

SERGINEI JOSÉ DO CARMO LIBERATO

**ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS  
DO CONJUNTO DE JULIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2014**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

L695  
2014  
Liberato, Serginei José do Carmo, 1989-  
Algumas propriedades geométricas do conjunto de Julia /  
Serginei José do Carmo Liberato. – Viçosa, MG, 2014.  
vii, 63 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui índice.

Inclui apêndice.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 61-62.

1. Julia, Conjuntos de. 2. Dinâmica. 3. Hausdorff,  
Dimensão de. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento  
de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
II. Título.

CDD 22. ed. 511.32

SERGINEI JOSÉ DO CARMO LIBERATO

**ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS  
DO CONJUNTO DE JULIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de Fevereiro de 2014.

---

Carlos Maria Carballo

---

André Junqueira da Silva Corrêa

---

Kennedy Martins Pedroso  
(Coorientador)

---

Juan Valentín Mendoza Mogollón  
(Coorientador)

---

Alexandre Miranda Alves  
(Orientador)

*“É melhor tentar e falhar, que preocupar-se a ver a vida passar. É melhor tentar, ainda que em vão, que sentir-se fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva caminhar, que em dias tristes em casa me esconder. Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver”.*

Martin Luther King.

*“A entrada para a mente do homem é o que ele aprende, a saída é o que ele realiza. Se sua mente não for alimentada por um fornecimento contínuo de novas ideias que ele põe a trabalhar com um propósito e, se não houver uma saída por uma ação, sua mente torna-se estagnada. Tal mente é um perigo para o indivíduo que a possui e inútil para a comunidade”.*

Jeremias Whipple Jenks.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus que me concedeu mais esta vitória. A minha família pelo apoio em todos os momentos difíceis (meus pais Ana e Francisco, meus irmãos Sergiana, Sergio, Afonso e Antônio José), ao meu orientador Alexandre pela paciência, companheirismo e profissionalismo durante estes dois anos.

Não posso deixar de agradecer também aos meus amigos de Mestrado que tornaram esta caminhada mais amena e divertida, a minha turma: Rondinei, Thiago, Aline, Priscila, Filipe (Tilú), Renno, Carlos, Luiz Henrique, Livia e também o membro pro tempore Diego, as turmas de 2011: Samara, Débora, Victor, Michele, Robledo, Guemael, Michely, Alana Nunes, Alana Cavalcante, Maisa, Anna Paula e Gustavo, a turma de 2013: Lázaro, Anderson, Ygor, Gelson, Cris, Lizeth, Flávio, Sabrina e Marcelo.

Rendo homenagens também ao Matheus e ao Gustavo que foram meus amigos de república nestes dois anos, ao pessoal do 2331 que serão sempre como minha família, a Karine, Mislene e Afonso Júnior pela amizade e bons momentos compartilhados. Agradeço a todos os meus professores do Departamento de Matemática que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional, principalmente a Catarina, o Alexandre e o Rogério pelos conselhos e pela amizade.

Aos meus coorientadores Juan Valentín Mendoza Mogollón e Kennedy Martins Pedros pelas profícuas contribuições dadas a essa dissertação. Aos professores Dr André Junqueira da Silva Corrêa e o Dr Carlos Maria Carballo por aceitarem fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

Afinal agradeço a todos que de alguma forma estavam torcendo por mim, mesmo a distância, mais esta vitória em minha vida não é só minha é de todos nós.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Tópicos em Variáveis Complexas . . . . .	3
1.2 Alguns Resultados de Teoria da Medida . . . . .	19
1.2.1 Medida e Dimensão de Hausdorff . . . . .	22
<b>2 Conjuntos de Julia e de Fatou, Funções de Böttcher e Polinômios de Faber</b>	<b>24</b>
2.1 Preliminares de Dinâmica Complexa . . . . .	24
2.2 Conjuntos de Julia e Fatou . . . . .	27
2.3 Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou . . . . .	31
2.4 As Coordenadas de Böttcher no Infinito . . . . .	35
2.4.1 Coeficientes das Funções de Böttcher . . . . .	40
2.5 Polinômios de Faber e Coeficientes de Garabedian-Schiffer . . . . .	43
<b>3 Aspectos Geométricos e a Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia</b>	<b>46</b>
3.1 Aspectos Geométricos do Conjunto de Julia Cheio . . . . .	47
3.2 A Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia . . . . .	51

<b>Considerações Finais</b>	<b>60</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>63</b>

# Resumo

LIBERATO, Serginei José do Carmo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2014. **Algumas Propriedades Geométricas do Conjunto de Julia** . Orientador: Alexandre Miranda Alves. Coorientadores: Juan Valentín Mendoza Mogollón e Kennedy Martins Pedroso.

Neste trabalho estudamos algumas propriedades geométricas do Conjunto de Julia e do e Conjunto de Julia Cheio. Além disso, procuramos uma forma de “mensurar” o conjunto de Julia, para isso utilizamos a medida de Hausdorff e determinamos uma cota inferior para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia.

# Abstract

LIBERATO, Serginei José do Carmo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february, 2014. **Algumas Propriedades Geométricas do Conjunto de Julia**. Adviser: Alexandre Miranda Alves. Co-Advisers: Juan Valentín Mendoza Mogollón and Kennedy Martins Pedroso.

In this work we study some geometric properties of Julia sets and filled-in Julia sets of polynomials. In addition, we seek a form of “measure” the Julia set, for this we use the Hausdorff measure and determine a lower bound to the Hausdorff dimension of the Julia set.

# Introdução

O campo da dinâmica complexa analítica tem sofrido um rápido desenvolvimento nos últimos 20 anos. Depois de um período de relativa dormência, o campo de estudo resurgiu em 1980 devido a algumas imagens, bastante intrigantes, obtidas com o auxílio de computadores do conjunto de Mandelbrot ou Connectedness Locus (O Connectedness Locus  $\mathcal{M}_n$  da família de polinômios de grau  $n$  consiste de todos os parâmetros  $c$ , tais que o conjunto de Julia de  $P_c(z) = z^n + c$  é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico de  $P_c(z)$  é limitada), assim como a novos avanços na matemática preconizados por Douady, Hubbard, Sullivan e outros.

O campo experimentou dois períodos de evolução de curta duração, mas com um crescimento vigoroso e profícuo. As suas origens remontam aos finais do século *XIX* e início do século *XX*. Nesta altura, matemáticos como Leau, Schröder, Koenings, Böttcher, entre outros, interessaram-se pelo comportamento das funções complexas quando iteradas.

O trabalho inicialmente focava-se no comportamento das mesmas junto aos pontos fixos. Nos anos 1918-20, uma dramática mudança ocorreu quando, graças aos esforços de dois matemáticos franceses, Julia e Fatou, se começou a estudar não apenas o comportamento local das funções mas também o comportamento global das mesmas, ao estudar a dinâmica das funções fora dos pontos fixos. Por vezes, os resultados das iterações eram quase previsíveis e outras vezes o comportamento assumia-se como altamente instável, o que agora conhecemos como comportamento caótico. Em memória da contribuição dada por estes dois matemáticos franceses no estudo da dinâmica complexa, designamos o conjunto estável no plano complexo de conjunto de Fatou, enquanto que a região caótica é conhecida por conjunto de Julia.

Numa série de trabalhos, nos anos vinte, Fatou e Julia, descreveram de forma fascinante muitas das propriedades destes conjuntos para transformações racionais. Mais tarde, Baker estendeu o trabalho de Julia e Fatou a outras classes de funções, mostrando durante a sua investigação que outros tipos de comportamento estável podem ocorrer para funções inteiras e funções holomorfas.

O segundo maior período de atividade da dinâmica complexa começou em 1980, neste ano Mandelbrot usou gráficos obtidos por computador para estudar a dinâmica complexa. A sua descoberta do conjunto de Mandelbrot catapultou a área e promoveu o interesse de outros matemáticos em retomar os estudos neste campo. Numa rápida sucessão de

eventos, verificou-se a introdução de transformações quase-conformes, o que permitiu a Sullivan provar o teorema dos domínios não errantes, que veio completar a classificação de dinâmicas estáveis, classificação essa que foi iniciada por Fatou e Julia. Com o aparecimento do espaço dos parâmetros para polinômios quadráticos, introduzido por Douady, surge o desenvolvimento de técnicas que permitiram a classificação de quase todas as dinâmicas quadráticas, ficando por resolver a questão da conectividade do conjunto de Mandelbrot.

Logo após estes trabalhos estendeu-se o estudo de outros tipos de sistemas dinâmicos complexos, incluindo transformações racionais e polinômios de grau superior, que surgem do método de Newton, e as funções inteiras e holomorfas.

No nosso trabalho estudamos algumas propriedades geométricas do conjunto de Julia e do conjunto de Julia Cheio.

No capítulo 1 em um primeiro momento introduzimos os conceitos de Análise Complexa como funções holomorfas, condições de Cauchy-Riemann, Teorema Integral de Cauchy, Teorema de Green, Fórmula Analítica de Green, entre outros resultados de integração Complexa. Em um segundo momento estudamos alguns resultados de Teoria da Medida, como o conceito de  $\sigma$ -álgebra e a medida de Hausdorff;

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados gerais de dinâmica, os conjuntos de Julia e de Fatou e as propriedades inerente a eles, além disso apresentamos o Teorema de Böttcher e suas implicações para o estudo dos conjuntos de Julia e de Julia Cheio, também apresentamos uma forma de estimarmos os coeficientes da função inversa a função dada pelo Teorema de Böttcher, e finalizamos o capítulo com estudando um pouco da teoria de polinômios de Faber;

No capítulo 3 tratamos aspectos geométricos do conjunto de Julia e do conjunto de Julia Cheio, mais especificamente apresentamos condições necessárias para que o conjunto de Julia Cheio de um polinômio mônico e centrado seja conexo. Além disso, estimamos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste primeiro capítulo estamos interessados em apresentar alguns aspectos gerais da teoria de funções complexas, para isto faremos uso das referências bibliográficas [6], [9], [11] e [17].

### 1.1 Tópicos em Variáveis Complexas

**Definição 1.1.** *Seja  $f$  uma função complexa  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $G \subseteq \mathbb{C}$  aberto, dizemos que  $f$  é derivável em  $z_0$  se o limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe, e o denotamos  $f'(z_0)$ .*

*Se  $f$  é derivável em todo  $z \in G$  dizemos que  $f$  é derivável em  $G$  ou que  $f$  é holomorfa em  $G$ .*

**Exemplo 1.2. :**

1.  $f(z) = a, \forall z \in \mathbb{C}$  e  $a \in \mathbb{C}$  é holomorfa. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a - a}{z - z_0} = 0,$$

*Daí  $f$  é holomorfa e  $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$ .*

2.  $g(z) = z$  é holomorfa. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1,$$

Daí  $f$  é holomorfa e  $f'(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ .

3.  $h(z) = \bar{z}$  não é holomorfa. De fato, ao aproximar-se de  $z_0 = x_0 + iy_0$  pela reta  $z = (x + x_0) + iy_0$  com  $x \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + x_0) - iy_0 - (x_0 - iy_0)}{(x + x_0) + iy_0 - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Por outro lado ao aproximar-se de  $z_0 = x_0 + iy_0$  pela reta  $z = x_0 + i(y - y_0)$  com  $y \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x_0 - i(y + y_0) - (x_0 - iy_0)}{x_0 + i(y - y_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Portanto  $h(z) = \bar{z}$  não é holomorfa.

4.  $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$  é holomorfa.  
De fato,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1}$$

**Observação 1.3.** :

1. O limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  é equivalente a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ .
2. As funções polinomiais são holomorfas.

**Definição 1.4.** Um domínio é um subconjunto de  $\mathbb{C}$  que é aberto e conexo.

**Teorema 1.5.** Se  $f$  for holomorfa em um domínio  $G$  então  $f$  é contínua em  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $z_0 \in G$ , temos que mostrar que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \forall z_0 \in G$ . Como  $f$  é holomorfa temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, assim

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

o que acarreta o resultado. □

Agora veremos que para determinar se uma aplicação  $f$  é derivável em  $z_0 = x_0 + iy_0$ , é suficiente sabermos se a parte real e a parte imaginária de  $f$  admitem derivadas parciais de primeira ordem em  $z_0 = (x_0, y_0)$ , e se essas derivadas verificam as condições de Cauchy-Riemann que serão apresentadas a seguir. Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  sendo  $G$  um domínio e escrevemos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

sendo  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.6.** *Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $f$  seja derivável em  $z_0$  é que  $u$  e  $v$  possuam derivadas parciais contínuas em  $(x_0, y_0)$ , satisfazendo as condições de Cauchy-Riemann dadas abaixo*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Além disso, se  $f'(z_0)$  existe então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Por definição

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se  $z = x + iy_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por outro lado, se  $z = x_0 + iy$ , obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como o limite existe é único, de (1.1) e (1.2), tem-se que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Daí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

E mais, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Agora se supondo que  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e são de classe  $C^1$ , temos que existem funções  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  definidas em torno de  $(0, 0)$  satisfazendo que para todo  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$  suficientemente pequeno

$$u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s),$$

$$v(x_0 + r, y_0 + s) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_2(r, s),$$

e

$$\lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_2(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = 0$$

Colocando  $h = r + is$  e utilizando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + r, y_0 + s) - v(x_0, y_0)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)s + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)s + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + i \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(r + si) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(r + si) + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) h + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \end{aligned}$$

Daí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \right] = \lim_{h=r+si \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_1(r, s)}{r + si} + i \frac{\varepsilon_2(r, s)}{r + si} \right] = 0,$$

pois

$$\left| \frac{\varepsilon_j(r, s)}{r + si} \right| = \frac{|\varepsilon_j(r, s)|}{\sqrt{r^2 + s^2}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } (r, s) \rightarrow 0, \quad j = 1, 2.$$

O que mostra que  $f$  é derivável em  $z_0$  e

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

**Corolário 1.7.** *Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa em um domínio  $G$ . Se  $f'(z) = 0$  em  $G$ , então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* De fato, tem-se  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$  em  $G$ . Pelas equações de Cauchy-Riemann conclui-se que  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$  em  $G$ . Resulta  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$  em  $G$ , portanto  $u$  e  $v$  são constantes, e daí  $f$  é constante. □

**Definição 1.8.** *Seja  $G$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ ,  $a$  um elemento de  $G$  e  $f : G \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa. Se existir uma aplicação holomorfa  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(a) \neq 0$  e um inteiro não negativo  $n$  tal que  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$  para todo  $z$  em  $G \setminus \{a\}$ , então  $a$  é denominado um polo de  $f$  de ordem  $n$ .*

**Definição 1.9.** *Dizemos que uma aplicação  $f$  é meromorfa num aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , se existe um conjunto discreto  $\Gamma \subset U$  tal que  $f$  é holomorfa em  $U \setminus \Gamma$  e os pontos de  $\Gamma$  são polos de  $f$ .*

**Definição 1.10.** *Uma aplicação meromorfa e um  $a$  em  $U$  é dita aplicação univalente.*

**Exemplo 1.11.** *As seguintes aplicações são univalentes:*

1.  $f(z) = z;$

2.  $f(z) = \frac{1}{z}$

**Definição 1.12.** *Uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  que tem a propriedade que o ângulo é preservado e também*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}$$

*existe é chamada aplicação conforme. Se  $f$  é analítica e  $f'(z) \neq 0$  para algum  $z$  então  $f$  é conforme.*

**Definição 1.13.** *A função racional da forma  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , com  $ad - bc \neq 0$  é chamada transformação de Möbius.*

Se  $f$  é uma transformação de Möbius então  $f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$  também é uma transformação de Möbius, pois  $ad - bc \neq 0$  e além disso

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(z)) &= f\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right) = \frac{a\frac{dz - b}{-cz + a} + b}{c\frac{dz - b}{-cz + a} + d} = \frac{adz - ab - bcz + ab}{cdz - cb - cdz + ad} \\ &= \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = z = f^{-1}(f(z)) \end{aligned}$$

Daí temos que  $f^{-1}(z)$  é a inversa da aplicação  $f$ . Sejam  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  e  $g(z) = \frac{rz + s}{tz + w}$  transformações de Möbius, então  $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{(ar + bt)z + (as + bw)}{(cr + dt)z + (cs + dw)}$  é uma transformação de Möbius, pois  $(ar + bt)(cs + dw) - (as + bw)(cr + dt) = (ad - bc)(wr - st) \neq 0$ . Portanto as transformações de Möbius tem estrutura de grupo.

**Exemplo 1.14.** A função  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$  é uma transformação de Möbius.

Os resultados apresentados podem ser encontrados em ([6]) e ([9]).

**Definição 1.15.** Seja  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(t) = u(t) + iv(t)$ . Definimos a integral complexa de  $f$  por

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

**Propriedades:**

- i)  $\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt$
- ii)  $\operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$
- iii)  $\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- iv) Se  $c \in \mathbb{C}, c = a + bi$ :

$$c \int_a^b f(t)dt = (a + bi) \left( \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \right) = \int_a^b (au - bv)dt + i \int_a^b (bu + av)dt$$

e

$$\int_a^b cf(t)dt = \int_a^b (a + bi)(u + iv)dt = \int_a^b (au - bv)dt + i \int_a^b (bu + av)dt$$

Portanto

$$c \int_a^b f(t) dt = \int_a^b cf(t) dt$$

**Definição 1.16.** Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável  $f$  de classe  $C^\infty$ , e seu traço é o conjunto  $\{f(t) : t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ .

**Definição 1.17.** Uma função  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é de variação limitada se existe  $M > 0$  tal que para toda partição  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  temos que

$$\nu(\gamma, P) = \max_{1 \leq k \leq n} \{|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\} \leq M.$$

A variação total é

$$\nu(\gamma) = \sup_P \nu(\gamma, P).$$

**Definição 1.18.** Uma curva é retificável se ela é de variação limitada.

**Definição 1.19 (Integral de Riemann-Stieltjes).** O número

$$I = \int_\gamma f = \int_\gamma f(\gamma(t)) d\gamma(t)$$

é dito a integral de  $f$  sobre  $\gamma$ .

