MILTON MANUEL AGUIRRE VALENCIA

ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DE $\mathbb{R}^k$-AÇÕES SOBRE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2019

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T
A284a
2019

Aguirre Valencia, Milton Manuel, 1986-
Alguns resultados da teoria de R^k-ações sobre variedades diferenciáveis / Milton Manuel Aguirre Valencia. – Viçosa, MG, 2019.
vii, 50 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Walter Teófilo Huaraca Vargas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 49-50.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Folheações (Matemática). 3. Anosov, Difeomorfismos de. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.39

MILTON MANUEL AGUIRRE VALENCIA

ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DE $\mathbb{R}^k$-AÇÕES SOBRE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2019.

Alexandre Miranda Alves

Andrés Mauricio López Barragán

Bulmer Mejía García
(Presidente)

Dedico este trabalho a minha família e
à memória do meu avô Luis Arturo Valencia.

"Longo é o caminho de ensinar
através de teorias, breve e eficaz
por meio de exemplos".

Séneca

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Mirian e Jose, pelo apoio, carinho e motivação, vocês são os pilares da minha vida, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas, pela paciência, as correções e pelos conselhos oportunos que me deu. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Ao meu incondicional e exclusivo irmão, Edwin, pelo companheirismo, força e credibilidade.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Aos meus amigos e colegas de curso pela amizade e pelos momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste processo de formação acadêmica.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

VALENCIA, Milton Manuel Aguirre, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Alguns resultados da teoria de $\mathbb{R}^k$-ações sobre variedades diferenciáveis**. Orientador: Walter Teofilo Huaraca Vargas.

Na presente disertação estudamos condições necessárias para garantir a existência de pontos fixos para ações de $\mathbb{R}^n$ definidas sobre uma superfície compacta M. Estes resultados foram obtidos por E. L. Lima.

Abstract

VALENCIA, Milton Manuel Aguirre, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **Some results of the $\mathbb{R}^k$-actions theory on differentiable manifolds**. Adviser: Walter Teofilo Huaraca Vargas.

In the present dissertation we study conditions necessary to guarantee the existence of fixed points for actions of $\mathbb{R}^n$ defined on a compact manifold M. These results were obtained by E. L. Lima.

Introdução

Neste trabalho apresentamos o estudo de resultados que garantam a existência de pontos singulares comuns respeito de dois ou mais campos de vetores definidos sobre superfícies conexas, compactas com ou sem fronteira.

O objetivo principal desta dissertação é estudar os seguintes resultados obtidos por E. L. Lima em [10] e [9].

Teorema A: *Qualquer ação contínua de* $\mathbb{R}^2$ *sobre a esfera* S^2 *admite um ponto fixo.*

Teorema B: *Qualquer ação contínua de* $\mathbb{R}^2$ *sobre o plano projetivo* $\mathbb{R}P^2$ *admite um ponto fixo.*

Teorema C: *Qualquer ação contínua de* $\mathbb{R}^n$ *sobre uma superfície* M*, com* $\chi(M) \neq 0$*, tem um ponto fixo.*

Embora o Teorema C implique o Teorema A e o Teorema B, apresentaremos provas independentes para cada um dos teoremas. Acreditamos que as demonstrações deles tem um valor individual pela riqueza das ideias.

O trabalho está dividido como segue: No capítulo 1, apresentaremos resultados preliminares muito conhecidos na teoria de sistemas dinâmicos, teoria de conjuntos e topologia. Todos eles sem prova, pois, as mesmas podem ser encontradas na bibliografia do presente trabalho.

No capítulo 2, apresentaremos fatos conhecidos da Teoria de folheações e ações de grupos sobre variedades e alguns lemas preliminares que usaremos nas provas dos teoremas.

Finalmente, no capítulo 3 apresentaremos as provas dos teoremas mencionados acima.

Capítulo 1

Preliminares

É muito importante contextualizar alguns conceitos básicos e resultados essenciais para o estudo dos capítulos seguintes. Dedicaremos este capítulo a fornecer as informações necessárias para os próximos capítulos.

1.1 Teoria de conjuntos e espaços topológicos

As definições e resultados apresentados aqui podem ser encontradas em [15], [3] e [13].

Definição 1.1. *Lembremos que uma relação $\preceq$ em um conjunto $\mathscr{A}$ é chamada uma relação de ordem parcial se as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) $\alpha \preceq \alpha$ para todo α.

(2) Se $\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \alpha$, então $\alpha = \beta$.

(3) Se $\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \gamma$, então $\alpha \preceq \gamma$.

Se $\mathscr{A}$ é uma família de conjuntos com a relação definida como $A \preceq B$ se, e somente se, $B \subset A$ é uma relação de ordem parcial. Dizemos que A é um elemento maximal de $\mathscr{A}$ se, e somente se, nenhum membro de $\mathscr{A}$ contém propriamente A.

Uma família $\mathcal{N}$ de conjuntos é dita uma cadeia se, e somente se, sempre que A e B são membros da família, então ou $A \preceq B$ ou $B \preceq A$. Isto é equivalente a dizer que $\mathcal{N}$ é linearmente ordenada.

Agora, podemos enunciar o seguinte princípio que foi formulado pela primeira vez por Hausdorff em 1914.

Teorema 1.2. (Princípio Maximal de Hausdorff) *Se $\mathscr{A}$ é uma família de conjuntos e $\mathcal{N}$ é uma cadeia em $\mathscr{A}$, então existe uma cadeia maximal $\mathcal{M}$ em $\mathscr{A}$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.*

Lembremos a seguinte definição.

Definição 1.3. *Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) $\emptyset$ e X estão em τ.

(2) A união dos elementos de alguma subcoleção de τ está em τ.

(3) A intersecção dos elementos de alguma subcoleção finita de τ está em τ.

Um conjunto X para o qual uma topologia τ foi especificada é chamado um espaço topológico.

Corretamente falando, um espaço topológico é um par ordenado (X, τ) consistindo de um conjunto X e uma topologia τ em X, mas, muitas vezes omitimos menções específicas a τ se não houver confusão.

Definição 1.4. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $Z \subset X$ um subconjunto de X qualquer. Então, o conjunto $Z \cap \tau_X = \{Z \cap A | A \in \tau_X\}$ é uma topologia para Z denominada topologia induzida por τ_X em Z.*

Se X é um espaço topológico com topologia τ, dizemos que um subconjunto U de X é um conjunto aberto de X se U pertence à coleção τ. Usando esta terminologia, podemos dizer que um espaço topológico é um conjunto X com uma coleção de subconjuntos de X, chamada conjuntos abertos, tal que $\emptyset$ e X ambos são abertos, e, tal que a união arbitraria e a intersecção finita de conjuntos abertos são abertos.

Exemplo 1.5. *Considere o espaço $X = \mathbb{R}^n$ e $\tau = \{U \subset \mathbb{R}^n; \forall x \in U, \exists B(a, r) \subset U\}$, então $(\mathbb{R}^n, \tau)$ é um espaço topológico satisfazendo as propriedades acima.*

Exemplo 1.6. *Seja $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a, a > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ a esfera $(n-1)$-dimensional. Note que S^{n-1} com a topologia induzida é um espaço topológico.*

O seguinte resultado é conhecido na topologia algébrica, porém, omitiremos a prova pois esta pode ser encontrada em [13].

Teorema 1.7. (Ponto Fixo de Lefschetz) *Seja $f : K \to K$ uma aplicação contínua, sendo K uma superfície compacta. Se $\chi(K) \neq 0$, então, f admite pelo menos um ponto fixo.*

Lembremos que um espaço de recobrimento de um espaço topológico X é um espaço topológico $\tilde{X}$ com uma aplicação $p : \tilde{X} \to X$ satisfazendo a seguinte condição: Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X tal que para cada α, $p^{-1}(U_\alpha)$ é união disjunta de conjuntos abertos em $\tilde{X}$, cada um dos quais é aplicado por p homeomorficamente em U_α. Não exigimos $p^{-1}(U_\alpha)$ ser não vazio, então p não precisa ser sobrejetiva.

Os recobrimentos são definidos em termos geométricos, como as aplicações $p : \tilde{X} \to X$ que são homeomorfismos locais em um sentido bastante forte. Mas do ponto de vista da topologia algébrica, a característica distintiva dos espaços de recobrimento é o seu comportamento em relação ao levantamento das aplicações. Um levantamento de uma aplicação $f : Y \to X$ é uma aplicação $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Em seguida, apresentamos duas propriedades de elevação, sem provas, uma vez que elas podem ser encontradas em [6]

Teorema 1.8. (Existência) *Seja $(\tilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Então, para qualquer caminho $f : I \to X$ com ponto inicial x_0, existe um único caminho $g : I \to \tilde{X}$ com ponto inicial $\tilde{x}_0$ tal que $p \circ g = f$.*

Teorema 1.9. (Unicidade) *Seja $(\tilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X e seja Y um espaço conexo. Dadas quaisquer duas aplicações $f_0, f_1 : Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ f_0 = p \circ f_1$, o conjunto $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ ou é vazio ou é todo Y.*

1.1.1 Redes

Sabemos que as sequências são adequadas para detectar pontos limite, funções contínuas e conjuntos compactos em espaços métricos. Existe uma generalização da noção de sequência, chamada rede, que fará o mesmo para um espaço topológico arbitrário. Vamos apresentar uma série de definições e um teorema que será relevante para os próximos capítulos, estes podem ser encontradas em [15] e [18]

Definição 1.10. *Um conjunto dirigido J é um conjunto com uma ordem parcial $\preceq$ tal que para cada par de elementos α, β de J, existe um elemento γ de J tendo a propriedade que $\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma$.*

Exemplo 1.11. *Seja $J = \mathbb{N}$, note que se $a, b \in \mathbb{N}$, existe um elemento $c = a + b \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$.*

Definição 1.12. *Um subconjunto K de J é dito cofinal em J se para cada $\alpha \in J$, existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \preceq \beta$.*

Exemplo 1.13. *Seja $K = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, então K é cofinal em $\mathbb{N}$, pois, para todo $a \in \mathbb{N}$, existe $b \in K$ tal que $a \leq b$.*

Definição 1.14. *Seja X um espaço topológico e J um conjunto dirigido. Uma rede em X é uma função $f : J \to X$. Se $\alpha \in J$, usualmente denotamos $f(\alpha)$ por x_α. Denotamos a própria rede f pelo símbolo $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, ou simplesmente por (x_α) se o conjunto de índices for subentendido.*

Definição 1.15. *A rede (x_α) é dita convergente ao ponto x de X e escrevemos como $x_\alpha \to x$ se, para cada vizinhança U de x, existe $\alpha \in J$ tal que*

$$\alpha \preceq \beta \Longrightarrow x_\beta \in U.$$

Definição 1.16. *Seja $f : J \to X$ uma rede em X, tal que $f(\alpha) = x_\alpha$. Se K é um conjunto dirigido e $g : K \to J$ é uma função tal que:*

(i) $i \preceq j \Longrightarrow g(i) \preceq g(j)$,

(ii) $g(K)$ *é cofinal em* J,

então, a função composta $f \circ g : K \to X$ *é chamada uma subrede de* (x_α).

Exemplo 1.17. *Note que uma sequência em* $\mathbb{R}$ *é um caso particular de uma rede, isto é, para* $J = \mathbb{N}$ *e* $X = \mathbb{R}$ *temos que* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = 1/2^n$ *é uma rede e* $1/2^n \to 0$ *é convergente. Além disso, uma subsequência é um caso particular de uma subrede.*

O seguinte teorema generaliza um resultado conhecido de análise real.

Teorema 1.18. X *é compacto se, e somente se, cada rede em* X *tem uma subrede convergente.*

Outro resultado de especial interesse neste trabalho é o seguinte.

Teorema 1.19. *Sejam,* $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *uma função arbitrária e* $x_0 \in X$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f *é contínua em* x_0.

b) Se $\varphi : A \to X$ *é uma rede convergente em* x_0, *então, a rede* $f \circ \varphi : A \to Y$ *é convergente em* $f(x_0)$.

1.2 Variedades Topológicas e Diferenciáveis

As definições incluídas nesta seção podem ser encontradas em [14] e em [8].

Iniciaremos esta seção com a definição de variedade topológica.

Definição 1.20. *Suponha que* M *seja um espaço topológico. Dizemos que* M *é uma variedade topológica de dimensão* n *ou uma* n*-variedade topológica se tiver as seguintes propriedades:*

- M *é um espaço Hausdorff: Para cada par de pontos* $p, q \in M$, *existem subconjuntos abertos disjuntos* $U, V \subset M$ *tal que* $p \in U$ *e* $q \in V$.
- M *é segundo enumerável: Existe uma base enumerável para a topologia de* M. *Isto é, todo aberto da topologia pode ser escrito como união enumerável de elementos da base.*
- M *é localmente euclidiana de dimensão* n*: Cada ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$.

Para nossos propósitos, precisaremos de uma classe de variedades topológicas, as chamadas variedades topológicas com fronteira. Para enuciarmos formalmente a definição das mesmas, consideremos para cada $n \geq 1$ o espaço topológico $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}^n$. Um subconjunto U de $\mathbb{H}^n$ é dito aberto em $\mathbb{H}^n$ se $U = \mathbb{H}^n \cap U'$ para algum subconjunto aberto U' de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.21. *Suponha que M seja um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica com fronteira de dimensão n se tiver as seguintes propriedades:*

(i) M é um espaço Hausdorff: Para cada par de pontos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subset M$ tal que $p \in U$ e $q \in V$.

(ii) M é o segundo enumerável: Existe uma base enumerável para a topologia de M. Isto é, todo aberto da topologia pode ser escrito como união de elementos da base.

(iii) M é localmente semi-euclidiana de dimensão n: Cada ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{H}^n$.

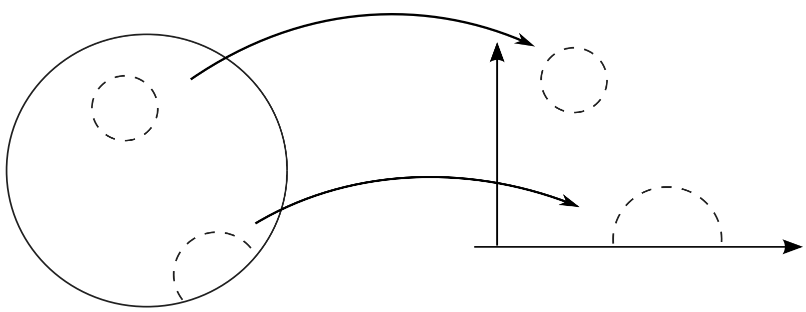


Figura 1.1: Variedade com fronteira.

Observação 1.22. *1. Seja (U, φ) tal que $U \subset M$ é aberto e $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ como no item (iii) das definições anteriores. O par (U, φ) será chamado de carta coordenada.*

2. O conjunto fronteira, $\partial\mathbb{H}$, de $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de pontos onde $x_n = 0$. Se M é uma variedade com fronteira, um ponto que é a imagem inversa de $\partial\mathbb{H}$ por alguma carta é chamado de ponto fronteira de M os demais pontos são chamados de pontos interiores de M.

Exemplo 1.23. *Para $n \geq 1$ e $M = \mathbb{R}^n_+$, então, M é uma n-variedade com fronteira, com $int(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ e $\partial M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.*

Exemplo 1.24. *A n-bola fechada $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 \leq 1\}$ é uma n-variedade com fronteira tal que $int(D_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 < 1\}$ e $\partial D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 1\} = S^{n-1}$.*

Exemplo 1.25. *O toro sólido $M = D_2 \times S^1$ é uma 3-variedade com fronteira, com $\partial M = S^1 \times S^1$ sendo o 2-toro.*

Em seguida, apresentaremos a definição de variedade diferenciável ou suave. Seja M uma n-variedade topológica. Se (U, φ), (V, ψ) são duas cartas tal que $U \cap V \neq \emptyset$, então, o homeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é chamado de *aplicação transição*. Duas cartas (U, φ), (V, ψ) são chamadas compatíveis se, ou $U \cap V = \emptyset$ ou a aplicação transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo.

Definição 1.26. *Um atlas de dimensão n sobre uma variedade topológica M é uma coleção $\mathcal{A}$ de cartas coordenadas tal que a união dos domínios cobrem M. Um atlas $\mathcal{A}$ é chamado de atlas de classe C^r se toda aplicação de transição for um difeomorfismo de classe C^r.*

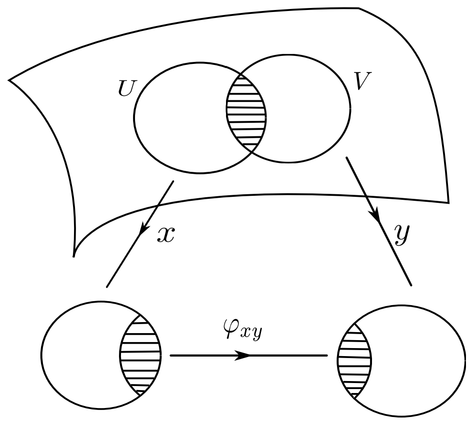


Figura 1.2: Mudanças de coordenadas.

Agora, podemos definir o principal conceito desta seção.

Definição 1.27. *Uma estrutura diferencial de classe C^r sobre uma variedade topológica de dimensão n é um atlas maximal de classe C^r. Uma n-variedade diferencial de classe C^r é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é uma variedade topológica de dimensão n e $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferencial de classe C^r sobre M.*

Exemplo 1.28. *Sejam $M = \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $x : U \to \mathbb{R}^m$ a aplicação de inclusão, $x(p) = p$. As coordenadas introduzidas em U pelo sistema x são denominadas coordenadas cartesianas.*

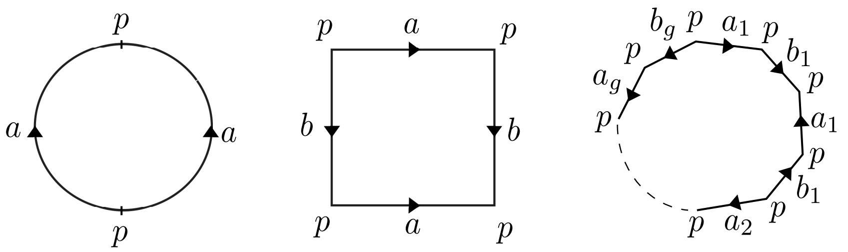
Exemplo 1.29. *A esfera n-dimensional $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definida por:*

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

com a topologia induzida por $\mathbb{R}^{n+1}$ *possui uma estrutura de variedade de classe* C^∞ *de dimensão* n*. De fato, se* $U_i^\sigma \subset S^n$*, e se* $\sigma = \pm 1$*, com* $1 \leq i \leq n+1$*, seja* $U_i^\sigma = \{x \in S^n; \sigma x_i > 0\}$*. A carta local* $\varphi_i^\sigma : U_i^\sigma \to \mathbb{R}^n$ *definida por* $\varphi_i^\sigma(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$ *cobre* S^n *e as mudanças de coordenadas são* C^∞*.*

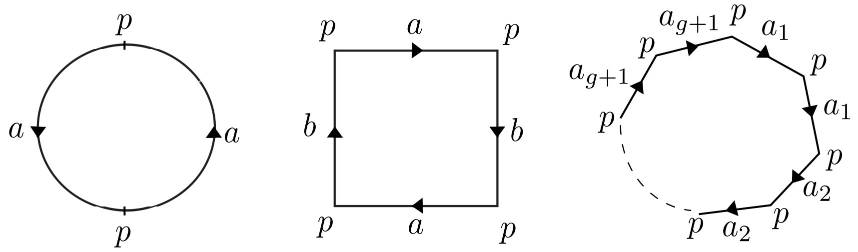
Diremos que duas variedades topológicas M e N são equivalentes se elas são homeomorfas. Daí o problema para classificar variedades topológicas vai consistir em determinar explicitamente um representante em cada classe de equivalência.

