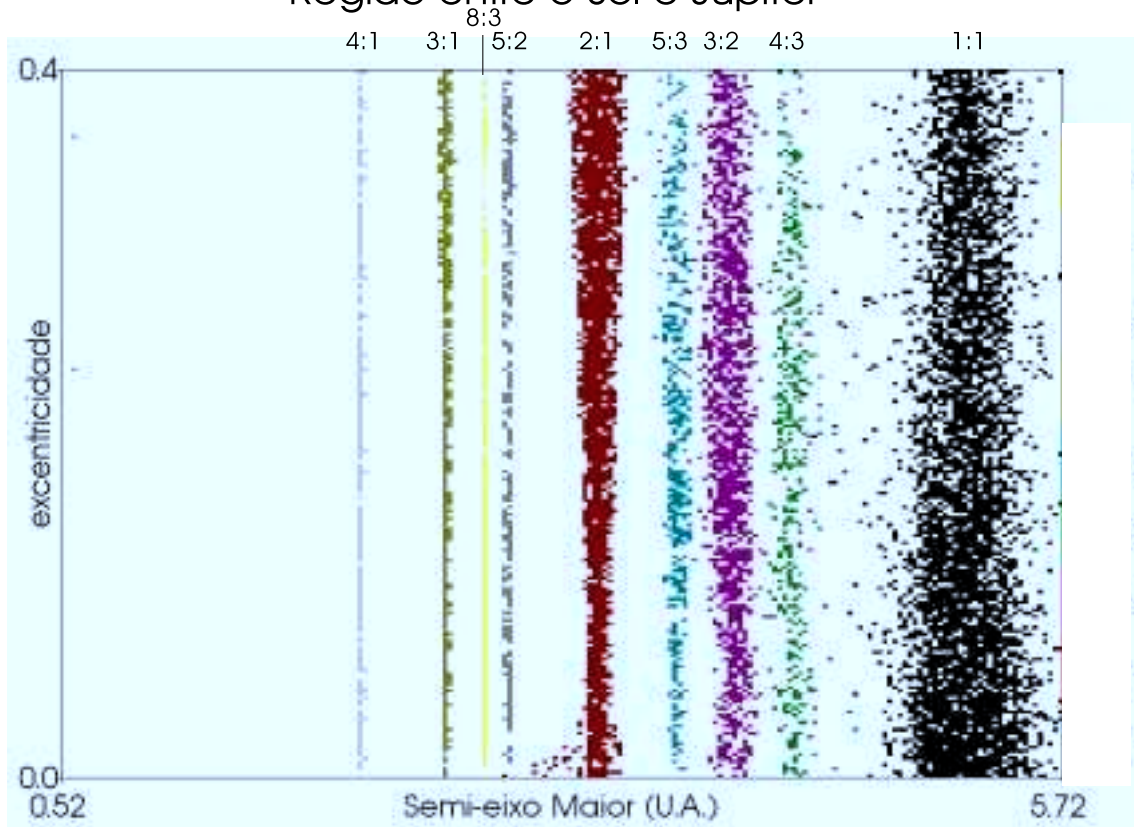


Figura 3.2: Ressonâncias com Júpiter na região Sol-Júpiter.

As comensurabilidades 1:1 com Júpiter/5:2 com Saturno, nas figuras 3.3-a e 3.3-b, respectivamente, correspondem ao grupo dos asteróides Troianos. As ressonâncias 1:1 com Saturno/2:5 com Júpiter, nas figuras 3.3-b e 3.3-a, estão relacionadas aos pontos Lagrangeanos  $L_4$  e  $L_5$  de Saturno e, conforme nossa abordagem para determinar a distribuição de pequenos objetos que será apresentada no capítulo 4, estas ressonâncias correspondem a uma concentração de partículas teste. Veremos também que o espaço entre Júpiter e Saturno apresenta um pequeno número de partículas que não sofrem encontro próximo, o que pode ser conseqüência da grande quantidade de ressonâncias de movimento médio que esta região apresenta.

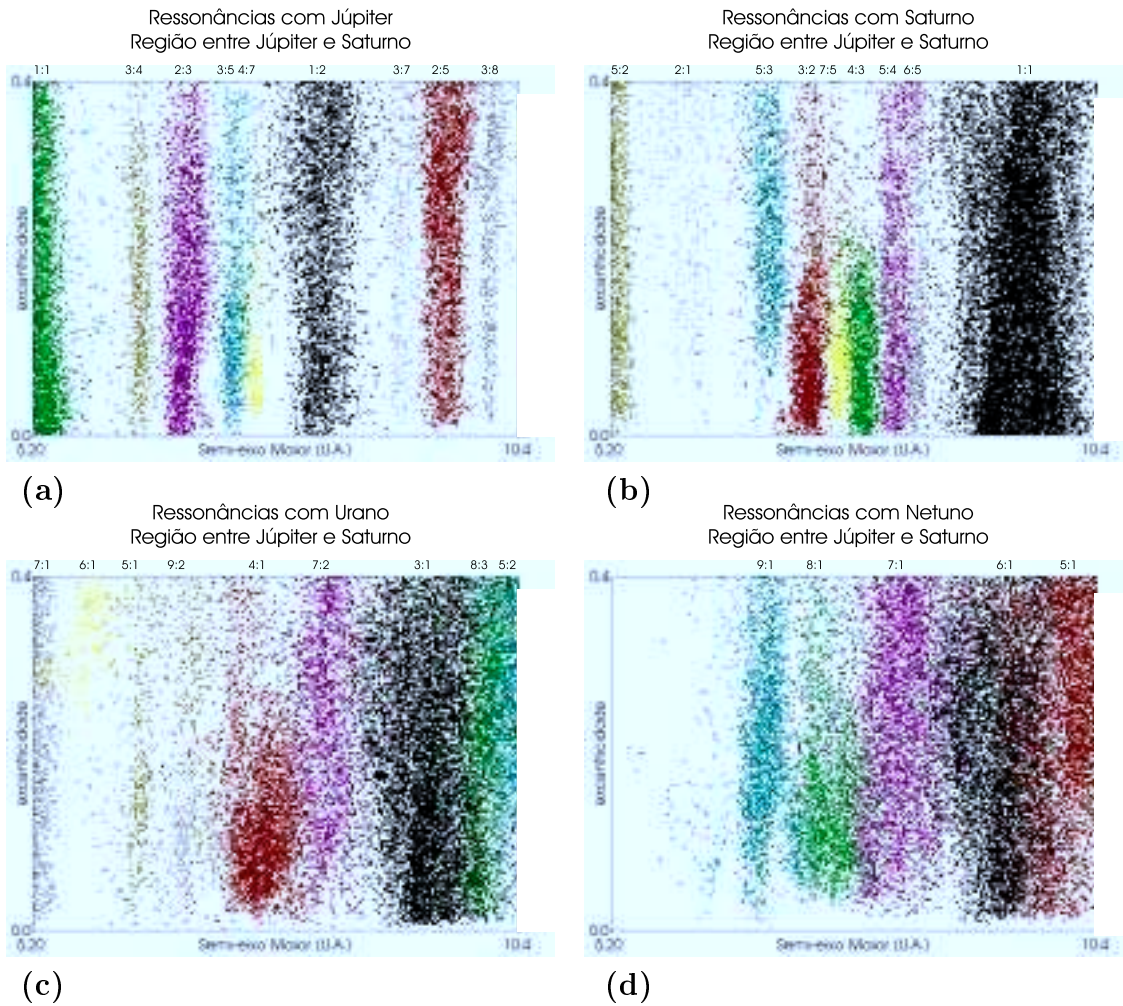


Figura 3.3: Ressonâncias na região Júpiter-Saturno: (a) com Júpiter, (b) com Saturno, (c) com Urano e (d) com Netuno.

Os resultados obtidos no estudo da região entre Saturno e Urano são apresentados na figura 3.4. No capítulo 4 veremos que algumas destas ressonâncias estão associadas a concentrações de partículas teste, como as ressonâncias 4:7 com Saturno e 1:1 com Urano (2:1 com Netuno). Veremos também que existem ressonâncias para as quais ocorre o contrário. Por exemplo as ressonâncias 8:7 e 7:6 com Urano, 9:4 com Netuno e 2:5 com Saturno correspondem, em semi-eixo, a regiões onde é pequeno o número de condições iniciais que não sofrem encontro próximo.

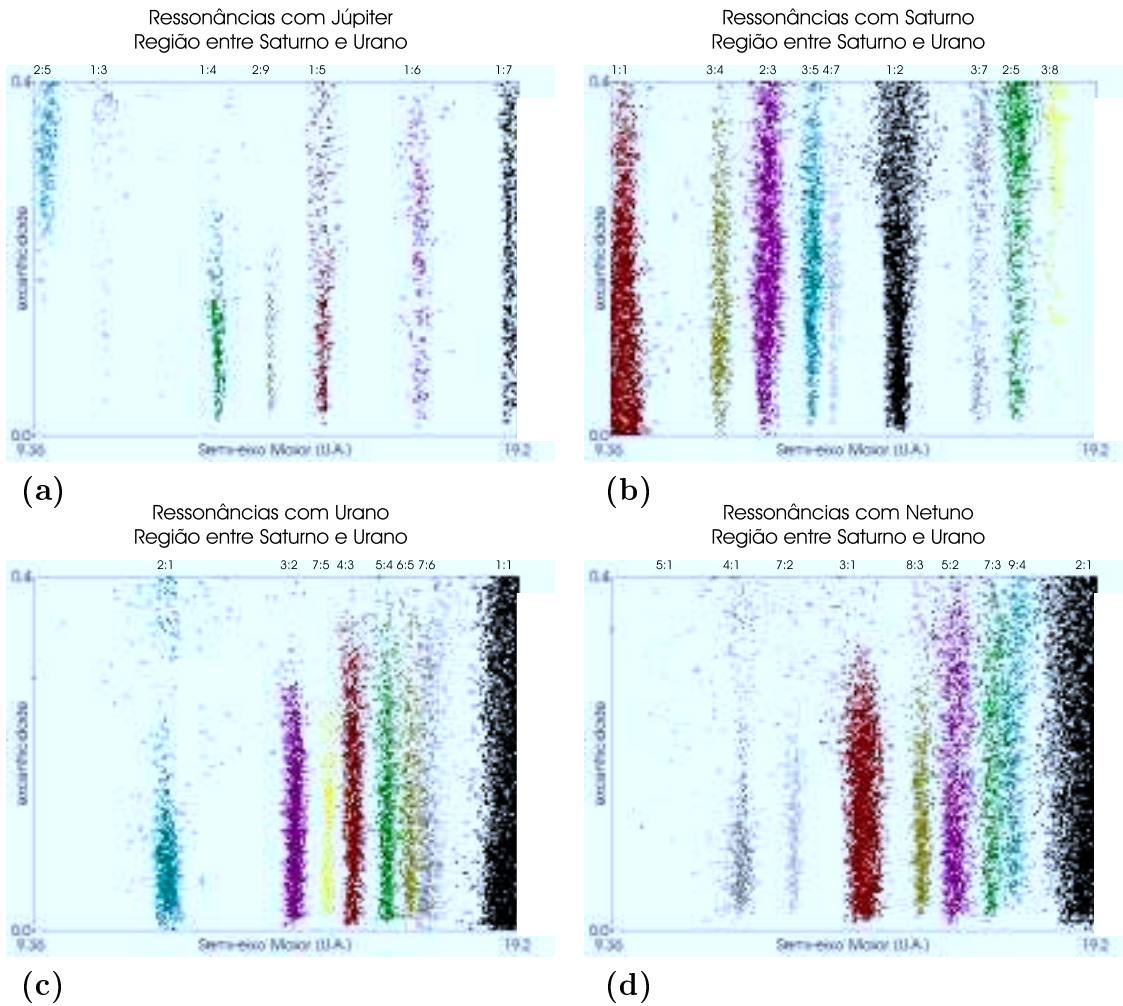


Figura 3.4: Ressonâncias na região Saturno-Urano: (a) com Júpiter, (b) com Saturno, (c) com Urano e (d) com Netuno.

As ressonâncias 1:1 com Urano/2:1 com Netuno nas figuras 3.5-c e 3.5-d constituem, respectivamente, a continuação das figuras 3.4-c e 3.4-d e estão associadas aos pontos de equilíbrio Lagrangeanos  $L_4$  e  $L_5$  de Urano. Como podemos observar, esta região apresenta um grande número de ressonâncias de movimento médio, predominantemente com os planetas Urano e Netuno.