**Proposição 1.20.** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é de classe  $C^1$  em  $[a, b]$  então  $\gamma$  é retificável e

$$\nu(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

*Demonstração.* Dada  $P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b\}$  temos

$$\begin{aligned} \nu(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \end{aligned}$$

Definida para funções contínuas sobre  $\gamma$  que são de classe  $C^1$  em  $[a, b]$ . □

**Definição 1.21.** Dada  $f$  contínua em  $\gamma$  e  $\gamma$  de classe  $C^1$  em  $[a, b]$  definimos a integral de  $f$  sob a curva  $\gamma$  por

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_\gamma f = \int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**Exemplo 1.22.** Se  $f(z) = \frac{1}{z}$  e  $\gamma(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  então

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f dz &= \int_0^{2\pi} f(re^{it})(re^{it})' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi\end{aligned}$$

**Definição 1.23.** Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $G$  aberto, e  $f$  contínua. Dizemos que  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  é uma primitiva de  $f$  se  $F$  é holomorfa e  $F' = f$ .

**Proposição 1.24.** Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  contínua em  $G$ , onde  $G$  é um domínio (aberto e conexo). Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  então  $F + K$  também o é, mais ainda qualquer outra primitiva de  $f$  é da forma  $F + K$ , onde  $K$  é uma constante.

*Demonstração.* Se  $H$  é outra primitiva de  $f$  então  $H - F$  é holomorfa e

$$(H - F)'(z) = H'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

Então  $H - F = K$ , com  $K$  constante. □

**Definição 1.25.** Uma função  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é dita analítica se para todo  $a \in G$ ,  $\exists r$  máximo tal que  $B_r(a) \subset G$  e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n, \quad \forall z \in B_r(a).$$

**Teorema 1.26 (Teorema Integral de Cauchy).** Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $G$  um domínio simplesmente conexo (ou seja,  $G$  é aberto, conexo, e sem buracos, no sentido que qualquer curva fechada de  $G$  delimita uma região inteiramente contida em  $G$ ), e  $f$  analítica. Então  $\int_{\gamma} f dz = 0$  para toda curva  $\gamma$  de Jordan, regular, inteiramente contida em  $G$ .

**Observação 1.27.**  $\gamma$  ser uma curva de Jordan significa que  $\gamma$  é uma curva fechada e simples (ou seja,  $\gamma$  é uma aplicação injetora).

*Demonstração.* (Teorema Integral de Cauchy): Ver referência [6]. □

**Proposição 1.28.** Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica então  $f$  possui uma primitiva, mais ainda se  $\gamma$  é um caminho fechado em  $B(a) \subset G$  então  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .

*Demonstração.* Dado  $a \in G$ ,  $\exists r > 0$  tal que  $B_r(a) \subset G$  e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n, \quad \forall z \in B_r(a)$$

e considere  $F : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

Sabemos que para  $n$  grande:  $\frac{|z-a|}{n+1} \leq \frac{r}{n+1} < 1$ , então

$$\left| \frac{a_n(z-a)^{n+1}}{n+1} \right| = |a_n(z-a)^n| \left| \frac{z-a}{n+1} \right| \leq |a_n(z-a)^n|$$

Então  $F$  está bem definida (raio de convergência  $r$ ) e  $F' = f$ .

□

**Teorema 1.29.** *Dada  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e  $G$  um domínio simplesmente conexo, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $f$  possui uma primitiva
2.  $\int_{\gamma} f dz = 0$ , para todo caminho fechado  $\gamma \subset G$
3.  $\int_{\sigma} f dz$  só depende dos extremos  $z_1$  e  $z_2$  de qualquer caminho  $\sigma$  contido em  $G$ , que liga  $z_1$  a  $z_2$ .

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (3) : Sejam  $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in (a, b)$ ;  $f(z) = u + iv$ ,  $F(z) = N + iM$  e  $z_1 = \sigma(a) = x(a) + iy(a)$ ,  $z_2 = \sigma(b) = x(b) + iy(b)$ . Sabemos que  $F' = f$  e

$$F' = \frac{\partial N}{\partial x} + i \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - i \frac{\partial N}{\partial y}$$

Então

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial x} = u = \frac{\partial M}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial y} = v = \frac{\partial M}{\partial x} \end{array} \right.$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f dz &= \int_a^b (u(t)x'(t) - v(t)y'(t))dt + i \int_a^b (u(t)y'(t) + v(t)x'(t))dt \\
&= \int_a^b \left( \frac{\partial N}{\partial x}x'(t) - \frac{\partial N}{\partial y}y'(t) \right) dt + i \int_a^b \left( \frac{\partial M}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial M}{\partial x}x'(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(N(x(t), y(t)))dt + i \int_a^b \frac{d}{dt}(M(x(t), y(t)))dt \\
&= N(x(t), y(t))\Big|_a^b + iM(x(t), y(t))\Big|_a^b \\
&= N(x(b), y(b)) - N(x(a), y(a)) + iM(x(b), y(b)) - iM(x(a), y(a)) \\
&= N(x(b), y(b)) + iM(x(b), y(b)) - (N(x(a), y(a)) + iM(x(a), y(a))) \\
&= F(x(b) + iy(b)) - F(x(a) + iy(a)) \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}$$

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Como em (1)  $\Rightarrow$  (3) temos  $z_1 = z_2$  segue o resultado.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Sejam  $z_1$  e  $z_2$  em  $G$ . Seja  $\gamma$  um caminho que liga  $z_1$  a  $z_2$  e  $\sigma$  um caminho que liga  $z_2$  a  $z_1$  ambos os caminhos definidos em  $G$ . Logo  $\gamma - \sigma$  é um caminho fechado em  $G$ , que é simplesmente conexo, assim

$$\int_{\gamma - \sigma} f dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f dz - \int_{\sigma} f dz = 0,$$

então  $\int_{\gamma} f dz = \int_{\sigma} f dz$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Agora fixe  $z_0 \in G$ , e defina

$$\begin{aligned}
F : G &\rightarrow \mathbb{C} \\
z &\mapsto F(z)
\end{aligned}$$

por  $F(z) = \int_{\gamma} f dz$ , onde  $\gamma$  é o caminho que liga  $z_0$  a  $z$ .  $F$  está bem definida por hipótese, pois a integral está bem definida.

**Afirmção:**  $F'(z) = f(z), \forall z \in G$

De fato, como  $G$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B_r(z) \subset G$ . Assim para  $h \in \mathbb{C}$  com  $|h| < r, z + h \in B_r(z) \subset G$ . Mais ainda, temos que  $\sigma(t) = z + th$ , com  $t \in [0, 1]$  está contido em  $B_r(z) \subset G$ , logo temos

$$\begin{aligned}
F(z + h) &= \int_{\gamma + \sigma} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw + \int_{\sigma} f(w)dw \\
&= F(z) + \int_{\sigma} f(w)dw
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w)dw$$

Por outro lado,

$$\int_{\sigma} dw = \int_0^1 1\sigma'(t)dt = h1 = h$$

é daí temos que

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w)dw - f(z) = \frac{1}{h} \left[ \int_{\sigma} f(w)dw - f(z)h \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_{\sigma} f(w)dw - f(z) \int_{\sigma} dw \right] = \frac{1}{h} \left[ \int_{\sigma} f(w)dw - \int_{\sigma} f(z)dw \right] \\ &= \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|w - z| < \delta$  então  $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ . Logo tomando  $\bar{\delta} = \min\{r, \delta\}$  e se  $h < \bar{\delta}$ , temos  $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ , assim dado  $\epsilon > 0$  existe  $\bar{\delta} > 0$  tal que

$$\begin{aligned} h < \bar{\delta} \Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \right| \leq \\ &\leq \int_{\sigma} \frac{|f(w) - f(z)|}{|h|} |dw| \\ &< \frac{\epsilon}{|h|} \int_{\sigma} |dw| = \frac{\epsilon}{|h|} |h| = \epsilon \end{aligned}$$

Então  $F'(z) = f(z)$ . □

Nos próximos resultados mostraremos que se  $G \subset \mathbb{C}$  é um domínio simplesmente conexo e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa, então existe uma representação de  $f$  ao longo de caminhos fechados contidos em  $G$ .

**Teorema 1.30** (Fórmula Integral de Cauchy). *Sejam  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no domínio simplesmente conexo  $G$  e  $\gamma$  um caminho fechado qualquer contido em  $G$ . Para todo  $z$  no interior da região delimitada por  $\gamma$ , tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z},$$

denominada fórmula integral de Cauchy.

*Demonstração.* De fato, sendo  $G$  aberto, para cada  $z$  no interior de  $\gamma$  existe um disco

fechado de centro  $z$  e raio  $\rho > 0$  contido no interior de  $\gamma$ . Seja  $\Gamma$  a fronteira deste disco e suponhamos que  $\gamma$  e  $\Gamma$  sejam caminhos orientados no mesmo sentido. A função  $\xi \rightarrow \frac{f(\xi)}{\xi - z}$  é holomorfa em  $G - I(\Gamma)$  ( $G$  menos o interior de  $\Gamma$ ). Como anteriormente temos

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

Uma representação paramétrica de  $\Gamma$  é dada por  $\xi = z + \rho e^{it}$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Daí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt,$$

da qual obtém-se

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{it}) - f(z)| dt$$

Sendo  $f$  contínua em  $G$ , por ser holomorfa, segue-se que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tal que  $|f(z + \rho e^{it}) - f(z)| < \varepsilon$ , para todo  $\rho < \delta$ . Resulta que a fórmula anterior implica na fórmula integral de Cauchy.

Observemos que a fórmula integral de Cauchy, nos diz que se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  for holomorfa no domínio simplesmente conexo  $G$ , então o seu valor  $f(z)$  em todo  $z$  no interior da região delimitada por um caminho fechado  $\gamma$  qualquer contido em  $G$ , é obtido através do conhecimento de  $f$  sobre  $\gamma$ .

Como  $f$  é holomorfa em  $G$  e como  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua segue que

$$z \rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

é uma função contínua em  $(G - \gamma)$ . □

**Teorema 1.31.** *Seja  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa, com  $g$  um domínio, então  $f$  é analítica, ou seja dado  $a \in G$ , existe  $B_r(a) \subset G$  tal*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad \forall z \in B_r(a).$$

*Demonstração.* Dado  $a \in G$ ,  $\exists R > 0$  tal que  $B(a, R) \subset G$ . Considere  $r$  tal que  $0 < r < R$ , daí  $B(a, r) \subset B(a, R)$  e  $f$  é holomorfa em  $B(a, r)$ . Logo pela fórmula integral de Cauchy, temos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w - z}, \quad \text{onde } \gamma = \partial B(a, r), \quad \forall z \in B(a, r)$$

Agora note que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{w-a} \left( \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \right)$$

Como  $(z-a) < r$  e  $|w-a| = r$ , temos que  $\left| \frac{z-a}{w-a} \right| < 1$ , assim

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{w-a} \right)^n, \quad \forall z \in B(a, r)$$

ou seja,

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}, \quad \forall z \in B(a, r)$$

daí

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Portanto  $f$  é analítica. □

**Observação 1.32.** *Se  $f$  é analítica então  $f$  é holomorfa em  $G$ .*

Daí segue os dois resultados seguintes, estes podem ser consultados em detalhes em [6], [9] e [17].

**Teorema 1.33.** *Seja  $f : (G - \gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

com  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e holomorfa em  $(G - \gamma)$ , então a derivada é igual a

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}.$$

**Corolário 1.34.** *Nas condições do teorema anterior, a função  $f$  definida por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

*possui derivadas de todas as ordens, sendo a derivada de ordem  $n$  dada por*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

*para todo  $z$  em  $(G - \gamma)$ .*

**Teorema 1.35** (Teorema de Morera). *Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua no domínio simplesmente conexo  $G$ . Se*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

*para todo caminho fechado contido em  $G$ , segue-se que  $f$  é holomorfa em  $G$ .*

*Demonstração.* Como  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  para todo caminho contido em  $G$ , temos que se  $z_0 \in G$ , a integral

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = 0$$

depende somente de  $z$ . daí

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = 0$$

está definida em  $G$  e é derivável, com  $\varphi'(z) = f(z)$ . Portanto,  $f$  é igual a derivada de uma função holomorfa,  $\varphi$ , logo holomorfa, e segue o teorema.

□

**Teorema 1.36** (Teorema de Liouville). *Se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa em todo  $\mathbb{C}$  então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Seja  $z_0$  um ponto qualquer de  $\mathbb{C}$  e  $D(0, \rho)$  um disco aberto com centro na origem contendo  $z_0$  em seu interior. Representamos por  $\gamma$  a fronteira de  $D(0, \rho)$ . Sendo  $f$  holomorfa em  $\mathbb{C}$ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

pela fórmula integral de Cauchy. Tem-se também,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi.$$

Assim

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|z_0| |f(\xi)|}{|\xi - z_0| |\xi|} |d\xi|$$

Como  $f$  é limitada em  $\mathbb{C}$ , existe uma constante  $K > 0$  tal que  $|f(z)| < K$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Consequentemente,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K|z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|d\xi|}{|\xi - z_0||\xi|}.$$

Temos que  $\xi \in \gamma$ , logo  $|\xi - z_0| \geq \rho - |z_0|$ , portanto

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K|z_0|}{(\rho - |z_0|)}.$$

Sendo  $K, |z_0|$  números independentes de  $\rho$ . Fazendo  $\rho \rightarrow \infty$  na expressão anterior temos que para todo  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f(z_0) = f(0)$  o que mostra que  $f$  é constante em  $\mathbb{C}$ .

□

**Teorema 1.37** (Teorema do Módulo Máximo). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa, onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto conexo. Suponhamos que exista  $z_0 \in U$  tal que  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  para todo  $z$  numa vizinhança de  $z_0$ . Então  $f$  é constante em  $U$ .*

*Demonstração.* Seja  $z_0 \in U$ , e suponhamos que  $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\theta_0}$ . Consideremos a função  $g(z) = e^{-i\theta_0}f(z)$ . Temos que  $|g(z)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = g(z_0)$  para todo  $z$  numa vizinhança de  $z_0$ . Escrevamos  $g(z) = u(z) + iv(z)$ , onde  $u = \text{Re}g$  e  $v = \text{Im}g$ . Como  $g(z_0) \in \mathbb{R}$  (pois  $g(z_0) = e^{-i\theta_0}f(z_0) = e^{-i\theta_0}|f(z_0)|e^{i\theta_0} = |f(z_0)|$ ), temos que  $u(z_0) = g(z_0)$  e  $v(z_0) = 0$ . Agora seja  $r > 0$  tal que  $\overline{D}_r(z_0) \subset U \subset \mathbb{C}$  e tomemos  $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ . Pela fórmula integral de Cauchy podemos escrever

$$\begin{aligned} u(z_0) &= g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Igualando as partes reais, obtemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \tag{1.3}$$

**Afirmção:** A hipótese do teorema e a igualdade acima implicam que  $u(z_0) = u(z_0 + re^{i\theta})$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .

De fato, seja  $h(\theta) = u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})$ . Assim temos

$$u(z) \leq |u(z)| \leq |g(z)| \leq g(z_0) = u(z_0), \quad \forall z \in V$$

Obtemos que  $h(\theta) \geq 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Note que se  $h(\theta_1) > 0$  para algum  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ , então teríamos  $h(\theta) > 0$  para  $\theta$  em um intervalo contendo  $\theta_1$ , pois  $h$  é contínua. O que implica

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})) d\theta \\ &= u(z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

o que gera uma contradição com a igualdade 1.3. Concluimos que  $u(z_0 + re^{i\theta}) = u(z_0)$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$  e todo  $r > 0$  tal que  $\overline{D}_r(z_0) \subset V \subset \mathbb{C}$ . Daí obtemos que  $u$  é uma constante em um disco aberto  $D \subset \mathbb{C}$ , com centro em  $z_0$ . Por outro lado as relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Portanto  $v$  é também constante em  $D$ , ou seja,  $g = u + iv$  é constante em  $D$ . Como  $f(z) = e^{i\theta_0} g(z)$ , concluimos que  $f$  também é constante em  $D$ , logo constante em  $U$ , uma vez que  $U$  é conexo e  $f$  é analítica.

□

**Corolário 1.38** (Princípio do Máximo). *Seja  $G$  um domínio limitado de  $\mathbb{C}$ . Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa em  $G$  e contínua no fecho  $\overline{G}$ . O máximo de  $|f|$  é assumido em um ponto da fronteira de  $\partial G$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $|f|$  assume máximo no interior de  $G$ , digamos em  $a \in \text{int}G$ , assim

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

e assim temos

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| d\theta = |f(a)|$$

Portanto  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta = |f(a)|$  e como  $0 \leq |f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$ , daí  $f(a + re^{i\theta}) = f(a)$ ,  $\forall r \in [0, 2\pi]$ . Como  $|f|$  é contínua, então temos que  $f$  é localmente constante, e do fato de  $G$  ser conexo e  $f$  contínua segue que  $f$  é constante, o que é um absurdo, logo o máximo de  $f$  não pode ocorrer no interior de  $G$ . □

Agora apresentaremos a fórmula analítica de Green para área de uma região, usaremos este resultado no capítulo 3. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [13],

onde os itens abaixo são demonstrados. Seja  $\Sigma$  como a classe das funções do seguinte tipo

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (|z| > 1) \quad \text{e } b_i \in \mathbb{R}$$

**Definição 1.39.** *O índice de uma curva fechada suave por partes  $C$  em relação a um ponto  $w \notin C$  é definido por*

$$\chi(C, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{u - w} du.$$

**Observação 1.40.** *O índice é uma constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus C$ . Daí temos os seguintes resultados:*

**Teorema 1.41** (Fórmula analítica de Green). *Seja  $C$  uma curva suave por partes homologa a zero com respeito a um domínio  $H \subset \mathbb{C}$ . Se  $h(w)$  é holomorfa em  $H$  então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{h(w)} h'(w) dw = \frac{1}{\pi} \int \int_H \chi(C, w) |h'(w)|^2 d\Omega$$

onde  $d\Omega$  é um elemento de área.