As variedades conexas compactas de dimensão 2 podem ser classificadas como se expressa em [4], isto é, demonstra-se que toda superfície compacta conexa é homeomorfa ao quociente de um polígono plano por uma relação de equivalência que identifica as arestas do polígono duas a duas segundo as regras embaixo:



Esfera Toro Superfície de gênero g

Figura 1.3: Superfícies orientáveis.



Plano projetivo Garrafa de Klein Superfície não orientável de gênero g

Figura 1.4: Superfícies não orientáveis.

Nas Figuras 1.3 e 1.4 as arestas com a mesma letra são identificadas segundo o sentido das setas. Esta idéia é muito importante para nosso capítulo 3, como veremos no Lema 2.13.

1.3 Campos de vetores em variedades

Nesta seção, apresentamos a definição de fluxo e outros conceitos importantes para formalizar o teorema de Poincaré-Bendixson na versão original e, seguidamente, a versão para a esfera com a qual finalizaremos esta seção, os resultados aqui descritos podem ser encontrados em [16] e [17].

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável. Um campo de vetores de classe C^r em M é uma aplicação de classe C^r, $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ que a cada ponto $p \in M$, associa um vetor $X(p) \in TM_p \subset \mathbb{R}^k$. Isso corresponde a uma aplicação C^r, $X : M \longrightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ é a identidade em M, onde π é a projeção natural de TM em M. Denotaremos por $\mathscr{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r em M.

Uma curva integrável de $X \in \mathscr{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação de classe C^{r+1}, $\alpha : I \longrightarrow M$, onde I é um intervalo contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. A imagem de uma curva integral é chamada de órbita ou trajetória.

Se $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo de classe C^{r+1} e $X \in \mathscr{X}^r(M)$, então $Y = f * X$, definido por $Y(q) = df_p.X(p)$ com $q = f(p)$, é um campo de classe C^r em N, pois, $f * X = df \circ X \circ f^{-1}$. Se $\alpha : I \longrightarrow M$ é uma curva integrável de X, então $f \circ \alpha : I \longrightarrow N$ é uma curva integral de Y. Em particular, f leva trajetórias de X em trajetórias de Y. Assim, se $x : U \longrightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ é uma carta local, $Y = x * X$ é um campo de classe C^r em U_0; dizemos que Y é a expressão de X na carta local (x, U). Com essas considerações, os teoremas locais sobre existência, unicidade e diferenciabilidade de soluções estende-se a campos em variedades. Isso se traduz na proposição dada a seguir:

Proposição 1.30. *Sejam E um espaço de Banach e $F : E \times M \longrightarrow TM$ uma aplicação C^r com $r \geq 1$, tal que $\pi \circ F(\lambda, p) = p$, onde $\pi : TM \longrightarrow M$ é a projeção natural. Para todo $\lambda_0 \in E$ e $p_0 \in M$, existem vizinhanças W de λ_0 em E, V de p_0 em M, um número real $\varepsilon > 0$ e uma função de classe C^r, $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \times W \longrightarrow M$ tais que $\varphi(0, p, \lambda) = p$ e $(\partial/\partial t)\varphi(t, p, \lambda) = F(\lambda, \varphi(t, p, \lambda))$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $p \in V$ e $\lambda \in W$. Além disso, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é uma curva integral do campo $F_\lambda = F(\lambda, \cdot)$ com $\alpha(0) = p$, então $\alpha = \varphi_{p,\lambda} = \varphi(\cdot, p, \lambda)$.*

Proposição 1.31. *Sejam I, J intervalos abertos e $\alpha : I \longrightarrow M$, $\beta : J \longrightarrow M$ curvas integrais de $X \in \mathscr{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Se $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, para algum $t_0 \in I \cap J$, então $\alpha(t) = \beta(t)$ em $I \cap J$. Consequentemente existe uma curva integral $\gamma : I \cup J \longrightarrow M$, que coincide com α, em I, e com β, em J.*

Definição 1.32. *Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^r é dita ser um fluxo se:*

(i) $\varphi(0, x) = x$,

(ii) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$,

O fluxo é dito linear se para cada t fixo, $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ é uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.33. *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathscr{X}^r(M)$. Existe em M um fluxo global de classe C^r para X. Isto é, uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ e $(\partial/\partial t)(\varphi(t, p)) = X(\varphi(t, p))$.*

Corolário 1.34. *Sejam $X \in \mathscr{X}^r(M)$ e $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ o fluxo associado a X. Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_t : M \longrightarrow M$, tal que $X_t(p) = \varphi(t,p)$, é um difeomorfismo de classe C^r. Além disso, $X_0 =$ identidade, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Sejam $X \in \mathscr{X}^r(M)$ e $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ e X_t, $t \in \mathbb{R}$ o fluxo associado a X. A órbita de X por $p \in M$ é o conjunto $\mathcal{O}(p) = \{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$. Se $X(p) = 0$, a órbita de p se reduz a p. Nesse caso, dizemos que p é uma singularidade de X. Caso contrário, a aplicação $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $\alpha(t) = X_t(p)$ é uma imersão. Se α não é biunívoca, existe um $w > 0$ tal que $\alpha(w) = \alpha(0) = p$ e $\alpha(t) \neq p$ para $0 < t < w$. Nesse caso, a órbita de p é difeomorfa ao círculo S^1 e dizemos que a órbita é fechada de período w. Caso a órbita não seja singular ou fechada, ela é dita regular. Assim, uma órbita regular é a imagem de uma imersão biunívoca da reta.

O conjunto w-limite de um ponto $p \in M$ é $w(p) = \{q \in M :$ existe $t_n \to +\infty$ se $n \to +\infty$ com $lim X_{t_n}(p) = q\}$. Analogamente, definimos o conjunto α-limite de p como $\alpha(p) = \{q \in M :$ existe $t_n \to -\infty$ se $n \to +\infty$ com $lim X_{t_n}(p) = q\}$. Observamos que o α-limite de p é o w-limite de p para o campo $-X$. Também, $w(p) = w(\widetilde{p})$ se $\widetilde{p}$ pertence à órbita de p. De fato, $\widetilde{p} = X_{t_0}(p)$ e, portanto, se $X_{t_n}(p) \longrightarrow q$ com $t_n \longrightarrow \infty$, então, $X_{t_n - t_0}(\widetilde{p}) \longrightarrow q$ e $t_n - t_0 \longrightarrow \infty$. Definimos , então, o w-limite da órbita de p como $w(p)$.

Exemplo 1.35. *Consideremos a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com centro na origem e sejam (x,y,z) as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^3$. Chamamos $p_N = (0,0,1)$ de polo norte e $p_S = (0,0,-1)$ de polo sul de S^2.*

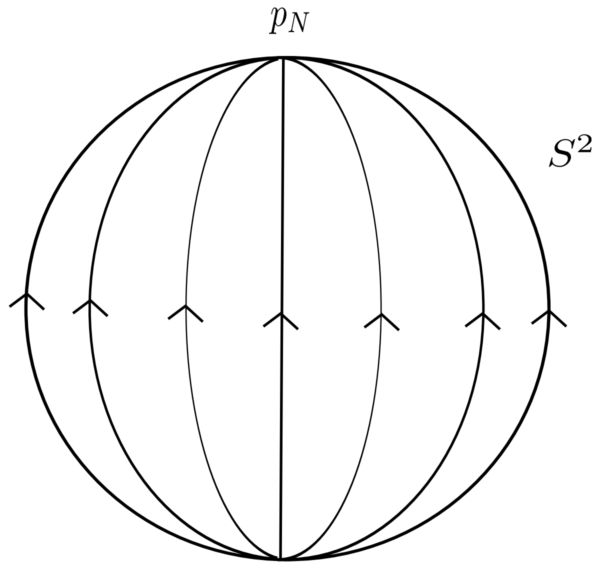


Figura 1.5: Exemplo de um campo de vetores na esfera.

Definimos o campo X em S^2 por $X(x,y,z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$. É claro que X é de classe C^∞ e é fácil verificar que as singularidades de X são p_N, p_S. Como X é tangente aos meridianos de S^2 apontando para cima, $w(p) = p_N$ e $\alpha(p) = p_S$, se $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$

Exemplo 1.36. *Fluxos racionais e irracionais no toro. Seja* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 \subset \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(u,v) = ((2 + cos2\pi v)cos2\pi u, (2 + cos2\pi v)sen2\pi u, sen2\pi v)$$

Temos que φ *é um difeomorfismo local que leva retas horizontais de* $\mathbb{R}^2$ *em paralelos de* T^2*, retas verticais em meridianos e o quadrado* $[0,1] \times [0,1]$ *sobre* T^2*. Além disso,* $\varphi(u,v) = \varphi(\widetilde{u},\widetilde{v})$ *se, e somente se,* $u - \widetilde{u} = m$ *e* $v - \widetilde{v} = n$*, onde* m, n *são inteiros.*

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$*, consideremos em* $\mathbb{R}^2$ *o campo de vetores* $X^\alpha(u,v) = (1,\alpha)$*. É facil ver que* $Y^\alpha = \varphi * X^\alpha$ *está bem definido e é um campo* C^∞ *em* T^2*. As órbitas de* Y^α *são as imagens por* φ *das órbitas de* X^α*, sendo estas as retas de inclinação* α *em* $\mathbb{R}^2$*. Vamos mostrar que, para* α *racional, toda órbita de* Y^α *é fechada e, para* α *irracional, toda órbita* Y^α *é densa em* T^2*. Para cada* $c \in \mathbb{R}$*, denotamos por* l_c *a reta de* $\mathbb{R}^2$ *que passa por* $(0,c)$ *e tem inclinação* α*;* $l_c = \{(u, c+\alpha u) : u \in \mathbb{R}\}$*. Como já observamos,* $\varphi(l_c)$ *é uma órbita de* Y^α*. Se* α *é racional, essa órbita é fechada qualquer que seja* $c \in \mathbb{R}$*. De fato, se* $\alpha = n/m$*, então,* $[m, c + (n/m)m] \in l_c$ *e* $\varphi(m, c+n) = \varphi(0,c)$*. Suponhamos agora,* α *irracional e fixemos* $\overline{c} \in \mathbb{R}$*. Afirmamos que* $C = \{c \in \mathbb{R} : \varphi(l_c) = \varphi(l_{\overline{c}})\}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*. Segue-se que* $\cup_{c\in C} l_c$ *é denso em* $\mathbb{R}^2$ *e, portanto,* $\varphi(l_{\overline{c}}) = \varphi(\cup_{c\in C} l_c)$ *é denso em* T^2*. Para provar que* C *é denso em* $\mathbb{R}$*, basta mostrar que* $G = \{m\alpha + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*, pois,* $c \in C$ *se, e somente se,* $c - \overline{c} \in G$*. Como* G *é um subgrupo de* $\mathbb{R}, +$*, temos que* G *ou é denso ou é discreto. Resta assim, mostrar que* G *não é discreto. De fato, para cada* $m \in \mathbb{Z}$*, existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $u_m = m\alpha + n$ *pertence ao intervalo* $[0,1]$*. A sequência* u_m *tem um ponto de acumulação e, como* α *é irracional, seus elementos são distintos. Logo* G *é denso.*

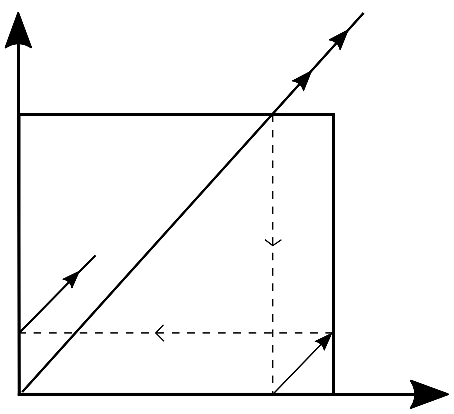


Figura 1.6: Campo irracional no Toro.

O campo Y^α, como abordado acima, é chamado de campo racional ou irracional em T^2 conforme α seja racional ou não. Se α é racional, o w-limite de qualquer órbita é ela própria. Se α é irracional, o w-limite de qualquer órbita é todo o toro T^2.

A seguir, apresentamos algumas propriedades gerais dos conjuntos w-limites e podem ser encontradas em [17].

Proposição 1.37. *Sejam* $X \in \mathscr{X}^r(M)$*,* M *uma variedade compacta e* $p \in M$*, temos:*

a) $w(p) \neq \emptyset$.

b) $w(p)$ *é fechado.*

c) $w(p)$ *é invariante pelo fluxo de* X, *isto é,* $w(p)$ *é uma união de órbitas de* X.

d) $w(p)$ *é conexo.*

Observação 1.38. *As propriedades acima também são válidas para o conjunto* α*-limite. Por outro lado, se a variedade não é compacta, devemos nos restringir a uma órbita que positivamente (ou negativamente) permaneça em um subcunjunto compacto da variedade e ainda obtemos estas propriedades.*

Lembremos que uma curva simples fechada em uma variedade M é imagem homeomorfa da círcunferência S^1 em M ou, dito de outra forma, a imagem de S^1 por uma injeção contínua $S^1 \to M$.

O seguinte teorema é conhecido na topologia e uma prova dele pode ser encontrada em [7]

Teorema 1.39. ***(Curva de Jordan)*** *Uma curva simples fechada* C *na esfera* S^2 *separa a esfera em duas componentes conexas, cada uma homeomorfa a um disco, isto é,* $S^2 \setminus C = D_1 \cup D_2$ *com* D_1 *e* D_2 *homeomorfos a um disco.*

Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e X um campo vetorial de classe C^r, $r \geq 1$, em U. Pode-se definir a semi-órbita positiva por p, como $\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p), t \geq 0\}$ e a semi-órbita negativa por p como $\gamma_p^- = \{\varphi(t,p), t \leq 0\}$.

Teorema 1.40. ***(Poincaré-Bendixson)*** *Seja* $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ *uma curva integral de* X, *definida para todo* $t \geq 0$, *tal que* γ_p^+ *esteja contida em um compacto* $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$, U *aberto. Suponha que o campo* X *possua um número finito de singularidades em* $w(p)$. *Então, tem-se as seguintes alternativas:*

(a) Se $w(p)$ *contém somente pontos regulares, então* $w(p)$ *é uma órbita periódica.*

(b) Se $w(p)$ *contém pontos regulares e singulares, então* $w(p)$ *consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando* $t \to \pm\infty$.

(c) Se $w(p)$ *não contém pontos regulares, então* $w(p)$ *é um ponto singular.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [17].

Como já vimos, o w-limite de uma órbita do fluxo irracional no toro T^2 é todo o toro. Existem exemplos mais complexos de campos em T^2 com um conjunto w-limite de estrutura bastante complicada. Entretanto, para a esfera S^2 a situação é bem mais simples devido ao Teorema da Curva de Jordan. A estrutura de um conjunto w-limite de campos em S^2 é descrita pelo Teorema de Poincaré-Bendixson que mostraremos a seguir.

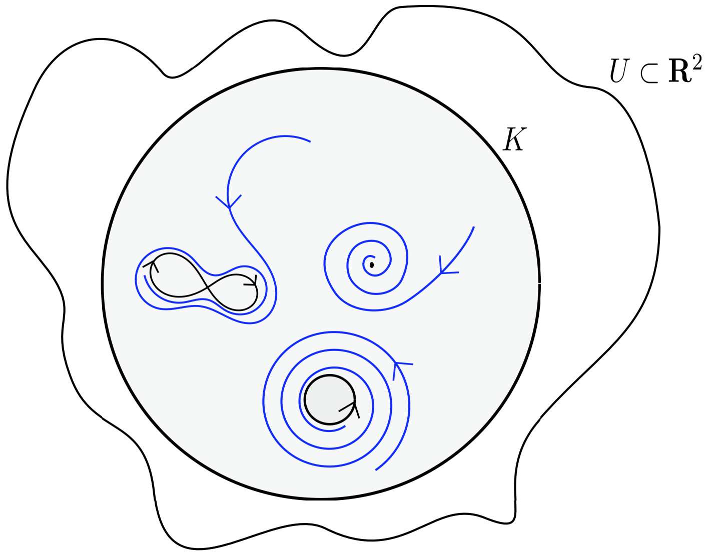


Figura 1.7: Teorema de Poincaré-Bendixson.

Corolário 1.41. ***(Poincaré-Bendixson na esfera)*** *Seja $X \in \mathscr{X}^r(S^2)$, $r \geq 2$ um campo com um número finito de singularidades. Sejam $p \in S^2$ e $w(p)$ o conjunto w-limite de p. Então ocorre uma das seguintes alternativas:*

1) $w(p)$ é uma singularidade,

2) $w(p)$ é uma órbita fechada,

3) $w(p)$ é constituído por singularidades $p_1, \ldots, p_n$ e órbitas regulares, tais que, se $\gamma \subset w(p)$, então, $\alpha(\gamma) = p_i$ e $w(\gamma) = p_j$.

Demonstração. Seja $\psi : S^2 \setminus \{p_N\} \to \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo dado pela projeção estereografica da esfera furada (no polo norte) $S^2 \setminus \{p_N\}$ no plano $\mathbb{R}^2$, e, seja X um campo vetorial de classe C^r, $r \geq 1$, consideremos a curva integral $\gamma : I \to S^2$, tal que, para algum t_0, $\gamma(t_0) = p \in S^2$.

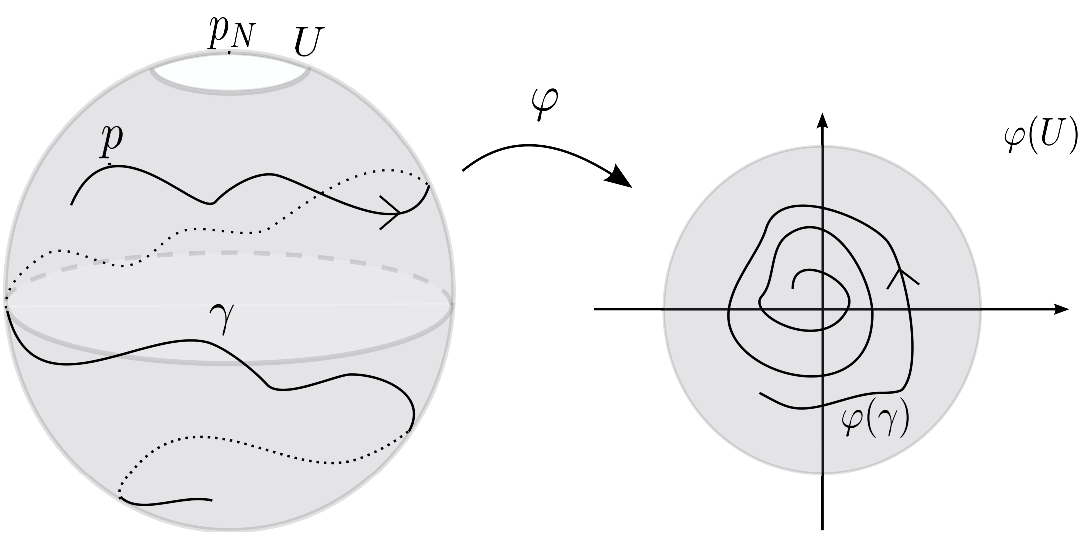


Figura 1.8: Corolário de Poincaré-Bendixson na esfera.