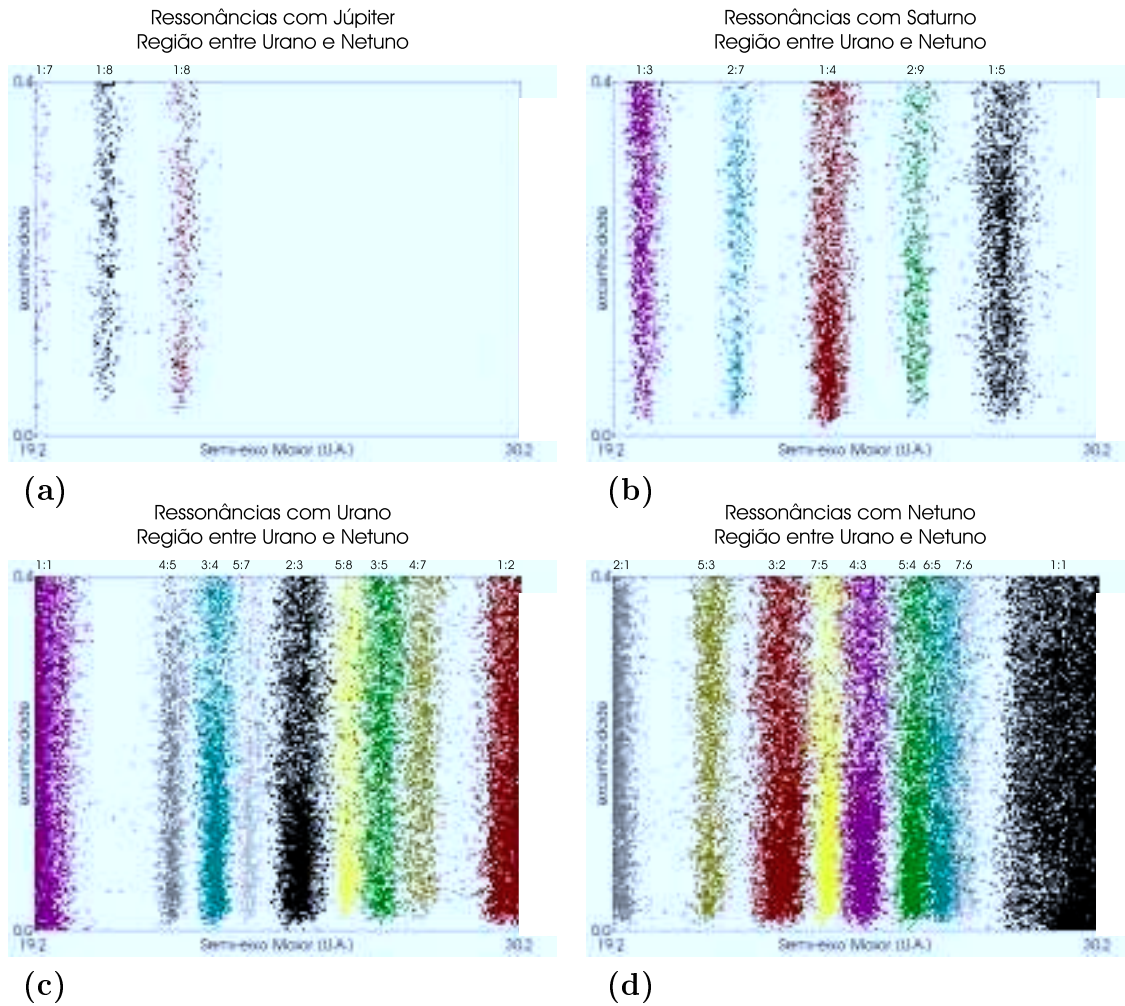


Figura 3.5: Ressonâncias na região Urano-Netuno: (a) com Júpiter, (b) com Saturno, (c) com Urano e (d) com Netuno.

Na figura 3.6 mostramos as principais comensurabilidades com os planetas Saturno, Urano e Netuno obtidas para a região Transnetuno. Nenhuma das condições iniciais apresentou libração com Júpiter. Como veremos, as ressonâncias 2:3, 4:7 e 1:2 com Netuno correspondem, em semi-eixo, a regiões que apresentam concentrações de partículas teste. Podemos observar que as ressonâncias 1:2 com Urano/1:1 com Netuno que surgem nas figuras 3.6-b e 3.6-c se completam, respectivamente, com os resultados apresentados nas figuras 3.5-c e 3.5-d.

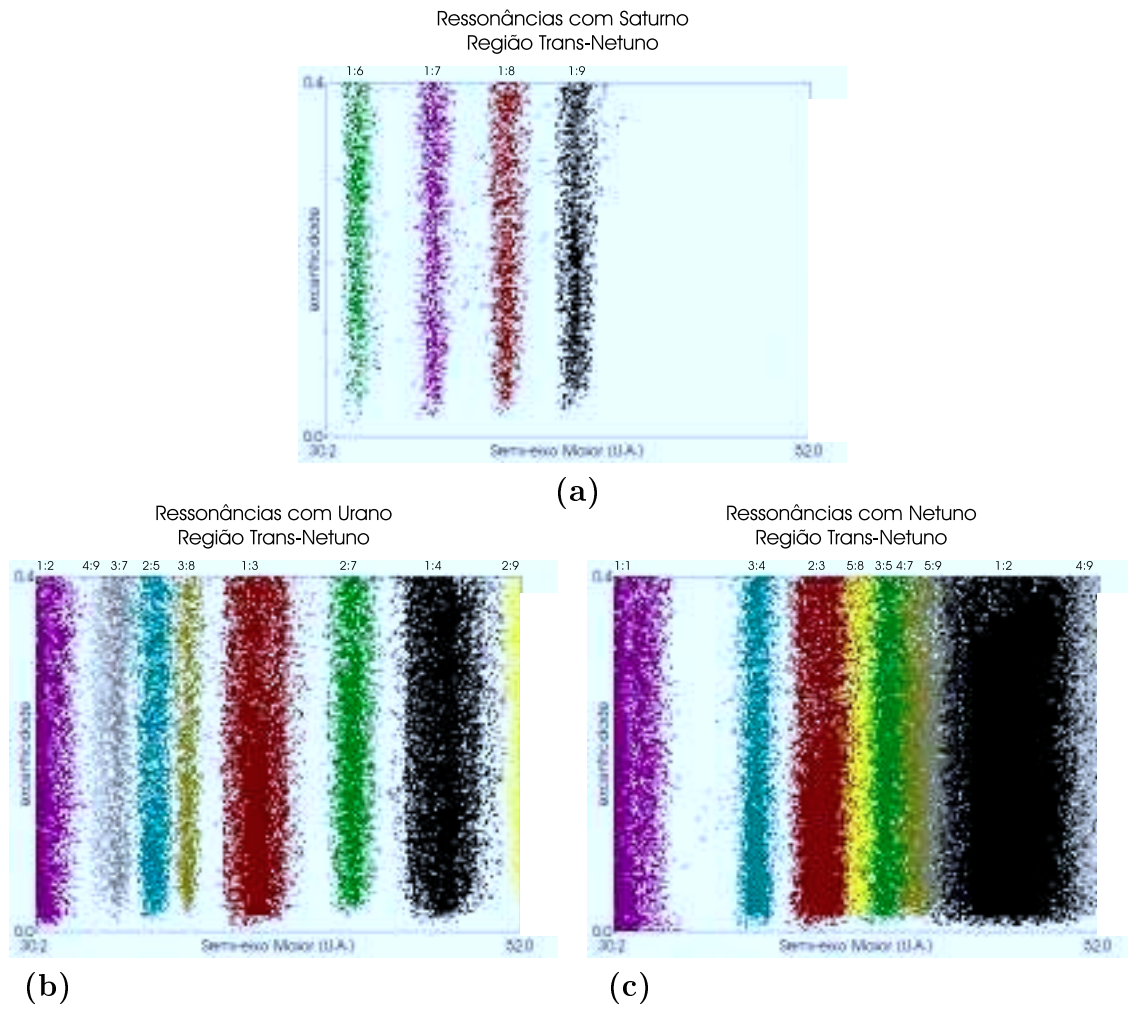


Figura 3.6: Ressonâncias na região Transnetuno: (a) com Saturno, (b) com Urano e (c) com Netuno.

# Capítulo 4

## O Estudo da Distribuição de Pequenos Corpos no Sistema Solar

O método empregado neste capítulo consiste em dividir cada uma das cinco regiões mencionadas na tabela 2.1 em cem faixas caracterizadas por pequenos intervalos de semi-eixo maior. Em cada uma destas faixas, onde a excentricidade varia uniformemente de 0.0 a 0.4, adotamos um grid 100 x 100 no espaço a-e correspondendo ao semi-eixo maior e excentricidade iniciais das órbitas a serem integradas. Procedendo desta forma, a evolução orbital de 1.000.000 de partículas foi determinada para cada região. As equações do movimento dadas por (2.1) e (2.2) são integradas até que a partícula penetre na esfera de influência de algum planeta ou até que um tempo limite seja atingido. Se dentro do prazo de integração a partícula penetrar na esfera de influência de qualquer planeta a simulação identifica o instante que isto acontece e também com qual planeta o encontro próximo ocorreu. O valor empregado para o passo foi  $\frac{P_J}{50}$ , onde  $P_J \approx 11.9$  anos é o período de Júpiter, e o tempo máximo de integração foi  $4000P_J$  ( $\approx 47600$  anos).

No estudo via um modelo planar a longitude do periélio inicial foi, para as partículas, aleatoriamente determinada de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  e a longitude média inicial foi  $0^\circ$ . As condições iniciais dos planetas foram obtidas a partir dos elementos orbitais fornecidos pelo *The Astronomical Almanac* (1996) para a data 07/02/1996, projetando os vetores posição e velocidade na eclíptica.

No modelo não planar os valores das inclinações das partículas foram introduzidos de forma aleatória, porém seguindo uma distribuição normal onde adotamos  $\langle i \rangle = 0^\circ$  e desvio padrão  $\sigma_i = 10^\circ$ . Além disso, com o intuito de não incluirmos órbitas retrógradas, nós consideramos apenas os valores absolutos de  $i$  fornecidos pelo algoritmo desenvolvido com base no método de Von Newman; Sóbol, J.M. (1983). A situação descrita pode ser visualizada na figura 4.1, onde mostramos a distribuição gerada para uma subregião particular, situada na região Júpiter - Saturno. Os demais elementos clássicos, longitude do nodo ascendente, longitude média e longitude do periélio foram distribuídos uniformemente e de forma aleatória no intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Neste estudo, os parâmetros orbitais dos planetas foram extraídos do *The Astronomical Almanac* (1996) para a data 07/02/1996.

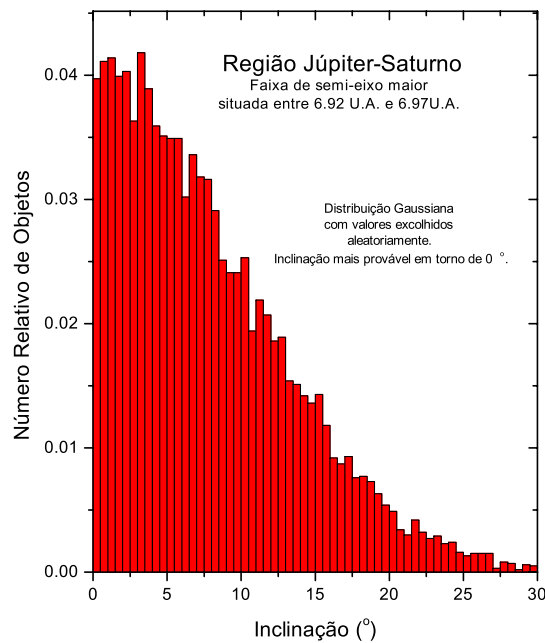


Figura 4.1: Para cada faixa foi adotada uma distribuição aleatória não uniforme para a inclinação. O valor máximo é  $30^\circ$  e a curva normal está centrada em  $0^\circ$ . O eixo vertical do histograma está normalizado.

Em geral, nos estudos relacionados à distribuição de pequenos corpos no Sistema Solar, o número de condições iniciais e o número de passos a serem utilizados

na integração são dois fatores de grande importância a serem considerados devido ao grande tempo de processamento normalmente requerido. Um número suficientemente grande de partículas teste distribuídas de forma conveniente pode ser mais interessante que um estudo realizado utilizando uma modesta quantidade de condições iniciais. Por outro lado o tempo de integração deve ser longo o suficiente para que os vários fenômenos investigados tenham condições de se manifestar. Muitos estudos em astronomia são realizados tentando-se maximizar, na medida do possível, estes dois fatores.

O estudo que aqui propomos se diferencia dos trabalhos já desenvolvidos basicamente por levar em conta um número considerável de condições iniciais que são integradas por um intervalo de tempo não muito grande. A idéia fundamental consiste na tentativa de inferir alguns resultados dinâmicos para consideráveis tempos de evolução sem efetuar longas integrações.

O fato de que no passado os impactos entre pequenos e grandes corpos eram mais freqüentes do que nos dias atuais (ver por exemplo Shoemaker & Shoemaker (1999)) nos leva a assumir que a taxa de ocorrência de encontros próximos é uma função decrescente do tempo. Dividindo o tempo total de integração em  $k$  intervalos de valor  $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{\text{tempo total de integração}}{k} \quad (4.1)$$

e considerando que  $N_{ep}(n\Delta t)$  seja o número de objetos que sofrem encontro próximo com algum planeta no intervalo de tempo entre  $(n-1)\Delta t$  e  $n\Delta t$ , onde  $n$  é um inteiro tal que  $n = 1, 2, 3, \dots, k$ , então podemos, a partir dos valores de  $N_{ep}(n\Delta t)$  obtidos da integração, determinar a lei de decaimento representativa de cada uma das cem faixas de uma dada região. Uma vez conhecida a expressão matemática que descreve a ocorrência dos encontros próximos somos então capazes de determinar  $N_{ep}(n\Delta t)$  para valores de  $n$  tão grandes quanto sejam necessários. Seja  $n_{máx}$  o valor de  $n$  a partir do qual a quantidade de encontros próximos possa ser considerada desprezível. Considerando  $\varepsilon > 0$  como um número desprezível de encontros próximos num intervalo  $\Delta t$ , então  $n_{máx}$  pode ser determinado pela expressão

$$N_{ep}(n_{m\acute{a}x}\Delta t) < \varepsilon \leq N_{ep}((n_{m\acute{a}x} - 1)\Delta t). \quad (4.2)$$

Conhecendo  $n_{m\acute{a}x}$  podemos, para cada faixa, determinar o tempo máximo

$$t_{m\acute{a}x} = n_{m\acute{a}x}\Delta t, \quad (4.3)$$

a partir do qual o processo de encontros próximos pode ser desconsiderado. O número de órbitas que não apresentam encontros próximos será, então, dado por

$$N_{restante} = N_{Total} - \sum_{n=1}^{n_{m\acute{a}x}} N_{ep}(n\Delta t) \quad (4.4)$$

onde  $N_{Total}$  é o número inicial de partículas em cada faixa. Fazendo

$$N_{nTotal} = \frac{N_{restante}}{N_{Total}} \quad (4.5)$$

temos o número relativo de objetos que não sofrem encontro próximo em cada faixa.