A curva  $C$  ser homologa a 0 significa que o índice da curva satisfaz  $\chi(C, w) = 0$  para  $w \notin H$ , assim em alguma vizinhança de  $\partial H$ . Com base neste teorema temos o seguinte corolário

**Corolário 1.42.** *Sejam  $g \in \Sigma$  e  $H(r)$  todo o domínio de  $C : g(re^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Se  $h(w)$  é analítica em  $H(r_0)$  para algum  $r_0 > 1$  então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{h(w)} h'(w) dw = \frac{1}{\pi} \int \int_{H(r)} |h'(w)|^2 d\Omega \quad (1 < r < r_0)$$

## 1.2 Alguns Resultados de Teoria da Medida

Nesta seção usaremos as referências [7], [12], [15] e [16], .

Sejam  $\Omega$  um conjunto qualquer,  $A \subset \Omega$  um subconjunto de  $\Omega$  e  $A^C = \Omega \setminus A$ . Denotemos por  $2^\Omega$  o conjunto das partes de  $X$ , onde  $X$  é um conjunto qualquer.

**Definição 1.43.** *Seja  $\Omega$  um conjunto. Uma sigma-álgebra ( $\sigma$ -álgebra) é uma família de subconjuntos de  $\Omega$ , denotada por  $\mathcal{F}$ , que satisfaz as seguintes propriedades:*

i)  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ ;

ii) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^C \in \mathcal{F}$ ;

iii) Se  $A_n \in \mathcal{F}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

O par ordenado  $(\Omega, \mathcal{F})$  é chamado espaço mensurável. Cada elemento da  $\sigma$ -álgebra é chamado conjunto mensurável.

**Observação 1.44.** Quando  $(\Omega, \mathcal{F})$  é um espaço topológico, a sua  $\sigma$ -álgebra é chamada  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Omega$ , e é denotada por  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{F})$ . Os elementos de  $\mathcal{B}$  são denominados subconjuntos de Borel.

**Observação 1.45.** Pelas Leis de De Morgan uma  $\sigma$ -álgebra é fechada em relação a interseção.

**Exemplo 1.46.** São conjuntos de Borel em  $\mathbb{R}$

1. Os conjuntos com um único elemento;

De fato, seja  $a \in \mathbb{R}$  então  $\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left( a - \frac{1}{n}, a \right] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , pois cada elemento da interseção pertence a  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

2. Conjuntos Contáveis;

De fato, pois um conjunto contável é a união contável de conjuntos com um único elemento.

**Definição 1.47.** Chamamos  $\mu$  uma medida em  $\mathbb{R}^n$  se  $\mu$  é uma função não negativa, possivelmente  $\infty$ , tal que para cada subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  satisfaz:

i)  $\mu(\emptyset) = 0$

ii)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subset B$

iii) Se  $A_1, A_2, \dots$ , é uma sequência contável de conjuntos disjuntos então

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

onde os  $A_i$  são conjuntos de Borel. Chamamos  $\mu(A)$  de medida do conjunto  $A$ .

**Observação 1.48.** Como consequência da definição anterior, se um conjunto  $A$  pode ser expresso como a união disjunta  $A = B \cup (A \setminus B)$  então

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Similarmente, se  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  é uma sequência de conjuntos de Borel então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$$

Dessa forma, note que se  $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$  com esta união disjunta

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} - A_i) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

Mais geralmente, podemos mostrar que se  $\delta > 0$ ,  $A_\delta$  são conjuntos de Borel que crescem quando  $\delta$  decresce, ou seja,  $A_{\delta'} \subset A_\delta$  para  $0 < \delta < \delta'$ , então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta\right)$$

**Definição 1.49.** Uma medida de um subconjunto limitado  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $0 < \mu(A) < \infty$  será chamada distribuição de massa.

**Definição 1.50.** Por um espaço de medida  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  significa um espaço  $(\Omega, \mathcal{F})$  junto com uma medida  $\mu$  definida sobre  $\mathcal{F}$ .

**Definição 1.51.** Se  $\mu(\Omega) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma probabilidade e o espaço  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  é chamado espaço de probabilidade.

**Observação 1.52.** :

1. Na topologia fraca estreita uma medida  $\mu_n \rightarrow \mu$  em  $M(X)$  se, e somente se,  $\forall f \in C(X) \int f' d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ , onde  $M(X)$  é a coleção de todas as medidas de probabilidade definidas sobre o espaço mensurável  $(X, \mathcal{B}(X))$  e  $C(X)$  conjunto de aplicações contínuas de  $X$  para  $X$ .
2. Se  $\mu_n, \mu \in M(X), n \geq 1$ , pode-se provar as seguintes equivalências
  - i)  $\mu_n \rightarrow \mu$  na topologia fraca estreita.
  - ii) Para cada subconjunto fechado  $F$  de  $X$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ .
  - iii) Para cada subconjunto aberto  $U$  de  $X$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$ .
  - iv) Para cada  $A \in \mathcal{B}$  com  $\mu(\partial A) = 0$ ,  $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ .

### 1.2.1 Medida e Dimensão de Hausdorff

Em 1918, Hausdorff introduziu a medida  $t$ -dimensional  $m_t(E)$  de um conjunto  $E$  e definiu a dimensão de Hausdorff de  $E$ .

Denotamos por  $D(w, r)$  o círculo de centro  $w$  e raio  $r$ , e para um conjunto  $A$ , denotamos o diâmetro de  $A$  por

$$|A| = \sup\{|z - w| : z, w \in A.\}$$

Seja  $E$  algum subconjunto de  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (a esfera de Riemann) e  $t$  um número positivo. Para cada  $\delta > 0$ , consideremos as possíveis coberturas  $\{A_j\}$  de  $E$  por conjuntos de diâmetro menor do que  $\delta$ . Nosso objetivo será minimizar a soma  $\sum_j |A_j|^t$ , para isso definamos:

$$m_t^\delta(E) = \inf \left\{ \sum_j |A_j|^t : |A_j| < \delta, E \subset \bigcup_j A_j \right\}$$

**Definição 1.53.** Quando  $\delta$  decresce, a classe de tais coberturas de  $E$  diminuem e definimos a medida  $t$ -dimensional  $m_t(E)$  de  $E$  por

$$m_t(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_t^\delta(E) = \sup_{\delta > 0} m_t^\delta(E)$$

Observe que tal limite sempre existe, e daí  $m_t(E)$  é chamado medida  $t$ -dimensional de Hausdorff

O seguinte resultado nos permitirá definir a dimensão de Hausdorff.

**Lema 1.54.** Se  $0 \leq m_t(E) < +\infty$  e  $t < T$ , então  $m_T(E) = 0$

*Demonstração.* Suponha que a família  $\{A_j\}$  satisfaz  $E \subset \bigcup_j A_j$  e  $|A_j| < \delta$ , então

$$m_T^\delta(E) \leq \sum_j |A_j|^T \leq \delta^{T-t} \sum_j |A_j|^t$$

Variando  $\{A_j\}$  sobre todas tais coberturas de  $E$ , obtemos

$$m_T^\delta(E) \leq \delta^{T-t} m_t^\delta(E),$$

e fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , obtemos que  $m_T(E) = 0$ . □

**Definição 1.55.** Uma consequência imediata do lema anterior é a existência de um número não negativo  $d(E)$  tal que

$$m_t(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t < d(E) \\ 0 & \text{se } t > d(E) \end{cases}$$

tal número  $d(E)$  é denominado a dimensão de Hausdorff de  $E$ .

**Observação 1.56.** Denotamos a dimensão de Hausdorff  $d(E)$  por  $d(E) = \text{Dim}_H(E)$ .

**Observação 1.57.** Note que não fizemos afirmações sobre o tamanho de  $d(E)$ , então  $d(E) = \text{Dim}_H(E)$  pode assumir qualquer valor no intervalo  $[0, \infty]$ .

**Observação 1.58.** Note que se trocarmos o conjunto  $E$  por bolas a definição e o resultados de medida não são alterados.

# Capítulo 2

## Conjuntos de Julia e de Fatou, Funções de Böttcher e Polinômios de Faber

Neste capítulo usaremos as seguintes referências [2], [5], [8], [10], [13] e [14] e para apresentar a teoria de conjuntos de Julia e de Fatou e algumas de suas propriedades, e também introduziremos o conceito de Connectedness Locus. Por último apresentaremos o Teorema de Böttcher e a teoria de polinômios de Faber que nos auxiliará a trabalhar com Conjunto de Julia Cheio no capítulo 3.

### 2.1 Preliminares de Dinâmica Complexa

Primeiramente estamos interessados em apresentar alguns resultados gerais de dinâmica, e na próxima seção começaremos a trabalhar sobre a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $f : S \rightarrow S$  uma aplicação, onde  $\widehat{\mathbb{C}}$  é a esfera de Riemann. Definimos a  $n$ -ésima iterada de  $f$  como a composição de  $f$   $n$ -vezes consigo mesma*

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f.$$

**Definição 2.2.** *Um ponto  $w$  é um ponto periódico de uma aplicação  $f$  se ele é um ponto fixo de alguma iterada  $f^m$ , ou seja,  $f^m(w) = w$ .*

**Definição 2.3.** *Considere a órbita periódica:*

$$f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \cdots \mapsto z_{m-1} \mapsto z_m = z_0$$

*para uma aplicação holomorfa  $f : S \rightarrow S$ . Se os pontos  $z_1, \dots, z_{m-1}, z_m$  são todos distintos então o inteiro  $m \geq 1$  é chamado período.*

**Definição 2.4.** Um ponto  $z_0$  é pré-periódico, de período  $n$ , se  $z_0$  não é periódico, mas existe um  $n > 0$  tal que  $f^{n+i}(z_0) = f^i(z_0)$ , com  $i > 0$ , ou seja,  $f^i(z_0)$  é periódico para  $i > 0$ , com  $i$  inteiro positivo.

**Definição 2.5.** Suponha  $z_0$  um ponto periódico de período  $m$ , de uma função holomorfa  $f$ , isto é,  $f^m(z_0) = z_0$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . O número  $\lambda = (f^m)'(z_0) = f'(z_1) \cdot f'(z_2) \cdots f'(z_m)$  é chamado multiplicador de  $f$  em  $z_0$ , onde  $z_i = f^i(z_0)$ . O ponto periódico  $z_0$  é classificado da seguinte forma:

- $z_0$  é super-atrator se  $|\lambda| = 0$ ;
- $z_0$  é atrator se  $0 < |\lambda| < 1$ ;
- $z_0$  é repulsor se  $|\lambda| > 1$ ;
- $z_0$  é indiferente se  $|\lambda| = 1$ .

**Exemplo 2.6.** Se  $f(z) = z^2$  então  $f$  tem três pontos fixos, a saber: zero, a unidade e o infinito. Assim os multiplicadores são:

- $\lambda = |f'(0)| = 2 \cdot 0 = 0$ , portanto 0 é superatrator;
- $\lambda = |f'(1)| = 2 \cdot 1 = 2$ , portanto 1 é repulsor;
- $\lambda = |f'(\infty)| = 2 \cdot \infty = \infty$ , mas nesse caso especial  $\infty$  é atrator, e não repulsor. De fato, a definição anterior dever ser vista com cautela no caso em que o ponto no infinito é periódico sobre uma aplicação racional,  $f^m(\infty) = \infty$ . Neste caso o multiplicador  $\lambda$  não é igual ao limite de  $z \rightarrow \infty$  da derivada de  $f^m(z)$ , mas o inverso deste número. Detalhes podem ser vistos na referência [2].

Em 1884 G. Koenings provou o seguinte teorema de linearização, que nos dá uma forma de estudar o comportamento de uma função  $f$  qualquer a partir de uma aplicação conforme, ver referência [5].

**Teorema 2.7.** Suponha que  $f$  tem um ponto fixo atrator em  $z_0$ , com multiplicador  $\lambda$  satisfazendo  $0 < \lambda < 1$ . Então existe uma aplicação conforme  $\xi = \varphi(z)$  de uma vizinhança de  $z_0$  sobre uma vizinhança de 0 que conjuga  $f(z)$  com a função linear  $g(\xi) = \lambda\xi$ . A conjugação é única, a menos de multiplicação por um fator constante não nulo.

*Demonstração.* Suponhamos  $z_0 = 0$ . Definamos  $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z + b_{n+1} z^{n+1} \cdots$ , então  $\varphi_n$  satisfaz

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}$$

Assim se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  então  $\varphi \circ f = \lambda\varphi$  e temos que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\xi$  e  $\varphi$  é uma conjugação. Mostaremos a convergência citada acima, ou seja, que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ . Note que para  $\delta > 0$  pequeno, temos

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2, \quad |z| \leq \delta \quad \text{e} \quad C > 0 \quad \text{constante.}$$

Assim  $|f(z)| \leq |\lambda||z| + C|z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta)|z|$ , e por indução com  $|\lambda| + C\delta < 1$ ,

$$|f^n(z)| \leq (\lambda + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Escolhamos  $\delta$  pequeno de forma que se  $\rho = \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{\lambda} < 1$ , obtemos

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C |z|^2}{|\lambda|}$$

para  $|z| \leq \delta$ . Desta forma  $\varphi_n(z)$  converge uniformemente para  $|z| \leq \delta$ , e existe a conjugação.

Para provarmos a unicidade é suficiente mostrarmos que alguma conjugação de  $f(z) = \lambda z$  sobre si mesma é uma constante multiplicada por  $z$ . De fato, suponhamos que  $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  seja tal conjugação, então  $\varphi(\lambda z) = \lambda \varphi(z)$ . Fazendo as substituições temos que  $a_n \lambda^n = \lambda a_n$ , daí obtemos que  $a_n = 0$  se  $n \geq 2$ , portanto  $\varphi(z) = a_1 z$ .  $\square$

Em 1904 Böttcher foi o primeiro a provar a existência da conjugação no caso superatratador, ver [5] (os outros casos do Teorema de Böttcher serão discutidos adiante).

**Teorema 2.8.** *Suponha que  $f$  tem um ponto fixo superatratador em  $z_0$ , e que*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad a_p \neq 0, p \geq 2.$$

*Então existe uma conjugação  $\xi = \varphi(z)$  de uma vizinhança de  $z_0$  sobre uma vizinhança de 0 que conjugua  $f(z)$  para  $\xi^p$ . A função conjugação é única a menos de multiplicação por uma  $(p-1)$ -ésima raiz da unidade.*

*Demonstração.* Suponha  $z_0 = 0$ . Para  $|z|$  pequeno existe uma constante  $C > 1$  tal que  $|f(z)| \leq C|z|^p$ . Por indução, escrevendo  $f^{n+1} = f^n \circ f$  e usando que  $p \geq 2$ , encontramos que

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}, \quad |z| \leq \delta$$

então  $f^n(z) \rightarrow 0$ .

Fazendo a mudança de variável  $w = cz$  onde  $c^{p-1} = \frac{1}{a_p}$  então temos a conjugada de  $f$  da forma  $f(w) = w^p + \dots$ , assim assumimos  $a_p = 1$ . Queremos uma conjugação da forma  $\varphi(z) = z + \dots$  tal que  $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$ , que é equivalente a condição que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \xi^p$ . Seja

$$\varphi_n(z) = (f^n(z))^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}},$$

que esta bem definida em uma vizinhança da origem, e as  $\varphi_n$ 's satisfazem

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-n+1}} = \varphi_n^p,$$

assim se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  então  $\varphi$  satisfaz  $\varphi \circ f = \varphi^p$  e dessa forma é uma solução. Mostremos agora que  $\{\varphi_n\}$  converge, escrevamos  $f^{n+1} = f \circ f^n$  e note que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} &= \left( \frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = (1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p^{-n}} \\ &= 1 + \mathcal{O}(p^{-n})\mathcal{O}(|z|)^{p^n} C^{p^n} = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}) \end{aligned}$$

Se  $|z| \leq \frac{1}{C}$ . Assim o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

converge uniformemente para  $|z| \leq c < \frac{1}{C}$ , o que implica que  $\{\varphi_n\}$  converge, o que garante a existência almejada.  $\square$

Os dois resultados anteriores nos dão uma base para enunciarmos o Teorema de Böttcher na seção 4, este resultado nos dará uma forma mais geral de determinarmos as funções conjugação.

**Definição 2.9.** Um ponto periódico  $z_0 = f^n(z_0)$  é chamado parabólico se o módulo do multiplicador  $\lambda$  em  $z_0$  é igual a 1, desde que  $f^m$  não seja a aplicação identidade. Mais geralmente, se  $\lambda$  é uma raiz da unidade nenhuma iterada de  $f$  é a aplicação identidade.

**Definição 2.10.** Se  $\mathcal{O}$  é uma órbita periódica atratora de período  $m$ , definimos a bacia de atração dessa órbita como sendo o conjunto aberto  $\mathcal{A} \subset S$  consistindo de todos os pontos  $z \in S$  para os quais as sucessivas iteradas  $f^m(z), f^{2m}(z), \dots$ , convergem para algum ponto de  $\mathcal{O}$ .

## 2.2 Conjuntos de Julia e Fatou

Para estudarmos os conjuntos de Julia e de Fatou precisamos primeiramente da definição de família normal.