Caso 1: *Se $p_N \notin \overline{\gamma\{t\}}$, então, seja U um aberto em S^2 tal que $p_N \in U$ e $\gamma(t) \cap U = \emptyset$, logo $\psi(U)$ é aberto, assim, $M \setminus \psi(U) = V$ é fechado e compacto. Além disso $\psi(\gamma) \subset V$. Considerando $Y = \psi(X)$ o campo em $\mathbb{R}^2$ associado a ψ o qual tem um número finito de singularidades, então, para um $\tilde{p} = \psi(p) \in \mathbb{R}^2$ temos que $w(\tilde{p}) = \lim\limits_{t_n \to \infty} Y_{t_n}(\tilde{p})$ satisfaz as condições do Teorema 1.40, portanto,*

$$w(p) = \psi^{-1}(w(\tilde{p})) = \psi^{-1}(\lim_{t_n \to \infty} Y_{t_n}(\tilde{p})) = \lim_{t_n \to \infty} \psi^{-1}(Y_{t_n}(\tilde{p}))$$

$$= \lim_{t_n \to \infty} \psi^{-1}(\psi(X)(\psi(p))) = \lim_{t_n \to \infty} X_{t_n}(p)$$

satisfaz as condições na esfera $S^2 \setminus \{p_N\}$.

Caso 2: *Se $p_N \in \overline{\gamma\{t\}}$, então, existe um $p \in S^2$ tal que $p \notin \overline{\gamma(t)}$, pela página 3 de [**?**] não existe uma única trajetória densa cobrindo toda a esfera, isto é, $\overline{\gamma(t)} \neq S^2$, logo, existe um aberto $U \subset S^2 \setminus \overline{\gamma(t)}$ com $p \in U$ e $U \cap \overline{\gamma(t)} = \emptyset$. Assim, por um raciocínio análogo ao caso 1, para o ponto p concluimos nossa prova.*

■

Observação 1.42. *Se $r = 1$, o gráfico pode ser formado pela união finita de singularidades e até infinitas órbitas regulares como veremos no Exemplo 1.44.*

Nos exemplos dados a seguir, ilustramos alguns fatos sobre este Teorema.

Exemplo 1.43. *Seja X um campo em S^2. Os polos norte e sul são singularidades e o equador uma órbita fechada. As outras órbitas nascem nos polos e morrem no equador (como na Figura 1.9). Seja $\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ que se anula exatamente no equador da esfera. Consideremos o campo $Y = \varphi \cdot X$. Todo ponto do equador é uma singularidade de Y e o conjunto w-limite de um ponto p que não esteja nos polos nem no equador é todo o equador. Este exemplo mostra que o Teorema de Poincaré-Bendixson não é válido sem a hipótese de um número finito de singularidades.*

Exemplo 1.44. *Seja X um campo em S^2. O campo X possui duas singularidades p_S e p_N, e uma órbita fechada γ. As órbitas do hemisfério norte da esfera têm como α-limite a p_N e como w-limite a γ. No hemisfério sul, temos a singularidade p_S que é o centro de uma rosa com uma infinidade de pétalas limitadas por órbitas que nascem em p_S e morrem em p_S. As demais órbitas do hemisfério sul têm γ como α-limite e a fronteira da rosa como w-limite. Portanto, o w-limite de uma órbita pode conter uma infinidade de órbitas regulares.*

Outro fato conhecido sobre campos de vetores definido em S^2 é o seguinte resultado que pode ser encontrado em [12].

Teorema 1.45. ***(Poincaré)*** *Todo campo contínuo de vetores tangentes à esfera S^2 admite uma singularidade.*

A prova deste teorema pode se encontrar em [12], cap. 3, página 62.

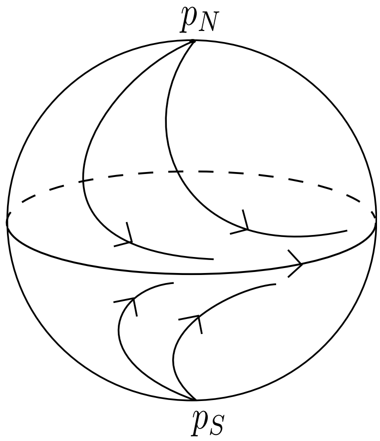


Figura 1.9: Exemplo de infinitas singularidades no Corolário de Poincaré-Bendixson.

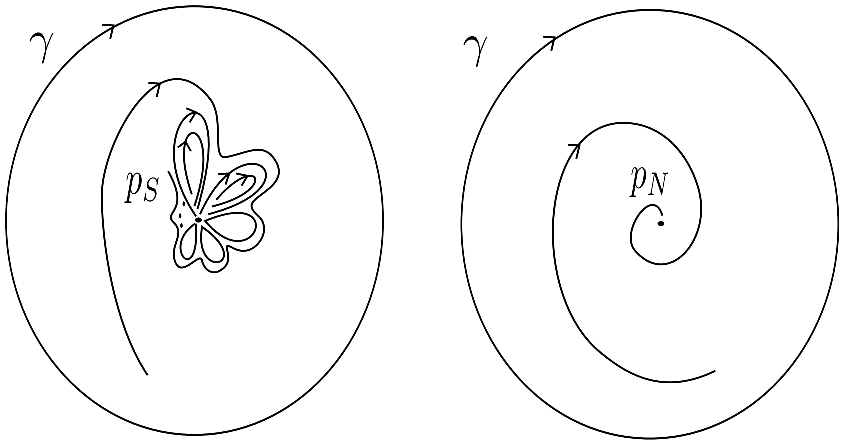


Figura 1.10: Campo com infinitas pétalas em S^2.

1.3.1 Colchete de Lie

Seja M uma n-variedade. Lembre-se que se X e Y são campos de vetores suaves em M, então, X e Y são operadores diferenciais de primeira ordem em funções suaves $M \to \mathbb{R}$. Assim, para uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$, $X \circ f$ e $Y \circ f$ são novamente funções suaves $M \to \mathbb{R}$.

Definição 1.46. *Agora definimos um operador diferencial $[X, Y]$, chamado colchete de Lie ou o comutador de X e Y como:*

$$[X, Y] := XY - YX.$$

Isto é, para uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$,

$$[X, Y](f) := X(Y \circ f) - Y(X \circ f).$$

Pela sua definição, $[X, Y]$ é um operador diferencial de segunda ordem. No entanto, verifica-se que $[X, Y]$ é na verdade um operador diferencial de primeira ordem e, de fato, um campo vetorial:

Teorema 1.47. *Para qualquer campo de vetores suaves X e Y em uma n-variedade M, o colchete de Lie $[X, Y]$ é novamente um campo de vetores suaves em M.*

Não daremos uma prova detalhada do teorema anterior mas, em vez disso, apenas verifica-se que o teorema é válido para os campos de vetores básicos.

Seja $\phi = (x_1, \dots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ um caminho de coordenadas em M. Seja $X = a(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = b(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}$ para algum $1 \geq i, j \geq n$ e para alguma função suave $a = a(x_1, \dots, x_n)$ e $b = b(x_1, \dots, x_n)$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Agora calculamos $[X, Y](f)$. Por definição:

$$[X, Y](f) = [a\frac{\partial}{\partial x_i}, b\frac{\partial}{\partial x_j}]f = a\frac{\partial}{\partial x_i}(b\frac{\partial f}{\partial x_j}) - b\frac{\partial}{\partial x_j}(a\frac{\partial f}{\partial x_i}) =$$

usando a regra do produto

$$a\frac{\partial b}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + ab\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - b\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} - ba\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} =$$

$$a\frac{\partial b}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - b\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = (a\frac{\partial b}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i})f$$

Assim sendo,

$$[X, Y] = [a\frac{\partial}{\partial x_i}, b\frac{\partial}{\partial x_j}] = a\frac{\partial b}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.1}$$

Note que, se $a = b = 1$, então, $\frac{\partial b}{\partial x_i} = \frac{\partial a}{\partial x_j} = 0$. Assim sendo,

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0.$$

Vejamos agora algumas propriedades gerais do colchete de Lie:

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$.

(2) $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$ e $[X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2]$.

(3) para quaisquer funções suaves $a, b : M \to \mathbb{R}$

$$[aX, bY] = ab[X, Y] + a(Xb)Y - b(Ya)X.$$

(4) (identidade de Jacobi)

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Note que, com a propriedade (2) acima e a fórmula (1.1), não é difícil calcular $[\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}]$ em um gráfico de coordenadas $\phi = (x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ em M:

$$\begin{aligned}
[\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}] &= \sum_i \sum_j [a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}] \\
&= \sum_i \sum_j a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Porém, como uma questão prática, é melhor lembrar a fórmula (1.1) juntamente com as propriedades (1), (2), (3) e (4) acima, em vez de tentar memorizar a fórmula (1.2).

Exemplo 1.48. *Seja $M = \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) e seja $X = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + e^{yz}\frac{\partial}{\partial y}$ e $Y = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 5\frac{\partial}{\partial z}$.*

Queremos calcular $[X, Y]$. Sabemos, pela propriedade (2):

$$\begin{aligned}
[X, Y] =& [2xz\frac{\partial}{\partial x}, (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x}] + [2xz\frac{\partial}{\partial x}, 5\frac{\partial}{\partial z}] + \\
&+ [e^{yz}\frac{\partial}{\partial y}, (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x}] + [e^{yz}\frac{\partial}{\partial y}, 5\frac{\partial}{\partial z}].
\end{aligned}$$

Usando (1.2),obtemos:

$$\begin{aligned}
[2xz\frac{\partial}{\partial x}, (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x}] &= 2xz2x\frac{\partial}{\partial x} - (x^2 + y^2 + z^2)2z\frac{\partial}{\partial x} \\
&= (2x^2z - 2y^2z - 2z^3)\frac{\partial}{\partial x},
\end{aligned}$$

e

$$[2xz\frac{\partial}{\partial x}, 5\frac{\partial}{\partial z}] = 0 - 10x\frac{\partial}{\partial x} = -10x\frac{\partial}{\partial x},$$

e

$$[e^{yz}\frac{\partial}{\partial y}, (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x}] = e^{yz}2y\frac{\partial}{\partial x} - (x^2 + y^2 + z^2)\cdot 0\frac{\partial}{\partial y} = e^{yz}2y\frac{\partial}{\partial x},$$

e

$$[e^{yz}\frac{\partial}{\partial y}, 5\frac{\partial}{\partial z}] = e^{yz}\cdot 0\frac{\partial}{\partial z} - 5ye^{yz}\frac{\partial}{\partial y} = -5ye^{yz}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Assim,

$$[X, Y] = (2x^2z - 2y^2z - 2z^3 - 10x + 2ye^{yz})\frac{\partial}{\partial x} - 5ye^{yz}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Teorema 1.49. *Sejam $X^1, \ldots, X^k$ k campos de vetores de classe C^r ($r \geq 1$ definidos em M. Suponhamos que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, o fluxo X^i_t esta definido em $\mathbb{R} \times M$. As seguintes afirmações são equivalente:*

a) Os campos $X^1, \ldots, X^k$ são gerados de uma ação de classe C^r, $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \to M$.

b) Para quaisquer $i, j \in \{i, \ldots, k\}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, temos $X^i_t \circ X^j_s = X^j_s \circ X^i_t$.

c) Para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, temos $[X^i, X^j] = 0$.

A prova deste resultado pode ser consultada em [4]

1.3.2 Teorema do fluxo tubular

Como referência para os resultados não demonstrados aqui, recomendamos ao leitor consultar [16].

Definição 1.50. *Sejam $X, Y \in \mathscr{X}^r(M)$ e $p, q \in M$. Dizemos que X e Y são topologicamente equivalentes em p e q respectivamente, se existem vizinhanças V_p e W_q e um homeomorfismo $h : V_p \longrightarrow W_q$ que leva órbitas de X em órbitas Y, preservando a orientação das órbitas e $h(p) = q$.*

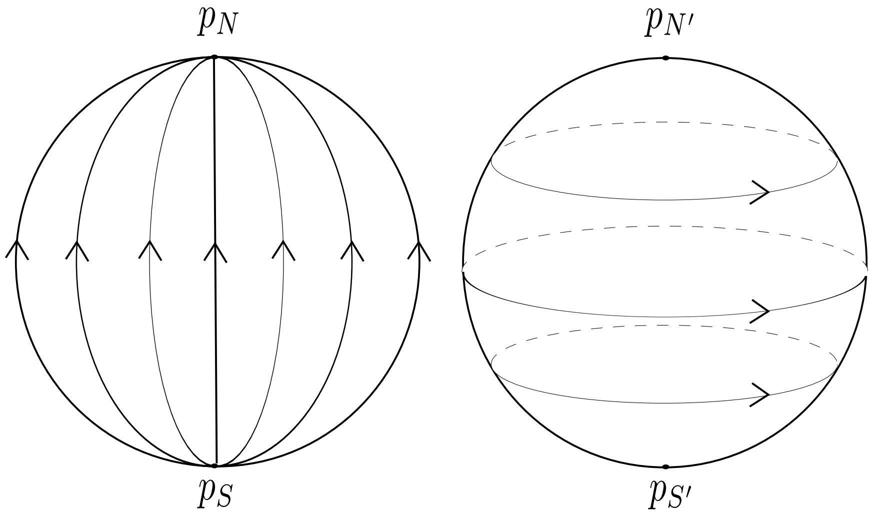


Figura 1.11: Campos não equivalentes.

Exemplo 1.51. *Consideremos os campos X e Y em S^2 (dados na Figura 1.11), X e Y não são equivalentes em p_N e $p_{N'}$, pois, qualquer vizinhança de $p_{N'}$ contém órbitas fechadas de Y, o que não ocorre em vizinhanças de p_N.*

Definição 1.52. *Sejam $X \in \mathscr{X}^r(M)$ e $p \in M$. Dizemos que X é localmente estável em p se existem vizinhanças $\mathscr{N}_X$ de X em $\mathscr{X}^r(M)$ e $U(p) \subset M$, tais que, para cada $Y \in \mathscr{N}_X$, X em p é topologicamente equivalente a Y em q, para algum $q \in U$.*

O teorema abaixo descreve o comportamento local das órbitas na vizinhança de um ponto regular.

Teorema 1.53. ***(Fluxo Tubular)*** *Seja $X \in \mathscr{X}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto regular de X. Sejam $C = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m; |x_i| < 1\}$ e X_C um campo em C definido por $X_C(x) = (1, 0, \cdots, 0)$. Então, existe um difeomorfismo de classe C^r, $h : V_p \longrightarrow C$, onde V_p é uma vizinhança de p em M, levando trajetórias de X em trajetórias de X_C (ver Figura 1.12).*

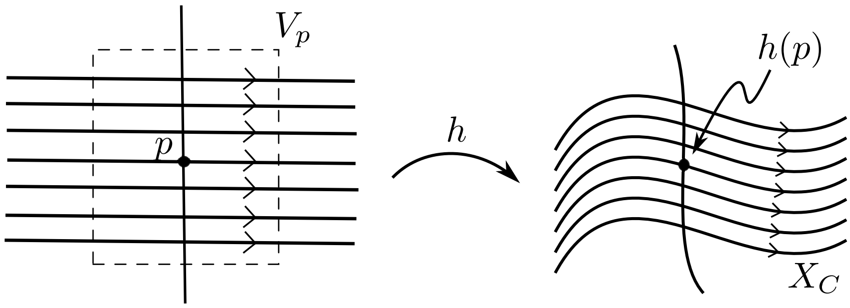


Figura 1.12: Fluxo tubular.

Observação 1.54. *O difeomorfismo $\tilde{h}^{-1} : C_\varepsilon \longrightarrow M$ definido por $\tilde{h}^{-1} = x^{-1} \circ \tilde{\psi}$ leva órbitas do campo unitário paralelo X_{C_ε} em órbitas do campo X preservando o parâmetro t.*

Corolário 1.55. *Se $X, Y \in \mathscr{X}^r(M)$ e $p, q \in M$ são pontos regulares de X e Y respectivamente, então X é equivalente a Y em p e q.*

Corolário 1.56. *Se $X \in \mathscr{X}^r(M)$ e $p \in M$ é um ponto regular de X, então X é localmente estável em p.*

Como consequência do Teorema 1.53, temos o seguinte resultado importante para nosso trabalho.

Teorema 1.57. ***(Fluxo Tubular Longo)*** *Suponha que $\varphi_t(p) \neq \varphi_s(p)$ para $t \neq s$, com $t, s \in [a, b]$. Então pode-se tomar um aberto $W_l \subset V$ suficientemente pequeno tal que $\tau : (a, b) \times W_l \to E$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.*

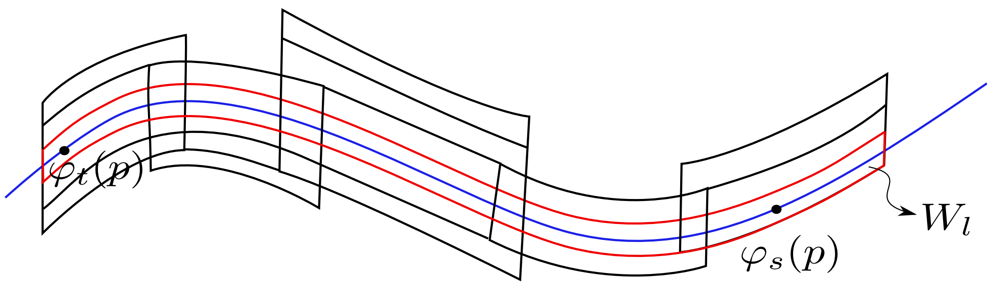


Figura 1.13: Fluxo tubular longo.

Capítulo 2

Folheações e Ações de Grupos

Apresentamos neste capítulo a noção de uma folheação e de outras propriedades que serão utilizadas no resto da dissertação. Também apresentamos vários exemplos ilustrando os conceitos. Os resultados inseridos nesta seção podem ser encontrados em [4], [10], [9] e [2].

2.1 Folheação

Uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M^m é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ com a segunda coordenada constante.

O exemplo mais elementar de folheação de dimensão n é a folheação de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ onde as folhas são n-planos da forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ com $c \in \mathbb{R}^{m-n}$.

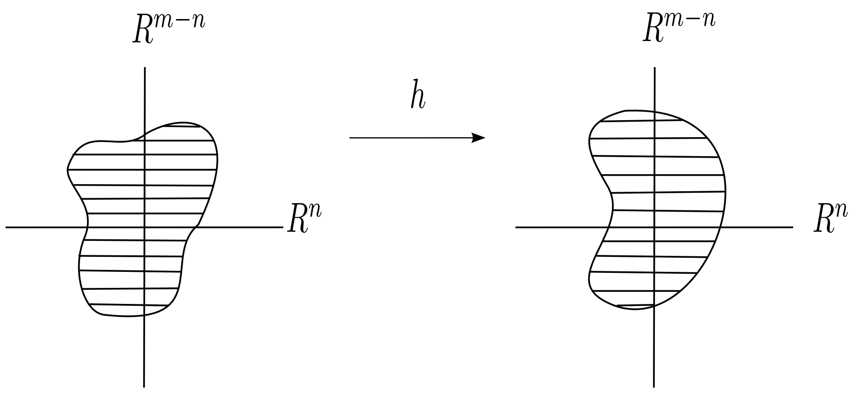


Figura 2.1: Comportamento local de uma folheação.