A maior parte deste estudo foi realizada adotando-se  $\Delta t = 200 P_J$ , o que corresponde aproximadamente a 2380 anos. Mais adiante discutiremos como a escolha do valor do  $\Delta t$  e de outros parâmetros pode afetar os resultados da distribuiao dos pequenos objetos no Sistema Solar. Como o tempo empregado nas simulaoes foi de  $4000 P_J$  e  $\Delta t = 200 P_J$ , temos, de 4.1, que  $k = 20$ . Deste modo, utilizando os resultados das integraoes determinamos, para cada faixa, os valores de  $N_{ep}(n\Delta t)$ , onde  $1 \leq n \leq k (= 20)$ . Com o objetivo de identificar a expressão matemática que melhor descreve a taxa temporal  $N_{ep}(n\Delta t)$  de encontros próximos, ajustes não-lineares foram feitos considerando seis leis de decaimento a três parâmetros ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ). As formas de decaimento utilizadas foram as seguintes:

$$N_{ep}(n\Delta t) = a \log\left(\frac{b}{n\Delta t + c}\right) \quad (4.6)$$

$$N_{ep}(n\Delta t) = a \log\left(\frac{b}{n\Delta t} + c\right) \quad (4.7)$$

$$N_{ep}(n\Delta t) = a + be^{-cn\Delta t} \quad (4.8)$$

$$N_{ep}(n\Delta t) = ae^{\left(\frac{b}{n\Delta t} + c\right)} \quad (4.9)$$

$$N_{ep}(n\Delta t) = ae^{\left(\frac{1}{bn\Delta t + c}\right)} \quad (4.10)$$

$$N_{ep}(n\Delta t) = a(n\Delta t - b)^c \quad (4.11)$$

Realizamos, ainda, o ajuste não-linear para uma generalização da lei de decaimento mista de Simó *et al.* 1995, definida a dois parâmetros,  $a$  e  $b$ , como:

$$N_{ep}(n\Delta t) = (n\Delta t)^a \log(n\Delta t)^b \quad (4.12)$$

Os parâmetros das leis de decaimento acima foram determinados, via ajuste não linear, para cada faixa da região Sol-Júpiter. Comparando o coeficiente de correlação  $R^2$  fornecido pelo ajuste para cada lei de decaimento podemos identificar aquela que melhor se ajusta aos dados obtidos pela integração. Os resultados são apresentados na figura 4.2. Como podemos verificar a lei de potência apresenta, na maioria dos casos, o maior valor para  $R^2$  e, portanto, o melhor ajuste. Com base neste resultado escolhemos a lei de potência para determinar a taxa de encontros próximos ao longo

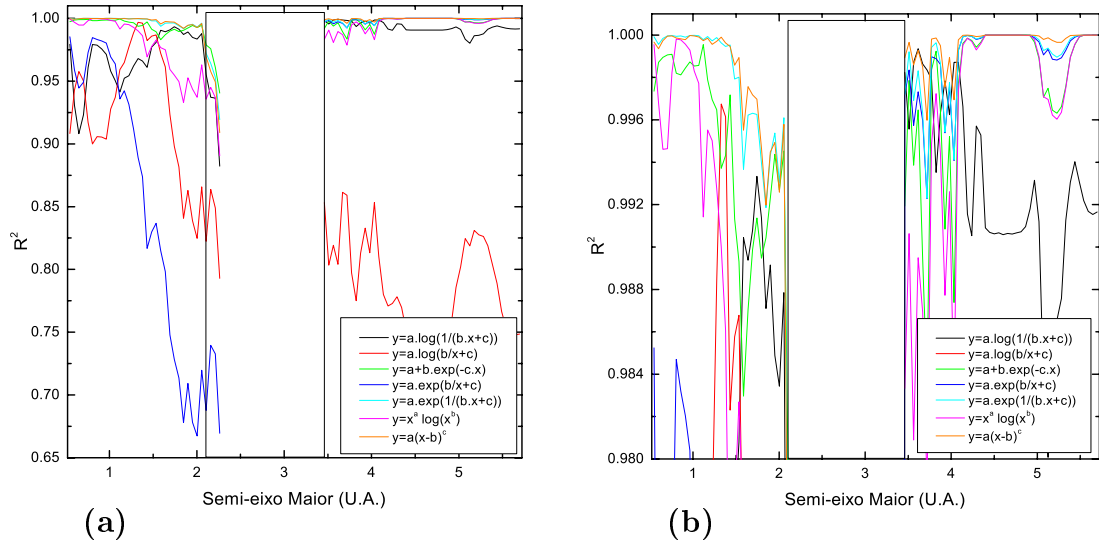


Figura 4.2: (a) Comparação do coeficiente de correlação,  $R^2$ , para sete leis de decaimento. (b) Uma ampliação no eixo vertical de (a) permite-nos visualizar os valores de  $R^2$  próximos de 1. Como podemos observar a lei de potência foi a que apresentou o coeficiente de correlação mais próximo de 1 para a maioria das faixas. O retângulo transparente corresponde a região onde o número de encontros próximos é pequeno, fornecendo baixos valores para  $R^2$ .

deste trabalho. A região delimitada pelo retângulo transparente corresponde a um conjunto de faixas onde o método não é aplicável. O número de encontros próximos nesta região é, dentro do prazo de tempo empregado na simulação, muito pequeno, o que fornece baixos valores de  $R^2$  para todas as leis de decaimento analisadas. Como podemos notar, o intervalo de semi-eixo maior compreendido pelo retângulo transparente corresponde, em boa parte, à região do cinturão dos asteróides.

Nas figuras 4.3-a e 4.3-b mostramos, em gráficos *log-log*, o ajuste fornecido pela lei de potência para duas diferentes faixas. A primeira corresponde ao intervalo de semi-eixo entre 1.40462 UA e 1.45664 UA e a segunda ao intervalo entre 7.69939 UA e 7.75141 UA. Na figura 4.3-c mostramos o ajuste não-linear obtido para para uma faixa cujo intervalo de semi-eixo maior pertence à região de Thule e na figura 4.3-d

mostramos o resultado do ajuste para uma faixa localizada na região do retângulo transparente da figura 4.2. Como podemos observar, o coeficiente de correlação,  $R^2$ , obtido no ajuste da figura 4.3-d apresenta um valor significativamente mais baixo que os outros três ajustes.

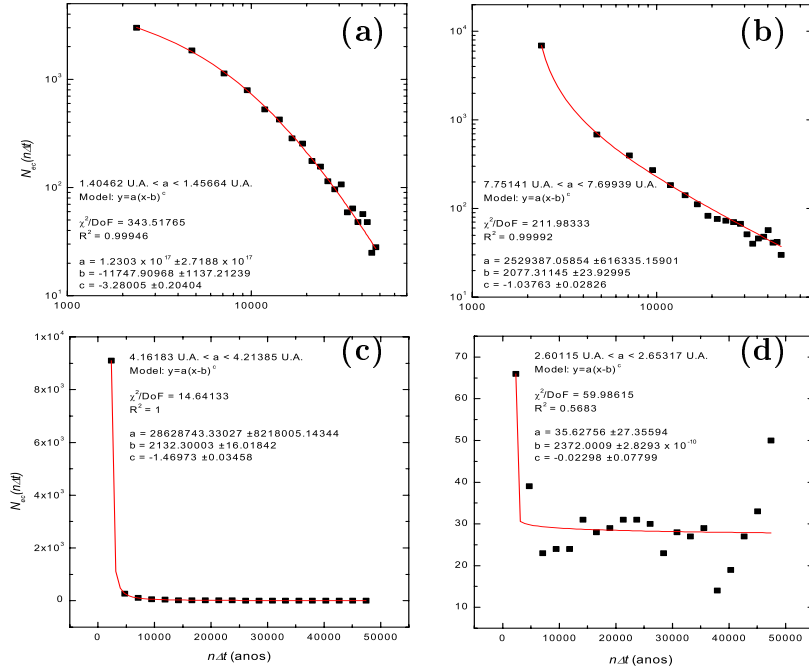


Figura 4.3: O ajuste aos dados da integração fornecido pela lei de potência: (a) para uma faixa da região Sol-Júpiter, (b) para uma faixa da região Júpiter-Saturno, (c) para uma faixa localizada na região de Thule e (d) para uma faixa localizada na região do retângulo da figura 4.2, onde o método não é aplicável.

Com o número de encontros próximos,  $N_{ep}(n\Delta t)$ , fornecido pela integração, determinamos, via ajuste não-linear, os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  da lei de potência para cada faixa de todas as regiões do Sistema Solar. Empregando a expressão 4.11 para determinar o número de encontros próximos e adotando  $\varepsilon = 1$  obtemos, por meio das expressões 4.2 e 4.3, o valor do tempo máximo  $t_{máx}$  a partir do qual a ocorrência de encontros próximos pode ser desconsiderada e, pela expressão 4.5, determinamos o número relativo  $N_{nTotal}$  de objetos que permanecem em cada faixa.

Na figura 4.4 mostramos, para a região Sol-Júpiter, o gráfico de  $N_{nTotal} \times t_{máx}$ .

Cada ponto desta figura corresponde aos valores de  $N_{nTotal}$  e  $t_{máx}$  obtidos para uma faixa. Por meio desta figura podemos concluir que não existe uma correlação bem definida entre os parâmetros  $N_{nTotal}$  e  $t_{máx}$  (uma correlação linear, por exemplo, seria visualizada, na figura 4.4, como um alinhamento dos pontos em torno de uma reta média). Desta forma o produto  $t_{máx} \cdot N_{nTotal}$  pode ser um parâmetro importante na caracterização da distribuição de objetos. De fato, como mostraremos na próxima seção, o produto  $t_{máx} \cdot N_{nTotal}$  se aproxima melhor da distribuição observada de pequenos objetos e de resultados obtidos em outros trabalhos, que os parâmetros  $N_{nTotal}$  ou  $t_{máx}$  considerados separadamente. Em função deste fato o produto  $t_{máx} \cdot N_{nTotal}$  será definido como parâmetro de população local,  $P_{PL}$ :

$$P_{PL} = t_{máx} N_{nTotal}. \quad (4.13)$$

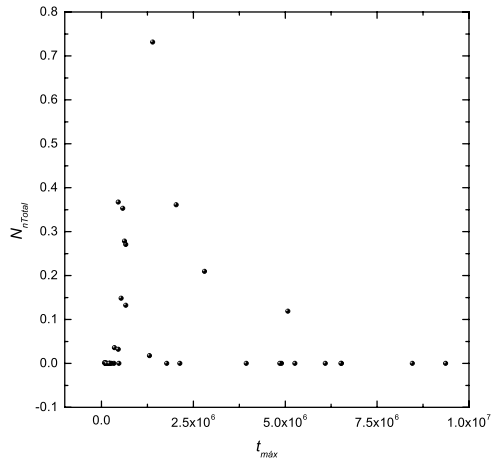


Figura 4.4: A não correlação entre  $N_{nTotal}$  e  $t_{máx}$  para a região Sol-Júpiter no modelo não planar. Para as demais regiões, tanto para o modelo planar como para o modelo não planar,  $N_{nTotal}$  e  $t_{máx}$  são semelhantemente não correlacionados.

## 4.1 O Modelo Planar

### 4.1.1 Região Sol-Júpiter

Na figura 4.5 mostramos os gráficos de  $t_{máx}$ ,  $N_{nTotal}$  e  $P_{PL}$  para a região Sol-Júpiter. Como podemos verificar os gráficos de  $t_{máx}$  e  $N_{nTotal}$  possuem significativas diferenças.

Podemos observar que o gráfico de  $N_{nTotal}$  apresenta um pequeno valor em 4.1 UA enquanto que  $t_{máx}$ , para o mesmo valor de semi-eixo, apresenta um máximo (alto valor relativo). Próximo a 4.0 UA temos um máximo em  $N_{nTotal}$  e um mínimo em  $t_{máx}$  e o mesmo acontece para 3.5 UA e 3.7 UA. Entre 3.75 UA e 3.85 UA  $t_{máx}$  apresenta valores consideráveis enquanto  $N_{nTotal}$  apresenta baixos valores; e o máximo que  $t_{máx}$  apresenta nas proximidades de 3.65 UA corresponde a um mínimo em  $N_{nTotal}$ . O mesmo já não acontece para o intervalo entre 4.5 UA e 5.0 UA onde  $t_{máx}$  e  $N_{nTotal}$  apresentam valores pequenos, e entre 5.0 UA e 5.5 UA onde ambos apresentam máximo. Percebemos também que os máximos e os mínimos de  $N_{nTotal}$  que surgem para os valores de semi-eixo menores que 1.5 UA estão todos semelhantemente associados a baixos valores de  $t_{máx}$ . Toda esta complexidade é, sem dúvida, proveniente da não existência de correlação entre os parâmetros  $t_{máx}$  e  $N_{nTotal}$ , conforme discutido na seção anterior.

Agora, analisando a figura 4.5-c, verificamos que o  $P_{PL}$  apresenta máximos para valores de semi-eixo maior correspondentes ao grupo de Apolo (entre 1.2 UA e 1.5 UA), ao grupo de Hungária (em 2.0 UA), ao grupo de Cybele (em 3.5 UA), ao grupo Hilda (ressonância 3:2, em 4.0 UA), à Thule (ressonância 4:3, em 4.3 UA) e aos asteróides Troianos (ressonância 1:1, em 5.2 UA). O máximo em 3.7 UA, ressonância 5:3, parece não constituir um grupo conhecido de asteróides. Os retângulos de cor cinza que são apresentados na figura 4.5 correspondem, em semi-eixo maior, aos retângulos transparentes da figura 4.2.

Na figura 4.6 mostramos a distribuição observada de objetos. Nesta figura foram considerados apenas os asteróides numerados com excentricidades menores que 0.5 e inclinações inferiores a  $10^\circ$ . Nesta figura as colunas do histograma têm largura de 0.052 UA, o que corresponde à largura adotada de cada faixa para obtenção da figura 4.5. A escala vertical foi limitada em 100 para melhor visualização dos locais com menor número de asteróides. Comparando as figuras 4.5-c e 4.6 podemos concluir que o parâmetro de população local,  $P_{PL}$ , parece constituir uma boa aproximação para o estudo da distribuição de pequenos objetos, uma vez que a maioria das regiões que apresentam altos valores do  $P_{PL}$  coincide com regiões de concentrações de asteróides.