**Definição 2.11.** Seja  $\mathcal{F}$  uma coleção de aplicações da esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  para a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  $\mathcal{F}$  será chamada normal se cada sequência de aplicações de  $\mathcal{F}$  contém ou uma subsequência que converge localmente uniformemente ou uma subsequência que diverge localmente uniformemente em  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 2.12.** Uma família  $\mathcal{F}$  de funções analíticas uniformemente limitadas em um domínio  $G$  é normal.

*Demonstração.* Seja o disco unitário  $D = \{z : |z| < 1\}$  e seja  $f \in G$  satisfazendo  $|f| \leq N$  para algum  $N \in \mathbb{R}$ . Se  $|f| < r < 1$  usando as desigualdades de Cauchy temos  $f'(z) \leq \frac{N}{1-r}$ . Considerando  $G$  coberto por discos segue o resultado.  $\square$

**Teorema 2.13 (Teorema de Montel).** *Seja  $\mathcal{F}$  uma família de aplicações analíticas definidas em domínio  $S$ , e  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uma aplicação que omite três diferentes valores. Isto é, assumamos que existem três pontos distintos  $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$  tais que  $f(S) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$  para cada  $f \in \mathcal{F}$ . Então  $\mathcal{F}$  é uma família normal.*

**Lema 2.14.** *Se  $M = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$  é a esfera perfurada três vezes, então  $M^\infty$  (cobertura de  $M$ ) é conformalmente equivalente ao disco unitário  $D$ .*

*Demonstração.* Já que  $D$  é conformalmente equivalente à parte superior do plano  $H = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(z) > 0\}$ , é suficiente encontrar uma aplicação cobertura de  $H$  sobre  $M$ . Construiremos tal aplicação, a função modular, como segue: Seja

$E = \left\{ z : 0 < \text{Re}(z) < 1, \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$ . Então pelo teorema da transformação de Riemann existe uma aplicação  $\psi$  de  $E$  para  $H$  fixando  $0, 1, \infty$ . Denote  $E^*$  a reflexão de  $E$  sobre o círculo  $\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ . Pelo princípio de reflexão de Schwarz, extendemos  $\psi$  para uma aplicação conforme de  $E \cup E^*$  para  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ . Continuando a reflexão extendemos  $\psi$  a todos  $\{0 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) > 0\}$  tomando os valores em  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$ . Por reflexão das linhas verticais  $\{\text{Re}(z) = n\}$  para  $n$  inteiro, extendemos  $\psi$  para todo  $H$ . Por construção temos que  $\psi$  é uma transformação cobertura de  $H$  sobre  $M$ .  $\square$

*Demonstração.* (do Teorema de Montel)

Assumindo que  $S$  é um disco, e por composição por uma transformação de Möbius, assumimos que as funções em  $\mathcal{F}$  não assumem os valores  $0, 1, \infty$ . Seja  $M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Pelo Lema anterior existe uma aplicação cobertura  $\psi : D \rightarrow M$ . Seja  $\widehat{f} : S \rightarrow D$  o levantamento de  $f \in \mathcal{F}$ , tal que  $\widehat{f} \circ \psi = f$ . Então  $\{\widehat{f} : f \in \mathcal{F}\}$  é uma família normal, pois é uma família normal limitada, portanto  $\mathcal{F}$  é uma família normal.  $\square$

**Definição 2.15.** *Seja  $\widehat{\mathbb{C}}$  a esfera de Riemann, que é uma superfície de Riemann compacta, e  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  uma aplicação holomorfa e  $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  a  $n$ -ésima iterada. O domínio de normalidade da coleção de iteradas  $f^n$  é chamado Conjunto de Fatou para  $f$ . O seu complementar é chamado de Conjunto de Julia.*

**Notação:**  $J = J(f)$  para conjunto de Julia e  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J$  ou  $F = F(f)$  para o conjunto de Fatou.

**Exemplo 2.16.** *Considere  $f(z) = z^2$ , então  $f^n(z) = z^{2^n}$ . Como  $f^n$  converge para  $0$  em  $\{|z| < 1\}$  e converge para  $\infty$  em  $\{|z| > 1\}$  o Conjunto de Julia de  $f$  é o círculo unitário  $\{|z| = 1\}$ , e seu complementar  $F(f)$  é o conjunto de Fatou.*

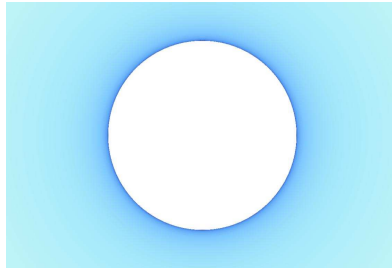


Figura 2.1: Conjunto de Julia de  $f(z) = z^2$ .

Agora apresentaremos alguns figuras que representam o conjunto de Julia para algumas aplicações, estas figuras forma obtidas utilizando o software fraqtive.

**Exemplo 2.17.** Considere  $f(z) = z^2 + i$ , então a figura abaixo representa o conjunto de Julia de  $f$ .

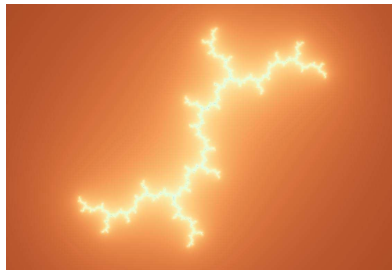


Figura 2.2: Conjunto de Julia de  $f(z) = z^2 + i$ .

**Exemplo 2.18.** Agora considere  $f(z) = z^2 - 0.55i + 0.6$ , então a figura abaixo representa o conjunto de Julia de  $f$ .

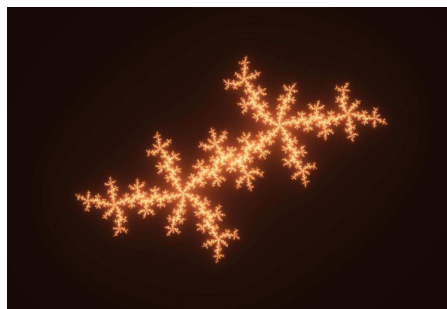


Figura 2.3: Conjunto de Julia de  $f(z) = z^2 - 0.55i + 0.6$ .

**Exemplo 2.19.** Considere  $f(z) = z^2 - 2$ . Se usarmos o homeomorfismo  $g(z) = z + \frac{1}{z}$  em  $g : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$  então  $g(z^2) = f(g(z)), \forall z$ , e daí  $z \mapsto z^2$  e  $z \mapsto z^2 - 2$  são topologicamente conjugadas. Portanto o conjunto de pontos que escapam para infinito é  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$ , assim o conjunto de Julia é o intervalo do eixo real  $[-2, 2]$ .

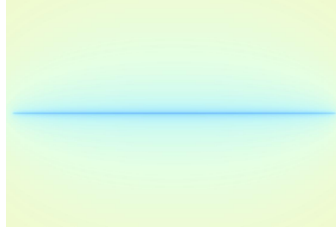


Figura 2.4: Conjunto de Julia de  $f(z) = z^2 - 2$ .

**Definição 2.20.** Seja  $P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  um polinômio complexo mônico de grau  $d \geq 2$ . Denotamos por  $P^n$  a  $n$ -ésima iterada de  $P$ . O Conjunto de Julia Cheio de  $P$  é definido por

$$K(P) = \{z : P^n(z), \text{ não tende para } \infty\}$$

**Observação 2.21.** Com a definição de conjunto de Julia Cheio e com a definição do conjunto de Julia, observamos que o conjunto de Julia é o bordo do conjunto de Julia Cheio.

**Exemplo 2.22.** Sejam os polinômios de **Tchebychev**  $T_k$  definidos pela seguinte forma de recorrência

$$T_{k+1} = zT_k(z) - T_{k-1}(z), \quad k = 1, 2, \dots$$

e  $T_0(z) = 2, T_1(z) = z$ , daí temos

$$\begin{aligned} T_2(z) &= z^2 - 2 \\ T_3(z) &= z^3 - 3z \\ T_4(z) &= z^4 - 4z^2 + 2 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

O conjunto de Julia Cheio  $K(T_k)$  é o intervalo  $[-2, 2]$ . Desta forma  $K(T_k) = J(T_k)$ , e daí o conjunto de Julia Cheio tem interior vazio (ver referência [2]).

**Exemplo 2.23.** Para o polinômio  $P_0(z) = z^d$  o conjunto de Julia Cheio  $K(P_0)$  é o disco unitário fechado, e o conjunto de Julia  $J(P_0)$  é o círculo unitário.

De fato, como  $P_0(z) = z^d$ , então  $P_0^n(z) = z^{d^n}$ . Assim  $P_0^n(z)$  converge para 0 em  $\{|z| < 1\}$  e converge para  $\infty$  em  $\{|z| > 1\}$ , portanto o Conjunto de Julia Cheio é o conjunto  $\{z : |z| < 1\}$ , e o conjunto de Julia é o círculo unitário  $\{|z| = 1\}$ .

**Definição 2.24.** O Connectedness Locus  $\mathcal{M}_n$  de uma família de polinômios de grau  $n$  consiste de todos os parâmetros  $c$ , tais que o conjunto de Julia de  $P_c(z)$  é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico de  $P_c(z)$  é limitada.

No próximo exemplo apresentamos o Connectedness Locus de algumas famílias de polinômios, novamente utilizamos o software fraqtive.

**Exemplo 2.25.** Considere  $P_c(z) = z^n + c$ , então o Connectedness Locus é o conjunto representado na figura abaixo:

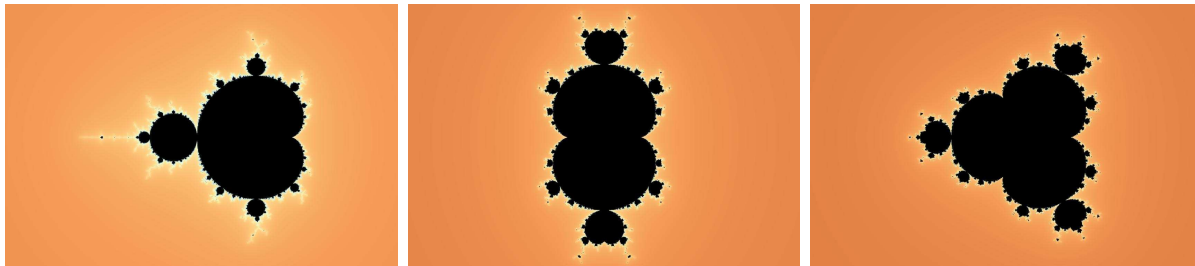


Figura 2.5: Connectedness Locus para  $n = 2, n = 3$  e  $n = 4$ , respectivamente.

## 2.3 Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou

Nesta seção apresentaremos uma série de propriedades dos conjuntos de Julia e de Fatou, o que nos permitirá compreender o comportamento dinâmico de uma aplicação holomorfa. Antes de tratarmos as propriedades do Conjunto de Julia e de Fatou precisamos da seguinte teorema que pode ser encontrado em [11]:

**Teorema 2.26.** Seja  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  uma função racional, onde  $P$  e  $Q$  não possuem raízes comuns. Coloquemos  $k = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ . Valem as seguintes propriedades

- Para todo  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  a equação  $f(z) = z_0$  possui  $k$  soluções, contadas com multiplicidade.
- Existe um subconjunto finito  $C(f) \subset \widehat{\mathbb{C}}$  com no máximo  $2k - 2$  elementos, tal que  $\widehat{\mathbb{C}} - C(f) = \{z_0 : \text{a equação } f(z) = z_0 \text{ possui } k \text{ soluções distintas}\}$ .
- O conjunto  $C(f)$  é vazio se, e somente se,  $k = 1$ .

Assim diremos que  $k$  é o grau de  $f$  e  $C(f)$  é o conjunto de valores críticos de  $f$ , além disso um ponto  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} - C(f)$  é chamado valor regular de  $f$ .

Proseguimos agora com as propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou.

**Teorema 2.27 (Lema da Invariância).** O Conjunto de Julia  $J = J(f)$  de uma aplicação holomorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  é totalmente invariante sobre  $f$ . Isto é,  $z$  pertence a  $J$  se, e somente se,  $f(z)$  pertence a  $J$ . O mesmo vale para o conjunto de Fatou.

*Demonstração.* Primeiramente note que  $f^{-1}(F) \subseteq F$ . Agora suponha que  $z_0 \in F(f)$ , e que  $f^{n_j+1} = f^{n_j} \circ f$  converge uniformemente em uma vizinhança de  $z_0$ . Como  $f$  é analítica

ela aplica uma vizinhança de  $z_0$  em uma vizinhança de  $f(z_0)$ , e além disso  $f^{n_j}$  converge uniformemente em uma vizinhança de  $f(z_0)$ , pois  $z_0 \in F(f)$ . Segue que  $f(z_0) \in F(f)$ , e daí  $f(F) \subseteq F$ , e portanto  $F$  é completamente invariante.  $\square$

**Teorema 2.28 (Lema da Iteração).** *Seja uma aplicação holomorfa  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Para todo  $k > 0$ , o Conjunto de Julia  $J(f^k)$  da  $k$ -ésima iterada coincide com o Conjunto de Julia  $J(f)$ .*

*Demonstração.* O conjunto de Julia de  $f$  coincide com o conjunto de Julia de  $f^k$ , pois se  $f^k$  é normal sobre um conjunto aberto  $U$  então  $f^{nk}$  também é normal sobre  $U$ . Por outro lado se  $f^{nk}$  é normal sobre  $U$  então  $f^k$  também é normal sobre  $U$ , e daí segue o resultado.  $\square$

**Lema 2.29.** *Cada órbita periódica atratora está contida no Conjunto de Fatou de  $f$ . De fato, toda bacia de atração  $\mathcal{A}$  para uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou. Além disso, cada órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia.*

*Demonstração.* Primeiro considere um ponto fixo  $z_0 = f(z_0)$  com multiplicador  $\lambda$ . Se  $|\lambda| > 1$ , então nenhuma sequência de iteradas de  $f$  pode convergir uniformemente próximo de  $z_0$ , como a primeira derivada de  $f^n$  em  $z_0$  é  $\lambda^n$ , temos que  $f$  se aproxima do infinito quando  $n \rightarrow \infty$ .

Se  $|\lambda| < 1$  e escolhendo  $|\lambda| < c < 1$  temos pela expansão de Taylor que

$$|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|,$$

para  $z$  suficientemente próximo de  $z_0$ . Desta forma as sucessivas iteradas de  $f$  restritas a uma vizinhança de  $z_0$  convergem uniformemente para a função constante  $z \rightarrow z_0$ , como um ponto periódico de  $f$  é um ponto fixo de alguma iteração  $f^n$  segue o resultado.  $\square$

**Corolário 2.30.** *As órbitas periódicas repulsoras são densas no Conjunto de Julia.*

**Lema 2.31.** *Cada ponto periódico parabólico pertence ao Conjunto de Julia.*

*Demonstração.* Seja  $w$  um parâmetro local de uniformização com  $w = 0$  correspondendo ao ponto periódico. Assim alguma iterada  $f^n$  corresponde a uma transformação local do  $w$ -plano com uma série de potências da forma  $w \mapsto w + a_q w^q + a_{q+1} w^{q+1} + \dots$ , onde  $q \geq 2, a_q \neq 0$ . Daí a derivada de ordem  $q$  de  $f^{nk}$  em 0 é igual a  $q! k a_q$  que tende a infinito a medida que  $k \rightarrow \infty$ . Pelo Teorema da Convergência Uniforme de Weierstrass, segue que nenhuma subsequência de  $f^{m k_j}$  pode convergir localmente de forma uniforme a medida que  $k_j \rightarrow \infty$ .  $\square$

Antes de seguirmos para a próximo teorema precisamos da definição de grande órbita

**Definição 2.32.** Chamamos grande órbita de um ponto  $z$  sobre  $f : S \rightarrow S$  ao conjunto  $GO(z, f)$  consistindo de todos os pontos  $z' \in S$  cuja órbita eventualmente intercepta a órbita de  $z$ . Assim  $z$  e  $z'$  tem a mesma grande órbita se, e somente se,  $f^m(z) = f^n(z')$  para alguma escolha de  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$ . Um ponto  $z \in S$  será chamado grande órbita finita ou excepcional sobre  $f$  se sua grande órbita  $GO(z, f) \subset S$  é um conjunto finito.

Similarmente a esta definição temos:

**Definição 2.33.** O conjunto dos pontos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  que tem grande órbita finita será denotado por  $\varepsilon(f)$ .