Os difeomorfismos locais $h : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^m$ que preservam as folhas desta folheação são aqueles que, para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ com $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \neq \emptyset$, satisfazem $h(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{c'\})$, $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$. Estes difeomorfismos têm a seguinte expresão:

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \tag{2.1}$$

Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Seja M uma variedade C^∞ de dimensão m. Uma C^r folheação de dimensão n de M é um atlas máximo $\mathscr{F}$ de classe C^r em M, com as seguintes propriedades:*

(a) Se $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$, então, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ onde U_1 e U_2 são discos abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.

(b) Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathscr{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então, a aplicação de mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é da forma (2.1), isto é, $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$. Dizemos também, que M é folheada por $\mathscr{F}$, ou ainda que $\mathscr{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r em M.

Na Figura 2.2, ilustramos o aspecto local de uma variedade 2-dimensional folheada por uma folhação 1-dimensional.

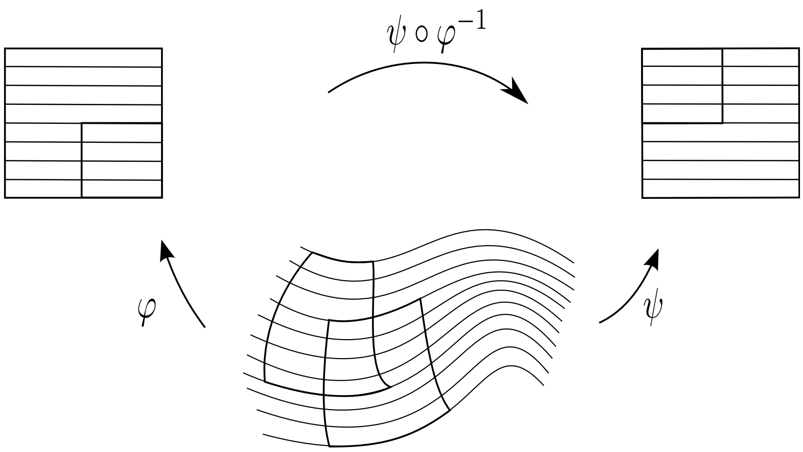


Figura 2.2: Folheação.

Observação 2.2. *Quando dizemos que M é uma variedade C^∞ que possui um atlas $\mathscr{F}$ como acima, estamos implicitamente dizendo que M possui um atlas $\mathscr{A}$ cujas mudança de coordenadas são C^∞, porém, se $(U, \varphi) \in \mathscr{A}$ e $(V, \psi) \in \mathscr{F}$ e $U \cap V \neq \emptyset$, então, $\varphi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \varphi^{-1}$ são C^r. A única relação entre os atlas $\mathscr{F}$ e $\mathscr{A}$ é que as mudanças de variáveis mistas, como acima, são C^r. Como é claro da definição, o atlas $\mathscr{F}$ é muito especial (devido à condição (2.1)).*

Observemos também que, se $A = \{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$ é um atlas, não máximo, cujas cartas locais satisfazem (a) e (b), então, existe um único atlas máximo que contém A e satisfaz (a) e (b). Este atlas é definido como o conjunto de todos as cartas, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, tais que, se $U \cap U_i \neq \emptyset$ para algum $i \in I$, então, $h = \varphi \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \to \varphi(U \cap U_i)$, é um difeomorfismo C^r da forma

(2.1). Embora a condição do atlas ser máximo seja dispensável na definição, ela é conveniente porque, neste caso, o conjunto de todos os domínios de cartas locais formam uma base para a topologia de M.

De agora em diante, consideremos apenas folheações de classe C^r, $r \geq 1$. As cartas $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ serão chamadas também cartas trivializadoras de $\mathscr{F}$.

Seja $\mathscr{F}$ uma folheação de classe C^r e dimensão n, $0 < n < m$, de uma variedade M^m. Consideremos uma carta local (U, φ) de $\mathscr{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamadas placas de U, ou ainda placas de $\mathscr{F}$. Fixando $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to U$ é um mergulho de classe C^r, portanto, as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r de M. Além disto, se α e β são placas de U, então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Um caminho de placas de $\mathscr{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de placas de $\mathscr{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de $\mathscr{F}$, podemos definir em M a seguinte relação de equivalência: "pRq se existe um caminho de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$". As classes de equivalência da relação R são chamadas folhas de $\mathscr{F}$.

Da definição, segue que uma folha de $\mathscr{F}$ é um subconjunto de M conexo por caminhos. De fato, se F é uma folha de $\mathscr{F}$ e $p, q \in F$, então, existe um caminho de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Como as placas α_j são conexas por caminhos e $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, é imediato que $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \subset F$ é conexo por caminhos, logo, existe um caminho contínuo em F ligando p a q.

Outro fato importante é que toda folha F de $\mathscr{F}$ possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n naturalmente induzida pelas cartas de $\mathscr{F}$.

Exemplo 2.3. Folheação definida por submersão. *Seja $f : M^m \to N^n$ uma submersão de classe C^r. Pela forma local das submersões, dados $p \in M$ e $q = f(p) \in N$ existem cartas locais (U, φ) em M, (V, ψ) em N, tais que, $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \to U_2$ coincide com a segunda projeção $(x, y) \mapsto y$.*

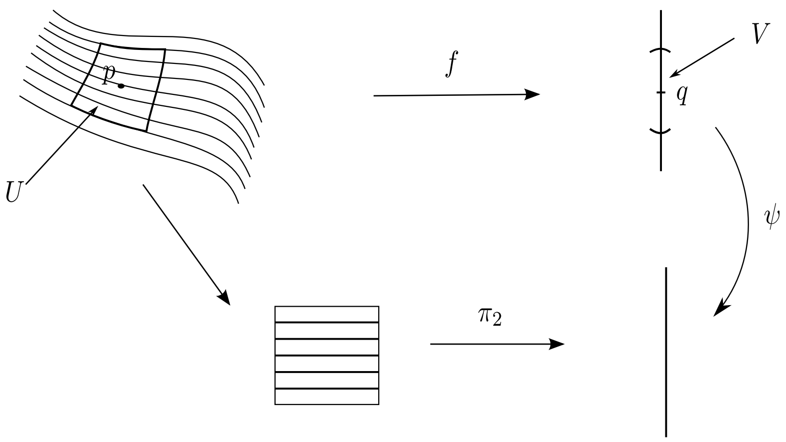


Figura 2.3: Folheação definida por submersão.

Daí é claro que as cartas locais (U, φ) definem uma estrutura de variedade folhada de classe C^r onde as folhas são as componentes conexas das superfícies *de nível* $f^{-1}(c)$, $c \in N$. *Vejamos um exemplo específico. Seja* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *a submersão definida por* $f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z$ *onde* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função* C^∞ *tal que* $\alpha(1) = 0$ *e* $\alpha(0) = 1$ *e se* $t > 0$, *então,* $\alpha'(t) < 0$. *Seja* $\mathscr{F}$ *a folheação de* $\mathbb{R}^3$ *cujas folhas são componentes conexas das subvariedades* $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

As folhas de $\mathscr{F}$ *no interior do cilindro sólido* $C = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ *são todas homeomorfas a* $\mathbb{R}^2$ *e podem ser parametrizadas por* $(x, y) \in D^2 \mapsto (x, y, log(c/\alpha(r^2)))$, *onde* $c > 0$. *A fronteira de* C, *dada por* $\partial C = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 = 1\}$ *é também uma folha. Fora de* C *as folhas são todas homeomorfas a cilindros.*

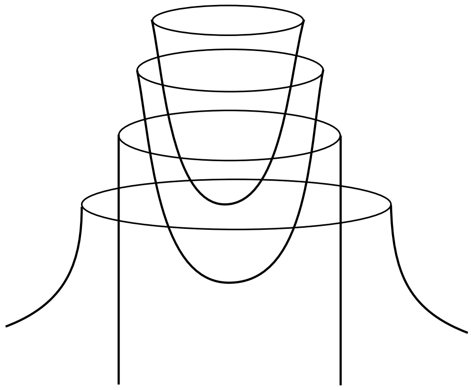


Figura 2.4: Exemplo de folheação.

Exemplo 2.4. As folheações de S^3 de Reeb. *O seguinte exemplo desempenhou um papel importante no desenvolvimento da teoria de folheações.*

Considere a submersão do exemplo 2.3, $f : D^2 \times R \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x, y, z) = \alpha(r) \cdot e^z$, *onde agora* $\alpha(r)$ *é a função* $\alpha(r) = exp(-exp(1/1 - r^2))$. *A folheação definida por* f *tem por folhas os gráficos das funções* $z = exp(1/1 - r^2) + b$, $b \in \mathbb{R}$ *e se estende a uma folheação* C^∞ *de* $\mathbb{R}^3$ *cujas folhas no exterior de* $D^2 \times \mathbb{R}$ *são os cilindros* $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 1$.

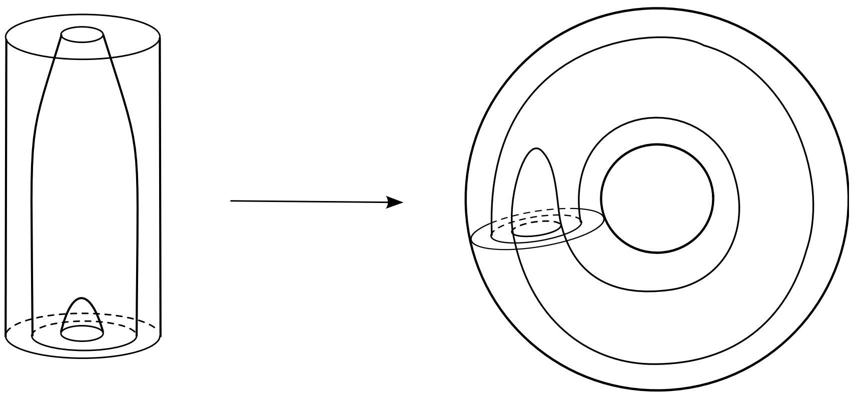


Figura 2.5: Folheação de Reeb.

Em $D^2 \times [0, 1]$ *identificamos os pontos da fronteira da maneira seguinte:* $(x_1, y_1, 0) \equiv (x_2, y_2, 1)$ *se e somente se* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. *A variedade quociente* $D^2 \times [0, 1]/\equiv$ *é difeomorfa a* $D^2 \times S^1$ *e como a folheação definida em* $D^2 \times \mathbb{R}$

é invariante por translação ao longo do eixo z (isto é, uma translações destas, leva folhas sobre folhas), ela induz uma folheação $\mathscr{R}$ de classe C^∞ de $D^2 \times S^1$. Esta é a chamada folheação de Reeb (orientável) de $D^2 \times S^1$. Nesta folheação, a fronteira $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ é uma folha. Além disso, as outras folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e se acumulam somente na fronteira. É fácil ver que esta folheação não é definida por uma submersão. Se no lugar da identificação acima, consideramos em $D^2 \times [0,1]$ a relação $(x_1, y_1, 0) \sim (x_2, y_2, 1)$ se, e somente se, $(x_1, y_1) = (x_2, -y_2)$, então, o quociente $D^2 \times [0,1]/\sim$ será uma variedade não orientável de dimensão três, K^3, cuja fronteira é difeomorfa à garrafa de Klein. Como esta identificação preserva a folheação de $D^2 \times \mathbb{R}$, esta induz uma folheação $\mathscr{R}$ de K^3 chamada a folheação Reeb não-orientável de K^3. As folhas de $\mathscr{R}$ no interior de K^3 são todas homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e a fronteira de K^3 é uma folha.

A partir de duas folheações de Reeb de $D^2 \times S^1$ podemos obter uma folheação C^∞ de S^3 da maneira seguinte. A esfera $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$ pode ser considerada como a união de dois toros sólidos $T_i \simeq D^2 \times S^1$, $i = 1, 2$ unidos ao longo da fronteira por um difeomorfismo que leva meridianos de ∂T_1 em paralelos de ∂T_2 e vice-versa. O toro sólido T_1 pode ser definido pelas equações $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$ e $x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2$, e o toro sólido T_2 pelas equações $x_1^2 + x_2^2 \geq 1/2$.

Uma outra maneira de ver essa decomposição de S^3 em dois toros sólidos é a seguinte. Considere a projeção estereográfica $\pi : S^3 - P \to \mathbb{R}^3$ onde $P = (0,0,0,1)$ e $\pi(x)$ é o ponto de intersecção com o plano $x_4 = 0$ da reta que contém P e x. Como π é um difeomorfismo, S^3 pode ser considerada como a união de $\mathbb{R}^3$ com o ponto P no infinito.

Consideremos agora no plano $x_1 x_3$ as regiões S_1 limitadas pelos círculos de raio 1 centrados em $p = (2,0)$, $q = (-2,0)$ e $S_2 = \mathbb{R}^2 \setminus S_1$.

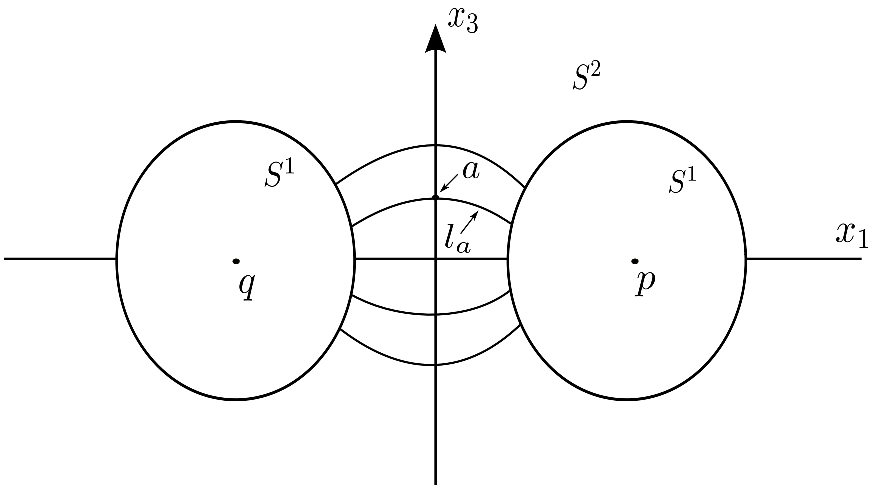


Figura 2.6: $\mathbb{R}^3$ como soma de dois toros.

Ao girar esta figura em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo x_3, a região S_1 gera um toro sólido S_1'. Seja $S_2' = \mathbb{R}^3 \setminus S_1'$ e note que $\pi^{-1}(S_2') \cup P$ é também um toro sólido. De fato considere os círculos do plano $x_1 x_3$ com centro no eixo x_3 e que passam pelos pontos p e q. Seja l_a a componente conexa de um destes círculos em S_2 que intersecta o eixo x_3 no ponto a. Colocando $l_\infty = \{(x_1, 0) | x_1^2 \geq 9\}$ obtemos uma folheação de S_2 cujas folhas são as curvas $\{l_a\}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ao girar o *plano x_1x_3 em torno do eixo x_3, as curvas $l_a(a \in \mathbb{R})$ geram discos D_a e l_∞ gera um cilindro D_∞. Cada D_a, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, intersecta o toro $\partial S_1'$ ao longo de um paralelo.*

É claro agora que, ao acrescentarmos a $\mathbb{R}^3$ o ponto P via a projeção estereográfica, o eixo x_3 junto com P define o eixo de um toro sólido T_2 o qual esta folheado por discos $\pi^{-1}(D_a)$, $a \in \mathbb{R}$ mais o disco $D_P = \pi^{-1}(D_\infty) \cup P$.

Se denotamos por T_1 o toro sólido $\pi^{-1}(S_1')$ obtemos que $S^3 = T_1 \cup T_2$ e os paralelos de ∂T_1 coincidem com os meridianos de ∂T_2 e vice-versa.

Voltando à construção da folheação de S^3, considere a folheação que resulta de unir duas folheações de Reeb de T_1 e T_2 onde $\partial T_1 = \partial T_2$ é uma folha. Obtemos assim uma folheação de S^3 de codimensão 1 chamada folheação de Reeb de S^3. Esta folheação é C^∞ e possui uma folha homeomorfa a T^2. Todas as outras folhas são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e acumulam-se na folha compacta.

Exemplo 2.5. Campos de vetores sem singularidades. *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathscr{X}^r(M)$ um campo de vetores sobre M sem singularidades, então, existe uma decomposiçaõ de M em órbitas associadas a dito campo. Estas órbitas são as folhas de uma folheação definida em M.*

A seguir apresentaremos uma definição que generaliza o conceito de folheação dado acima.

Definição 2.6. *Uma C^r-folheação $\mathscr{F}$, com $r \geq 1$, de uma m-variedade diferenciável é uma partição de M em C^r-subvariedades conexas e imersas, chamadas folhas, tais que o módulo $\mathscr{X}^r(\mathscr{F})$, de todos os C^r campos de vetores tangentes as folhas é transitivo, isto é, dado $p \in M$ e $v \in T_pL$, onde L é a folha por p, existe $X \in \mathscr{X}^r(\mathscr{F})$ tais que $X(v) = p$*

Observação 2.7. *1. Esta definição é equivalente à Definição 2.1 sempre que todas as folhas tenham a mesma dimensão.*

2. Poderiam existir folhas de diferentes dimensões. A dimensão da folheação $\mathscr{F}$ é d, se d for o máximo possível das dimensões das folhas. Se $dimL < d$, então, L é chamada de folha singular e se $dimL = d$ a folha L será chamada de folha regular e $Sing(\mathscr{F}) = \{p \in L; L$ é folha singular $\}$ é chamado de conjunto singular de $\mathscr{F}$.

3. Um campo de vetores sobre uma variedade define uma folheação com ou sem singularidade.

2.2 Ações de grupos sobre Variedades

Nesta seção, M denota uma variedade diferenciável de classe C^∞ e G um grupo de Lie simplesmente conexo. Como referência para os resultados não demonstrados aqui recomendamos ao leitor se referir ao capítulo VIII de [4], [10] e [9].

Uma ação de classe C^k de G em M é uma aplicação C^k, $\varphi : G \times M \to M$, satisfazendo as propriedades abaixo:

(1) $\varphi(e, x) = x$ para todo $x \in M$, onde e é a identidade de G.

(2) $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, x)$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in M$.

Denotaremos por $\varphi_g : M \to M$ à aplicação $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$. Da definição, segue-se que $\varphi_{g-1} = (\varphi_g)^{-1}$ para todo $g \in G$, o que mostra que $\varphi_g : M \to M$ é um difeomorfismo C^k.

Definição 2.8. *A órbita de um ponto $x \in M$ pela ação φ é o subconjunto $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(g, x) | g \in G\}$. O grupo de isotropia de $x \in M$ pela ação φ é o subgrupo de G definido por $G_x = G_x(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g, x) = x\}$.*

Da definição, é evidente que G_x é um subgrupo fechado de G. Consideremos em G a relação de equivalência $\sim$ tal que $g_1 \sim g_2$ se, e somente se, $g_1^{-1} \cdot g_2 \in G_x$. Sejam G/G_x o espaço quociente de G por $\sim$ e $\pi : G \to G/G_x$ a projeção definida para cada $g \in G$ como a classe de equivalência $\pi(g)$.