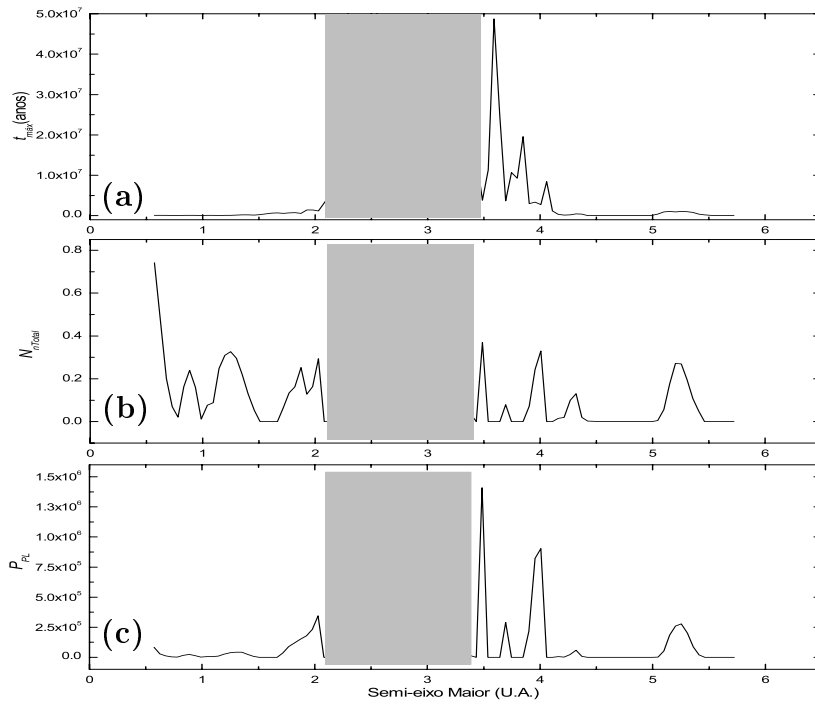


Figura 4.5: A região interna a Júpiter: (a) gráfico do tempo de depleção, (b) do número relativo de objetos remanescentes e (c) o produto dos gráficos (a) e (b).

### 4.1.2 Região entre Júpiter e Saturno

Na figura 4.7 apresentamos os resultados obtidos para a região entre Júpiter e Saturno. Como podemos observar,  $t_{máx}$  e  $N_{nTotal}$  apresentam valores consideráveis nas proximidades de 5.2 UA, o que produz um  $P_{PL}$  bem alto na região dos Troianos. O máximo que o gráfico do  $P_{PL}$  apresenta em torno de 9.6 UA está relacionado com as vizinhanças dos pontos  $L_4$  e  $L_5$  de Saturno. Os máximos que o  $P_{PL}$  apresenta em 7.2

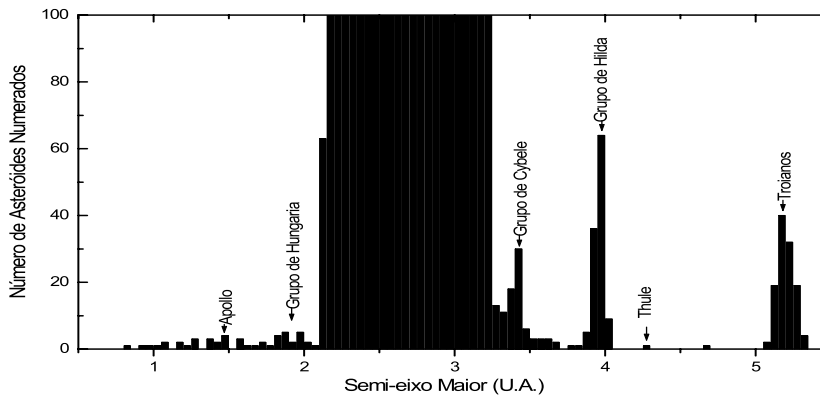


Figura 4.6: A distribuição dos asteróides numerados para a região entre 0.5 UA e 5.5 UA.

UA e 7.4 UA estão em acordo com os resultados que Grazier *et al.* (1999) obtiveram através de uma integração para  $10^9$  anos. A linha horizontal mostrada na figura 4.7-c corresponde ao valor do  $P_{PL}$  da região de Thule, na figura 4.5-c. Como podemos observar, o parâmetro de população local que a região entre Júpiter e Saturno apresenta é, exceto nas proximidades de Júpiter, menor que o  $P_{PL}$  de Thule. De fato, poucos objetos são conhecidos nesta região além dos asteróides Troianos.

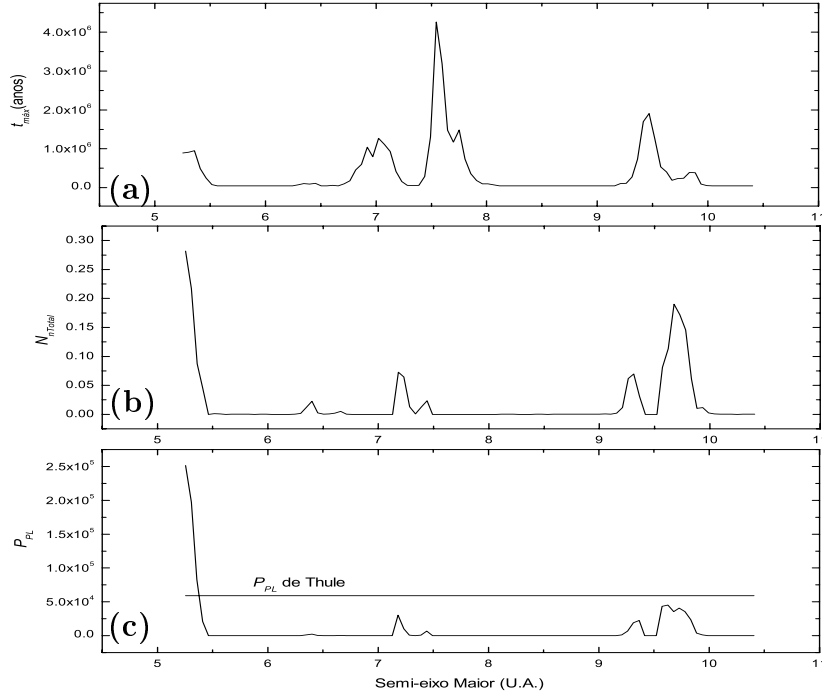


Figura 4.7: Os gráficos: (a) do  $t_{máx}$ , (b) do  $N_{nTotal}$  e (c) do  $P_{PL}$  para a região entre Júpiter e Saturno.

Utilizando o método descrito no capítulo 3 identificamos, nos gráficos do  $P_{PL}$ , as principais ressonâncias de movimento médio. Nas figuras que seguem as colunas retangulares indicam regiões de ressonância média com um determinado planeta. A linha fina contínua indica as ressonâncias com Júpiter e a linha mais larga contínua indica as ressonâncias com Saturno. As ressonâncias com Urano e Netuno são indicadas pelas linhas tracejadas, fina e larga, respectivamente. O centro destas barras corresponde ao valor médio em semi-eixo maior,  $\langle a \rangle_{ress}$ , das ressonâncias analisadas e a largura das barras é  $2\sigma_{ress}$ , sendo  $\sigma_{ress}$  o desvio padrão, em semi-eixo maior, de cada ressonância. A altura das barras, dada por  $N_r$ , foi definida como o número

de condições iniciais em uma determinada ressonância dividido por 40000, que é o número total de condições iniciais em cada região. Desta forma as barras mais largas indicam ressonâncias que cobrem um maior intervalo de semi-eixo, enquanto que uma barra mais alta aponta a região onde foi maior o número de condições iniciais que apresentaram libração do ângulo crítico durante o tempo de integração adotado.

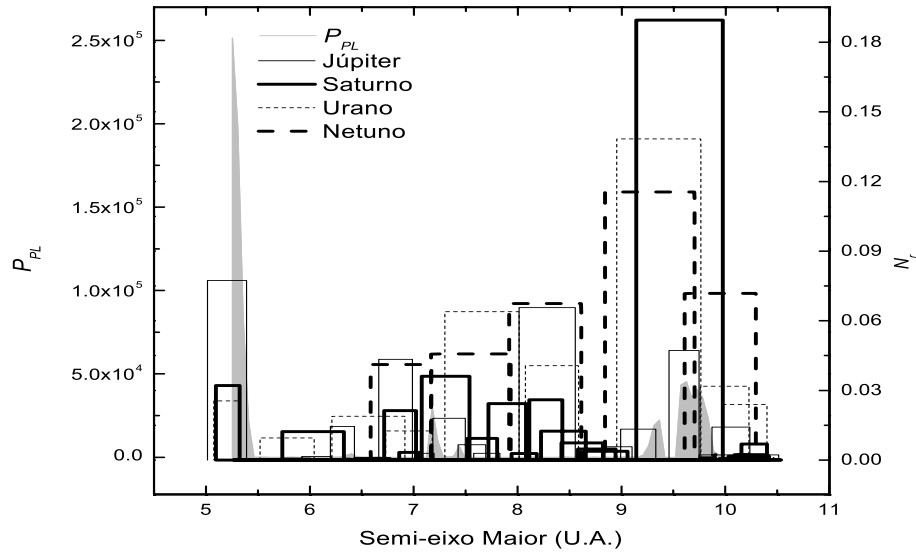


Figura 4.8: A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio (barras verticais) no estudo da distribuição de objetos (gráfico do  $P_{PL}$ ) na região entre Júpiter e Saturno.

Na figura 4.8 podemos observar que os máximos nas proximidades de 7.2 UA e 7.4 UA não correspondem ao centro de nenhuma das ressonâncias de movimento médio analisadas. Entre estes máximos temos as ressonâncias 3:5 com Júpiter e 3:8 com Saturno. Entre 5.5 UA e 7 UA e entre 7.5 UA e 9 UA observamos um grande número de ressonâncias de movimento médio, o que pode ter sido responsável pelo baixo valor do  $P_{PL}$  para estes intervalos de semi-eixo. Na região de Júpiter, em aproximadamente 5.2 UA, podemos observar uma ressonância com Júpiter (1:1) associada aos Troianos. Nesta região observamos também ressonâncias com dois outros planetas, sendo elas a 5:2 com Saturno e 7:1 com Netuno. O máximo em 9.4 UA corresponde ao centro da ressonância 3:1 com Urano. O máximo em 9.6 UA corresponde ao centro das ressonâncias 2:5 com Júpiter e 1:1 com Saturno.

### 4.1.3 Região entre Saturno e Urano

Os resultados obtidos para a região Saturno-Urano são mostrados na figura 4.9. Como podemos notar, os máximos que  $t_{máx}$  apresenta para 13 UA, 13.8 UA, 14.25 UA e 14.4 UA estão associados a baixos valores de  $N_{nTotal}$ , o que reduz o  $P_{PL}$  para estes valores de semi-eixo maior. Podemos observar também que os máximos que o  $P_{PL}$  apresenta nas proximidades de 12 UA, 12.5 UA, 13.5 UA e entre 14.7 UA e 16 UA estão associados aos altos valores que  $N_{nTotal}$  apresenta para estes valores de semi-eixo. Os máximos que  $P_{PL}$  apresenta nas proximidades de 9.6 UA e 19.3 UA estão associados aos hipotéticos troianos de Saturno e Urano, respectivamente. A linha horizontal na figura 4.9-c mostra o valor do  $P_{PL}$  da região dos Troianos na figura 4.5-c. Como podemos verificar, em 12.5 UA e 13.5 UA o  $P_{PL}$  é superior ao  $P_{PL}$  dos Troianos. As vizinhanças destes valores de semi-eixo maior são, portanto, boas candi-

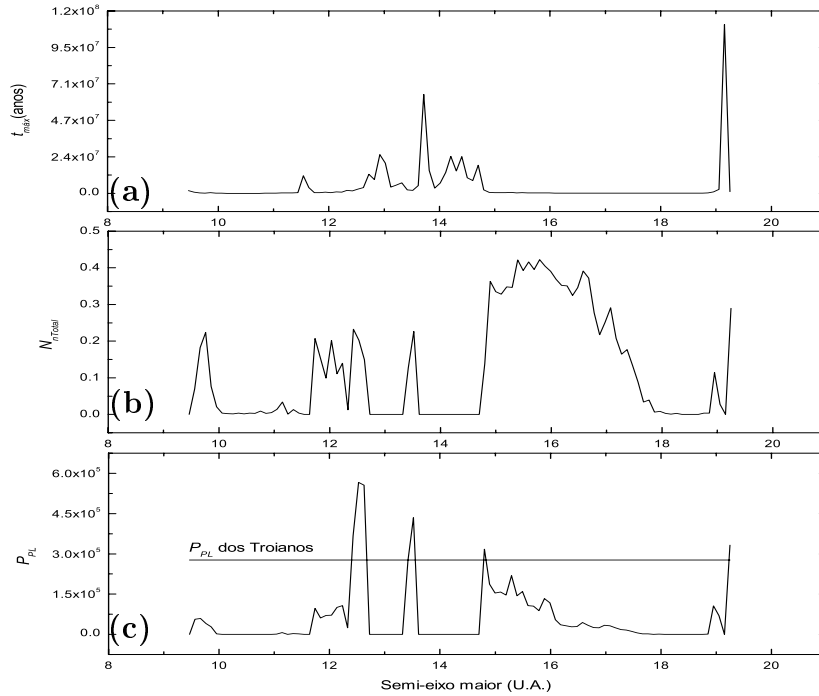


Figura 4.9: A região entre Saturno e Urano: (a) gráfico do  $t_{máx}$ , (b) do  $N_{nTotal}$  e (c) do  $P_{PL}$ .

datas a possuírem concentrações de pequenos corpos. O máximo em 12.5 UA e o pico em 16 UA também foram encontrados por Grazier *et al.* 1999. Contudo nós não obtivemos o pico que eles encontraram em 14.4 UA.

Na figura 4.10 podemos observar que a região entre Saturno e Urano é bastante rica em ressonâncias de movimento médio. Em 9.6 UA verificamos, novamente, as ressonâncias 1:1 com Saturno e 2:5 com Júpiter. O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta em 12.5 UA corresponde à ressonância 2:3 com Saturno e o máximo em 13.5 UA corresponde ao centro da ressonância 3:5 com Saturno. Os máximos do  $P_{PL}$  em 14.8 UA e 15.3 UA não correspondem ao centro de nenhuma das ressonâncias analisadas. Em 15.9 UA o  $P_{PL}$  possui um máximo que corresponde à ressonância 4:3 com Urano e o pequeno pico em 17 UA corresponde à ressonância 7:3 com Netuno. Em 19.3 UA temos a ressonância 1:1 com Urano. O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta em 18.9 UA corresponde à ressonância 2:1 com Netuno e a *gap* em 19.2 UA à ressonância 1:7 com Júpiter.