**Teorema 2.34** (Transitividade). *Seja  $z_1$  um ponto arbitrário do conjunto de Julia  $J \subset \widehat{\mathbb{C}}$  e seja  $N$  uma vizinhança arbitrária de  $z_1$ . Então a união  $U$  de imagens futuras  $f^n(N)$  contém todo o conjunto de Julia, e contém todos os pontos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ ; à exceção de, no máximo dois pontos*

*Demonstração.* Primeiramente note que o conjunto complementar  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$  pode conter no máximo dois pontos, pois se  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$  contém mais de dois pontos, usando que  $f(U) \subset U$ , obtemos pelo Teorema de Montel 2.13 que  $U$  deve estar contido no conjunto de Fatou, que é impossível, já que  $z_1 \in U \cap J$ . Novamente usando que  $f(U) \subset U$ , temos que alguma pré-imagem de um ponto  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$  deve pertencer ao conjunto finito  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ . Seguindo com este argumento que alguma pré-imagem de iterada  $z$  é periódica, assim  $z$  é ele mesmo periódico e com grande órbita finita. Assim o conjunto  $\varepsilon(f)$  de grande órbita finita é disjunta de  $J$ , segue que  $J \subset U$ . Finalmente, se  $N$  é pequeno o suficiente então  $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$ , segue que  $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$ .  $\square$

**Lema 2.35.** *Se  $f$  é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então o Conjunto de Julia  $J = J(f)$  é não vazio.*

*Demonstração.* Suponha que  $J = \emptyset$ , então  $f^n$  é uma família normal sobre toda  $\widehat{\mathbb{C}}$ , e então existe uma subsequência  $\{n_j\}$  tal que  $f^{n_j}(z) \rightarrow g(z)$  para alguma função analítica  $g$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  para  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se  $g$  é constante então a imagem de  $f^{n_j}$  está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, o que é impossível, pois  $f^n$  converge em  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se  $g$  é não constante então  $f^{n_j}$  tem o mesmo número de zeros de  $g$ , o que é impossível já que  $f^n$  tem grau  $d^n$ .  $\square$

**Corolário 2.36.** *Se o Conjunto de Julia contém um ponto interior, então ele deve ser igual a toda a esfera de Riemann.*

*Demonstração.* Se  $J$  tem um ponto interior  $z_1$ , então escolhendo uma vizinhança  $N \subset J$  de  $z_1$  a união  $U \subset J$  de imagens futuras de  $N$  é densa, portanto  $\overline{U} = \widehat{\mathbb{C}}$ , e como  $J$  é fechado segue que  $J = \widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Corolário 2.37.** *Se  $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  é a bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, então o bordo topológico  $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$  é igual a todo o Conjunto de Julia. Cada componente do Conjunto de Fatou  $F$  ou coincide com alguma componente conexa da bacia  $\mathcal{A}$  ou é disjunta de  $\mathcal{A}$ .*

*Demonstração.* Se  $N$  é alguma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia, então  $f^n(N)$  intercepta  $\mathcal{A}$ , e daí o próprio  $N$  intercepta  $\mathcal{A}$ , e assim temos que  $J \subset \overline{\mathcal{A}}$ . Mas  $J$  é disjuncto de  $\mathcal{A}$  então  $J \subset \partial\mathcal{A}$ . Por outro lado, se  $N$  é uma vizinhança de um ponto de  $\partial\mathcal{A}$  então alguma iterada  $f^n|_N$  deve ter uma descontinuidade entre  $\mathcal{A}$  e  $\partial\mathcal{A}$ , e assim  $\partial\mathcal{A} \subset J$ . Finalmente, note que alguma componente conexa do conjunto de Fatou intercepta  $\mathcal{A}$ , uma vez que não pode interceptar o bordo de  $\mathcal{A}$ , deve coincidir com alguma componente de  $\mathcal{A}$ . Portanto segue o resultado.  $\square$

**Corolário 2.38.** *Se  $z_0$  é um algum ponto do conjunto de Julia  $J = J(f)$ , então o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{C}; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\}$$

*é denso em  $J(f)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente note que  $z_0 \notin \varepsilon(f)$ , pois  $z_0 \in J(f)$ . Pelo teorema 2.34 temos que se  $z_1 \in J(f)$  então ele pode ser aproximado por fechados arbitrários que contém  $z$  que pertence ao conjunto formado pelas órbitas passadas de  $z_0$ .  $\square$

**Corolário 2.39.** *Se  $f$  é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então  $J(f)$  não tem pontos isolados.*

*Demonstração.* Seja  $z_0 \in J$  e  $U$  uma vizinhança aberta de  $z_0$ . Assumiremos que  $z_0$  não é periódico e escolhermos  $z_1$  com  $f(z_1) = z_0$ , então  $f^n(z_0) \neq z_1$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Desde que  $z_1 \in J$ , as iteradas passadas de  $z_1$  são densas em  $J$ , então existe um  $\xi \in U$  com  $f^m(\xi) = z_1$ , assim  $\xi \in J \cap U$  e  $\xi \neq z_0$ , assim  $z_0$  não é isolado.

Agora suponha  $f^n(z_0) = z_0$  para algum  $n$  minimal. Se  $z_0$  é a única solução de  $f^n(z_0) = z_0$  então  $z_0$  deveria ser um ponto fixo superatrator de  $f^n$  contradizendo que  $z_0 \in J$ . Portanto existe  $z_1 \neq z_0$  com  $f^n(z_1) = z_0$ , além disso  $f^j(z_0) \neq z_1$  para  $0 \leq j \leq n$ , pois caso contrário isto asseguraria que  $0 \leq j \leq n$  e daí  $f^j(z_0) = f^{n+j}(z_0) = f^n(z_1) = z_0$  contradizendo a minimalidade de  $n$ . Assim como anteriormente  $z_1$  deveria ter uma pré-imagem em  $U \cap J$  que não pode ser  $z_0$ .  $\square$

**Corolário 2.40.** *Para toda aplicação racional de grau 2 ou mais, o Conjunto de Julia  $J$  ou é conexo ou tem uma quantidade não enumerável de componentes conexas.*

**Definição 2.41.** *Um espaço topológico  $X$  é de Baire se cada intersecção enumerável de abertos densos de  $X$  é também densa. Será conveniente dizer que uma propriedade de pontos no espaço de Baire  $X$  é genérica para  $x$ , se é válida para todos os pontos de alguma intersecção enumerável de subconjuntos abertos densos de  $X$ .*

**Teorema 2.42.** *Para uma escolha genérica de um ponto  $z \in J = J(f)$ , a órbita futura*

$$\{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

*é densa em  $J$ .*

*Demonstração.* Para cada  $j > 0$  podemos cobrir  $J$  por um número finito de conjuntos abertos  $N_{jk}$  de diâmetro menor do que  $\frac{1}{j}$  usando a métrica esférica. Para cada  $N_{jk}$  seja  $U_{jk}$  a união das pré-imagens de iteradas de  $f^{-n}(N_{jk})$ . Segue do corolário 2.38 que o fechado  $\overline{U_{jk}} \cap J$  é igual a todo o conjunto de Julia, em outras palavras,  $U_{jk} \cap J$  é um subconjunto denso do conjunto de Julia.

Agora se  $z$  pertence a interseção desses conjuntos, então a órbita de  $z$  intercepta cada  $N_{jk}$  e por isso é denso em  $J$ .  $\square$

**Teorema 2.43.** *Seja  $f$  uma aplicação racional de grau maior ou igual 2, e seja  $E$  um subconjunto compacto da esfera de Riemann com a propriedade que para todo  $z \in F(f)$ , a sequência  $\{f^n(z) : n \geq 1\}$  não acumula em nenhum ponto de  $E$ . Então dado algum conjunto  $U$  que contém  $J(f)$  temos que  $f^{-n}(E) \subset U$  para  $n$  suficientemente grande.*

*Demonstração.* Suponhamos que a conclusão seja falsa, ou seja, existe alguma vizinhança aberta de  $U$  de  $J$ , e para  $n$  em alguma sequência  $\{n_1, n_2, \dots\}$  os pontos  $z_n \in f^{-n}(E)$  mas não pertence a  $U$ . Sem perda de generalidade, supomos que  $z_n \rightarrow w$ , como  $U$  é aberto e  $w \notin U$ , temos que  $w \in F$  pois  $J \subset U$ .

Agora seja  $\epsilon > 0$  positivo, existe  $\delta > 0$  tal que se  $|z_n - w| < \delta$  implica que  $|f^{n_1}(z_n) - f^{n_1}(w)| < \epsilon$  e como  $f^{n_1}(z_n) \in E$ , assim a mostramos que  $f^{n_1}(w)$  se acumula em  $E$  contradizendo a hipótese.  $\square$

## 2.4 As Coordenadas de Böttcher no Infinito

Agora estudaremos uma forma mais fácil de trabalharmos com o conjunto de Julia Cheio, para isso faremos uso do teorema de Böttcher.

Daremos primeiramente a versão geral do Teorema de Böttcher e depois analisaremos o caso especial para o conjunto de Julia Cheio.

**Teorema 2.44** (Teorema de Böttcher). *Suponha  $f$  um polinômio mônico, existe uma mudança de coordenadas holomorfa  $w = \phi(z)$ , com  $\phi(0) = 0$ , que conjuga  $f$  com a aplicação  $w \mapsto w^n$  em uma vizinhança de zero. Além disso  $\phi$  é única, a menos de multiplicação por uma  $(n - 1)$ -raiz da unidade.*

Dessa forma  $f$  é conjugada a uma aplicação  $\phi$ , na vizinhança de um ponto fixo, ou seja:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^n \quad \text{com } n \geq 2.$$

**Demonstração. Prova da Existência:** Primeiramente escolhamos uma solução  $c$  da equação  $c^{n-1} = a_n$ , então a aplicação conjugação  $cf\left(\frac{z}{c}\right)$  têm coeficiente líder, coeficiente de maior grau, igual a  $+1$ . Assim assumimos, sem perda de generalidade, que tal aplicação tem a forma  $f(z) = z^n(1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 \cdots)$ , ou de forma resumida

$$f(z) = z^n(1 + \eta(z)) \quad \text{com} \quad \eta(z) = b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 \cdots$$

Escolhemos um raio  $0 < r < \frac{1}{2}$  que seja pequeno o suficiente tal que  $\eta(z) < \frac{1}{2}$  sobre o disco  $D_r$  de raio  $r$ . Então  $f$  aplica o disco sobre si mesmo, com  $|f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n \leq \frac{3}{4}|z|$  e com  $f(z) \neq 0$  para  $D_r \setminus \{0\}$ . A  $k$ -ésima iterada  $f^k$  também aplica  $D_r$  sobre si mesmo, e segue indutivamente que ela ( $f^k$ ) tem a forma  $f^k(z) = z^{n^k}(1 + n^{k-1}b_1z + \text{(termos de grau menor)})$ .

A idéia da prova a seguinte, tome

$$\phi_k(z) = \sqrt[n^k]{f^k(z)} = z^{n^k}(1 + n^{k-1}b_1z + \text{(termos de grau menor)})^{\frac{1}{n^k}} = z \left(1 + \frac{b_1}{z} + \cdots\right),$$

onde a expressão da direita provém de uma escolha explícita da  $n^k$ -raiz da unidade. Assim  $\phi_k(f(z)) = \phi_{k+1}(z)^n$ . Mostraremos que a função  $\phi_k$  converge uniformemente para a função limite  $\phi : D_r \rightarrow D$ . Para provarmos a convergência façamos a substituição  $z = e^Z$ , onde  $Z$  esta definido em relação ao semi-plano esquerdo de  $H_r$ , definido pela desigualdade  $\text{Re}(Z) < \log r$ . Então a aplicação  $f$  do disco  $D_r$  sobre si mesmo corresponde a uma aplicação  $F(Z) = \log f(e^Z)$  de  $H_r$  sobre si mesmo. Tomando  $\eta = \eta(e^Z) = b_1e^Z + b_2e^{2Z} + \cdots$ , com  $|\eta| < \frac{1}{2}$ , temos que podemos escrever

$$\begin{aligned} F(Z) &= \log(e^{nZ}(1 + \eta)) = nZ + \log(1 + \eta) \\ &= nZ + \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} - + \cdots\right) \end{aligned}$$

onde a expressão anterior provém de uma escolha explícita do ramo do logaritmo que estamos usando.

Note que  $F : H_r \rightarrow H_r$  é uma função holomorfa bem definida, assim de  $|\eta| < \frac{1}{2}$  temos

$$|F(Z) - nZ| = |\log(1 + \eta)| < \log 2 < 1 \quad (2.1)$$

para todo  $Z$  neste semi-plano. Similarmente a aplicação  $\phi_k(z) = f^n(z)^{\frac{1}{n^k}}$  para  $|z| < r$  corresponde a uma aplicação

$$\Phi_k(Z) = \log \phi_k(e^Z) = \frac{F^k(Z)}{n^k},$$

que é definida e holomorfo sobre  $H_r$ . Por 2.1, temos

$$|\Phi_{k+1}(Z) - \Phi_k(Z)| = \frac{|F^{k+1}(Z) - nF^k(Z)|}{n^{k+1}} < \frac{1}{n^{k+1}}.$$

Assim a aplicação exponencial do semi-plano sobre  $D$  reduz distâncias, e segue que

$$|\phi_{k+1}(Z) - \phi_k(Z)| < \frac{1}{n^{k+1}}$$

para  $|z| < r$ . Portanto, quando  $r \rightarrow \infty$  a sequência de aplicações holomorfas  $z \mapsto \phi_k(z)$ , sobre o disco  $|z| < r$ , converge uniformemente para a aplicação holomorfa limite  $\phi(z)$ , e satisfaz a identidade  $\phi(f(z)) = (\phi(z))^n$ .

**Prova da Unicidade:** Neste caso é suficiente estudar o caso especial  $f(z) = z^n$ . Se a aplicação da forma  $\phi(z) = c_1 z + c_k z^k +$  (termos de menor grau) conjuga  $z \mapsto z^n$  sobre si mesmo, então a série

$$\phi(z) = c_1 z^n + c_k z^{nk} + \dots$$

deve ser igual a

$$(\phi(z))^n = c_1^n z^n + n c_1^{n-1} c_k z^{n+k-1} + \dots,$$

com  $nk > n + k - 1$ . Comparando os coeficientes, encontramos  $c_1^{n-1} = 1$  e que os coeficientes restantes se anulam, o que prova o resultado. □

Agora apresentaremos a versão do teorema de Böttcher para o conjunto de Julia cheio, tal resultado será de fundamental importância nos resultados seguintes.

**Teorema 2.45.** *Para toda função polinomial  $P$  de grau ao menos 2 o conjunto de Julia Cheio  $K \subset \mathbb{C}$  é compacto, com complemento conexo, com bordo topológico  $\partial K$  igual ao conjunto de Julia  $J = J(P)$  e com interior igual a união de todas as componentes limitadas  $U$  do conjunto de Fatou  $F(P)$ . Assim  $K$  é igual a união de todas as tais  $U$  juntamente com  $J$ . Sendo alguma destas componentes conexas  $U$  necessariamente simplesmente conexa.*

*Demonstração.* Note que  $\frac{P(z)}{z^d}$  converge para  $a_d$  quando  $|z| \rightarrow \infty$  ( $P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 + a_0$ ). Assumindo convenientemente que  $a_d = 1$  podemos escolher uma constante  $r_0 \geq 2$  tal que

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{z^{d-i}} = \left| \frac{P(z)}{z^d} - 1 \right| < \frac{1}{2} \quad \text{para } |z| > r_0$$

e segue que

$$|P(z)| > \frac{|z^d|}{2} > 2|z| \quad \text{para } |z| > r_0.$$

Segue daí que algum  $z$ , com  $|z| > r_0$  pertence a  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\infty)$  do ponto no infinito. Assim podemos identificar  $K$  com o complemento  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}$ . Assim  $K$  é compacto, e segue pelo corolário 2.37 que  $\partial K = \partial \mathcal{A}$  é igual ao conjunto de Julia de  $P$ .

Mostremos que  $\mathcal{A}$  é conexo. Seja  $U$  uma componente conexa limitada do conjunto de Fatou  $\mathbb{C} \setminus J$ , então  $|P^d(z)| \leq r_0$  para cada  $z \in U$ , isto pelo Princípio do Módulo Máximo, desta forma cada componente limitada de  $\mathbb{C} \setminus J$  está contida no conjunto de Julia Cheio  $K$ , e a única componente ilimitada pode ser identificada com  $\mathbb{C} \setminus K = \mathbb{C} \cap \mathcal{A}(\infty)$ .

Similarmente se  $\Gamma$  é uma curva fechada simples situada em uma componente limitada de  $U$ , e se  $V$  é a componente limitada de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  então segue do princípio do módulo máximo que  $V \subset K$ . Em particular,  $V$  não pode conter algum ponto de  $J = \partial K$ , pelo Teorema de Montel, então segue que  $V \subset U$ , o que mostra que  $U$  é simplesmente conexa.  $\square$

**Teorema 2.46** (Teorema de Böttcher Conjunto de Julia Cheio). *Seja  $P$  um polinômio de grau  $d \geq 2$ . Se o conjunto de Julia Cheio  $K = K(P)$  contém todos os pontos críticos finitos de  $P$  então ambos  $K$  e  $J = \partial K$  são conexos, e além disso o complemento de  $K$  é conformalmente isomorfo ao exterior do disco unitário  $\overline{D}$  por um isomorfismo*

$$\widehat{\phi} : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

que conjuga  $P$  em  $\mathbb{C} \setminus K$  com a  $d$ -ésima série de potências  $\omega \rightarrow \omega^d$ . Por outro lado, se ao menos um ponto crítico de  $P$  pertence a  $\mathbb{C} \setminus K$  então ambos  $K$  e  $J$  tem incontáveis componentes conexas.

*Demonstração.* A prova será baseada no seguinte: para estudar o comportamento de  $P$  próximo do infinito fazemos a substituição usual  $\xi = \frac{1}{z}$  e consideramos a função racional  $F(\xi) = \frac{1}{P(\frac{1}{z})}$ . Novamente consideramos que  $P$  é mônico. Da igualdade assintótica  $P(z) \sim z^d$  quando  $z \rightarrow \infty$  segue que  $F(\xi) = \xi^d$  quando  $\xi \rightarrow 0$ . Existe uma associação com a aplicação de Böttcher

$$\phi(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(\xi)^{\frac{1}{d^k}} \in D$$

Assim  $\widehat{\phi}$  aplica alguma vizinhança de infinito biholomorficamente sobre o infinito, com  $\widehat{\phi} \sim z$  quando  $|z| \rightarrow \infty$ , e  $\widehat{\phi}$  conjuga a aplicação polinomial de grau  $d$  com a  $d$ -ésima série de potências, de forma que  $\widehat{\phi}(f(z)) = \widehat{\phi}(z)^d$ .