Os seguintes dois teoremas descrevem a estrutura das órbitas de uma ação.

Teorema 2.9. *Em G/G_x existe uma única estrutura de variedade diferenciável tal que $\pi : G \to G/G_x$ define um espaço fibrado com fibra G. Em particular, se consideramos G/G_x com esta estrutura, π é uma submersão e se G_x é discreto, então, π é uma aplicação de recobrimento.*

Teorema 2.10. *Seja $\varphi : G \times M \to M$ uma ação de classe C^k, $k \geq 1$ e $x \in M$. Existe uma única imersão biunívoca de classe C^k, $\overline{\varphi}_x : G/G_x \to \mathcal{O}_x$ tal que $\overline{\varphi}_x \circ \pi = \varphi_x$. Caso G_x seja discreto, a aplicação $\varphi_x : G \to \mathcal{O}_x$ é uma aplicação de recobrimento.*

Quando para todo $x \in M$, $dim(\mathcal{O}_x) = dim(G)$, dizemos que a ação φ é localmente livre, assim uma ação localmente livre define uma folheação e se a ação não for localmente livre, então, ela define uma folheação singular, isto é, uma folheação $\mathscr{F}$ onde o conjunto $Sing(\mathscr{F}) \neq \emptyset$.

Vejamos como podem ser as órbitas de uma ação de $\mathbb{R}^n$ numa variedade M.

Proposição 2.11. *Seja H um subgrupo fechado de $\mathbb{R}^n$. Então H é isomorfo a um dos grupos $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$ onde k, l são inteiros com $0 \leq k + l \leq n$. Em particular, as órbitas de uma ação de $\mathbb{R}^2$ são imersões de alguma das seguintes veriedades: pontos, S^1, $\mathbb{R}$, $S^1 \times S^1$, $S^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 2.12. *Vejamos agora um exemplo de uma ação de $\mathbb{R}^2$ em S^3. Seja $D^2 \times S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1, y_1^2 + y_2^2 = 1\}$. Consideremos os campos de vetores*

$$X(x_1, x_2, y) = (\rho(r)x_1 - \beta x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta x_1 + \rho(r)x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\alpha x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ *e* $\rho(r)$ *é uma função* C^∞ *não negativa tal que* $\rho(r) = 0$ *se, e somente se,* $r = 1$, $\frac{d^n\rho}{dr^n}(1) = 0$ *para todo* $n \geq 1$, *e* $\rho(r) = 1$ *para* r *em uma vizinhança de zero.*

É fácil ver que os fluxos X_t *e* Y_t *comutam, isto é,* $X_s \circ Y_t = Y_t \circ X_s$ $(s, t \in \mathbb{R})$ *em* $D^2 \times S^1$, *logo, eles definem uma ação* φ *de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}^2$ *em* $D^2 \times S^1$, *possuindo duas órbitas compactas que são* $\{0\} \times S^1$ *e* $\partial(D^2 \times S^1)$. *No caso em que* α *é um número irracional, todas as outras órbitas são planos densos em* $D^2 \times S^1$. *Quando* α *é racional elas são cilindros mergulhados.*

Tomando duas cópias de $D^2 \times S^1$ *e indentifando-as ao longo da fronteira* $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ *por meio de um difeomorfismo que leva paralelos de um em meridianos do outro e vice-versa, obtemos exemplos de ações de* $\mathbb{R}^2$ *em* S^3 *em que as órbitas de dimensão* < 2 *são dois círculos entrelaçados.*

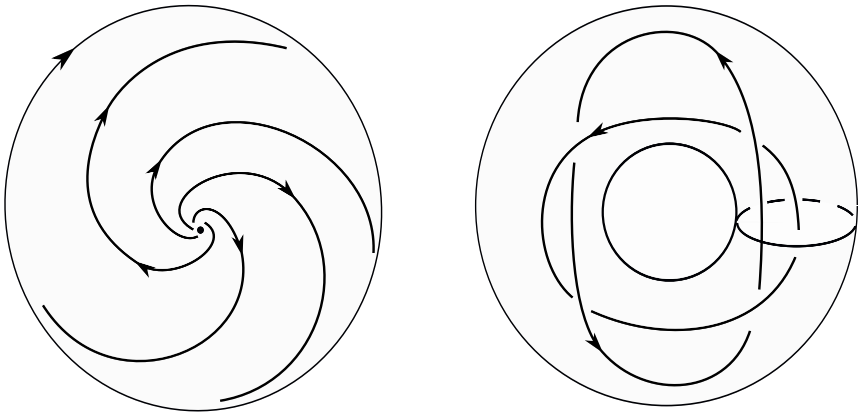


Figura 2.7: Exemplo de ação sobre S^3.

2.3 Algumas propriedades de ações de grupos

Nesta seção apresentaremos fatos gerais que serão usados no seguinte capítulo.

Lema 2.13. *Seja* G *um grupo topológico simplesmente conexo e* $\varphi : G \times M \to M$ *uma ação do grupo* G *sobre o espaço* M. *Seja* $p : (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \to (M, x_0)$ *um espaço de recobrimento de* M. *Então existe uma única ação contínua* $\tilde{\varphi} : G \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ *que recobre* φ, *isto é, o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ G \times \tilde{M} \arrow[urr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "id\times p"'] & G \times M \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

Demonstração. Consideremos a aplicação $\varphi \circ (id \times p) : (G \times \tilde{M}, (e, \tilde{x}_0)) \to (M, x_0)$, *como* φ *é uma ação e* p *uma aplicação recobrimento, então* $\varphi \circ (id \times p)(e, \tilde{x}_0) = x_0$.

Consideremos $f = \varphi \circ (id \times p)$ e $f_\sharp$ o homeomorfismo induzido no grupo fundamental.

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{M} \arrow[r] \arrow[urr, "\alpha,\beta"] & \tilde{M} \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Como G é simplesmente conexo, então, temos que $f_\sharp(G \times \tilde{M}, (e, \tilde{x}_0)) \subset p_\sharp(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$, assim, pelos Teoremas 1.8 e 1.9, existe uma única aplicação $\tilde{\varphi} : (G \times \tilde{M}, (e, \tilde{x}_0)) \to (\tilde{M}, \tilde{x}_0)$ tal que o diagrama acima comuta e $\tilde{\varphi}(e, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$.

Agora verificaremos que $\tilde{\varphi}$ é uma ação.

- ***Para todo $\mathbf{\tilde{x} \in \tilde{M}}$, temos $\tilde{\varphi}(\mathbf{e}, \mathbf{\tilde{x}}) = \mathbf{\tilde{x}}$.** De fato, considere a aplicação $id \circ p : (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \to (M, x_0)$ e as aplicações $\alpha, \beta : (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{M}, \tilde{x}_0)$ definido por $\alpha(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}(e, \tilde{x})$ e $\beta(\tilde{x}) = \tilde{x}$.*

  $$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[d, "p"] \\ G \times G \times \tilde{M} \arrow[r] \arrow[ur, "\lambda,\mu"] & M \end{tikzcd}$$

  Como
  $$p(\alpha(\tilde{x})) = p(\tilde{\varphi}(e, \tilde{x})) = \varphi(e, x) = x = (id \circ p)(\tilde{x})$$
  e
  $$p(\beta(\tilde{x})) = x = (id \circ p)(\tilde{x})$$
  então, α e β são levantamentos de $(id \circ p)$ tal que $\alpha(\tilde{x}_0) = \beta(\tilde{x}_0)$, logo pelo Teorema 1.9, temos que $\alpha(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x})$ para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$, isto é $\tilde{\varphi}(e, \tilde{x}) = \tilde{x}$.

- ***Para todo $\mathbf{\tilde{x} \in \tilde{M}}$ e para todo $\mathbf{g, h \in G}$, temos $\tilde{\varphi}(\mathbf{gh}, \mathbf{\tilde{x}}) = \tilde{\varphi}(\mathbf{g}, \tilde{\varphi}(\mathbf{h}, \mathbf{\tilde{x}}))$.** De fato, considere a aplicação $v : G \times G \times \tilde{M} \to M$ definida por $v(g, h, \tilde{x}) = \varphi(g, \varphi(h, p(\tilde{x}))) = \varphi(gh, p(\tilde{x}))$ e as aplicações $\lambda, \mu : G \times G \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ definidas por $\lambda(g, h, \tilde{x}) = \tilde{\varphi}(g, \tilde{\varphi}(h, \tilde{x}))$ e $\mu(g, h, \tilde{x}) = \tilde{\varphi}(gh, \tilde{x})$.*

  Como
  $$p(\lambda(g, h, \tilde{x})) = p(\tilde{\varphi}(g, \tilde{\varphi}(h, \tilde{x}))) = \varphi(g, \varphi(h, x)) = v(g, h, \tilde{x})$$
  e
  $$p(\mu(g, h, \tilde{x})) = p(\tilde{\varphi}(gh, \tilde{x})) = \varphi(gh, x) = v(g, h, \tilde{x})$$
  então, λ e μ são levantamentos de v tal que $\lambda(\tilde{x}_0) = \mu(\tilde{x}_0)$, logo pelo Teorema 1.9, temos que $\lambda(\tilde{x}) = \mu(\tilde{x})$ para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$, isto é $\tilde{\varphi}(gh, \tilde{x}) = \tilde{\varphi}(g, \tilde{\varphi}(h, \tilde{x}))$.

$\blacksquare$

Observação 2.14. *Dado $\tilde{x} \in \tilde{M}$ e $x = p(\tilde{x})$, então, x é um ponto fixo de φ se, e somente se, $\tilde{x}$ é ponto fixo de $\tilde{\varphi}$. De fato, se $\tilde{\varphi}(g, \tilde{x}) = \tilde{x}$ para todo $g \in G$, assim, $p(\tilde{\varphi}(g, \tilde{x})) = p(\tilde{x}) = x$, como $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ (id \times p)$, então, temos que $\varphi(g, x) = x$. Para provarmos a recíproca, consideremos $\varphi(g, x) = x$, para todo $g \in G$ e suponha por contradição que $\tilde{\varphi}(g, \tilde{x}) = \tilde{y} \neq \tilde{x}$ para algum $g \in G$, logo $p(\tilde{\varphi}(g, \tilde{x})) = \varphi(g, x) = x = p(\tilde{y})$, mas $x = p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ então, $\tilde{y} = \tilde{x}$,o que é uma contradição, obtendo assim o desejado.*

Uma consequência do lema anterior é que, para nosso proposito, todas as variedades podem ser tomadas como orientáveis. De fato, se $\varphi : G \times M \to M$ é uma ação sobre uma variedade não orientável M, seja $p : \tilde{M} \to M$ seu recobrimento duplo orientável [6]. Podemos considerar o levantamento de φ a uma ação de G sobre $\tilde{M}$ (Em nosso caso, o grupo G é um espaço vetorial, por isso é sempre simplesmente conexo). $\tilde{M}$ é compacto se M também é, e $\mathcal{X}(\tilde{M}) = 2 \cdot \mathcal{X}(M)$, assim, $\mathcal{X}(\tilde{M}) \neq 0$ se $\mathcal{X}(M) \neq 0$. É claro que a redução para M orientável não é realmente essencial, mas simplifica a consideração dos casos. Esta orientabilidade será assumida na prova do teorema principal, mas não na sua declaração nem em nenhum dos seguintes resultados.

O seguinte resultado é um fato conhecido na teoria de sistemas dinâmicos e aqui será apresentado em nosso contexto.

Lema 2.15. *Seja $\varphi : G \times M \to M$ uma ação contínua de um grupo topológico G sobre um espaço M. Qualquer conjunto compacto φ-invariante $X \subset M$ contém um conjunto minimal.*

Demonstração. *Seja $\mathscr{I} = \{S \subset M; S$ é compacto φ-invariente e $S \subset X\}$, então:*

1) *$\mathscr{I} \neq \emptyset$, de fato, $X \in \mathscr{I}$.*

2) *Sobre a família $\mathscr{I}$ consideremos a relação de ordem $X \preceq Y$ se $Y \subset X$, com isso $(\mathscr{I}, \preceq)$ é parcialmente ordenado. Seja $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ uma subfamília totalmente ordenada, então, $\bigcap_{J \in \mathscr{J}} J \in \mathscr{I}$ é uma cota superior para $\mathscr{J}$, pelo lema de Zorn, existe m elemento maximal de $\mathscr{I}$, isto é, existe um minimal.*

∎

O seguinte resultado é consequência do Teorema do Fluxo Tubular 1.53 e da observação de que se $y \in M$ é tal que o grupo de isotropia de y, G_y é discreto, então, pela Proposição 2.11 $\mathcal{O}(y)$ é regular, de fato ela será homeomorfa a um círculo ou à reta.

Lema 2.16. *Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ um fluxo sobre uma 2-variedade M e seja $y \in M$ um ponto cujo grupo isotropico é discreto. Existe uma seção transversal de ξ em y (assim y tem uma vizinhança retangular).*

De agora em diante se $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ é um fluxo sob uma variedade M, então denotaremos o conjunto de pontos fixos de M pelo fluxo ξ como sendo $Fix(\xi) = \{x \in M; \xi(t, x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Dito isto, consideremos o seguinte lema.

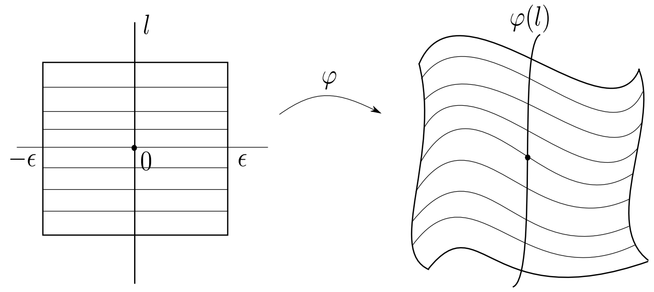


Figura 2.8: Seção transversal.

Lema 2.17. *Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ um fluxo sobre uma superfície M, tal que $\mathcal{X}(M) \neq 0$, então, $Fix(\xi) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Isto é uma consequência do Teorema 1.7 (Teorema do ponto fixo de Lefschetz), de acordo com o qual cada aplicação contínua $f : M \to M$, homotópica à identidade, tem um ponto fixo. Dada $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$, onde M é uma superfície, se $\mathcal{X}(M) \neq 0$, e para $n = 1, 2, 3, \ldots$ fixo, seja $f_n : M \to M$ definida por $f_n(x) = \xi(1/2^n, x)$. O conjunto $F_n = Fix(f_n) \neq \emptyset$ é compacto e, além disso, temos o seguinte fato:

Afirmação 1: *$F_{n+1} \subset F_n$. De fato, se $x \in F_{n+1}$, temos $f_{n+1}(x) = \xi(1/2^{n+1}, x) = x$, logo,*

$$\xi(1/2^n, x) = \xi(1/2^{n+1} + 1/2^{n+1}, x) = \xi(1/2^{n+1}, \xi(1/2^{n+1}, x)) = \xi(1/2^{n+1}, x) = x,$$

então, $f_n(x) = x$, portanto, $x \in F_n$. Como $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, então $F = \cap F_n \neq \emptyset$.

Afirmação 2: *$x \in F$ então $\xi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, considere $t_n \to t$ tal que $t_n = t + 1/2^n$, como $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\xi(t_n, x) = x$ por outro lado $\xi(t_n, x) = \xi(t + \frac{1}{2^n}, x) = \xi(t, \xi(\frac{1}{2^n}, x)) = \xi(t, x)$, logo $\xi(t, x) = x$, assim x é um ponto fixo do fluxo ξ.* ■

Dizemos que um conjunto minimal de um fluxo é não-trivial, se não for homeomorfo a um ponto, a um círculo ou a um toro. Para fluxos contínuos, M. Peixoto aprersenta o seguinte resultado sobre os conjuntos minimais não triviais.

Lema 2.18. *Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ um fluxo sobre uma variedade M de gênero finito g, então, o número de conjuntos minimais não triviais distintos é no máximo $2g - 1$.*

Demonstração. Primeiramente, note que, se μ, ν são conjuntos minimais, então, $\mu \cap \nu \neq \emptyset$ se, e somente se, $\mu = \nu$. De fato, observe que existe $p \in \mu \cap \nu$, isto é, $p \in \mu$ e $p \in \nu$, logo, $\mathcal{O}(p) \subset \mu$ e $\mathcal{O}(p) \subset \nu$, então, $\mu \subseteq \nu$ e $\nu \subseteq \mu$, portanto, $\mu = \nu$, reciprocamente, se $\mu = \nu$, é claro que $\mu \cap \nu \neq \emptyset$.

Pelo Lema 2.13 podemos supor que M é orientável porque seu recobrimento duplo $\tilde{M}$ teria o mesmo gênero, e $\tilde{\xi}$ em $\tilde{M}$ admitiria pelo menos tantos conjuntos minimais não triviais quanto ξ.

Também observe que as curvas na fronteira de M são subvariedades com a topologia induzida e são órbitas de ξ, exceto quando ξ tem um ponto fixo nelas, então, todo conjunto minimal não trivial μ está no interior de M.

A prova vai ser por indução no gênero g.

Caso I: Consideremos $g = 0$. *Neste caso, temos que $M = S^2$ ou $M \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a um disco. Como consequência do Teorema de Poincaré-Bendixon nas suas duas versões Teorema 1.40 e Corolário 1.41, temos que não existem minimais não triviais, o que prova o resultado.*

Caso II: Suponha agora $g > 0$ ***e que o lema foi provado para todas as superfícies do gênero*** $< g$. *Dado um fluxo $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ em uma superfície M de gênero g, suponha, por contradição, que $\mu_1, \ldots, \mu_{2g}$ são $2g$ conjuntos minimais não triviais distintos de ξ em M.*

Seja $x \in \mu_{2g}$ e seja $Q =$ uma vizinhança tubular do ponto x (consulte a Figura 2.9). Escolha Q para que não faça intersecção com os conjuntos minimais restantes μ_i, isto é, $Q \cap \mu_i = \emptyset$, $1 \leq i < 2g$ e, além, $Q \cap \partial M = \emptyset$.

O fato de que Q não intersecta a fronteira de M segue da segunda observação acima. Provarmos que Q não intersecta os outros conjuntos minimais.

Suponha que para cada caixa de fluxo C_n de x, com diam$(C_n) < 1/n$, existe um minimal μ_{i_n} tal que $\mu_{i_n} \cap C_n \neq \emptyset$ onde $i_n \in \{1, 2, \ldots, 2g-1\}$, tomemos $x_{i_n} \in \mu_{i_n} \cap C_n$, observe, além disso, que $x_{i_n} \to x$, isso implica que $x \in \mu_{i_n} \cap \mu_{2g}$, o que é uma contradição.

A órbita de x (Observe o Teorema 3,7 pag 87 de [1]) intersecta Q, e tomemos os pontos a, a', b, b' como na Figura 2.9 a seguir, considere o seguinte homeomorfismo $h : Q \to Q$. Dado pela identidade nos lados superior, inferior e na lateral esquerda de Q, e h é um homeomorfismo sobre o lado dereito tal que $h(a') = b'$. No interior de Q, h é definido tal que cada segmento horizontal yy' é levado no segmento $yh(y')$.