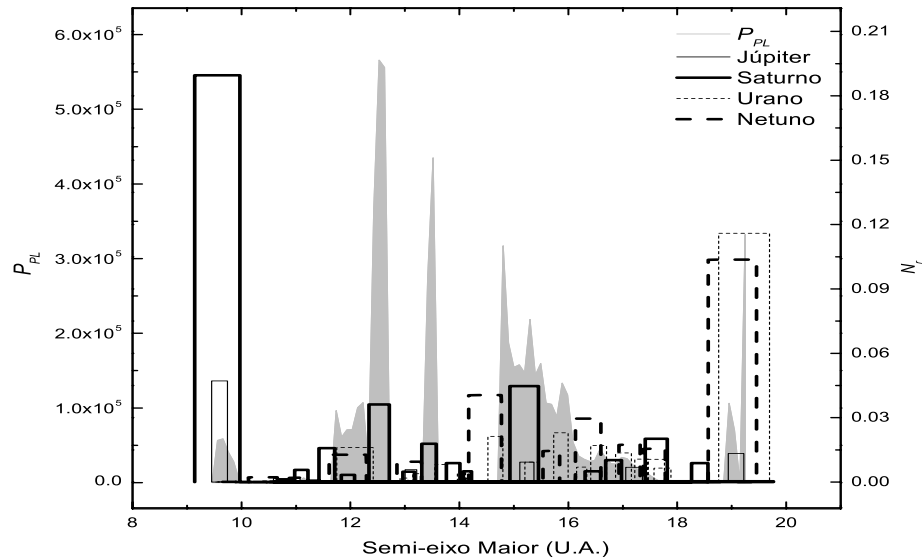


Figura 4.10: A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no estudo da distribuição de objetos na região entre Saturno e Urano.

#### 4.1.4 Região entre Urano e Netuno

Na figura 4.11 apresentamos os gráficos para a região entre Urano e Netuno. A escala vertical da figura 4.11-a está logarítmica para uma melhor visualização dos locais onde

$t_{m\acute{a}x}$  apresenta pequenos valores. O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta próximo de 30 UA está associado aos hipotéticos troianos de Netuno. Como podemos observar, a figura 4.11-c apresenta, em 19.6 UA, 21.9 UA, 22.5 UA, 24 UA e 26 UA, valores que não diferem muito do  $P_{PL}$  de Thule. Portanto não esperamos que sejam encontrados muitos objetos entre 19.5 UA e 29 UA. Holmam 1997 encontrou concentraoes de objetos estáveis para 4.5 Gyr na região entre Urano e Netuno. O baixo valor do  $P_{PL}$  que verificamos para esta região é, contudo, consistente com o fato de que apenas quatro partículas alcançaram 100 Myr no trabalho de Grazier *et al.* 1999.

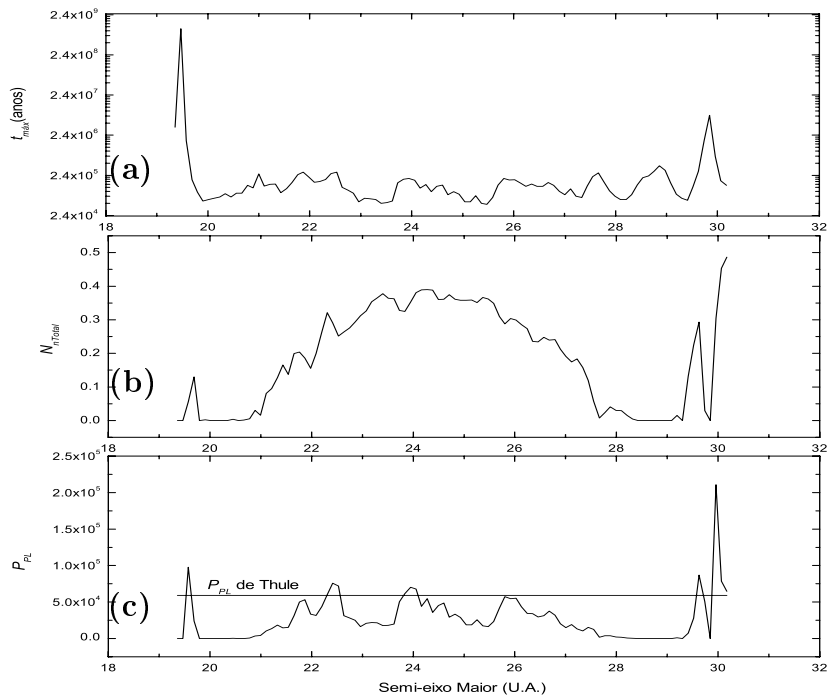


Figura 4.11: Os resultados obtidos para a região entre Urano e Netuno: (a) para o  $t_{m\acute{a}x}$ , (b) para o  $N_{nTotal}$  e (c) para o  $P_{PL}$ .

Como podemos verificar, o máximo em 19.6 UA nas figuras 4.11 e 4.12 é a continuaao das figuras 4.9 e 4.10, correspondendo a ressonância 1:1 com Urano. Podemos observar também, na figura 4.12, que os picos em 21.9 UA e 22.5 UA não correspondem ao centro de nenhuma ressonância e que entre eles temos três ressonâncias: em 22 UA temos a 2:7 com Saturno e a 8:5 com Netuno e, um pouco à direita, em 22.3 UA, temos a 4:5 com Urano. O máximo do parâmetro de populaao local em 24 UA não está associado a nenhuma das ressonâncias de movimento médio estudadas e o

máximo do  $P_{PL}$  em 26 UA corresponde à ressonância 5:4 com Netuno. O máximo próximo a 30 UA corresponde à ressonância 1:1 com Netuno.

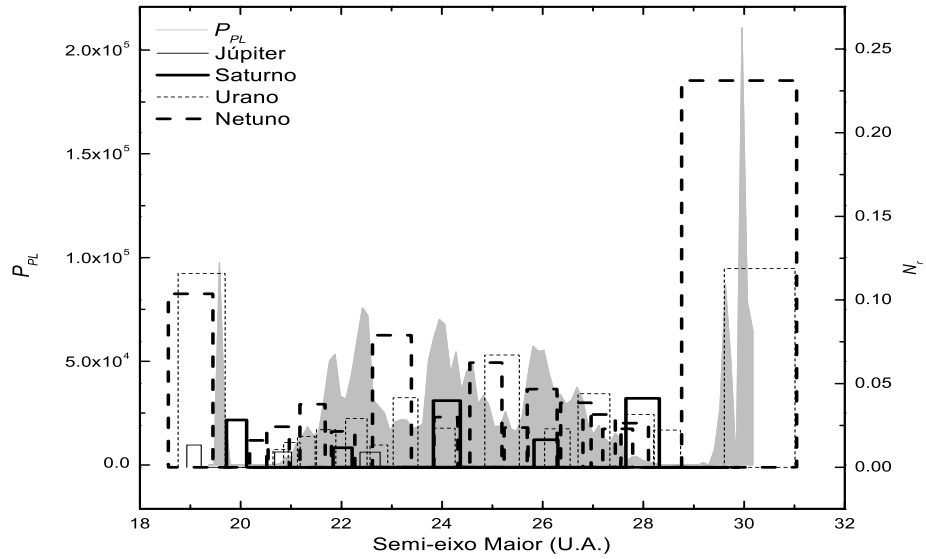


Figura 4.12: A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no estudo da distribuição de objetos na região entre Urano e Netuno.

### 4.1.5 Região Transnetuno

Os resultados obtidos para a região Transnetuno são mostrados na figura 4.13. Da mesma forma que na figura 4.11-a, a escala vertical da figura 4.13-a está logarítmica para melhor visualização dos valores pequenos de  $t_{máx}$ . Como podemos observar, o gráfico do  $P_{PL}$  da região transnetuniana é marcada pela presença de inúmeros máximos, sendo alguns superiores ao  $P_{PL}$  dos Troianos. Os picos nas proximidades de 43.7 UA e 47.7 UA correspondem, respectivamente, às ressonâncias 4:7 e 1:2, ambas com Netuno, onde são observados aglomerados de objetos. O gráfico do  $P_{PL}$  apresenta um pico em 39.6 UA, o qual está associado à ressonância 2:3 com Netuno, onde também é observada uma população de objetos (lembramos, entretanto, que estes resultados foram obtidos do modelo planar. Como será mostrado na seção 4.2.5 este máximo é bem mais acentuado no modelo 3-D). Algumas das faixas situadas no intervalo de semi-eixo entre 47.6 UA e 52.0 UA apresentaram, dentro do prazo de integração, um número reduzido de encontros próximos, o que conduziu a coeficientes

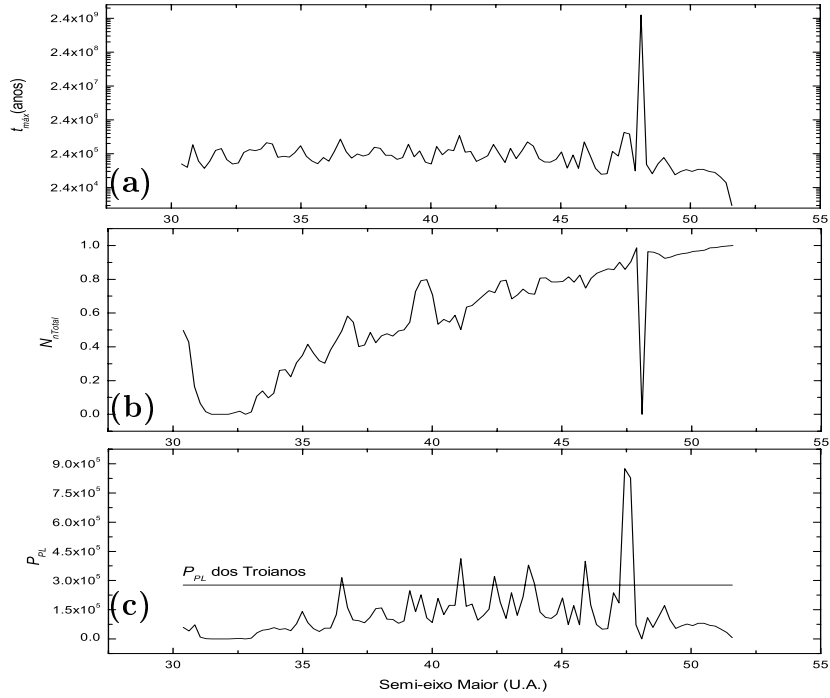


Figura 4.13: A região transnetuniana: (a) gráfico do  $t_{máx}$ , (b) do  $N_{nTotal}$  e (c) do  $P_{PL}$ . de correlação  $R^2$  não muito satisfatórios. Portanto os gráficos de  $t_{máx}$ ,  $N_{nTotal}$  e  $P_{PL}$  podem, para alguns valores de semi-eixo deste intervalo, não serem muito confiáveis.

Na figura 4.14 podemos observar que o máximo em 30.8 UA não corresponde

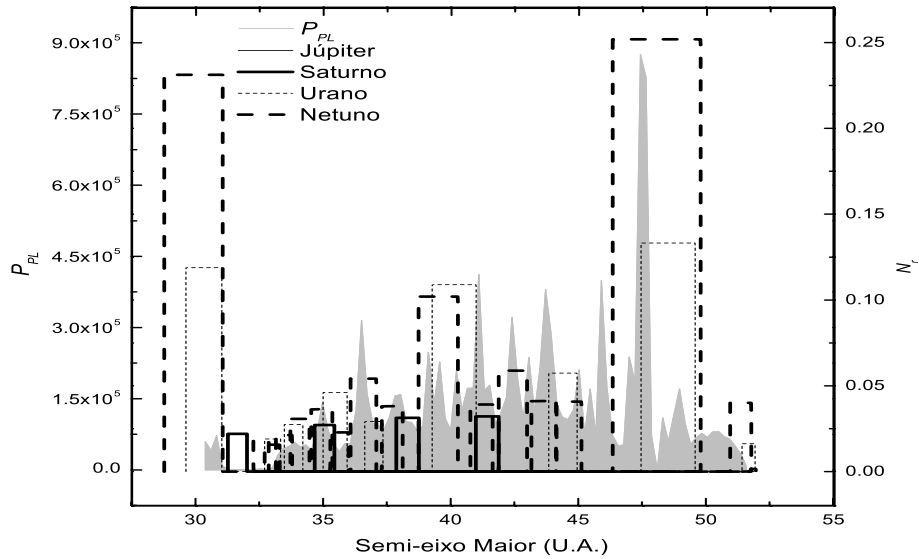


Figura 4.14: A caracterização de ressonâncias de movimento médio na distribuição de pequenos objetos da região Transnetuno.

ao centro de nenhuma ressonância de movimento médio. O máximo em 35 UA corresponde ao centro da ressonância 4:5 com Netuno e o máximo em 36.5 UA à ressonância

3:4 com Netuno. Os máximos em 39.6 UA, 41.1 UA e 42.4 UA correspondem, respectivamente, às ressonâncias 2:3, 5:8 e 3:5, todas com Netuno. Os máximos em 43.7 UA e em 47.7 UA correspondem às ressonâncias 4:7 e 1:2, ambas com Netuno. A *gap* em 40 UA corresponde à ressonância 1:3 com Urano.

## 4.2 O Modelo 3-D

### 4.2.1 Região Sol-Júpiter

Na figura 4.15 mostramos os resultados obtidos no estudo do modelo não planar para a região Sol-Júpiter. Como podemos notar, a região onde o ajuste não é confiável, marcada pela faixa cinza, aumentou com relação ao modelo planar. Os picos que o  $P_{PL}$  apresenta nas proximidades de 4 UA e 4.3 UA correspondem, respectivamente, ao grupo de Hilda, ressonância 3:2, e Thule, ressonância 4:3. Podemos observar também altos valores do  $P_{PL}$  para a região dos Troianos, ressonância 1:1, em 5.2 UA. Comparando as figuras 4.5-c e 4.15-c notamos que o máximo em 3.7 UA, ressonância 5:3, desaparece para o modelo não planar. O alto valor que o  $P_{PL}$  apresenta nas proximidades de 0.52 UA não corresponde a nenhum grupo de asteróides conhecido. Entretanto lembramos aqui que no modelo adotado não foi incluído Mercúrio. Assim não sabemos o efeito deste planeta no  $P_{PL}$  para a região situada nas proximidades de 0.52 UA.