De fato, suponha primeiro que não existe outro ponto crítico além do infinito na bacia de atração  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\infty)$ , então a aplicação de Böttcher se estende para um isomorfismo conforme

$$\mathbb{C} \setminus K \cong \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

Seja  $\widehat{\psi}$  a inversa de  $\widehat{\phi}$ . Agora cada anel

$$A_{1+\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$$

aplica sobre  $\widehat{\psi}(A_{1+\varepsilon}) \subset \mathbb{C} \setminus K$  o fecho  $\overline{\widehat{\psi}(A_{1+\varepsilon})}$  é compacto conexo que contém o conjunto de Julia  $J = \partial A$ , segue que a interseção

$$J = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\widehat{\psi}(A_{1+\varepsilon})}$$

é também conexo, e segue do Teorema 2.45 que  $K$  é conexo. Agora suponha que há ao menos um ponto crítico em  $\mathbb{C} \setminus K$ , então a conclusão do lema anterior se traduz no seguinte: existe um menor número  $r > 1$  tal que a inversa de  $\widehat{\phi}$  próxima do infinito se estende a um isomorfismo

$$\widehat{\psi} : \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r \rightarrow \cong U \subset \mathbb{C} \setminus K$$

Além disso, o bordo  $\partial U$  do conjunto aberto  $U = \widehat{\psi}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r)$  é um subconjunto conexo em  $\mathbb{C} \setminus K$  que contém ao menos um ponto crítico de  $P$ .

Mostraremos que o fecho  $\overline{U}$  separa o plano em dois ou mais conjuntos abertos limitados, com cada contendo incontáveis pontos do conjunto de Julia. Seja  $c$  um ponto crítico em  $\partial U$ , então o valor crítico correspondente  $v = P(c)$  pertence a  $U$ , com  $|\widehat{\phi}(v)| = r^d > r$ . Considere o raio infinito  $R \subset \mathbb{C} \setminus D_r$  consistindo de os produtos  $t\widehat{\phi}(v)$  com  $t \geq 1$ . A imagem  $R' = \widehat{\phi}(R) \subset U$  é chamada raio externo do ponto  $v$ , associado com o conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C}$ .

Agora consideremos todas as imagens  $P^{-1}(R') \subset \overline{U}$ , a interseção  $U \cap P^{-1}(R')$  consiste de  $d$  raios externos distintos, correspondendo a  $d$  componentes distintas do conjunto  $\sqrt[d]{R} \subset \mathbb{C} \setminus D_r$ . Cada um desses  $d$  raios externos  $R'_j$  é alguma solução  $z$  da equação  $f(z) = v$ . Mas esta equação tem ao menos duas soluções no ponto crítico  $c$ , então ao menos dois destes raios externos  $R'_1$  e  $R'_2$  serão levados em  $c$ . Como a união  $R'_1 \cup R'_2 \subset \overline{U}$  dividimos o plano em dois conjuntos abertos conexos, que chamaremos  $V_0$  e  $V_1$ .

Note agora que cada uma das imagens  $P(V_0)$  e  $P(V_1)$  contém todos os pontos do plano complexo, exceto possivelmente os pontos de  $R'$ . De fato, cada  $P(V_k)$  é um conjunto aberto. Se  $\widehat{z} \in \mathbb{C}$  é um ponto limite de  $P(V_k)$ , então podemos escolher uma sequência de pontos  $z_j \in V_k$  tal que as imagens  $P(z_j)$  convergem para  $\widehat{z}$ . O  $z_j$  certamente deve ser limite de uma sequência, então podemos escolher uma subseqüência que converge para algum ponto  $z' \in \mathbb{C}$ . Agora  $z' \notin V_k$  desde que  $P(z') = \widehat{z}$  é um ponto limite e  $P$  uma aplicação aberta, assim segue que  $z' \in \partial V_k = R'_1 \cup R'_2$  e  $\widehat{z} \in R'$ . Se  $\mathbb{C} \setminus R'$  é conexo implica que

$$P(V_k) \supset \mathbb{C} \setminus R' \supset K$$

Agora sejam  $J_0 = J \cap V_0$  e  $J_1 = J \cap V_1$ . Assim segue que

$$P(J_0) = P(J_1) = J$$

e note que  $J_0$  e  $J_1$  são conjuntos disjuntos compactos com  $J_0 \cup J_1 = J$ . Similarmente podemos dividir cada  $J_k$  em dois conjuntos disjuntos  $J_{k_0} = J_k \cap P^{-1}(J_0)$  e  $J_{k_1} = J_k \cap P^{-1}(J_1)$  com  $P(J_{kl}) = J_l$ , continuando indutivamente, podemos dividir  $J$  em  $2^{q+1}$  conjuntos compactos disjuntos

$$J_{k_0 \dots k_q} = J_{k_0} \cap P^{-1}(J_{k_1}) \cap \dots \cap P^q(J_{k_q})$$

com  $P(J_{k_0 \dots k_q}) = J_{k_1 \dots k_q}$ . Similarmente para alguma sequência infinita  $k_0, k_1, k_2, \dots$  de zeros e uns, seja  $J_{k_0 k_1 k_2 \dots}$  a interseção da sequência

$$J_{k_0} \supset J_{k_0 k_1} \supset J_{k_0 k_1 k_2} \supset \dots$$

Cada tal interseção é compacta e não vazia. Seguindo este caminho obtemos incontáveis subconjuntos não vazios que a união é o conjunto  $J$ . Cada componente conexa de  $J$  deve estar contida exatamente em um desses conjuntos, então  $J$  tem infinitas componentes conexas. A prova para o conjunto de Julia Cheio é análoga.  $\square$

**Observação 2.47.** *Da proposição anterior vemos que se o Conjunto de Julia Cheio é conexo, a inversa de  $\hat{\phi}(z) = \phi_p(z)$  denotada por  $\psi_p$  é uma função meromorfa univalente definida sobre  $D$  e tem a forma*

$$\psi_p(z) = z + \frac{b_0}{z^0} + \frac{b_1}{z^1} + \frac{b_2}{z^2} + \dots, \text{ para } |z| > 1.$$

## 2.4.1 Coeficientes das Funções de Böttcher

O resultado seguinte nos mostra uma forma de relacionar os coeficientes da inversa da função meromorfa obtida pelo teorema de Böttcher, e os coeficientes de um polinômio que tem conjunto de Julia Cheio conexo.

**Teorema 2.48.** *Seja  $P$  um polinômio mônico de grau  $d$  com conjunto de Julia Cheio conexo, para  $|z| > 1$  seja*

$$\psi_P(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

a função de Böttcher de  $P$ , e

$$P(\psi_P(z)) = \sum_{k=-d}^{\infty} c_k z^{-k}$$

Então

$$1 + \sum_{k=-d}^{\infty} k |c_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2$$

*Demonstração.* Seja  $C_r$  a imagem de  $\psi_p(z)$  do círculo  $|z| = r > 1$ , e  $E_r$  o interior de  $C_r$ .

Então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{P(\psi_P(z))} P'(\psi_P(z)) \psi'_P(z) dz &\stackrel{1}{=} \frac{1}{2i} \int_{C_r} \overline{P(w)} P'(w) dw \\
&\stackrel{2}{=} \frac{1}{2i} \int \int_{E_r} |P'(w)|^2 du dv \\
&\stackrel{3}{=} -\frac{1}{2i} \int_0^r \int_0^{2\pi} \sum_{k=-d}^{\infty} k |c_k|^2 |z^{2k}| \cdot \frac{|z|}{|z|^2} du dv \\
&= -\pi \sum_{k=-d}^{\infty} k |c_k|^2 r^{-2k}.
\end{aligned}$$

Na expressão acima usamos,

1. a substituição  $w = \psi_P(z)$ , daí  $dw = \psi'_P(z) dz$ ,
2. o Corolário 1.42 da Fórmula Analítica de Green do capítulo 1, e
3. as igualdades

$$|P'(w)| = \overline{P(w)} P'(w) = - \sum_{k=-d}^{\infty} k |c_k|^2 |z^{-2k}| z^{-1} = - \sum_{k=-d}^{\infty} k |c_k|^2 |z^{2k}| \cdot \frac{|z|}{|z|^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{P(\psi_P(z))} P'(\psi_P(z)) \psi'_P(z) dz &= \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{\psi_P(z^d)} \psi'_P(z^d) dz^{d-1} dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( r^d e^{-itd} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n} r^{-nd} e^{itnd} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( r^d e^{itd} - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-nd} e^{-itnd} \right) dt \\
&= \pi \left( r^{2d} - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2nd} \right).
\end{aligned}$$

Acima usamos que  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ , com  $\gamma \in [0, 2\pi]$ , pois  $z$  pode ser escrito como  $z = r e^{it}$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ .

Fazendo  $r \rightarrow 1$ , segue a demonstração. □

**Exemplo 2.49.** *Seja  $P(z) = z^2 + c$ , com  $c \in \mathbb{C}$ . Determinemos os coeficientes da aplicação de Böttcher  $\psi_P(z)$ , para isso utilizaremos o teorema 2.48, assim  $(\psi_P(z))^2 + c =$*

$\psi_P(z^2)$ , e com isso mostraremos que os coeficientes da função meromorfa univalente  $\psi_P(z)$  são

$$b_0 = 0, \quad b_{2n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Além disso se supormos que  $c \in M$ , onde  $M$  é o Connectedness Locus de  $P$ , temos

$$b_1 = -\frac{c}{2}, \quad b_3 = -\frac{c}{4} - \frac{c^2}{8}, \quad \dots$$

De fato, por um lado temos que

$$\psi_P(z^2) = z^2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-2n}, \quad (2.2)$$

por outro lado temos que

$$\begin{aligned} (\psi_P(z))^2 + c &= \left( z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right)^2 + c \\ &= (z + b_0)^2 + 2(z + b_0) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right)^2 + c \\ &= z^2 + 2b_0 z + b_0^2 + 2(z + b_0) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right)^2 + c \end{aligned} \quad (2.3)$$

Igualando os termos  $z$  das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$0 = 2b_0 \Rightarrow b_0 = 0$$

Igualando os termos constantes das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$b_0 = b_0^2 + c + 2b_1 \Rightarrow b_1 = -\frac{c}{2}$$

Igualando os termos que têm potência  $z^{-1}$  das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$0 = 2b_2 + 2b_0 \Rightarrow b_2 = 0$$

Seguindo de maneira similar temos que todos os  $b_i$ , com  $i$  par se anulam, pois todos as potências  $z^{-j}$  se anulam na expressão de  $\psi_P(z^2)$ , e na expressão de  $(\psi_P(z))^2 + c$  dependem de  $b_0 = 0$ .

Igualando os termos que têm potência  $z^{-2}$  das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$b_1 = 2b_3 + 2b_0 b_2 + b_1^2 \Rightarrow b_3 = -\frac{c}{4} - \frac{c^2}{8}$$

Igualando os termos que têm potência  $z^{-4}$  das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$b_2 = 2b_5 + 2b_0b_4 + b_2^2 + b_1b_3 \Rightarrow b_5 = -\frac{b_1b_3}{2} \Rightarrow b_5 = -\frac{c^2}{8} - \frac{c^3}{16}$$

e assim por diante.

**Exemplo 2.50.** Mais geralmente se  $P(z) = z^d + c$ , com  $c \in \mathbb{C}$ , os coeficientes da função meromorfa univalente  $\psi_P(z)$  são

$$b_0 = b_2 = \dots b_{d-2} = 0$$

e

$$b_{nd} = b_{nd+1} = \dots b_{(n+1)d+1} = 0, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Se supormos que  $c \in M_d$ , onde  $M_d$  é o Connectedness Locus, temos

$$b_{d-1} = -\frac{c}{d}, b_{2d-1} = -\frac{c}{d^2} - \frac{d-1}{2d^2}c^2, \dots$$

**Teorema 2.51.** Seja  $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$  um polinômio mônico de grau  $d \geq 2$  com conjunto de Julia Cheio conexo. Seja

$$\psi_P(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

dada sobre  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Então

$$b_0 = -\frac{a_{d-1}}{d}, e b_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{d-1}{d^2} \right) a_{d-1}^2 - \frac{a_{d-2}}{d} \dots$$

*Demonstração.* Ver referência [19]. □

**Observação 2.52.** Se, em particular,  $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$  é mônico e centrado então  $b_0 = 0$ .

## 2.5 Polinômios de Faber e Coeficientes de Garabedian-Schiffer

Os resultados desta subseção podem ser consultados na referência [14].

**Definição 2.53.** Seja  $\Sigma$  a família de funções  $g(z) = z + b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots$  que são univalentes para  $|z| > 1$ . Seja  $E = E(g)$  o complemento compacto da imagem de  $\{g(z) : |z| > 1\}$ . Os coeficientes de Faber  $b_{kl}(l, k = 1, 2, \dots)$  relativos ao polinômio  $g$ , são

definidos por

$$\log \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} \xi^{-k} z^{-l} \quad |z| > 1, \quad |\xi| > 1$$

e satisfazem  $b_{kl} = b_{lk}$ ,  $b_{k1} = b_k$ . Os polinômios de Faber  $\phi_k(w) = w^k + \dots$  são definidos por

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi) - w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_k(w)}{\xi^{k+1}}$$

e satisfazem

$$\phi_k(g(z)) = z^k + k \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl} z^{-l} \quad |z| > 1$$

Agora seja

$$h(w) = \prod_{p=1}^n (w - v_p)^{\alpha_p} \quad (\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1)$$

com  $v_p \in E$ , definimos os polinômios  $\Psi_k(w) = w^{k-1} + \dots$  por

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi) - w} \frac{1}{h(g(w))} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_k(w)}{\xi^{k+1}} \quad (2.4)$$

de maneira similar aos polinômios de Faber podemos escrever

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi) - g(z)} \frac{h(g(z))}{h(g(w))} - \frac{z}{\xi(\xi - z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k c_{kl} z^{-l} \xi^{-k-1} \quad (2.5)$$

pois as funções são ambas analíticas quando  $\{1 < |z| \leq \infty, 1 < |\xi| \leq \infty\}$  e tem dois zeros quando  $\xi = \infty$ . Daí podemos escrever

$$h(g(z)) \Psi_k(g(z)) = z^k + k \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} z^{-l} \quad |z| > 1$$

Os números  $c_{kl} (k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots)$  não precisam ser simétricos em  $k$  e  $l$ . No caso  $n = 1$  encontramos que

$$\Psi_k(w) = \frac{\phi_k(w) - \phi_k(v_1)}{w - v_1}, \quad c_{kl} = b_{kl}$$

O que generaliza os coeficientes de Faber. Escolhendo  $h(w) = \sqrt{(w-u)(w-v)}$ ,  $u, v \in$

$E$ , definamos

$$\Psi_0(w) = 2\log(\sqrt{w-u} + \sqrt{w-v}) - \log(v-u)$$

Normalizando por  $\Psi_0(v) = 0$  podemos escrever

$$\Psi_0(g(z)) = \log z + \sum_{l=0}^{\infty} c_{0l} z^{-l}$$

E daí integrando 2.5 em relação a  $\xi$  obtemos

$$\begin{aligned} \log \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} &+ \log[(v-u)\xi z] \\ &- 2\log[\sqrt{(g(\xi)-v)(g(z)-u)} + \sqrt{(g(z)-v)(g(\xi)-u)}] \\ &= \log \frac{g(z) - g(\xi)}{(z^{-1} - \xi^{-1})(g(z) + g(\xi))} = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \xi^{-k} z^{-l} \end{aligned}$$

Agora os números  $c_{kl}$  são definidos para  $k, l = 0, 1, 2, \dots$  e que satisfazem  $c_{kl} = c_{lk}$  são chamados *coeficientes de Garabedian-Schiffer*.

## Capítulo 3

# Aspectos Geométricos e a Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia

Neste capítulo nosso objeto de estudo serão as propriedades geométricas do conjunto de Julia Cheio, para isso usaremos principalmente a referência [19]. Para termos resultados mais gerais primeiramente definiremos polinômio centrado, e mostraremos que qualquer polinômio pode ser conjugado a um polinômio centrado. Portanto obteremos nossos resultados para polinômios centrados e estes serão válidos para qualquer polinômio mediante a uma conjugação.

**Definição 3.1.** *Um polinômio é dito centrado se a soma de suas raízes se anulam.*

**Observação 3.2.** *Pelas relações de Girard temos que o polinômio  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$  é centrado, se é somente se, o termo  $a_{n-1} = 0$ .*

*De fato, as relações de Girard dizem que se  $r_1, r_2, \dots, r_n$  são as raízes de  $P(z)$  então  $a_{n-1} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{a_n}$ , daí como  $P(z)$  é centrado segue que  $a_{n-1} = 0$ .*

*Por outro lado, se  $a_{n-1} = 0$ , das relações de Girard, temos que  $0 = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{a_n} \Rightarrow r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0$ , ou seja,  $P(z)$  é um polinômio centrado.*

**Lema 3.3.** *Dado um polinômio complexo  $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ,  $a_m \neq 0$  existe um polinômio centrado  $g(z) = b_m z^m + b_{m-2} z^{m-2} + \dots + b_1 z + b_0$ ,  $b_m \neq 0$  e uma translação  $h(z) = z + c$ , com  $c = \frac{a_{m-1}}{ma_m}$  de forma que  $f$  e  $g$  são conjugados.*

*Demonstração.* De fato, usando o binômio de Newton para desenvolvermos as potências de  $(z - c)$ , e colocando  $h^{-1}(z) = z - c$  temos

$$\begin{aligned}
hfh^{-1}(z) &= hf(z-c) \\
&= h(a_m(z-c)^m + a_{m-1}(z-c)^{m-1} + \dots + a_1(z-c) + a_0) \\
&= a_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{m-k} (-c)^k + a_{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} z^{m-1-k} (-c)^k + \dots + a_1(z-c) + a_0 + c \\
&= a_m z^m - \frac{m!a_m}{1!(m-1)!} z^{m-1} c + \\
&+ a_m \left[ \frac{m!}{2!(m-2)!} z^{m-2} c^2 + \dots + \frac{m!}{(m-1)!1!} z(-c)^{m-1} + \frac{m!}{m!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ a_{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} z^{m-1} + a_{m-1} \left[ -\frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} z^{m-2} c + \dots + \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ \dots + a_1 z + c(1-a_1) + a_0 \\
&= a_m z^m + (-ma_m c + a_{m-1}) z^{m-1} + \\
&+ a_m \left[ \frac{m!}{2!(m-2)!} z^{m-2} c^2 + \dots + \frac{m!}{(m-1)!1!} z(-c)^{m-1} + \frac{m!}{m!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ a_{m-1} \left[ -\frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} z^{m-2} c + \dots + \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ \dots + a_1 z + c(1-a_1) + a_0
\end{aligned}$$

Daí basta tomar  $b_m = a_m, \dots, c = \frac{a_{m-1}}{ma_m}$ , daí temos que  $g(z) = a_m z^m + \dots + \frac{a_{m-1}}{ma_m}$  é conjugado a  $f(z)$  por  $h(z)$ .  $\square$

**Observação 3.4.** Dado uma aplicação racional  $R$  e uma aplicação de Möbius  $h$ , então

$$d(J(hRh^{-1})) = d(h(J(R))) = d(J(R)),$$

daí a dimensão de Hausdorff de  $R$  e  $h$  coincidem, portanto a conjugação preserva resultados referentes a medida de Hausdorff (ver [2] pag. 248).