Definimos um novo fluxo $\tilde{\xi} : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que:

- *Se $z \notin Q$, então, $\tilde{\xi}(t, z) = \xi(t, z)$ na mesma direção.*
- *Se $z \in Q$, observe que existem únicos y', y'' em Q tais que $h(y') = y''$, de onde exite $y \in Q$ tal que $y, z \in \mathcal{O}(y'')$, a órbita de z pelo fluxo $\tilde{\xi}$ será definida como $\mathcal{O}^-(y) \cup \mathcal{O}^+(y'') \cup [y, y'']$, onde $[y, y'']h([y, y'])$.*

Sob o novo fluxo $\tilde{\xi}$, o ponto a tem uma órbita fechada $\gamma = \mathcal{O}_{\tilde{\xi}}(a)$. Observe também que $\mu_1, \ldots, \mu_{2g-1}$ ainda são conjuntos minimais de $\tilde{\xi}$.

Note que a curva γ não pode separar M, pois, se isso acontecesse, então, a curva fechada α da Figura 2.9, também separaria M, assim $M = M_1 \cup \{\alpha\} \cup M_2$, podemos supor que $x \in M_1$, e M_1 é homeomorfa a um disco, então, $\omega(x)$ seria um minimal não trivial no disco, o que é uma contradição.

Portanto, ao cortar M ao longo de γ, obtemos uma variedade M_γ de gênero $g-1$, na qual o fluxo $\tilde{\xi}$ está definido e admite pelo menos os conjuntos minimais não triviais $\mu_1, \ldots, \mu_{2g-1}$, e pela hipótese indutiva $2g - 1 \leq 2(g-1) - 1 = 2g - 3$ o que é uma contradição. Isso conclui a prova do lema. ■

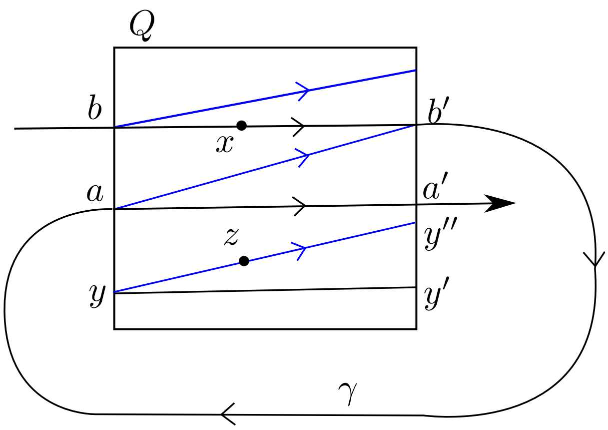


Figura 2.9: Vizinhança tubular de x.

Observação 2.19. *O lema acima afirma que, em uma variedade do gênero g, há no máximo $2g-1$ órbitas recorrentes com fechos disjuntos dois a dois. Em particular, não há órbitas recorrentes em um superfície do gênero zero. Observe que esse resultado fornece informações também no caso diferenciável, uma vez que existem órbitas recorrentes mesmo para ações C^∞.*

Lema 2.20. *Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \to M$ um fluxo sobre uma 2-variedade M. Suponha que $x \in M$ é tal que $x = lim\ x_n$ onde cada x_n tem uma órbita fechada μ_n, de período t_n. Então:*

(a) Se o gênero de M é finito, a órbita de x não pode ser recorrente.

(b) Se x tem uma órbita fechada μ, de período t_0, é preciso ter $lim\ t_n = a \cdot t_0$ ($a = 1$ ou $a = 2$ de acordo com μ se é de dois lados ou um lado em M), e $\mu = \{y \in M; y = lim\ y_n,\ y_n \in \mu_n,\ n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Demonstração. (a) *Seja Q uma vizinhança retangular de x. Claramente, nenhum ponto fronteira de M pode ter uma órbita recorrente, então, podemos assumir que $Q \cap \partial M = \emptyset$.*

Caso I: *Considere que para infinitos valores de n, μ_n separa M. Então, como μ é uma órbita fechada, podemos assumir que $Q \setminus \mu$ tem duas componentes, fixemos uma delas e denotemos por A_n, assim, existe um conjunto aberto $A_n \subset M$ cujo conjunto de pontos fronteira ∂A_n satisfaz a condição $\partial A_n \cap Q \subset \mu_n \cap Q$.*

Suponha, então, que a condição acima é verdadeira e que, por contradição, a órbita de x seja recorrente. Existe um valor t_0 suficientemente grande para que a órbita de x cruze Q pelo menos 3 vezes para $0 \leq t \leq t_0$. As órbitas de todos os pontos suficientemente próximos de x terão exatamente a mesma propriedade. Assim, podemos escolher μ_n e o correspondente conjunto aberto A_n, com $\partial A_n \cap Q \subset \mu_n \cap Q$, tal que μ_n cruza Q pelo menos 3 vezes. Os segmentos de $\mu_n \cap Q$ são precisamente as intersecções de Q com ∂A_n. Observe a Figura 2.10.

Como há pelo menos três segmentos como estes, deve haver dois consecutivos, de modo que Q entre em um deles e deixe A_n no outro.

Tal coisa, no entanto, não pode acontecer porque esses segmentos são igualmente orientados em Q e μ_n, por outro lado, têm sua própria orientação (ver Figura 2.11).

Caso II: *Suponha que apenas uma quantidade finita dos μ_n satisfaçam a condição com respeito a Q. Ignorando-os, podemos assumir que nenhum μ_n satisfaz essa condição, então μ_n não separa M.*

A prova agora será feita por indução. Suponhamos que para uma superfície de gênero g a afirmação seja válida, isto é, não é recorrente. Seja $\tilde{M}$ uma superfície de gênero $g+1$ e $x \in M$ como no enunciado do lema, então, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\nu_n \in Q$ e μ_n separa $\tilde{M}$, cortando ao longo de μ_n obtemos uma superfície de gênero g onde x é recorrente. O que contradiz a nossa hipótese indutiva.

(b) *Seja $\epsilon > 0$ dado. Como a órbita de x é periódica, existe $t_0 > 0$ tal que $\xi(t_0, x) = x$. Provaremos que $t_n \to t_0$, onde t_n é periódo da órbita μ_n.*

De fato, considere Q uma caixa de fluxo contendo x, tal que $\mu \cap Q$ é um segmento e tal que μ leva um tempo $< \epsilon$ ir de uma extremidade de Q para a outra pelo fluxo ξ. Tome também uma vizinhança tubular V da órbita fechada μ, contida em Q. escolha n_0 tão grande que, para $n > n_0$, x_n está perto o suficiente de x, de modo que $\xi(t, x_n) \in V$ para $0 \leq t \leq 2t_0$, e tal que a órbita de x_n atinge Q para o primeiro tempo em $t = t'$, onde $|t' - t_0| < \epsilon/2$, e pela segunda vez em $t = t''$, com $|t'' - t_0| < \epsilon/2$ também, isso pode ser feito por compacidade da órbita de x e pela continuidade do fluxo.

Caso I: μ é 2-lados. *Então, V é um cilindro. Claramente $\xi(t', x_n)$ deve estar no mesmo segmento horizontal de Q como x_n, já que uma das semi-órbitas de x_n pertence a V e μ_n não seria uma órbita fechada. Portanto,*

$$t' < t_n < t' + \epsilon/2 \tag{2.2}$$

e pela hipótese sabemos que $|t' - t_0| < \epsilon/2$, isto é, $-\epsilon/2 < t' - t_0 < \epsilon/2$, daí,

$$t' - \epsilon/2 < -t_0 < -t' + \epsilon/2 \tag{2.3}$$

somando as desigualdades 2.2 e 2.3 temos $-\epsilon < -\epsilon/2 < t_n - t_0 < \epsilon$, e portanto, $|t_n - t_0| < \epsilon$.

Caso II: μ é um-lado. *Então, V é uma faixa de Möbius cujo equador é μ. Então $\xi(t, x_n)$ retorna a Q para o primeiro tempo em um ponto do outro lado de μ (relativamente a x_n em Q), mas, no segundo retorno, ele deve fechar, caso contrário, permanece sempre aberto. Portanto, lim $t_n = 2t_0$ neste caso.*

Para concluir a prova, primeiro observamos que a inclusão $\mu \subset \{y \in M; y = \text{lim } y_n,\ y_n \in \mu_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ é óbvia. Por outro lado, seja $y =$lim y_n, $y_n \in \mu_n$. Então $y_n = \xi(s_n, x_n)$, onde $0 \leq s_n \leq t_n$, então, a sequência $\{s_n\}$ é limitada. Passando para uma subsequência convergente, podemos escrever $s_n \to s$. E temos que $y = \lim \xi(s_n, x_n) = \xi(s, x) \in \mu$. ■

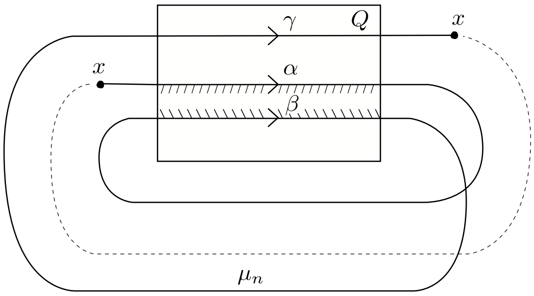
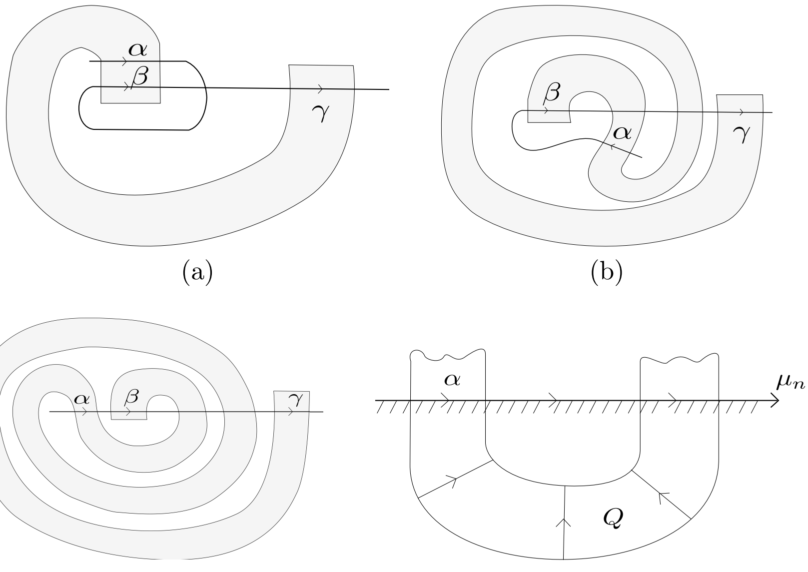


Figura 2.10: Vizinhança tubular da órbita do ponto x.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 2.11: Esticamento de μ_n.

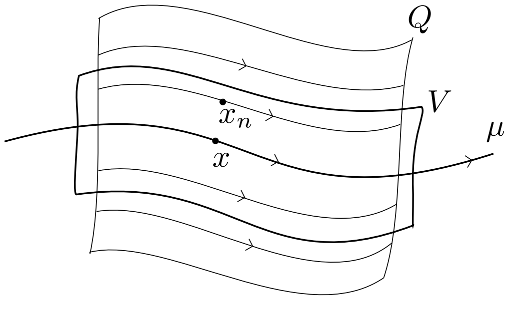


Figura 2.12: Vizinhança tubular de μ contida em Q.

Para o próximo lema, consideramos o seguinte: M é uma 2-variedade e Γ é um círculo fronteira de M; $\{\mu_\alpha\}$ é uma família de curvas fechadas simples disjuntas em M, nenhuma delas intersectando a fronteira de M. Assumimos que para cada α existe um cilindro compacto $\bar{C}_\alpha \subset M$, cujos círculos fronteira são Γ e μ_α. Por conveniência, deixamos $\Gamma \subset C_\alpha$, mas $C_\alpha \cap \mu_\alpha = \emptyset$, de modo que cada C_α esteja aberto em M. O conjunto de pontos fronteira de C_α em M é μ_α e escrevemos $\partial C_\alpha = \mu_\alpha$ para denotar isso. Finalmente, $\bar{C}_\alpha = C_\alpha \cup \mu_\alpha$ é o fecho de C_α em M (Observe a Figura 2.13).

Lema 2.21. *Seguindo a notação acima:*

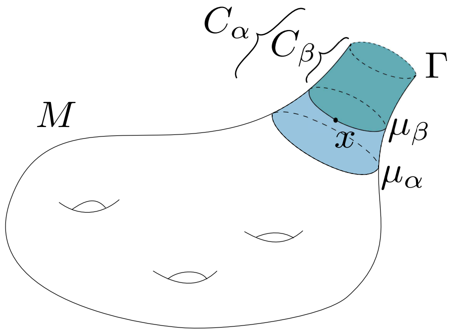


Figura 2.13: Cilindros abertos na fronteira de M.

(a) *A família $\{C_\alpha\}$ é linearmente ordenada pela inclusão, a menos que M seja um disco com fronteira Γ;*

(b) *A união de qualquer subfamília dada linearmente ordenada de $\{C_\alpha\}$ é um cilindro C aberto em M, contendo Γ, que pode ser escrito como $C = \cup C_n$, $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ onde , para cada $n = 1, 2, \ldots$, temos $C_n = C_\alpha$ para algum α;*

(c) *Se o conjunto de pontos fronteira de C em M é uma curva fechada simples μ, então, ou o fecho $\bar{C}$ é um cilindro compacto com círculos limite Γ e μ, ou $\bar{C} = M =$Faixa de Möbius.*

Demonstração. (a) Consideremos $C_\alpha \neq C_\beta$ escolhidos arbitrariamente e suponhamos que M não é um disco. Denote por $h : S^1 \times [0,1] \to \bar{C}_\alpha$ um homeomorfismo tal que $h(S^1 \times 0) = \Gamma$. Seja $h(z,t) = x \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$ com $t \in [0,1]$ maior possível. Já que $C_\alpha \cap C_\beta$ é aberto x deve pertencer a μ_α, ou a μ_β, mas não a ambos. De fato, como $C_\alpha \cap C_\beta$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h((z-\varepsilon, z+\varepsilon) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \subset C_\alpha \cap C_\beta$ o que implicaria que existe $t_0 > t$ com $h(z, t_0) \in C_\alpha \cap C_\beta$, o que contradiz a maximalidade de t.

Supanhamos que $x \in \mu_\beta$ mas $x \notin \mu_\alpha$, logo $x \in \mu_\beta \cap C_\alpha$. Então, o conjunto conexo μ_β é tal que $\mu_\beta \cap C_\alpha$, mas é disjunto a $\mu_\alpha = \partial C_\alpha$, assim, $\mu_\beta \subset C_\alpha$.

Observe que μ_β não pode limitar um disco D em C_α pois isto implicaria $C_\beta \cup D$ seja um disco em M, com fronteira igual ao círculo Γ. O disco $C_\beta \cup D$ seria então aberto e fechado em M, então M sería um disco, ao contrário da suposição.

Logo $\overline{C}_\alpha \backslash \mu_\beta = X \cup Y$, é a união disjunta de duas componentes conexas, com $\Gamma \subset X$, $\mu_\alpha \subset Y$ e $\partial X = \partial Y = \mu_\beta$. Então, o conjunto conexo C_β intersecta X ao longo de Γ, mas não intersecta $\partial X = \mu_\beta$, logo, $C_\beta \subset X \subset C_\alpha$. Se tivéssemos assumido $x \in \mu_\alpha$, a conclução seria que $C_\alpha \subset C_\beta$.

(b) Sem perda de generalidade, escrevamos a subfamília dada ainda como $\{C_\alpha\}$. Pelo teorema de Lindelöf (pagina 48 de [11]), existe uma sequência enumerável $C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_n}, \ldots$ tal que $\bigcup C_{\alpha_n} = \bigcup C_\alpha$. Seja $C_n = C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n}$. Já que os C_α são ordenados linearmente pela inclução, cada $C_n = C_\alpha$ para algum α. Claramente, $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ e $\bigcup C_n = \bigcup C_\alpha = C$. Se $C = C_n$ para algum n, então, C é um cilindro, aberto em M.

De outro lado, $\bar{C}_n \subset C_{n+1}$ para infinitos valores de n, então podemos também supor que isso acontece para cada n. Observe que cada $\bar{C}_{n+1} \setminus C_n$ é um cilindro fechado.

Considere o cilindro canônico $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$. Seja $K_n = \{(x,y,z) \in K; 0 \leq z < n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, assim $K = \bigcup K_n$, $\overline{K}_n \subset K_{n+1}$. Para cada n, seja $k_n : \bar{K}_n \setminus K_{n-1} \to \bar{C}_n \setminus C_{n-1}$ um homeomorfismo tal que $k_n(\overline{K}_{n-1} \setminus K_{n-1}) = \overline{C}_{n-1} \setminus C_{n-1}$.

Por conveniência, seja $K_0 = C_0 = \emptyset$. Agora definamos um homeomorfismo $h : K \to C$, mostrando assim que C é um cilindro. Começamos definindo $h|_{K_1} = k_1$ e continuando por indução. Supondo $h : \overline{K}_n \approx \overline{C}_n$ está definido, estendê-lo para $\overline{K}_{n+1} \setminus K_n$, Seja $(x,y,z) \in K_{n+1} \setminus K_n$ definamos,

$$h(x,y,z) = k_{n+1}[k_n^{-1}(h(x,y,z-1)) + (0,0,1)]$$

Esta definição é, claramente, um homeomorfismo e, assim, temos que $h : K \to C$ é um homeomofismo.

(c) *Note que, sendo C aberto em M, $C \cap \partial C = C \cap \mu = \emptyset$, além disso $\Gamma \subset C$, então, $\Gamma \cap \mu \subset C \cap \mu$, assim, μ não tem pontos em comum com Γ.*

Caso I: *μ é de dois lados, existe um anel $\bar{A} = S^1 \times [0,1]$ em M, com $\mu = S^1 \times \{0\}$. Seja $A = S^1 \times (0,1)$. Este anel existe quando μ intersecta a fronteira de M ou quando μ é interior em M. No primeiro caso, qualquer anel intersecta C, e no segundo caso, existem anéis em ambos lados de μ, porém, sempre escolheremos $\bar{A}$ tal que $A \cap C \neq \emptyset$. Claramente, podemos escolher $\bar{A}$ tão estreito que $A_1 = S^1 \times (0,1] \subset C$, tal que $v = S^1 \times \{1\}$ é uma curva fechada em C, disjunta de Γ.*

(i) *Observe que v não é homotópico a uma constante em C. De fato, consideremos a compactação de um ponto de C. Isto é, um disco $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$, contendo o disco $\hat{A}_1 = A_1 \cup \{\infty\}$ que é, também, a compactação de um ponto de A_1.*
Como $\hat{C}$ é homeomorfa a um cone e o disco definido por v em $\hat{C}$ contém $\{\infty\}$, isso implica que o disco definido por v em C é ilimitado, o que é uma contradição com o fato de que v é homotopicamente nulo.

(ii) *Se $\mu \cap \partial M \neq \emptyset$. Como A é conexo, $A \cap C \neq \emptyset$ e $A \cap \mu = \emptyset$, então, $A \subset C$.*

(iii) *Se $\mu \cap \partial M = \emptyset$. Como A é conexo, $A \cap C \neq \emptyset$ e $A \cap \mu = \emptyset$, então, $A \subset C$.*

Então v e Γ, juntos, limitam um cilindro compacto $\overline{B}$, tal que $\overline{A} \cap \overline{B} = v$. Qualquer sequência de pontos de C, tendendo para um ponto em $\mu = \overline{C} - C$ deve, eventualmente, ficar dentro de A, assim, $\overline{C} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e, portanto, $\overline{C}$ é um cilindro compacto limitado por μ e Γ.