### 4.2.2 Região entre Júpiter e Saturno

Na figura 4.16 é mostrado o resultado obtido para a região entre Júpiter e Saturno. Comparando as figuras 4.7 e 4.16 podemos observar que, para esta região, o modelo planar e o modelo tridimensional não apresentam significativas diferenças. A linha horizontal mostra o  $P_{PL}$  da região de Thule obtido no modelo não planar (em 4.3 UA na figura 4.15-c). O alto valor que o  $P_{PL}$  apresenta em 5.2 UA está associado aos as-

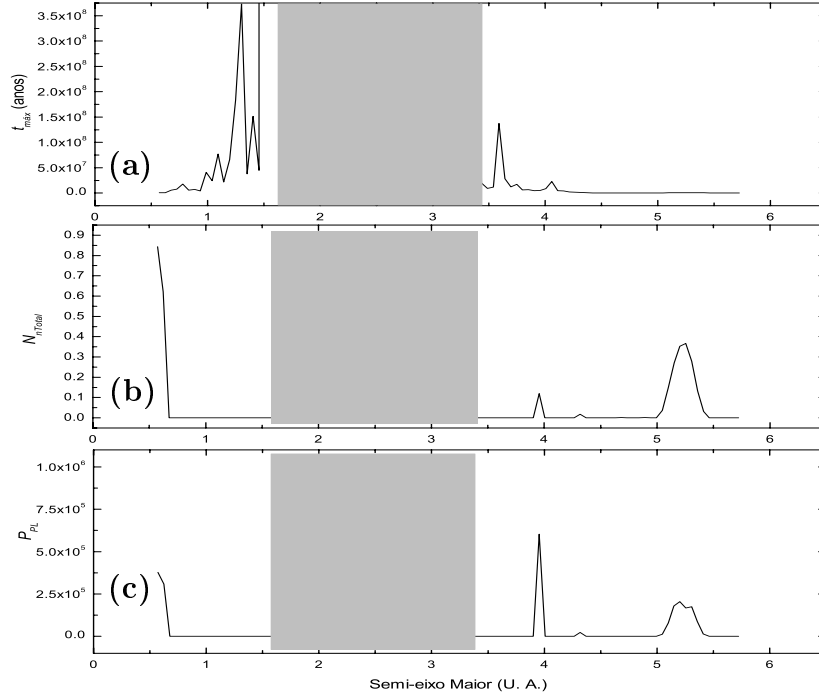


Figura 4.15: A região interna a Júpiter: (a) gráfico do tempo máximo de depleção de objetos, (b) do número relativo de objetos remanecentes e (c) o parâmetro de população local.

teróides Troianos, e o pico em 9.65 UA está relacionado aos pontos  $L_4$  e  $L_5$  de Saturno. Como podemos observar, os picos que o  $P_{PL}$  apresenta em 7.2 UA e 7.4 UA possuem valores que não diferem muito do  $P_{PL}$  de Thule.

Na figura 4.17 podemos observar que o máximo do  $P_{PL}$  nas proximidades de Saturno, em 9.65 UA, está associado a duas ressonâncias. São elas a 1:1 com Saturno e 2:5 com Júpiter. Da mesma forma que no modelo planar, os pequenos picos em 7.2 UA e 7.4 UA não correspondem ao centro de nenhuma ressonância de movimento médio. Próximo a Júpiter, em 5.2 UA, temos as ressonâncias 1:1 com Júpiter, 5:2 com Saturno e 7:1 com Netuno, as quais estão associadas ao grupo dos asteróides

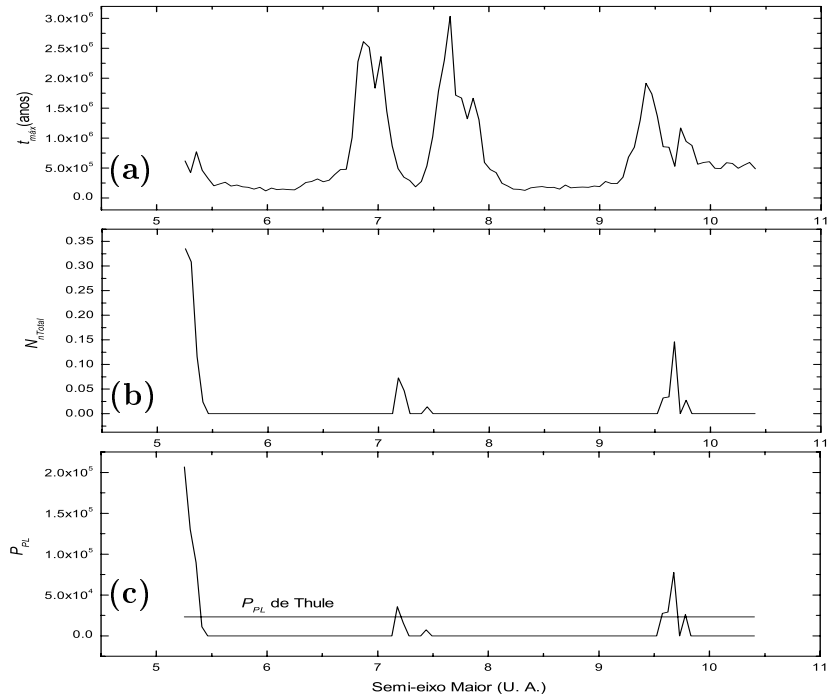


Figura 4.16: Região entre Júpiter e Saturno: (a) gráfico do tempo de depleção, (b) do número relativo de objetos remanentes e (c) o produto dos gráficos (a) e (b).

Troianos. Como podemos observar a maior parte desta região é coberta por ressonâncias de movimento médio. Possivelmente esta é razão pela qual o  $P_{PL}$  apresenta, para esta região, baixos valores.

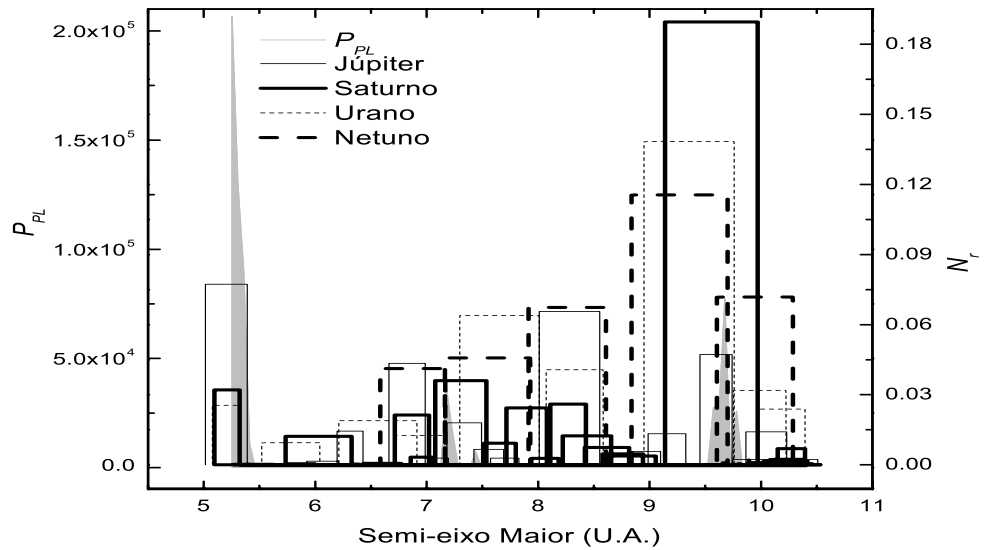


Figura 4.17: A determinação de ressonâncias de movimento médio no gráfico do  $P_{PL}$  obtido no estudo da distribuição de pequenos objetos na região Júpiter-Saturno.

### 4.2.3 Região entre Saturno e Urano

Os resultados obtidos no estudo da região entre Saturno e Urano são mostrados na figura 4.18. Comparando as figuras 4.9 e 4.18 notamos que, nesta região, a inclinação produziu uma grande diferença na distribuição dos pequenos corpos. Podemos observar na figura 4.18-c que o parâmetro de população local apresenta, em 13.9 UA, um máximo relativamente mais alto que o  $P_{PL}$  dos Troianos. Notamos também que os máximos do parâmetro de população local em 11.6 UA, 12.8 UA, 13.1 UA e 13.6 UA apresentam valores próximos ao  $P_{PL}$  dos Troianos. Portanto, diferentemente da região entre Júpiter e Saturno, a região entre Saturno e Urano oferece condições mais favoráveis à existência de regiões com concentrações de pequenos corpos. O retângulo cinza entre 19.1 UA e 19.3 UA está cobrindo uma região onde o número de encontros próximos foi, dentro do prazo de integração, pequeno, o que não nos permitiu determinar, com segurança, os parâmetros da lei de potência. O máximo que encontramos

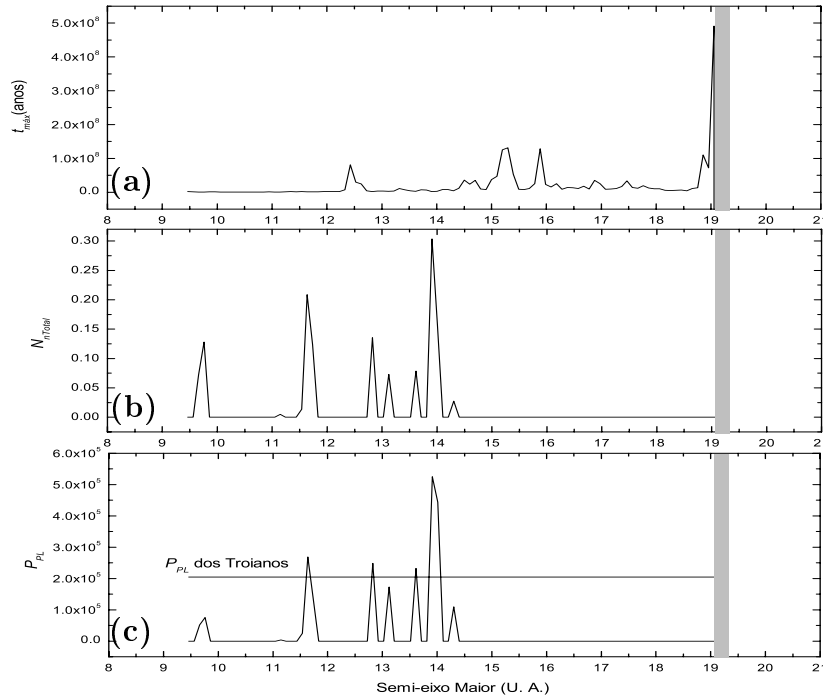


Figura 4.18: Região entre Saturno e Urano: (a) gráfico do  $t_{m\acute{a}x}$ , (b) do  $N_{nTotal}$  e (c) do parâmetro de população local,  $P_{PL}$ .

em 14.3 UA é consistente com o pico que Grazier *et al.* 1999 obtiveram em 14.4 UA. Grazier *et al.* 1999 encontram dois outros picos, em 12.5 UA e 16 UA, que nós não obtemos.

Analisando a figura 4.19 verificamos que o máximo do  $P_{PL}$  em 9.65 UA corresponde a duas ressonâncias de movimento médio, sendo elas a 2:5 com Júpiter e 1:1 com Saturno. Os máximos que o  $P_{PL}$  apresenta em 11.6 UA e 12.8 UA não correspondem ao centro de nenhuma das ressonâncias de movimento médio analisadas. O máximo em 13.1 UA corresponde ao centro da ressonância 1:4 com Júpiter. O máximo em 13.6 UA corresponde à ressonância 5:3 com Urano e o máximo em 13.9 UA não corresponde ao centro de nenhuma ressonância. A *gap* em 13 UA corresponde

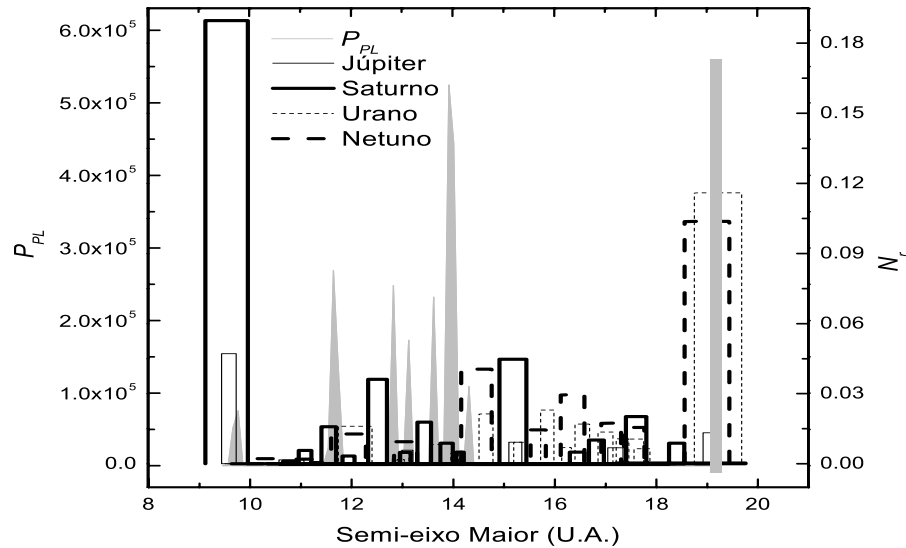


Figura 4.19: A caracterização dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no gráfico do  $P_{PL}$  obtido no estudo da distribuição de objetos na região entre Saturno e Urano.

à ressonância 9:5 com Urano e a *gap* em 14.15 UA às ressonâncias 2:9 com Júpiter e 5:9 com Saturno. O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta em 14.3 UA não corresponde ao centro de nenhuma ressonância de movimento médio estudada. Como podemos observar, o gráfico do  $P_{PL}$  apresenta, no intervalo de semi-eixo entre 14.5 UA e 18 UA, valores baixos, o que pode ser uma consequência do grande número de ressonâncias de movimento médio que esta região possui neste intervalo de semi-eixo. A faixa cinza entre 19.1 UA e 19.3 UA corresponde às ressonâncias 1:7 com Júpiter, 1:1 com Urano

e 2:1 com Netuno.