A observação anterior é crucial para o desenvolvimento deste capítulo, pois todos os resultados aqui obtidos exigem que os polinômios sejam centrados, mas com esta observação temos que os resultados são válidos para qualquer polinômio complexo.

### 3.1 Aspectos Geométricos do Conjunto de Julia Cheio

Dados dois polinômios e seus conjuntos de Julia Cheios surge naturalmente a questão: se existe uma relação de inclusão entre seus conjuntos de Julia Cheio, existe alguma relação entre tais polinômios? Para responder esta questão temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.5.** *Suponha que  $P_1$  e  $P_2$  são polinômios mônicos com grau  $d_1 \geq 2$  e  $d_2 \geq 2$ , respectivamente, e  $K(P_1) \subset K(P_2)$  então  $d_2 \leq d_1$ .*

*Demonstração.* Suponha  $A_1 = \widehat{\mathbb{C}} - K(P_1)$  e  $A_2 = \widehat{\mathbb{C}} - K(P_2)$  os domínios de  $\varphi_{P_1}$  e  $\varphi_{P_2}$  dados pelo teorema de Böttcher, daí:

$$\varphi_{P_1}(P_1(z)) = (\varphi_{P_1}(z))^{d_1}; \quad \varphi_{P_2}(P_2(z)) = (\varphi_{P_2}(z))^{d_2}$$

Portanto

$$d_1 = \frac{\log|\varphi_{P_1}(P_1(z))|}{\log|\varphi_{P_1}(z)|}; \quad d_2 = \frac{\log|\varphi_{P_2}(P_2(z))|}{\log|\varphi_{P_2}(z)|}$$

Por  $K(P_1) \subset K(P_2)$  e

$$\frac{\varphi_{P_1}(z)}{z} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \infty); \quad \frac{\varphi_{P_2}(z)}{z} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \infty),$$

pois  $\varphi_{P_1}(z)$  e  $z$  tendem a infinito quando  $z \rightarrow \infty$ , o mesmo acontece com  $\varphi_{P_2}(z)$  e  $z$ .

Consequimos que:

$$\frac{\varphi_{P_1}(z)}{\varphi_{P_2}(z)} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \infty)$$

Daí  $\varphi_{P_1}(z) \sim \varphi_{P_2}(z)$  ( $\varphi_{P_1}(z)$  pode ser aproximado por  $\varphi_{P_2}(z)$ ) para  $z$  suficientemente grande.

Agora seja  $z_0 \in A_1$  e  $z_0 \notin A_2$ , assim  $P_1^n(z_0) \rightarrow \infty$  mas  $P_2^n(z_0) \not\rightarrow \infty$ . Daí podemos encontrar  $z_1$  suficientemente grande tal que

$$|\log \varphi_{P_2}(P_2(z_1))| \leq |\log \varphi_{P_1}(P_1(z_1))|$$

e como

$$\varphi_{P_1}(z_1) \sim \varphi_{P_2}(z_1)$$

Temos que  $d_2 \leq d_1$ . □

Com o objetivo de estudar algumas propriedades geométricas do conjunto de Julia Cheio necessitamos da definição dos polinômios de Faber e dos coeficientes de Garabedian-Schiffer que foram definidos na seção 2.5, e também podem ser encontrados em [14].

Até o final desta seção usaremos principalmente a referência [19]

**Teorema 3.6.** *Suponha que  $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$  é um polinômio centrado e mônico com  $K(P)$  conexo, então*

$$\text{Diam}(K(P)) \leq \sqrt{8 \left(1 + \left| \frac{a_{d-2}}{d} \right| \right)},$$

onde  $\text{Diam}(K(P))$  representa o diâmetro do conjunto  $K(P)$ .

*Demonstração.* Supondo que

$$\varphi_p(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots \quad \text{para } |z| > 1$$

Sejam  $u, v \in K(P)$  (note que  $K(P) \subset E$ ) números complexos distintos, colocamos

$$g(z) = \sqrt{\frac{\varphi_p(z) - u}{\varphi_p(z) - v}} = 1 + \frac{v - u}{2} z^{-1} + \dots,$$

isto decorre integrando 2.4 em relação a  $\xi$ , tomando  $h(g(\xi)) = (g(\xi) - u)^{\frac{1}{2}}(g(\xi) - v)^{\frac{1}{2}}$ , com  $|\xi|$  suficientemente grande e lembrando que  $\Psi_k(w) = w^{k-1} + w^k + \dots$  (isto pode ser consultado em [14]).

Para  $|z|$  suficientemente grande, temos que os coeficientes de Garabedian-Schiffer definidos na seção 2.5

$$c_{kl} = c_{kl}(u, v) \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots),$$

que são obtidos da função geradora

$$\log \frac{g(z) - g(\xi)}{(z^{-1} - \xi^{-1})(g(z) + g(\xi))} = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \xi^{-k} z^{-l}$$

Para  $|z|$  e  $|\xi|$  suficientemente grandes, depois de alguns cálculos, obtemos

$$c_{11} = b_1 - \frac{1}{8}(u - v)^2$$

e daí, pelo seguinte lema (que pode ser consultado em [14]), conseguimos

**Lema 3.7.** *Sejam  $g \in \Sigma$  e  $u, v \in E$ . Sejam  $\lambda_0, \dots, \lambda_m$  números complexos não todos nulos. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{l=0}^m c_{kl} \lambda_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^m \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 2\text{Re} \left[ \bar{\lambda}_0 \sum_{l=0}^m c_{0l} \lambda_l \right]$$

e a igualdade vale se, e somente se,  $\text{area}(E) = 0$ .

Escolhendo  $\lambda_l = 0$  para  $j \neq l$  obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |c_{kl}|^2 \leq \frac{1}{l} \quad (l = 1, 2, \dots)$$

e segue que

$$|c_{kl}| \leq \frac{1}{\sqrt{kl}} \quad (k, l = 1, 2, \dots)$$

em particular temos  $c_{11} \leq 1$ , e assim

$$|u - v| \leq \sqrt{8(1 + |b_1|)}$$

Temos que o diâmetro de  $K(P)$  é definido por

$$\text{Diam}(K(P)) = \sup\{|u - v| : u, v \in K(P)\},$$

satisfaz

$$\text{Diam}(K(P)) \leq \sqrt{8(1 + |b_1|)}$$

e usando o teorema anterior, sabemos que  $b_1 = -\frac{a_{d-2}}{d}$  e assim

$$\text{Diam}(K(P)) \leq \sqrt{8 \left(1 + \left|\frac{a_{d-2}}{d}\right|\right)}$$

□

Para a demonstração da próxima proposição precisaremos de dois resultados preliminares:

**Lema 3.8.** *Seja  $g \in \Sigma$  (conjunto das funções do tipo  $z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ , com  $|z| > 1$ ) então  $|b_1| \leq 1$ .*

*Demonstração.* Na demonstração do Teorema 2.48 temos

$$\text{area}(K(P)) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right).$$

Como

$$\text{area}(K(P)) \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 \Rightarrow |b_1|^2 \leq 1,$$

portanto obtemos  $|b_1| \leq 1$  e daí temos o resultado do lema. □

**Lema 3.9.** *Seja  $g \in \Sigma$  e  $w \in K(P)$  então*

$$g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + \dots + b_n z^{-(2n+2)} + \dots \quad (3.1)$$

*é uma função ímpar em  $\Sigma$ .*

*Demonstração.* Note que a função  $z^{-2}(g(z^2) - w)$  é analítica e par em seu domínio (que é conexo). Assim a função ímpar

$$\begin{aligned} g^*(z) &= z \sqrt{z^{-2}(g(z^2) - w)} = z \left[1 + (b_0 - w)z^{-2} + \dots + b_n z^{-2n-2} + \dots\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= z + (b_0 - w)z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

é analítica em  $1 < |z| < \infty$  e tem a expansão 3.1. Se  $g^*(z_2) = g^*(z_1)$  então  $g(z_2^2) = g(z_1^2)$ , e desde que  $g(z)$  é univalente segue que  $z_2 = \pm z_1$ . É impossível de acontecer  $z_2 = -z_1$ , pois  $g^*(-z_1) = -g(z_1) \neq g^*(z_1)$ , daí  $g^*(z)$  é univalente em  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ .  $\square$

**Proposição 3.10.** *Suponha  $P$  um polinômio mônico e centrado de grau  $d \geq 2$  com conjunto de Julia Cheio  $K(P)$  conexo. Então*

$$K(P) \subset \{w : |w| \leq 2\}.$$

*Demonstração.* Como  $g \in \Sigma$  dos lemas 3.8 e 3.9 temos que  $|b_1| \leq 1$  e

$$\frac{|b_0 - w|}{2} \leq 1 \Rightarrow |b_0 - w| \leq 2,$$

isto para qualquer  $w \in K(P)$ , portanto  $K(P) \subset \{w : |w - b_0| \leq 2\}$  e da observação 2.52 temos que  $b_0 = 0$ , daí

$$K(P) \subset \{w : |w| \leq 2\}.$$

$\square$

**Definição 3.11.** *Dizemos que  $z$  escapa sob iteração por  $P$  se  $P^n(z) \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se existe um  $R > 0$  tal que se  $|z| > R$ , então  $z$  escapa, tal  $R$  é chamado raio de escape. Para  $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$ , o valor*

$$R = \frac{1 + |a_d| + \dots + |a_1| + |a_0|}{|a_d|}$$

*é um raio de escape.*

**Observação 3.12.** *Nas condições da proposição 3.10 temos que 2 é um raio de escape para todo polinômio mônico, centrado e com grau maior ou igual a dois.*

## 3.2 A Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia

Agora apresentaremos uma estimativa para a dimensão de Hausdorff de um conjunto. Geralmente não é difícil estabelecer uma cota superior para um dado conjunto, mas cota inferior já se apresenta mais trabalhosa. Assim para determinarmos uma cota inferior para o conjunto de Julia utilizaremos a medida de Hausdorff, para isso utilizaremos as referências [2] e [16].

Seja  $f$  uma aplicação racional de grau  $d$ , onde  $d \geq 2$ , e suponha que  $\infty \in F(f)$ . Então  $f$  não tem polos em  $J$  e  $|f'(z)|$  alcança seu máximo em  $J$ . Como  $J$  contém um ciclo repulsor  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  e como

$$|f'(z_1) \cdots f'(z_m)| = |(f^m)'(z_1)| > 1,$$

temos

$$K_0 = \max\{|f'(z)| : z \in J\}.$$

Antes de demonstrarmos o teorema principal desta seção precisamos do seguinte lema auxiliar, no qual utilizaremos a definição de medida de Hausdorff estudada no capítulo 1

**Lema 3.13.** *Suponha que  $\mu$  é uma medida de probabilidade de um subconjunto  $E$  de  $\mathbb{C}$ , e para constantes positivas  $c, t$  e  $r_0$*

$$\mu(D(z, r)) \leq cr^t,$$

onde  $D(z, r)$  é o disco de centro  $z$  e raio  $r$ , sempre que  $z \in E$  e  $0 < r < r_0$ . Então  $\text{Dim}_H(E) \geq t$ , onde  $\text{Dim}_H(E)$  é a dimensão de Hausdorff do conjunto  $E$ .

*Demonstração.* Tome algum número positivo  $\delta$ , e fazendo  $\delta \rightarrow 0$  quando calcularmos a dimensão de Hausdorff assumimos que  $\delta < \frac{r_0}{2}$ . Consideremos alguma cobertura de  $E$  por discos  $D(w_k, r_k), k = 1, 2, \dots$ , com  $r_k < \delta$ . Para cada disco  $D(w_k, r_k)$  sobre  $E$  selecionamos um ponto  $\xi_j$  na intersecção e criamos o disco  $D(\xi_j, \rho_j)$  onde  $\rho_j = 2r_k \leq r_0$ . Dessa forma  $E$  está na união dos novos discos criados, e como

$$\begin{aligned} 1 = \mu(E) &\leq \sum_j \mu(D(\xi_j, \rho_j)) \\ &\leq c \sum_j \rho_j^t \\ &\leq c \sum_k (2r_k)^t \\ &\leq c \sum_k [\text{diam} D(w_k, r_k)]^t \end{aligned}$$

Encontramos que  $m_t^\delta(E) \geq c^{-1}$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , obtemos que  $m_t(E) \geq c^{-1}$  e assim  $\text{Dim}_H(E) \geq t$ .  $\square$

**Teorema 3.14.** *Seja  $f$  uma aplicação racional de grau  $d$ , onde  $d \geq 2$ . Se  $\infty \in F(f)$ ,  $F(f)$  é o conjunto de Fatou de  $f$ , então a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia  $J(f)$  satisfaz que*

$$\text{Dim}_H(J) \geq \frac{\log(d)}{\log K_0}.$$

*Demonstração.* A idéia para demonstrarmos o teorema 3.14 é encontrar um ponto  $\xi \in F(f)$  tal que para cada  $n$ , a aplicação  $f^{-n}(\xi)$  tem precisamente  $d^n$  elementos, e quando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $f^{-n}(\xi)$  acumula em  $J$ . Antes de seguirmos com a prova, denotamos  $\text{dist}[U, V] = \{\inf\{d(u, v), u \in U, v \in V\}\}$  como a distância euclidiana dos conjuntos  $U$  e  $V$ , e  $\text{card}(E)$  a cardinalidade do conjunto  $E$ .

Como  $\infty \in F(f)$  podemos selecionar um número positivo  $\delta$  tal que cada polo de  $f$  está a uma distância de pelo menos  $2\delta$  de  $J$ . Agora temos

$$J(\delta) = \{z : \text{dist}[z, J] < \delta\},$$

e

$$K(\delta) = \sup\{|f'(z)| : z \in J(\delta)\}$$

desta forma,  $1 < K_0 < K(\delta) < +\infty$  e

$$K(\delta) \rightarrow K_0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0$$

provaremos que

$$\text{Dim}_H(J) \geq \frac{\log(d)}{\log K(\delta)}$$

e obteremos o resultado desejado fazendo  $\delta \rightarrow 0$ . Para selecionarmos  $\xi$  adequadamente, escolhemos um disco compacto  $E$  em  $F(f)$  de forma que possamos aplicar o teorema 2.43, capítulo 2.

Agora tomamos  $\xi$  para algum ponto de  $E$  que a órbita não intercepta a órbita de nenhum ponto crítico. Então para cada  $n$ ,  $f^{-n}(\xi)$  tem precisamente  $d^n$  elementos. Do teorema 2.43, existe um inteiro  $m$  tal que  $f^{-n}(z) \subset J(\delta)$  sempre que  $n \geq m$ , e substituindo  $\xi$  por algum ponto em  $f^{-m}(\xi)$  e reclassificando, podemos assumir que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\xi) \subset J(\delta)$$

Agora introduziremos várias grandezas que serão necessárias para a prova:

- a)  $f^{-n}(\xi) = \{\xi_n(i) : i = 1, \dots, d^n\}$ ;
- b)  $d_n = \text{dist}[J, f^{-n}(\xi)]$ , então  $d_0 = \text{dist}[J, \xi]$  e;
- c) uma distribuição de probabilidade uniforme  $\mu_n$  de  $f^{-n}(\xi)$

Note que  $\mu_n$  leva uma massa de  $d^{-n}$  sobre cada  $\xi_n(i)$ , e para algum  $E$ ,

$$\mu_n(E) = d^{-n} \text{card}\{i : \xi_n(i) \in E\}$$

e daí temos que  $d_n < \delta$ . Daí pelo Teorema 2.43 implica que  $d_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , e agora mostraremos que tal convergência não é tão rápida (isto é, os conjunto  $f^{-n}(\xi)$  não se aproximam de  $J$  tão rapidamente).

**Lema 3.15.** *Na notação anterior,  $d_n \leq Kd_{n+1}$ , e então*

$$d_0 \leq d_1 K \leq d_2 K^2 \leq \dots$$

Note que  $K = K(\delta)$ , ou seja, o  $K$  depende de  $\delta$ , mas por uma abuso de notação usaremos  $K$  em vez de  $K(\delta)$ .