Caso II: *μ é de um lado, então, $\mu \cap \partial M = \emptyset$. Considere a vizinhança tubular V de μ, tal que $\bar{V} \cap \partial M = \emptyset$. Logo, $\bar{V}$ é uma Faixa de Möbius. Denotemos por ν a fronteira de $\bar{V}$. Observe que, $V \setminus \mu$ é conexo, intersecta C, porém, não $\mu = \partial C$ o que implica que $V \subset C$.*

Observe que $\bar{C} = C \cup \mu$ é fechado e como $V \subset C$, então, ele também é aberto, logo $\bar{C} = M$ é uma variedade com fronteira Γ, observe que ν é homotópico a Γ, logo M é homeomorfo a $V \cup \{\nu \times [0,1]\}$, isto é M uma Faixa de Möbius.

■

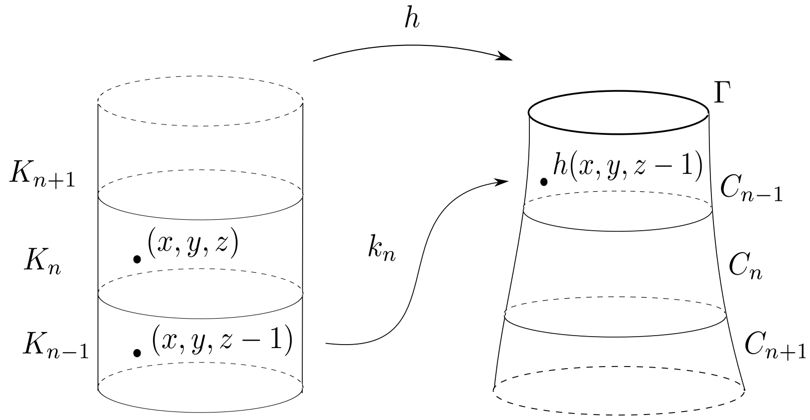


Figura 2.14: Homeomorfismo com o cilindro canônico.

Capítulo 3

Campos comutativos sobre superfícies

Neste capítulo, apresentaremos as provas dos resultados principais da dissertação.

Teorema A: *Qualquer ação contínua de* $\mathbb{R}^2$ *sobre a esfera* S^2 *admite um ponto fixo.*

Teorema B: *Qualquer ação contínua de* $\mathbb{R}^2$ *sobre o plano projetivo* $\mathbb{R}P^2$ *admite um ponto fixo.*

Teorema C: *Qualquer ação contínua de* $\mathbb{R}^k$ *sobre uma superfície* M*, com* $\chi(M) \neq 0$*, tem um ponto fixo.*

Consideremos a ação $\varphi : \mathbb{R}^k \times M \to M$ sobre uma variedade M e $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^k$, então podemos definir para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ a função $\xi_i : \mathbb{R} \times M \to M$ como

$$\xi_i(t, p) = \varphi(te_i, p)$$

Proposição 3.1. *A função* $\xi_i : \mathbb{R} \times M \to M$ *definida como*

$$\xi_i(t, p) = \varphi(te_i, p)$$

é um fluxo sobre M*.*

Demonstração. *Dado uma ação* φ*, é imediato que:*

(i) $\xi_i(1, p) = \varphi(1e_i, p) = p$.

(ii) $\xi_i(t, \xi_j(t, p)) = \varphi(te_i, \varphi(te_j, p)) = \varphi(t(e_i + e_j), p) = \xi_{i+j}(t, p)$.

■

Observe que, se X_i é o campo de vetores definido sobre M correspondente ao fluxo ξ_i. Se $x \in Sing(X_i) \subset M$, isto é, $X_i(x) = 0$, se, e somente se, $\xi_i(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, x é um ponto fixo do fluxo ξ_i.

Dados ξ_i, ξ_j fluxos como acima, então, $\varphi(r_{ij}, x) = \varphi(se_i + te_j, x) = \varphi(se_i, \varphi(te_j, x)) = \xi_i(s, \xi_j(t, x))$ de outro lado $\varphi(se_i + te_j, x) = \varphi(te_j, \varphi(se_i, x)) = \xi_j(t, \xi_i(s, x))$, assim, $\xi_i(s, \xi_j(t, x)) = \xi_j(t, \xi_i(s, x))$ onde $r_{ij} \in \mathbb{R}^k$ é o único vetor tal que $r_{ij} \cdot e_i = s$, $r_{ij} \cdot e_j = t$ e $r_{ij} \cdot e_l = 0$ para $l \neq i, j$.

Então, pelo Teorema (1.49), os campos X_i e X_j são campos comutativos.

Definição 3.2. *Um ponto $x \in M$ é chamado de ponto fixo da ação φ se $X_i(x) = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots k$.*

3.1 Prova do Teorema A e do Teorema B

Nesta seção usaremos a notação do início do capítulo quando $k = 2$ e $M = S^2$ ou $\mathbb{R}P^2$. Com base nos preliminares descritos nos capítulos 1 e 2 apresentamos a continuação a prova do Teorema A.

Teorema 3.3. *Se $\varphi : \mathbb{R}^2 \times S^2 \to S^2$ é uma ação contínua, então, existe $p \in S^2$ tal que $\varphi(u, p) = p$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. *Dada a ação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times S^2 \to S^2$, consideremos os fluxos por $\xi_1, \xi_2 : \mathbb{R} \times S^2 \to S^2$ definidos acima.*

Pelo Teorema 1.45, temos que existe $p \in S^2$ tal que

$$\xi_2^t(p) = \xi_2(t, p) = p \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Considere a órbita $\mathcal{O}_1(p) = \{\xi_1(t, p); t \in \mathbb{R}\}$. Temos os seguintes fatos:

(A) $\mathcal{O}_\mathbf{1}(\mathbf{p}) \subset \mathbf{Sing}(\mathbf{X_2})$: *De fato, seja $q \in \mathcal{O}_1(p)$, então, $q = \xi_1^s(p)$ para algum $s \in \mathbb{R}$, assim $\xi_2^t(q) = \xi_2^t(\xi_1^s(p)) = \xi_1^s(\xi_2^t(p)) = \xi_1^s(p) = q$.*

(B) $\omega_\mathbf{1}(\mathbf{p}) \cup \alpha_\mathbf{1}(\mathbf{p}) \subset \mathbf{Sing}(\mathbf{X_2})$: *De fato, seja $q \in \omega(p)$, então, existe $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ e $q = \lim_{n\to\infty} \xi_1^{t_n}(p)$. Por outro lado, seja $t \in \mathbb{R}$, então $\xi_2^t(q) = \xi_2^t(\lim_{n\to\infty} \xi_1^{t_n}(p)) = \lim_{n\to\infty} (\xi_2^t(\xi_1^{t_n}(p))) = \lim_{n\to\infty} (\xi_1^{t_n}(\xi_2^t(p))) = \lim_{n\to\infty} (\xi_1^{t_n}(p)) = q$. Se $q \in \alpha_1(p)$ a prova é análoga.*

A prova do resultado será apresentada estudando os dois casos seguintes:

Caso I: $Sing(X_1) \cap \overline{\mathcal{O}_1(p)} \neq \emptyset$. *Consideremos $q \in Sing(X_1) \cap \overline{\mathcal{O}_1(p)}$, então, $\xi_1^t(q) = q$ e como $q \in \overline{\mathcal{O}_1(p)} = \mathcal{O}_1(p) \cup Lim(\mathcal{O}_1(p))$ e, pelos itens (A) e (B) acima, temos que $\xi_2^t(q) = q$. Logo, se $u \in \mathbb{R}$, então, temos que existem $t, s \in \mathbb{R}$ com $\varphi(u, q) = \varphi(t(1, 0) + s(0, 1), q) = \xi_1^t(\xi_2^s(q)) = q$, assim, o Teorema ficaria provado.*

Caso II: $Sing(X_1) \cap \overline{\mathcal{O}_1(p)} = \emptyset$. *Seja $q \in Sing(X_1)$, o qual é não vazio pelo Teorema 1.45, então, $q \notin \overline{\mathcal{O}_1(p)}$, assim, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson (Teorema 1.41) existe uma órbita fechada C_1 para o fluxo ξ_1^t tal* *que $\omega_1(p) = C_1$ (ou $\alpha_1(p) = C_1$), pelo item (B), temos que $C_1 \subset Sing(\xi_2^t)$ ver Figura 3.1.*

Pelo Teorema da curva de Jordan 1.39, a curva C_1 é fronteira de um disco $D_1 \subset S^2$.

Como C_1 é uma órbita fechada de ξ_1^t e, pelo item (B) acima, ela está contida em $Sing(\xi_1^t)$, então, D_1 é φ-invariante.

Agora usaremos indução transfinita para mostrar que existe um ponto fixo da ação φ no disco D_1.

Pelo princípio maximal de Hausdorff 1.2, associado à cadeia não vazia $\{D_1\}$, existe uma cadeia maximal $\mathscr{D}$ como sendo o conjunto de todos os discos fechados D em S^2, tal que a fronteira $C = \partial D$ é uma órbita fechada de ξ_1^t e com seus pontos todos fixados por ξ_2^t com a relação de ordem parcial:

$$D_\mu \preceq D_\lambda \text{ se, e somente se } D_\lambda \subset D_\mu$$

Afirmação: *Se $D_\lambda \neq D_\mu$ em $\mathscr{D}$, $D_\lambda \subset D_\mu$ se, e somente se, $D_\lambda \subset int(D_\mu)$.*

De fato, Se $D_\lambda \nsubseteq int(D_\mu)$, então, existe $y \in D_\lambda$ tal que $y \in C_\mu$, assim, C_λ e C_μ são órbitas fechadas do fluxo ξ_1^t com um ponto em comum, logo $C_\lambda = C_\mu$, de onde $D_\lambda = D_\mu$; portanto nossa afirmação é verdadeira.

Escrevamos $C_\lambda = \partial D_\lambda$. Escolhamos $x_\lambda \in C_\lambda$ e definamos a rede $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset D_1$, como D_1 é compacto, pelo Teorema 1.18, existe uma subrede convergente $\{x_\delta\}$ tal que $x = lim(x_\delta)$, como $\{\delta\}$ é cofinal em $\{\lambda\}$, então, $x \in \cap D_\lambda$.

Novamente, temos os seguintes fatos:

(A') $\mathbf{x} \in \mathbf{Sing(X_2)}$: *De fato, como $x_\lambda \in C_\lambda$, então, $\xi_2^t(x_\lambda) = x_\lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como $x_\lambda \to x$, então, $\xi_2^t(x_\lambda) \to \xi_2^t(x)$, pelo Teorema 1.19, de onde obtemos o resultado desejado.*

(B') $\overline{\mathcal{O}_\mathbf{1}(\mathbf{x})} \subset \mathbf{Sing(X_2)}$: *Seja $y \in \overline{\mathcal{O}_1(x)}$, então, existe $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $y = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_1^{t_n}(x)$, assim $\xi_2^s(y) = \xi_2^s(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_1^{t_n}(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\xi_2^s(\xi_1^{t_n}(x))) = \lim\limits_{n\to\infty}(\xi_1^{t_n}(\xi_2^s(x))) = \lim\limits_{n\to\infty}(\xi_1^{t_n}(x)) = y$*

(C') ***Como*** $\overline{\mathcal{O}_\mathbf{1}(\mathbf{x})} \subset \mathbf{D}_\lambda$. ***Podemos assumir que*** $\overline{\mathcal{O}_\mathbf{1}(\mathbf{x})} \cap \mathbf{Sing(X_1)} = \emptyset$. *Caso contrário, pelo item (B') acima, existiria um ponto singular comum aos campos X_1 e X_2, o que provaria o teorema.*

Pelo item (C') acima e pelo Teorema de Poincaré-Bendixon 1.40, podemos assumir que, $\lim \mathcal{O}_1(x) = C_1 \cup C_2$ (ver Figura 3.2), onde cada C_i é uma órbita fechada de ξ_1^t, e são tais que seus pontos são todos fixos para ξ_2^t. Observemos ainda que, ambos círculos topológicos C_1, C_2 estão contidos em todos os discos D_λ com $\lambda \in \Lambda$ (ver Figura 3.3).

Observe que, para algum λ_0, ou $C_i = C_{\lambda_0}$ ou $C_i \subset int(D_\lambda)$ para todo λ, como na Figura 3.4, com isso temos dois casos novamente:

Caso I: *Ou* $x \in int(D_\lambda)$ *para todo* λ, *neste caso, existe um disco tal que* $\partial D = \alpha_1(x)$ *ou* $\partial D = \omega_1(x)$, *com* $D \subset int(D_\lambda)$ *e* $D \subset Sing(X_2)$, *isto é,* $D \in \mathscr{D}$ *o que contradiz a maximalidade de* $\mathscr{D}$.

Caso II: *Ou* $x \in \partial D_{\lambda_0}$. *Neste caso, temos que* $\overline{\mathcal{O}_1(x)} = \partial D_{\lambda_0}$ *e* $\overline{\mathcal{O}_2(x)} = \{x\}$, *então, pelo Corolário 1.41, existe* $y_0 \in int(D_{\lambda_0})$ *tal que* $\xi_1^t(y_0) = y_0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Afirmação: $\xi_2^t(y_0) = y_0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Se $\xi_2^t(y_0) \neq y_0$ *para algum* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\overline{\mathcal{O}_2(y_0)} \cap Sing(X_2) \neq \emptyset$, *então, tomando* $w \in \overline{\mathcal{O}_2(y_0)} \cap Sing(X_2)$, *e pelos mesmos argumentos dos itens* (A') *e* (B'), *temos que* $\varphi(u,w) = w$.

Se $\xi_2^t(y_0) \neq y_0$ *para algum* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\overline{\mathcal{O}_2(y_0)} \cap Sing(X_2) = \emptyset$, *pelo Teorema de Ponicaré-Bendixson, existe um disco* $D_1 \subset \partial(D_{\lambda_0})$ *tal que* ∂D_1 *é órbita fechada do campo* X_2 *e* $\partial D_1 \subset Sing(X_1)$. *Novamente, pelo Teorema de Ponicaré-Bendixson, existe* $z_0 \in D_1$ *tal que* $\xi_2^t(z_0) = z_0$ *e podemos supor que* $\xi_1^t(z_0) \neq z_0$, *usando o mesmo argumento existe* $D \subset \partial(D_{\lambda_0})$ *tal que* ∂D *é órbita fechada do campo* X_1 *e* $\partial D_1 \subset Sing(X_2)$, *isto é,* $D \in \mathscr{D}$ *o que, novamente, contradiz a maximalidade de* $\mathscr{D}$.

Assim, temos que $\varphi(u, y_0) = y_0$ *para todo* $u \in \mathbb{R}^2$, *o que prova o nosso teorema.*

■

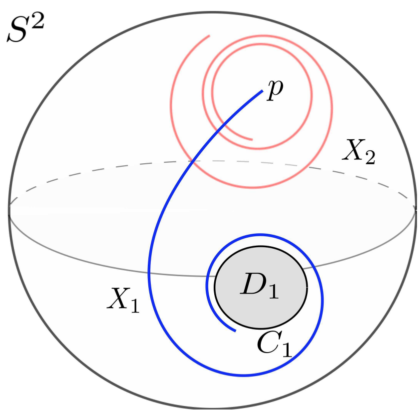


Figura 3.1: Existência da órbita círculo.

A seguir, apresentaremos o mesmo resultado do Teorema A para o plano projetivo real, de fato provaremos:

Corolário 3.4. *Cada ação contínua do grupo aditivo* $\mathbb{R}^2$ *sobre o plano projetivo* $\mathbb{R}P^2$ *admite um ponto fixo.*

Demonstração. Sejam $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ *um recobrimento (garantido por [7], página 154) e* $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ *uma ação continua, então, pelo Lema 2.13 temos que existe uma única ação* $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \times S^2 \to S^2$

$$\begin{tikzcd}
 & & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{R}^2 \times S^2 \arrow[r, "id\times\pi"'] \arrow[urr, "\tilde{\varphi}"] & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^2 \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}P^2
\end{tikzcd}$$

que faz o diagrama comutar e pela observação do Lema 2.13, sabemos que se existe um ponto fixo $p \in S^2$ (o qual existe pelo teorema anterior), então, existe $\tilde{p} \in S^2$ tal que $\varphi(u,p) = p$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$ de onde temos que existe $\tilde{p} = \pi(p) \in \mathbb{R}P^2$ tal que $\varphi(u,\tilde{p}) = \tilde{p}$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, o que prova o resultado.

■

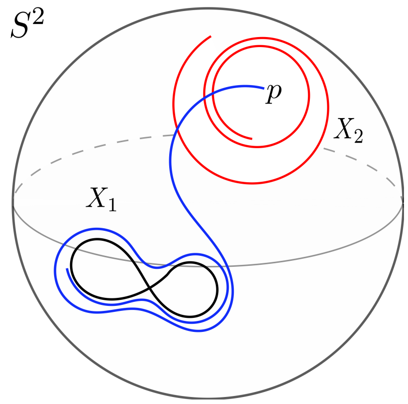


Figura 3.2: Órbita de x.

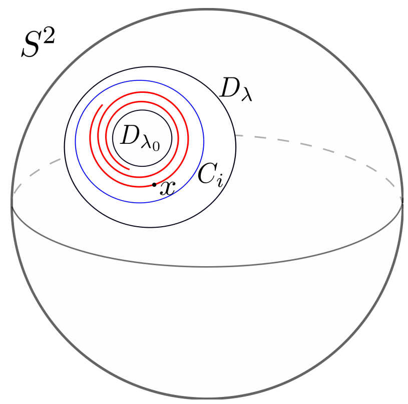
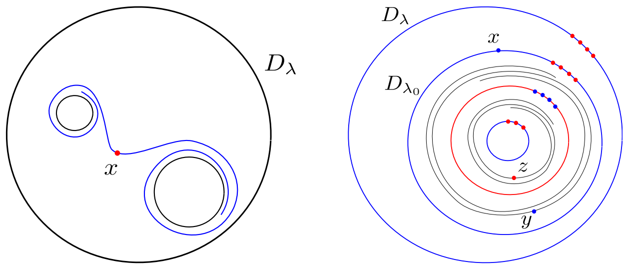


Figura 3.3: Sequência de discos D_λ contendo os C_i.

Teorema 3.5. *Sejam X, Y campos de vetores de classe C^k, $k \geq 1$ sobre a esfera S^2, com $[X,Y] \equiv 0$. Então, existe um ponto $p \in S^2$ tal que $X(p) = Y(p) = 0$.*

Corolário 3.6. *O teorema acima também é válido para o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$.*

Observação 3.7. *O mesmo tipo de argumento usado para provar o Teorema 3.3, juntamente com um procedimento simples de indução, mostrará que cada ação contínua do grupo aditivo $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ sobre S^2 e, consequentemente, sobre $\mathbb{R}P^2$ tem um ponto fixo. Assim, qualquer conjunto finito $X_1, \cdots, X_m$ de campos*



(a) (b)

Figura 3.4: Os possíveis casos dos C_i.

vetoriais comutáveis emparelhados sobre S^2 (ou $\mathbb{R}P^2$) têm uma singularidade comum.