#### 4.2.4 Região entre Urano e Netuno

Na figura 4.20 mostramos os gráficos do  $t_{máx}$ ,  $N_{nTotal}$  e  $P_{PL}$  para a região entre Urano e Netuno. Como podemos notar os máximos que  $N_{nTotal}$  apresenta nas proximidades de 22.9 UA, 24.9 UA, 25.15 UA, 25.4 UA e 29.4 UA estão todos associados, nestes mesmos valores de semi-eixo, a mínimos no gráfico do  $t_{máx}$ . As faixas cinza que aparecem em torno de 19.5 UA e 30 UA estão, da mesma forma que nos casos anteriores, cobrindo faixas onde o número de encontros próximos foi pequeno dentro do tempo de integração e, portanto, não nos permitiu obter um bom ajuste para a lei de potência. Como podemos observar, o gráfico do parâmetro de população local apresenta, em 22.9 UA, 24.9 UA, 25.15 UA, 25.4 UA e 29.4, valores que não diferem muito do  $P_{PL}$

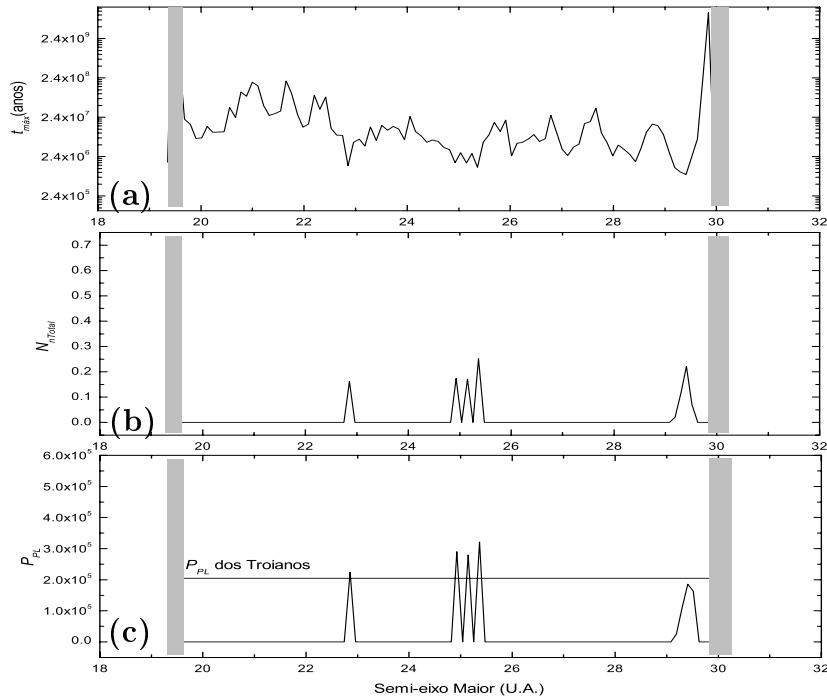


Figura 4.20: Os resultados obtidos para a região entre Urano e Netuno. (a) o gráfico do  $t_{máx}$ , (b) do  $N_{nTotal}$  e (c) do  $P_{PL}$ .

dos Troianos. O máximo que obtemos em 25.4 UA confirma o resultado de Holman 1997 no qual objetos nas vizinhanças de 25.6 UA permaneceram na integração por 4.5 Gyr. No trabalho de Grazier *et al.* 1999 os objetos neste intervalo de semi-eixo

maior permaneceram por menos de 100 Myr. Holmam 1997 verificou que objetos nas proximidades de 24.6 UA são capazes de permanecer na integração por 4.5 Gyr. Grazier *et al.* 1999 observaram que os objetos nas vizinhanças de 24.5 UA são eliminados da integração antes de 100 Myr. Como podemos observar, o  $P_{PL}$  que obtemos para este intervalo de semi-eixo foi baixo. Grazier *et al.* 1999 verificaram que, na região entre Urano e Netuno, apenas quatro de 10000 condições iniciais permaneceram por 100 Myr. De fato, a maior parte desta região é caracterizada por baixos valores de  $P_{PL}$ .

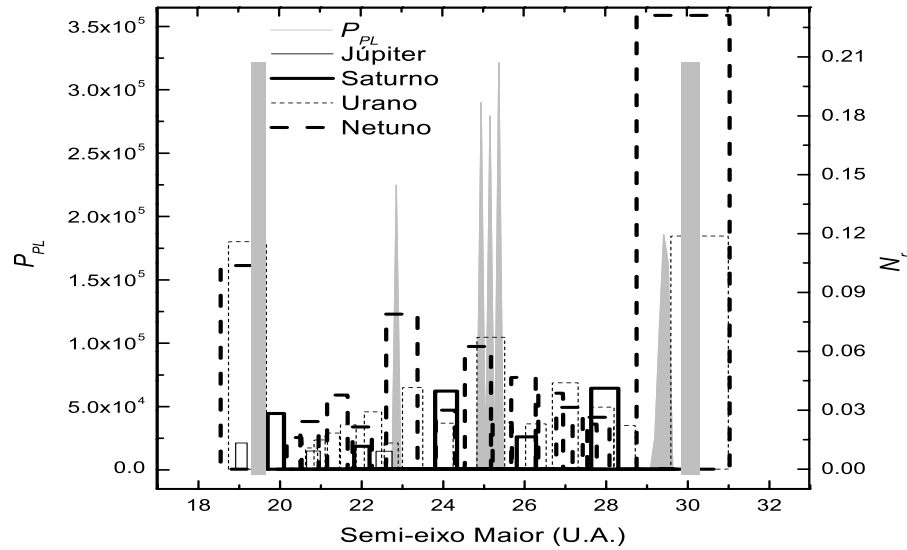


Figura 4.21: A determinação dos locais que apresentam ressonâncias de movimento médio no estudo da distribuição de objetos na região entre Urano e Netuno.

Podemos observar, nas figuras 4.20 e 4.21, que a faixa cinza entre 19.3 UA e 19.6 UA é a continuação da faixa cinza das figuras 4.18 e 4.19, correspondendo às ressonâncias 1:7 com Júpiter, 1:1 com Urano e 2:1 com Netuno. O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta em 22.9 UA não corresponde ao centro de nenhuma das ressonâncias de movimento médio estudadas e está situada entre as ressonâncias 7:9 com Urano (à esquerda) e 3:2 com Netuno (à direita). O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta em 29.4 UA, como podemos verificar, também não corresponde ao centro de nenhuma ressonância. O centro da ressonância 2:3 com Urano coincide com o máximo em 25.15 UA e os máximos em 24.9 UA e 25.4 UA não correspondem ao centro de nenhuma ressonância.

Como podemos verificar, as regiões entre 20 UA e 22.5 UA e entre 25.6 UA e 29 UA são caracterizadas por um grande número de ressonâncias de movimento médio, o que possivelmente explica o baixo valor do  $P_{PL}$  para estes intervalos de semi-eixo maior. A faixa cinza entre 29.8 UA e 30.3 UA corresponde às ressonâncias 1:2 com Urano e 1:1 com Netuno.

## 4.2.5 Região Transnetuno

Na figura 4.22 mostramos os resultados do modelo não planar para a região transnetuniana. Como podemos observar, a grande maioria dos máximos que surgem no gráfico do parâmetro de população local é maior que o  $P_{PL}$  dos Troianos. O máximo que o  $P_{PL}$  apresenta nas proximidades de 39.6 UA corresponde à ressonância 2:3 com Netuno, onde observa-se um dos principais grupos de objetos (núcleos de cometas) do cinturão de Kuiper. Os máximos que o gráfico do  $P_{PL}$  apresenta em 43.8 UA e 47.7 UA correspondem, respectivamente, às ressonâncias 4:7 e 1:2 com Netuno, onde também são observados objetos. O intervalo de semi-eixo maior entre 42 UA e 52 UA apresentou algumas faixas onde o número de encontros próximos foi bastante pequeno. Portanto os gráficos do  $t_{máx}$ ,  $N_{nTotal}$  e  $P_{PL}$  podem não serem muito confiáveis para alguns valores de semi-eixo deste intervalo. A faixa cinza em torno de 30.5 UA corresponde ao intervalo de semi-eixo maior onde o número de encontros próximos não foi suficiente, ao ajustarmos a lei de potência, para fornecer valores satisfatórios ao coeficiente de correlação  $R^2$ . Como podemos verificar, esta faixa é a continuação daquela que surgiu em torno de 30 UA, na figura 4.20.

Na figura 4.23 podemos observar que os máximos que o  $P_{PL}$  apresenta na região transnetuniana em 31.3 UA, 32.2 UA e 35 UA não correspondem ao centro de nenhuma das ressonâncias estudadas. O máximo em 33.7 UA corresponde à ressonância 3:7 com Urano e o máximo em 35.5 UA à ressonância 7:9 com Netuno. As *gaps* em 36.5 UA e em 38.3 UA correspondem, respectivamente, às ressonâncias 3:4 com Netuno e 1:8 com Saturno. O máximo do  $P_{PL}$  em 39.6 UA está associado à ressonância 2:3 com Netuno e os máximos em 43.8 UA e 47.7 UA correspondem, respectivamente, às ressonâncias 4:7 e 1:2, ambas com Netuno. A ressonância 5:9 com Netuno coincide com o máximo

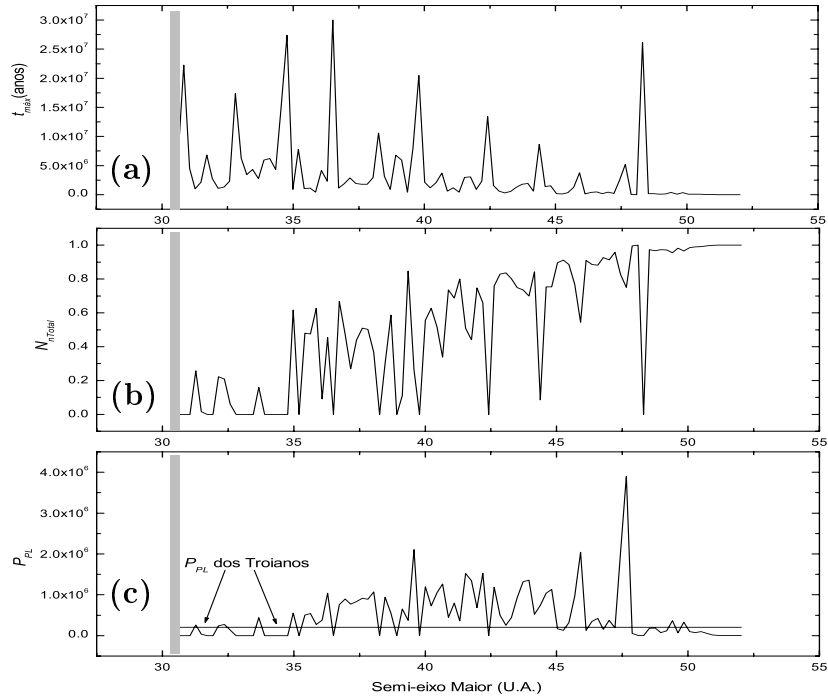


Figura 4.22: Os gráficos: (a) do  $t_{m\acute{a}x}$ , (b) do  $N_{nTotal}$  e (c) do  $P_{PL}$  para a região Transnetuno.

em 44.7 UA e o máximo em 45.9 UA não corresponde a nenhuma das ressonâncias estudadas. A faixa cinza entre 30.4 UA e 30.7 UA é a continuação da faixa cinza entre 29.8 UA e 30.3 UA, apresentada nas figuras 4.20 e 4.21, e corresponde às ressonâncias 1:1 com Netuno e 1:2 com Urano.

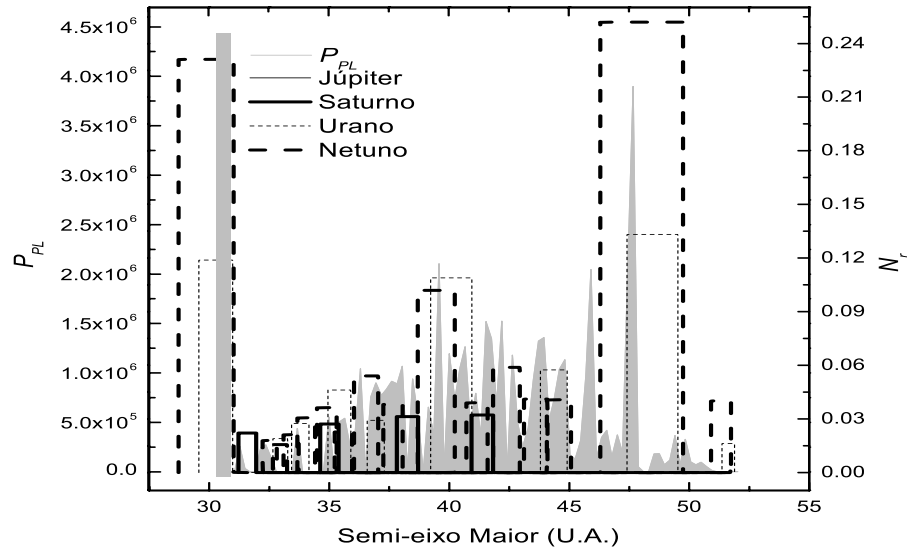


Figura 4.23: A identificação dos locais que apresentaram ressonâncias de movimento médio no gráfico do parâmetro de população local obtido para a região transnetuniana.

### 4.3 A Robustez do Método da Lei de Potência

Esta seção é dedicada à discussão do comportamento de  $t_{máx}$ ,  $N_{nTotal}$  e  $P_{PL}$  em relação ao valor de alguns parâmetros físicos: o intervalo de tempo  $\Delta t$  para contagem do número de encontros próximos, número de partículas em cada faixa e o intervalo de excentricidade característica de cada faixa.