*Demonstração.* Tome algum  $z \in J$  e algum  $\xi_{n+1}(i)$ , então ou

- i)  $\delta \leq |z - \xi_{n+1}(i)|$ ; ou
- ii)  $|z - \xi_{n+1}(i)| \leq \delta$

Se (i) é válida, então

$$d_n < \delta < K\delta \leq K|z - \xi_{n+1}(i)|$$

Se (ii) é válida, então o segmento que liga  $z$  a  $\xi_{n+1}$  está inteiramente contido em  $J(\delta)$  e então  $|f'| \leq K$  sobre este segmento. Como  $f(z)$  e  $f(\xi_{n+1}(i))$  estão em  $J$  e  $f^{-n}(\xi)$  respectivamente, temos

$$d_n \leq |f(z) - f(\xi_{n+1}(i))| \leq K|z - \xi_{n+1}(i)|.$$

Em ambos os casos, temos

$$d_n \leq K|z - \xi_{n+1}(i)|,$$

e fazendo  $z$  e  $\xi_{n+1}$  variarem obtemos  $d_n \leq Kd_{n+1}$  □

A prova do teorema é mais fácil quando não há pontos críticos em  $J$ , então mostramos o teorema sob esta suposição (não haver pontos críticos), e subsequentemente consideraremos uma mudança necessária nesta demonstração para obtermos o caso geral. O importante será que parte da prova deste caso continuará válida no caso geral.

A afirmação anterior diz que para cada  $z \in J$ , existe um inteiro positivo  $r_z$  tal que  $f$  é univalente sobre  $D(z, r_z)$ . Agora os discos  $D(z, r_z), z \in J$ , formam uma cobertura aberta do conjunto compacto  $J$ , então pelo Teorema de Cobertura de Lebesgue, existe um número positivo  $\tau$  tal que  $f$  é univalente para cada disco  $D(z, \tau), z \in J$ . fazendo  $\tau$  decrescer, se necessário, assumimos que  $\tau < \delta$ , e agora escolhemos um inteiro positivo  $q$  tal que

$$d_0/K^q < \tau < \delta.$$

O próximo resultado diz que de alguma forma,  $f^{-n}(\xi)$  deve ter uma distribuição uniforme próximo de  $J$ .

**Lema 3.16.** *Se não há pontos críticos em  $J$ , para todo  $z \in J$ , e para todos inteiros  $n$  e  $m$  satisfazendo  $n \geq 1, m \geq q$  há no máximo  $d^{n+q-m}$  pontos de  $f^{-n}(\xi)$  em  $D(z, d_0/K^m)$ , assim*

$$\text{card}(D(z, d_0/K^m) \cap f^{-n}(\xi)) \leq d^{n+q-m} \tag{3.2}$$

*Demonstração.* Mostraremos que (3.2) vale para todo  $z \in J$  e para todo  $n \geq 1$ , por indução sobre  $m$  para  $m \geq q$ . Agora se a desigualdade anterior é válida para todo  $z \in J$  e todo  $n \geq 1$  quando  $m = q$ , neste caso limite superior é  $d^n$ . Agora assumimos que a afirmação é verdadeira quando  $q \leq m \leq M$  e provaremos que para todo  $z \in J$  e todo  $n \geq 1$ ,

$$\text{card}(D(z, d_0/K^{M+1}) \cap f^{-n}(\xi)) \leq d^{n+q-(M+1)}$$

Primeiro suponha que  $n = 1$ , então pelo lema anterior (e como  $K > 1$ ),

$$d_0/K^{M+1} \leq d_0/K \leq d_1 = \text{dist}[J, f^{-1}(\xi)],$$

e então neste caso nenhum dos pontos  $\xi_1(i)$  estão dentro de uma distância  $d_0/K^{M+1}$  de  $J$ , e a desigualdade é válida pois o lado esquerdo da desigualdade é zero.

Agora suponha que  $n \geq 2$ , então  $n - 1 \geq 1$ . Neste caso,

$$d_0/K^{M+1} < d_0/K^q < \tau < \delta,$$

então  $f$  é univalente no disco  $D(z, d_0/K^{M+1})$  e  $|f'| \leq K$ . Isto significa que  $f$  é uma aplicação univalente de  $D(z, d_0/K^{M+1})$  em  $D(f(z), d_0/K^M)$ , e então pontos distintos de  $f^{-n}(\xi)$  em  $D(z, d_0/K^{M+1})$  são aplicados sobre pontos distintos de  $f^{-(n-1)}(\xi)$  em  $D(f(z), d_0/K)$ . Assim usando a hipótese de indução (e  $n - 1 \geq 1$ ), temos

$$\begin{aligned} \text{card}(D(z, d_0/K^{M+1}) \cap f^{-n}(\xi)) &\leq \text{card}(D(z, d_0/K^M) \cap f^{-(n-1)}(\xi)) \leq \\ &\leq d^{(n-1)+q-M} \\ &= d^{n+q-(M+1)} \end{aligned}$$

Isto prova o lema quando  $n = 1$  e quando  $n \geq 2$ , e então a prova do lema está completa.  $\square$

Podemos reescrever o lema anterior em termos de medida de probabilidade  $\mu_n$  e obtemos

$$\mu_n(D(z, d_0/K^M)) \leq d^q/d^m,$$

Mostraremos que para  $r < \frac{d_0}{K}$ ,

$$\mu_n(D(z, r)) \leq (d^{q+1}d_0^{-t})r^t, \quad \text{onde } t = \frac{\log d}{\log K}. \quad (3.3)$$

Se  $r < \frac{d_0}{K}$ , existe algum inteiro positivo  $m$  tal que  $\frac{d_0}{K^{m+1}} < r < \frac{d_0}{K^m}$ , e então como

$K^t = d$ , temos

$$\begin{aligned}
\mu_n(D(z, r)) &\leq \mu_n(D(z, \frac{d_0}{K^m})) \\
&\leq \frac{d^q}{d^m} \\
&\leq \frac{d^q}{K^{mt}} \\
&\leq d^q \left( \frac{rK}{d_0} \right)^t \\
&\leq \left( \frac{d^{q+1}}{d_0^t} \right) r^t.
\end{aligned}$$

o que demonstra 3.3.

Observe que a medida de probabilidade  $\mu_n$  é distribuída uniformemente sobre  $f^{-n}(\xi)$ , e fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos que alguma subsequência de  $\{\mu_n\}$  converge fracamente para a medida de probabilidade  $\mu$  sobre  $J$ , isto decorre da observação 1.52. Assim para todo  $z \in J$  e todo  $r \in \left(0, \frac{d_0}{K}\right)$ , temos

$$\mu(D(z, r)) \leq \left( \frac{d^{q+1}}{d_0^t} \right) r^t$$

e pelo lema 3.13, temos que

$$\text{Dim}_H(J) \geq \frac{\log d}{\log K}$$

o que completa a prova no caso em que  $f$  não tem pontos críticos em  $J$ .

Agora discutiremos as mudanças necessárias para provarmos o caso geral. Assumindo agora que  $f$  tem pontos críticos em  $J$  então seja

$$C = \{c_1, \dots, c_k\}$$

o conjunto de tais pontos críticos. Assim  $f$ , e também  $f^m$ , tem derivada zero para cada  $c_j$  e nenhuma iterada  $f^m$  fixa algum  $c_j$ . Deduzimos que para cada  $j$ ,  $f^n(c_j)$  encontra-se fora de  $C$  sempre que  $n$  é suficientemente grande, e então existe algum inteiro  $p$  tal que  $f^p(C)$  é disjunto de  $C$ .

Escolha algum positivo  $\rho$  satisfazendo as condições

- a) os discos  $D(c_j, 2\rho)$  são dois a dois disjuntos
- b)  $|(f^p)'(z)| \leq 1$  para cada  $D(c_j, 2\rho)$
- c)  $4\rho < \text{dist}[f^p(C), C]$

e definamos

$$H = J - \bigcup D(c_j, \rho),$$

então  $H$  é um subconjunto compacto de  $J$  e  $H \cap C = \emptyset$ . Segue que existe um número positivo  $\tau$  tal que se  $z \in H$ , então  $f$  é univalente sobre o disco  $D(z, \tau)$ . Finalmente, nossa escolha do inteiro  $q$  é modificada ao levarmos a presença de  $C$  em conta e aqui escolhemos  $q$  tal que

$$\frac{d_0}{K^q} < \min\{\tau, \rho, \delta\}, \quad q > p.$$

Com esta modificação e o lema 3.17, dado a seguir, sendo válido a prova segue exatamente como a anterior.

□

Mostremos o caso geral do lema 3.16 que será dado pelo lema 3.17:

**Lema 3.17.** *Para todo  $z \in J$ , e para todos inteiros  $n$  e  $m$  satisfazendo  $n \geq 1, m \geq q$  há no máximo  $d^{n+q-m}$  pontos de  $f^{-n}(\xi)$  em  $D(z, d_0/K^m)$ , assim*

$$\text{card}(D(z, d_0/K^m) \cap f^{-n}(\xi)) \leq d^{n+q-m} \quad (3.4)$$

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre  $m$  para  $m \geq q$  e como antes a desigualdade é válida quando  $m = q$ . Assumimos que a desigualdade é válida para  $z \in J$ , para todo  $n \geq 1$ , e para todo  $m$  com  $q \leq m \leq M$ , e procedemos mostrando que

$$\text{card} \left( D \left( z, \frac{d_0}{K^{m+1}} \right) \cap f^{-n}(\xi) \right) \leq d^{n+q-(M+1)} \quad (3.5)$$

Primeiro supomos que  $1 \leq n \leq M + 1$ . Então por 3.15

$$\frac{d_0}{K^{M+1}} \leq \frac{d_0}{K^n} \leq d_n$$

Então

$$\text{card} \left( D \left( z, \frac{d_0}{K^{M+1}} \right) \cap f^{-n}(\xi) \right) \leq \text{card}(D(z, d_n) \cap f^{-n}(\xi)) = 0$$

pela definição de  $d_n$ .

Assim podemos assumir que  $n > M + 1$  então  $n > M + 1 > q > p$ . Quando  $z \in H$ , 3.5 segue da hipótese de indução, exatamente como antes, então podemos assumir que  $z \in \bigcup D(c_j, \rho)$ . De (a)  $z$  na verdade está em um dos discos  $D(c_j, \rho)$ , digamos  $D(c_1, \rho)$ . Note que

$$\frac{d_0}{K^{M+1}} \leq \frac{d_0}{K^q} < \rho,$$

e usando (b), encontramos que  $f^p$  aplica  $D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$  sobre  $D\left(f^p(z), \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$ . Observe que ao menos  $d^p$  pontos em  $D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$  podem-se aplicar em algum ponto dado em  $D\left(f^p(z), \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$  e disto segue que

$$\text{card}\left(D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-n}(\xi)\right) \leq d^p \text{card}\left(D\left(f^p(z), \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-(n-p)}(\xi)\right)$$

Agora de (c),  $f^p(z)$  esta em  $H$ , e como já temos derivado da desigualdade para pontos  $z \in H$ , deduzimos que

$$\text{card}\left(D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-n}(\xi)\right) \leq d^p d^{(n-p)+q-(M+1)}$$

o que completa a prova. □

Usando o teorema 3.14 e sabendo que dada uma aplicação racional  $f$ , podemos escolher uma aplicação de Möbius tal que  $\infty \in f(gfg^{-1})$ , pois  $J$  e  $g(J)$  tem a mesma dimensão, temos

**Corolário 3.18.** *Se grau de  $f$  é maior ou igual a 2, então  $\text{Dim}_H(J) > 0$ .*

**Teorema 3.19.** *Seja  $P(z) = z^d + c$  ( $d \geq 2$ ) com  $K(P)$  conexo, então a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia satisfaz*

$$\frac{\log d}{\log d + (d-1)\log 2} \leq \text{Dim}_H(J(P)).$$

*Demonstração.* Primeiro note que  $P'(z) = dz^{d-1}$ , daí

$$\log(P'(z)) = \log d + (d-1)\log(z)$$

Como um raio de escape de  $P(z)$  é 2 ( $a_{2-1} = a_1 = 0$ ), temos

$$K_0 = \max_{z \in J(P)} \log|P'(z)| \leq \log d + (d-1)\log 2.$$

Portanto

$$\frac{1}{\log d + (d-1)\log 2} \leq \frac{1}{K_0} \Rightarrow \frac{\log d}{\log d + (d-1)\log 2} \leq \frac{\log d}{K_0} \leq \text{Dim}_H(J(P)).$$

□

**Exemplo 3.20.** *Seja  $P(z) = z^2 + c$ , onde  $c$  é uma constante pertencente ao Connectedness Locus de  $P$ . Uma estimativa da dimensão de Hausdorff de  $P(z)$  é  $\frac{1}{2}$ , pois de acordo com*

o teorema anterior, temos

$$\frac{\log(2)}{\log(2) + (2 - 1)\log(2)} = \frac{\log(2)}{2\log(2)} = \frac{1}{2} \leq \text{Dim}_H(J(P)).$$

**Exemplo 3.21.** Seja  $P(z) = z^5 + c$ , onde  $c$  é uma constante pertencente ao *Connectdness Locus* de  $P$ , uma estimativa da dimensão de Hausdorff de  $P(z)$  é  $\frac{\log(5)}{\log(5) + 4\log(2)}$ , pois de acordo com o teorema anterior, temos

$$\frac{\log(5)}{\log(5) + (5 - 1)\log(2)} = \frac{\log(5)}{\log(5) + 4\log(2)} \leq \text{Dim}_H(J(P)).$$

## Considerações Finais

Neste trabalho investigamos propriedades geométricas do conjunto de Julia e do conjunto de Julia Cheio, para muitos de nossos resultados precisamos usar como hipótese de que os polinômios em exame fossem centrados. A limitação referida foi transpassada com o argumento que todo polinômio pode ser conjugado a um polinômio com esta especial característica, ser centrado. Como a conjugação preserva propriedades geométricas os resultados obtidos valem para qualquer polinômio, sendo este centrado ou não. É importante notar também que a estimativa da dimensão de Hausdorff obtida no desenvolvimento do trabalho depende apenas do grau do polinômio.

# Referências Bibliográficas

- [1] Atela, Pau; Hun, Jun. *Commuting Polynomials and Polynomials with Same Julia Set*, 1995.
- [2] Beardon, Alan F. *Iteration of Irrational Functions, Complex Analytic Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [3] Cabral, João Manuel Gonçalves. *Dinâmica Holomorfa: Conjuntos de Julia e de Mandelbrot*, Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica- Universidade dos Açores, Ponta Delgada, Portugal, 2002.
- [4] Cabral, João Manuel Gonçalves. *Estudo Analítico e Simbolico das Bifurcações para a Família de Aplicações Racionais de Grau 2*, Tese (Doutorado em Matemática)- Universidade dos Açores, Ponta Delgada, Portugal, 2009.
- [5] Carleson, Lennart; Gamelin, Theodore W. *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1992.
- [6] Conway, John B. *Function of One complex Variable*, Second Edition, Springer-Verlag, 1978.
- [7] Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry*, Second edition, Wiley, 2009.
- [8] Gabber V. *On the Iteration of Rational Functions. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 84, 497-505, 1978.
- [9] Medeiros, Luiz Adauto da Justa. *Introdução as Funções Complexas*, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1972.
- [10] Milnor, John. *Dynamics One Complex Variable*, Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies, Vol. 60.
- [11] Neto, Alcides. *Funções Complexas de uma Variável Complexa*, Projeto Euclides, IMPA, 2008.
- [12] Ruffino, Paulo. *Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos*, IMPA, 2009.

- [13] Pommerenke, Ch. *Univalent Functions*. Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1975.
- [14] Pommerenke, Ch. *On the Grunsky Inequalities for Univalent Functions*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 35, 234-244, 1969.
- [15] Rogers, C. A. *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.
- [16] Royden, H. L.; Fitzpatrick, P. M. *Real Analysis*. Fourth Edition, China Machine Press, 2010.
- [17] Soares, Marcio G. *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2012.
- [18] Software Fraqtive. Disponível em <http://fraqtive.mimec.org/>. Acesso em 21 de janeiro de 2014.
- [19] Yang, Guoxiao. *Some Geometrics Properties of Julia Sets and filled-in Julia Sets of Polynomials*, *Complex Variables, Theory and application: An International Journal*, 383-391, 2002.
- [20] Zireh, Ahmad. *Hausdorff Dimension of the Julia Set for Complex Polynomial  $z(z^d + c)$* , *International Journal of Math Analysis*, Vol. 2, número 1, 5-9, 2008.

# Índice Remissivo

- órbita periódica, 24
- A Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia, 51
- aplicação conforme, 7
- aplicação univalente, 7
- Aspectos Geométricos do Conjunto de Julia Cheio, 47
- bacia de atração, 27
- coeficientes de Faber, 43
- Conectedness Locus, 1, 30
- Conjunto de Fatou, 28
- Conjunto de Julia, 1, 28
- Conjunto de Julia Cheio, 30
- conjunto mensurável, 20
- conjuntos de Borel, 20
- dimensão de Hausdorff, 22
- distribuição de massa, 21
- domínio, 4
- espaço de Baire, 34
- espaço de medida, 21
- espaço de probabilidade, 21
- espaço mensurável, 20
- Fórmula analítica de Green, 19
- fórmula integral de Cauchy, 13
- grande órbita, 33
- grande órbita finita, 33
- grau de uma aplicação racional, 31
- holomorfa, 3
- integral complexa, 8
- medida, 20
- medida  $t$ -dimensional de Hausdorff, 22
- meromorfa, 7
- multiplicador, 25
- polinômio centrado, 46
- polinômios de Faber, 44
- polinômios de Tchebychev  $T_k$ , 30
- ponto parabólico, 27
- ponto periódico, 24
- ponto pré-periódico, 25
- Princípio do Máximo, 18
- raio de escape, 51
- raio externo, 39
- sigma álgebra, 19
- Teorema de Böttcher, 35
- Teorema de Liouville, 16
- Teorema de Montel, 28
- Teorema de Morera, 16
- Teorema Integral de Cauchy, 10
- transformação de Möbius, 7
- valor crítico de uma aplicação racional, 31