A prova consiste em fazer indução sob n, considerando a ação contínua $\varphi : \mathbb{R}^n \times S^2 \to S^2$ e sejam $X_1, \ldots, X_n$, n campos comutativos sobre S^2, então, baseados na prova do Teorema A e pela hipótese indutiva, vamos supor que existe um ponto fixo p para os $n-1$ campos comutativos $X_2, \ldots, X_n$, isto é, $\xi_2^t(p) = \xi_3^t(p) = \cdots = \xi_n^t(p) = p$. Pela comutatividade dos fluxos, pode-se provar $\overline{\mathcal{O}_1(p)} \subset \bigcap_{i=2}^n Sing(X_2)$, logo, considerando os dois casos $Sing(X_1) \cap \overline{\mathcal{O}_1(p)} \neq \emptyset$ e $Sing(X_1) \cap \overline{\mathcal{O}_1(p)} = \emptyset$ os quais são provados com os mesmos argumentos usados para o caso de dois campos comutativos do Teorema A.

3.2 Teorema C

Nesta seção apresentaremos a prova do seguinte Teorema.

Teorema C: *Qualquer ação contínua de $\mathbb{R}^k$ sobre uma superfície M, com $\chi(M) \neq 0$, tem um ponto fixo.*

Inicialmente, apresentaremos alguns lemas auxiliares. Considere uma ação contínua $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \to M$ com M superfície compacta.

Lema 3.8. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \to M$ uma ação contínua e suponhamos que toda ação sobre M de $\mathbb{R}^{n-1}$ tem ponto fixo. Se $\mathscr{M}$ é a coleção de todos os conjuntos φ-minimais em M e $\chi(M) \neq 0$, então, ou φ tem um ponto fixo, ou, $\mathscr{M}$ é não enumerável, e todos, exceto um número finito de seus elementos, são círculos.*

Demonstração. Suponhamos que $Fix(\varphi) = \emptyset$. Para cada hiperplano que contém a origem de coordenadas $H \subset \mathbb{R}^n$, seja φ_H a ação de H em M induzida pela restrição de φ. Pela hipótese indutiva, φ_H tem pelo menos um ponto fixo z em M.

Para cada ponto fixo $z \in M$ da ação φ_H ,denotemos $K(z)$ como sendo o fecho de sua φ-órbita, isto é:

$$K(z) = \overline{\{\varphi(u, z); u \in \mathbb{R}^n \ e \ z \in Fix(\varphi_H)\}}$$

(A) *Todos os pontos em $K(z)$ são pontos fixos da ação φ_H. De fato, seja $p \in K(z)$, então, existem $u_n \in \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$\varphi(u_n, z) \to p \tag{3.1}$$

Por outro lado, seja $h \in H$, então, $\varphi(h, \varphi(u_n, z)) \to \varphi(h, p)$. Como $\varphi(u_n, \varphi(h, z)) = \varphi(u_n, z)$, e pela equação 3.1, temos que $\varphi(h, p) = p$.

(B) *Sejam $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^n$ retas tal que $\vec{0} \in L_i$ e $L_i \nsubseteq H$ para $i = 1, 2$, logo, $\mathcal{O}_{L_1}(x) = \mathcal{O}_{L_2}(x)$ para todo $x \in K(z)$. De fato, Seja $y \in \mathcal{O}_{L_1}(x)$, então, $y = \varphi(l_1, x)$ com $l_1 \in L_1$, como $L_2 \nsubseteq H$, então, temos que $\langle H, L_2 \rangle = \mathbb{R}^n$, assim, existe $l_2 \in L_2$ e $h \in H$ tal que $l_1 = l_2 + h$, logo, pelo item anterior, temos:*

$$y = \varphi(l_1, x) = \varphi(l_2 + h, x) = \varphi(l_2, \varphi(h, x)) = \varphi(l_2, x) \in \mathcal{O}_{L_2}(x)$$

De forma completamente análoga provamos a outra inclusão.

(C) *$K(z)$ é fechado e φ-invariante e contém pelo menos um conjunto φ-minimal. Por definição, ele é fechado. Agora, tomando $x \in K(z)$, seja a reta $L_1 \nsubseteq H$, observe que para provar que ela é φ-invariante, basta provarmos que $\varphi(l_1, x) \in K(z)$ para todo $l_1 \in L_1$, de fato, como $x \in K(z)$, então, existe $\{u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(u_n, z) \to x$, logo $\varphi(l_1 + u_n, z) \to \varphi(l_1, x)$, tomando $v_n = u_n + l_1$, temos que $\varphi(l_1, x) \in K(z)$. Observe que ele contém um conjunto minimal.*

Seja

$$\mathscr{M}(H) = \{\mu \subset M; \mu \text{ é } \varphi - minimal \text{ e } \varphi(h, w) = w \text{ para todo } w \in \mu \text{ e } h \in H\}$$

Pelo item anterior, $\mathscr{M}(H) \neq \emptyset$.

(D) *Dado a reta $\vec{0} \in L \nsubseteq H$, todo $\mu \in \mathscr{M}(H)$ é um conjunto minimal do fluxo φ_L. De fato, devemos provar as seguintes afirmações:*

- *μ é φ_L-invariante. Seja $y \in \mu$ e $l \in L$, consideremos $h \in H$ arbitrário, então como μ é φ-invariante, temos*

  $$\varphi(l, y) = \varphi(l, \varphi(h, y)) = \varphi(l + h, y) \in \mu$$

  Isso prova este item.

- *Se $\nu \subset \mu$ é φ_L-invariante, então, $\nu = \mu$. Suponhamos que $\nu \subsetneq \mu$. Seja $y \in \nu$, como ν é φ_L-invariante, temos que $\varphi(l, y) \in \nu$ para todo $l \in L$. Seja $u \in \mathbb{R}^n$, então, $u = l + h$ onde $l \in L$ e $h \in H$ assim temos que:*

  $$\varphi(u, y) = \varphi(l, \varphi(h, y)) = \varphi(l, y) \in \nu$$

  Isso prova que ν é φ-invariante, assim, deve conter um minimal $\omega \subsetneq \mu$ o que é uma contradição.

(E) *Se* H_1, H_2 *são hiperplanos distintos contendo a origem, então,* $\mathscr{M}(H_1) \cap \mathscr{M}(H_2) = \emptyset$. *Caso contrário, existiria* $\mu \in \mathscr{M}(H_1) \cap \mathscr{M}(H_2)$, *logo, para cada ponto* $x \in \mu$ *teríamos* $x \in Fix(\varphi_{H_1}) \cap Fix(\varphi_{H_2})$. *Como* $\langle H_1, H_2 \rangle = \mathbb{R}^n$, *então, para cada* $u \in \mathbb{R}^n$ *existe* $h_1 \in H_1$ *e* $h_2 \in H_2$ *tal que* $u = h_1 + h_2$ *de onde temos que* $\varphi(u, x) = \varphi(h_1 + h_2, x) = \varphi(h_1, \varphi(h_2, x)) = \varphi(h_1, x) = x$, *logo,* $x \in Fix(\varphi)$, *o que é uma contradição com nossa suposição inicial.*

Portanto, $\mathscr{M} = \cup \mathscr{M}(H)$, *onde* H *descreve todos os hiperplanos homogêneos de* $\mathbb{R}^n$ *é uma coleção não enumerável.*

(F) *Além disso,* $\mathscr{M}$ *contém todos os conjuntos* φ*-minimais. De fato,*

- *Dado um conjunto* φ*-minimal* μ, *a órbita de nenhum ponto* $x \in \mu$ *pode conter um ponto interior. Como as órbitas são homeomorfas a* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$ *com* $0 \leq k + l \leq n$, *como* M *é superfície, então, estas órbitas podem ser homeomorfas a um ponto, uma reta, o toro* T^1, *o cilindro* $T^1 \times \mathbb{R}$, *o plano* $\mathbb{R}^2$ *ou o toro* T^2. *Observe que este último caso não pode acontecer, pois, em particular, esta órbita é uma subvariedade aberta e fechada de* M, *o que implica que* $M = T^2$ *e isso contradiz a nossa suposição.*

  Se existissem órbitas cilindro ou plano, então, a fronteira dos mesmos seriam subconjuntos invariantes e minimais o que contradiz a minimalidade de μ.
- *Assim, o grupo de isotropia de* x *será homeomorfa a* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$ *ou* $\mathbb{R}^{n-1}$ *se a órbita de* x *for um ponto, homeomorfa ao círculo ou homeomorfa a uma reta respectivamente. Logo, o grupo de isotropia de* x *contém um hiperplano* H.
- *Finalmente, sejam* $x, y \in \mu$, *como* $\overline{\mathcal{O}_x} = \overline{\mathcal{O}_y} = \mu$, *então,* $G_x = G_y$, *assim,* $H \subset G_x$ *para todo* $x \in \mu$.

Sejam $l_1, \ldots, l_n$ *os eixos de* $\mathbb{R}^n$ *e escreva* $\mathscr{M}_i = \bigcup \{\mathscr{M}(H); H \cap l_i = 0\}$. *Pelo item (D) acima, cada conjunto* $\mu \in \mathscr{M}_i$ *é minimal em* l_i. *Assim, pelo Lema 2.18, os conjuntos* $\mu \in \mathscr{M}_i$ *são todos círculos, exceto, um número finito deles. Mas, claramente,* $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{M}_n$, *porque um determinado hiperplano não pode conter todos os eixos de* $\mathbb{R}^n$. *Portanto, todos os conjuntos em* $\mathscr{M}$ *são círculos, com um número finito de exceções. (Observe que, se o gênero de* M *é zero, não há exceções). Isso prova o resultado.*

■

Lema 3.9. *Seja* $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \to M$ *uma ação contínua e suponhamos que toda ação sobre* M *de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *tem ponto fixo e* $\chi(M) \neq 0$. *Então, ou* φ *tem um ponto fixo em* M *ou podemos encontrar uma órbita unidimensional fechada de* φ *que é disjunta dos círculos da fronteira de* M *e não limita um cilindro junto com nenhum deles.*

Demonstração. *Suponhamos que a ação φ não possua pontos fixos. Seja Γ um círculo fronteira de M. Considere a coleção $\{C_\alpha\}$ de todos os cilindros que são abertos em M, contendo Γ como uma de suas fronteiras e tal que o conjunto de pontos fronteira em relação a M seja $\partial C_\alpha = \mu_\alpha$, uma órbita unidimensional fechada de φ.*

(A) *A coleção $\{C_\alpha\}$ é linearmente ordenada por inclusão. Se M não é um disco, o resultado segue do Lema 2.21; se M for um disco, então, aplicacando o princípio maximal de Hausdorff e mudando de notação, $\{C_\alpha\}$ representará uma subfamília maximal ordenada linearmente.*

Se $C = \cup C_n$ é tal que $C_n = C_\alpha$ para alguns α e $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$. Além disso, podemos concluir que $\bar{C}$ é um cilindro compacto com elementos da fronteira Γ e μ, pois, $\mu = \partial C$ é uma curva fechada.

(B) *$x \in \mu$ se, e somente se, existe $x_n \in \partial C_n$ tais que $x_n \in C_n$ converge para x. De fato, existe $x_n \in C$ tal que $x_n \to x$, como C_n linearmente ordenado, para n suficientemente grande, podemos tomar $x_n \in C_n$, o recíproco é evidente.*

(C) *μ é minimal. Observe que μ é fechado. Seja $x \in \mu$ e tal que $\mathcal{O}(x) \nsubseteq \mu$, então, existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(u, x) \in C_n$ para n suficientemente grande, isto implica que existe $z \in \mu_n \cap \mathcal{O}(x) \nsubseteq \mu$, o que, claramente, é uma contradição. Assim μ é fechado, invariante e naõ tem singularidades de onde temos que μ é minimal.*

(D) *$\mathcal{O}_x$ é um círculo. De fato, como μ é unidimensional, o grupo de isotropia de x, G_x contém um hiperplano H, então, $G_x \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ou $G_x \cong \mathbb{R}^{n-1}$, porém, $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}_{x_n}$ de onde temos que $G_{x_n} \subset G_x$ e, como $G_{x_n} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$, temos que $G_x \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de onde obtemos o resultado.*

O cilindro compacto $\bar{C}$ é tal que seu conjunto limite em relação a M, μ, é disjunto das outras curvas da fronteira de M (pois M não é um cilindro) e $M \setminus C$ é uma 2-variedade compacta, homeomórfa com M. Com μ substituindo Γ como um círculo fronteira, $M \setminus C$ é invariante sob φ, e nenhuma órbita fechada unidimensional de φ em $M \setminus C$ pode intersectar um cilindro com Γ.

Fazendo a mesma construção com todos os outros círculos de fronteira de M, obtemos uma variedade $M' \subset M$ a qual é homeomorfa com M, invariante sob φ e nenhuma φ-órbita unidimensional fechada em M' pode intersectar um cilindro com qualquer círculo fronteira de M. Mas $\mathcal{X}(M') \neq 0$, pelo Lema 3.8, existe uma órbita ν de φ unidimensional fechada em M. Como $\mathscr{M}$ é infinito, v pode ser escolhido disjunto dos círculos fronteira de M', assim, ν prova o Lema 3.9.

■

Prova do Teorema C

Demonstração. Apresentaremos uma prova usando indução em n. Para $n = 1$, o Teorema é o Lema 2.17. Seja $n > 1$ e suponha que o teorema tenha sido provado para ações de $\mathbb{R}^{n-1}$. Observe que temos que o Lema 3.8 e Lema 3.9 são verdadeiros.

A prova será dada por indução, agora, no gênero g da variedade M.

(A) *Se $g = 0$, consideraremos ainda as seguintes situações:*

(A.1) *$M = D^2$. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \times D^2 \to D^2$ não tem ponto fixo, então, pelo Lema 3.9, existe uma órbita fechada de φ no interior de D^2, porém, qualquer órbita destas define um cilindro com ∂D^2, o que é uma contradição com o Lema 3.9.*

(A.2) *Se $M = S^2$. Dada $\varphi : \mathbb{R}^n \times S^2 \to S^2$, pelo Lema 3.9, existe uma órbita fechada unidimensional $\mu \subset S^2$.*
*Pelo Teorema da Curva de Jordan 1.39, μ delimita um disco D^2. Como μ é uma φ-órbita, então, D^2 é invariante e o resultado segue do Item (**A.1**).*

(A.3) *Para completarmos o caso de gênero 0, faremos uma terceira indução, desta vez, sobre o número de componentes b da fronteira de M.*

(A.3.1) *Observe que se $b = 0$, ou $b = 1$, então, $M = S^2$ ou $M = D^2$, respectivamente. E, neste caso, o resultado é verdadeiro pelos itens (**A.1**) e (**A.2**) acima.*

(A.3.2) *Se $b = 2$, então, M é homeomorfo ao cilindro o que implica que $\chi(M) = 0$. Observe que este caso não é estudado no Teorema.*

(A.3.3) *Para iniciarmos a hipótese indutiva sobre b, consideremos $b = 3$ e a ação $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \to M$ sem ponto fixo, então, M ou é o disco menos dois discos interiores ou M é a esfera S^2 menos 3 discos.*
No primeiro caso, qualquer órbita interior a M define um cilindro com algum elemento da fronteira o que, claramente, contradiz o Lema 3.9.
Se M for a esfera S^2 menos 3 discos, usando projeção estereográfica, podemos achar um disco D^2 menos 2 discos interiores e φ-invariante. Assim, esse caso reduz-se ao anterior e temos provado o Teorema para o caso $b = 3$.

(A.3.4) *Agora, suponha que $b > 3$ e considere ν uma órbita fechada de φ fornecida pelo Lema 3.9. Pelo Lema 3.8, não pode ser fronteira de um cilindro de forma tal que a outra fronteira do mesmo seja uma destas componentes da fronteira, então, podemos assumir que ν é uma curva fechada simples contendo b' círculos da fronteira no seu iterior e b'' círculos da fronteira no complementar do interior com $b' \geq 2$, $b'' \geq 2$ e $b = b' + b''$.*
Fazendo uma cirurgia em M a longo de ν obtemos duas superfícies M' e M'' com número de componentes da fronteira menor que b. Observe que estas superfícies ainda tem gênero zero, dai obteriamos o resultado aplicando à hipotese de indução.

(B) *Para finalizarmos, suponhamos que M tem gênero $g > 0$ e que $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \to M$ não tem ponto fixo. Suponha que a afirmação é válida para variedades de gênero menor que g.*

Escolhamos uma órbita de φ, v, fechada e unidimensional fornecida pelo Lema 3.9. Fazendo uma cirugia em M ao longo de ν. Obtemos:

Ou uma variedade de gênero inferior e a mesma característica de Euler de M; ou um par de variedades, ambas com gênero menor que g e caractectrística de Euler diferente de zero, cuja soma coincide com a característica de Euler de M.

Em ambos casos o Teorema fica provado.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] Aranson, S. Kh.; Belitsky, G. R.; Zhuzhoma, E. V. **Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces**. (English summary) Translated from the Russian manuscript by H. H. McFaden. Translations of Mathematical Monographs, 153. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. xiv+325 pp.

[2] Arraut, José L. (BR-SPL3-DM); Martins, Luciana F. (BR-PAUL2-MI); Schütz, Dirk (4-DRHM) **On singular foliations on the solid torus**. (English summary) Topology Appl. 160 (2013), no. 13, 1659?1674.

[3] Bredon, Glen E. **Topology and geometry**. Corrected third printing of the 1993 original. Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1997. xiv+557 pp.

[4] Camacho, César; Lins Neto, Alcides. **Geometric theory of foliations**. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. vi+205 pp.

[5] Godbillon, Claude. **Dynamical systems on surfaces**. Translated from the French by H. G. Helfenstein. Universitext. [University Textbook] Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. ii+201 pp.

[6] Hatcher, Allen(1-CRNL). **Algebraic topology**. (English summary) Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.

[7] Kosniowski, Czes. **A first course in algebraic topology**. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980. viii+269 pp.

[8] Lee, John M. **Introduction to smooth manifolds**. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer-Verlag, New York, 2003. xviii+628 pp.

[9] Lima, Elon L. **Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds**. Comment. Math. Helv. 39 1964 97?110.

[10] Lima, Elon L. **Commuting vector fields on 2-manifolds**. Bull. Amer. Math. Soc. 69 1963 366?368. (Reviewer: T. Ura) 57.48

[11] Lima, Elon L. **Curso de análise**. Vol. 2. (Portuguese) [Course in analysis. Vol. 2] Projeto Euclides [Euclid Project], 13. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981. ix+547 pp. 26-01

[12] Lima, Elon L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil (2006).

[13] Lima, Elon L. **Homologia básica**, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil (2012).

[14] Lima, Elon L. **Variedades diferenciáveis**. (Portuguese) [Differentiable manifolds] Monografías de Matemática [Mathematical Monographs], 15. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977. ii+369 pp.

[15] Munkres, James R. **Topology**. Second edition of [MR0464128]. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp.

[16] Palis, J. e De Melo W., **Introdução aos sistemas dinâmicos**, Rio de Janeiro, Brazil (1975).

[17] Sotomayor, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. (Portuguese) [Lessons on ordinary differential equations] Projeto Euclides [Euclid Project], 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979. xvi+327 pp.

[18] Vazquez, García R., **Lecciones de topología**, UNAM, D.F., México (1995).