Na figura 4.24 mostramos, para quatro faixas situadas na região do grupo Thule, os gráficos do  $P_{PL}$  quando o número inicial de partículas  $N_{Total}$  em cada faixa assume valores 10000, 5776 e 2500. As excentricidades iniciais foram uniformemente distribuídas entre 0.0 e 0.4. Como podemos observar o  $P_{PL}$  não apresenta mudanças qualitativas significativas para estes valores de  $N_{Total}$ .

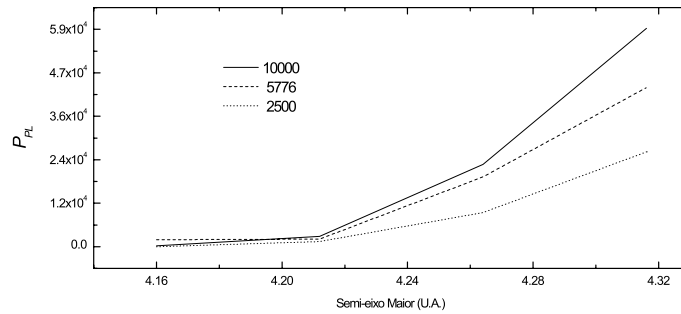


Figura 4.24: A dependência do  $P_{PL}$  em relação ao número de condições iniciais  $N_{nTotal}$ .

Para quatro novas faixas que também pertencem à região do grupo de Hilda, mostramos, na figura 4.25, como o  $P_{PL}$  é afetado quando o intervalo de excentricidades iniciais varia de 0.0 a 0.1, de 0.0 a 0.2, de 0.0 a 0.3 e de 0.0 a 0.4. O número de condições iniciais empregado em cada faixa foi 10000 para as quatro simulações. Podemos observar que, para os três últimos intervalos de excentricidade, o  $P_{PL}$  não apresenta grandes mudanças do ponto de vista qualitativo. Quando apenas pequenos valores de excentricidade são utilizados no estudo, então o número de encontros próximos torna-se, no tempo de integração, menor, resultando em coeficientes de correlação menos satisfatórios. Esta pode ter sido a causa da diferença entre o gráfico do  $P_{PL}$  para o intervalo de excentricidades iniciais entre 0.0 e 0.1 e os gráficos do  $P_{PL}$  para os demais intervalos de excentricidade.

Na figura 4.26 mostramos o comportamento dos parâmetros  $t_{máx}$ ,  $N_{nTotal}$  e

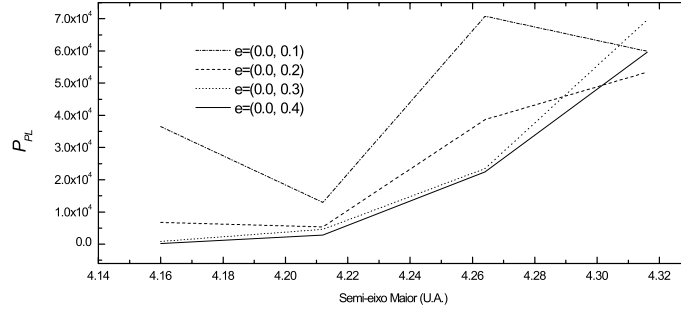


Figura 4.25: A dependência do  $P_{PL}$  em relação ao intervalo de excentricidades iniciais.

$P_{PL}$  quando difentes valores de  $\Delta t$  são empregados no estudo. Utilizando quatro faixas situadas na região de Thule integramos, para cada uma, o movimento de 10000 partículas com excentricidades iniciais distribuídas uniformemente entre 0.0 e 0.4. Testamos aqui os casos em que  $\Delta t$  assume valores  $40P_J$ ,  $80P_J$ ,  $120P_J$ ,  $160P_J$  e  $200P_J$ ,

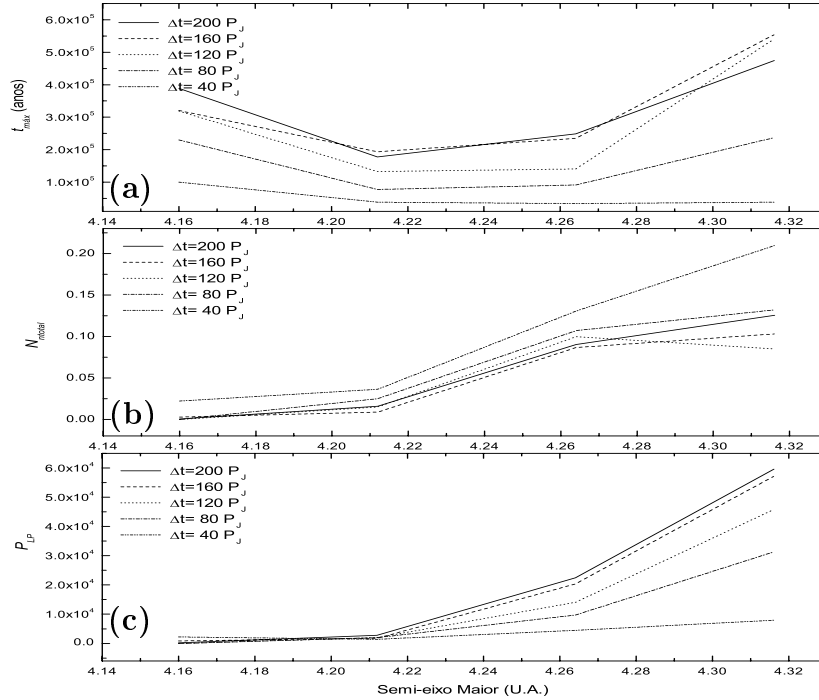


Figura 4.26: A influência do  $\Delta t$  nos valores de: (a)  $t_{m\acute{a}x}$ , (b)  $N_{nTotal}$  e (c)  $P_{PL}$ . onde  $P_J \approx 11.9$  anos é o período de Júpiter. Como podemos observar, os valores de  $t_{m\acute{a}x}$  aumentam quando  $\Delta t$  aumenta, enquanto que os valores de  $N_{nTotal}$  apresentam uma pequena tendência de diminuir. Analisando a figura 4.26-c concluímos que o parâmetro de população local apresenta um crescimento bem definido com  $\Delta t$ . Percebemos também que, neste caso, as características qualitativas do  $P_J$  não são afetadas por estes valores de  $\Delta t$ .

Como foi verificado, uma ligeira alteração nos valores de certos parâmetros não afeta de modo significativo os aspectos qualitativos do  $P_{PL}$ . Desta forma é importante que tais parâmetros sejam fixos ao longo do estudo para que os resultados de uma determinada região do Sistema Solar possa ser comparada com os de outras regiões, como feito nas seções anteriores.

# Capítulo 5

## Conclusão

O presente trabalho pode ser dividido em duas etapas. Na primeira etapa apresentamos um estudo onde as principais ressonâncias de movimento médio do Sistema Solar são identificadas. Dividimos o Sistema Solar em cinco regiões e, em cada uma delas, 40000 condições iniciais foram integradas em um modelo planar. Na segunda etapa do trabalho é apresentado um estudo da distribuição dos pequenos corpos no Sistema Solar. Neste estudo as equações do movimento do problema de  $n$ -corpos foram integradas para um tempo de, aproximadamente, 47600 anos.  $5 \times 10^6$  partículas teste foram uniformemente distribuídas entre 0.52 UA e 52 UA, tanto para o modelo planar quanto para o modelo tridimensional. Empregando o fato de que o número de encontros próximos no tempo segue, para um pequeno intervalo de semi-eixo maior, uma lei de potência, determinamos o tempo máximo de depleção,  $t_{m\acute{a}x}$ , a partir do qual o número de encontros próximos torna-se inferior a 0.01% do número inicial de partículas neste pequeno intervalo de semi-eixo. O parâmetro de população local,  $P_{PL}$ , foi definido como o produto entre  $t_{m\acute{a}x}$  e o número de partículas teste que não sofrem encontro próximo. Os resultados deste estudo mostram-se coerentes com aspectos da distribuição observada dos pequenos objetos no Sistema Solar. Empregamos, ainda, os resultados obtidos no estudo da identificação das principais ressonâncias de movimento médio para caracterizar os máximos do parâmetro de população local bem como as regiões onde o  $P_{PL}$  apresenta pequenos valores.

# Referências Bibliográficas

- [1] Candy, J. e W. Rozmus 1990. A Symplectic integration Algorithm for Separable Hamiltonian Functions. *J. Comput. Phys.* **92**, 230-256.
- [2] Cohen, C. J., E. C. Hubbard e C. Oesterwinter 1973. A. Papers. Amer. Ephemeris Vol. XXII, Part I
- [3] Cordeiro, R. R., R. S. Gomes e R. Vieira Martins 1997. A Mapping for Nonconservative System. *Cel. Mech. and Dyn. Astron.* **65**, 407-419.
- [4] Cordeiro, R. R., R. Vieira Martins e E. D. Leonel 1999. Complexity of The Capture Phenomena in The Conservative and Dissipative Three-Body Problem. *Astron. J.* **117**, 1634-1642.
- [5] Danby, J. M. A. (1988). Fundamental of Celestial Mechanics. *Willman-Bell*.
- [6] de la Barre, C. M., W. M. Kaula e F. Varadi 1996. A Study of the Orbits Near Saturn's Triangular Langrangian Points. *Icarus* **121**, 88-113.
- [7] Duncan, M, T. Quinn, e S. Tremaine 1989. The Long-Term Evolution of Orbits in The Solar System: A Mapping Approach. *Icarus* **82**, 402-418.
- [8] Everhart, E. 1973 Horseshoe and Trojan Orbits Associated With Jupiter and Saturn. *Astron. J.* **78**(4), 316-328.
- [9] Forest, E e R. D. Ruth 1990. Fourth-order Symplectic Integration *Physica D* **43**, 105-117.
- [10] Franklin, F., M. Lecar, e P. Soper 1989. Original Distribution of The Asteroids. II. Do Stable Orbits Exist Between Jupiter and Saturn?. *Icarus* **79**, 223-227.

- [11] Gladman, B., e M. Duncan 1990. On Fates of Minor Bodies in The Outer Solar System. *Astron. J.* **100**, 1680-1693.
- [12] Grazier, K. R., W. I. Newman, F. Varadi, W. M. Kaula e J. M. Hyman 1999. Dynamical Evolution os Planetesimals in The Outer Solar System. II. The Saturn/Uranus and Uranus/Neptune Zones. *Icarus* **140**, 353-368.
- [13] Grazier, K. R., W. I. Newman, W. M. Kaula e J. M. Hyman 1999. Dynamical Evolution os Planetesimals in The Outer Solar System. I. The Jupiter/Saturn Zone. *Icarus* **140**, 341-352.
- [14] Holman, M. J. 1997. A Possible Long-Lived Belt of Objects Between Uranus and Neptune. *Nature* **387**, 785-787.
- [15] Holman, M. J., e J. Wisdom 1993. Dynamical Stability in The Outer Solar System and The Delivery of Short Period Comets. *Astron. J.* **105**(5), 1987-1999.
- [16] Laskar, J. 1989. A Numerical Experiment on the Chaotic Behavior of The Solar System. *Nature* **338**, 237-238.
- [17] Laskar, J. 1990. The Chaotical Motion of The Solar System - A Numerical Estimate of The Size of The Chaotic Zones. *Icarus* **88**, 266-291.
- [18] Lecar, M., e F. A. Franklin, 1973. On The Original Distribution of The Asteroids. *Icarus* **20**, 422-436.
- [19] Milani e Nobili 1988. *Celes. Mach.* **43**, 1-.
- [20] Moons, M. 1997. Review of the Dynamics in the Kirkwood Gaps. *Celes. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 175-204.
- [21] Murison, M. A. 1989. The Fractal Dynamics of Satellite Capture in The Circular Restricted Three-Body Problem. *Astron. J* **98**, 2346-2359.
- [22] Murray, C. D., e S. F. Dermott 2000. Dynamical of Solar System. *Cambridge Uni. Press.*

- [23] Neri 1988. Depart. Physics - Univ. Maryland
- [24] Shoemaker, E. M., e R. F. Wolfe 1984. Evolution of The Uranus-Neptune Plan-  
etesimal Swarm. *Lunar Planet Sci. Conf.* **15**, 780-781.
- [25] Shoemaker & Shoemaker 1999. The Role of Collisions. *The New Solar Systems*,  
J. K. Beatty, C.C. Petersen and A. Chaikin, Cambridge Univ. Press.
- [26] Simó, C., G. Gómez, A. Jorba, J. Masedont 1995. The Bicircular Model Near  
The Triangular Libration Points in The RTBP. *From Newton to Chaos: Modern  
Techniques For Understanding And Coping With Chaos in n-Body Dynamical  
Systems*, (Roy, A. E. and Steves, B. A., Eds), Plenum, New York.
- [27] Sóbol, J.M. 1983. Método de Monte Carlo. MIR - Moscou.
- [28] Soper, P., F. Franklin, e M. Lecar 1990. Original Distribution of The Asteroids.  
II. Orbits Between Jupiter and Saturn. *Icarus* **87**, 265-284.
- [29] Störmer, C. 1907. Sur Les Trajectories des Corpuscles Electriques. *Arch. Sci. Phys.*  
*Nat. Geneve* **24**, 5-18, 113-158, 221-247.
- [30] Sussman, G. J., e J. Wisdom 1988. Numerical Evidence That The Motion of  
Pluto is Caotic. *Science* **241**, 433-437.
- [31] The Astronomical Almanac 1996 - Kemeth Seidelmann, Govenment Printing  
Office.
- [32] Weibel, W. M., W. M. Kaula, e W. I. Newman 1990. A Computer Search for  
Stable Orbits Between Jupiter and Saturn. *Icarus* **83**, 382-390.
- [33] Wisdom 1982. *Astron. J.* **87**(3), 577-.
- [34] Wisdom, J., e M. Holman 1991. Symplectic Maps For The n-Body Problem.  
*Astron. J.* **102**(4), 1528-1538.
- [35] Wisdom, J., e M. Holman 1992. Symplectic Maps For The n-Body Problem:  
Stability Analysis. *Astron. J.* **104**(5), 2022-2029.

- [36] Yoshida, H. 1990. Construction of High Order Symplectic Integrators *Phys. Lett. A* **150**, 262-268.