

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Excitações Skyrmiónicas em Magnetismo Bidimensional

Igor Bigonha Ribeiro Alves
Magister Scientiae

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2025

IGOR BIGONHA RIBEIRO ALVES

Excitações Skyrmiônicas em Magnetismo Bidimensional

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Afranio Rodrigues Pereira

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

A474e
2025
Alves, Igor Bigonha Ribeiro, 1992-
Excitações skyrmiônicas em magnetismo bidimensional /
Igor Bigonha Ribeiro Alves. – Viçosa, MG, 2025.
1 dissertação eletrônica (60 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Afrânio Rodrigues Pereira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Física, 2025.
Referências bibliográficas: f. 57-60.
DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2025.834>
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Ferromagnetismo. 2. Modelo de Skyrme. 3. Solitons.
I. Pereira, Afrânio Rodrigues , 1963-. II. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação
em Física. III. Título.

CDD 22. ed. 538.44

IGOR BIGONHA RIBEIRO ALVES

Excitações Skyrmiônicas em Magnetismo Bidimensional

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 1 de setembro de 2025.

Assentimento:

Igor Bigonha Ribeiro Alves
Autor

Afranio Rodrigues Pereira
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pelo autor em 23/12/2025 às 14:31:18 e pelo orientador em 25/12/2025 às 18:10:13. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **6YXU.H62K.8F78** e clique no botão 'Validar documento'.

AGRADECIMENTOS

À minha família, principalmente à minha mãe Ilmara Bigonha Ribeiro, pelo amor e apoio incondicionais.

À Universidade Federal de Viçosa e ao Departamento de Física, pela oportunidade de realizar a pós-graduação.

À todos os bons amigos que participaram da minha caminhada.

Ao professor Afranio Rodrigues Pereira, pela orientação e aconselhamentos.

À todos os professores que participaram da minha formação até aqui.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

“I’m just a dreamer
I dream my life away
I’m just a dreamer
Who dreams of better days.”

(Ozzy Osbourne)

RESUMO

ALVES, Igor Bigonha Ribeiro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, setembro de 2025. **Excitações Skyrmiônicas em Magnetismo Bidimensional**. Orientador: Afranio Rodrigues Pereira.

Skyrmions e bimerons são excitações topológicas não-lineares em sistemas magnéticos bidimensionais. A primeira detecção experimental do skyrmion se deu em 2009 e, desde então, as soluções solitônicas têm sido tópico de intensa pesquisa. Em particular, os skyrmions e bimerons são duas excitações magnéticas de grande relevância teórica e experimental, sendo as principais candidatas como portadoras de informação em novas tecnologias spintrônicas devido ao compartilhamento de características interessantes, como proteção topológica e não-volatilidade. Em particular, os sistemas ferromagnéticos bidimensionais – no limite contínuo – são descritos pelo célebre modelo sigma não-linear, cujas soluções solitônicas topológicas são classificadas dentro de setores de homotopia. Skyrmions e bimerons pertencem a um mesmo setor homotópico e podem, a princípio, ser continuamente deformados um no outro. Um problema de grande relevância atual trata da transformação entre skyrmions e bimerons, que ainda é evasiva. Uma investigação analítica desse tópico pode ajudar na manipulação dessas estruturas de forma controlada em dispositivos. Nesse contexto, a presente dissertação é focada em uma revisão bibliográfica dos principais tópicos relacionados a obtenção e investigação de soluções solitônicas, em particular, aos skyrmions e bimerons, em um sistema ferromagnético bidimensional.

Palavras-chave: ferromagnetismo bidimensional; modelo de Heisenberg; sólitons; skyrmions; bimerons.

ABSTRACT

ALVES, Igor Bigonha Ribeiro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September, 2025. **Skyrmionic Excitations in Two-Dimensional Magnetism**. Adviser: Afranio Rodrigues Pereira.

Skyrmions and bimerons are nonlinear topological excitations in two-dimensional magnetic systems. The first experimental detection of the skyrmion occurred in 2009, and since then, solitonic solutions have been a topic of intense research. In particular, skyrmions and bimerons are two magnetic excitations of great theoretical and experimental relevance, being the main candidates as information carriers in new spintronic technologies due to their interesting shared characteristics, such as topological protection and non-volatility. In particular, two-dimensional ferromagnetic systems – in the continuous limit – are described by the famous nonlinear sigma model, whose topological solitonic solutions are classified within homotopy sectors. Skyrmions and bimerons belong to the same homotopic sector and can, in principle, be continuously deformed into one another. A problem of current relevance concerns the transformation between skyrmions and bimerons, which is still elusive. An analytical investigation of this topic can help in the controlled manipulation of these structures in devices. In this context, the present dissertation focuses on a literature review of the main topics related to the obtention and investigation of solitonic solutions, in particular, skyrmions and bimerons, in a two-dimensional ferromagnetic system.

Keywords: two-dimensional ferromagnetism; Heisenberg model; solitons; skyrmions; bimerons

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1 Teorema de Derrick-Hobart.....	10
2.2 O modelo sigma não-linear	12
2.3 Ferromagneto de Heisenberg bidimensional.....	26
2.4 O limite contínuo do ferromagneto de Heisenberg	30
2.5 Equações de movimento.....	33
2.6 Soluções solitônicas de carga topológica unitária.....	35
Skyrmions	38
Bimerons	43
3 TRANSFORMAÇÕES SKYRMIONS-BIMERONS	47
4 CONCLUSÕES	56
REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Em sistemas ferromagnéticos, os momentos magnéticos são acoplados principalmente via interação de troca sendo, portanto, usualmente descritos pelo modelo de Heisenberg. O modelo, como conhecido hoje, teve sua primeira formulação em 1928 [1] e descreve o magnetismo microscópico como sendo originado da interação coulombiana entre elétrons e do princípio de exclusão de Pauli. O estado fundamental ferromagnético em um sistema bidimensional é ordenado e consiste de todos os spins alinhados em uma mesma direção, levando a uma quebra espontânea de simetria. As excitações menos energéticas dos ferromagnetos bidimensionais consistem de mágnons (ondas de spin) lineares e não massivos, além de excitações massivas e não-lineares: os sólitons.

Os sólitons são configurações de campo com energia finita e com densidade de energia localizada. Tratando-se da dinâmica, se propagam com velocidade constante e sem dissipação. Embora sejam soluções de equações de onda não-lineares, eles se assemelham a partículas estendidas [2]. Nesse contexto, o limite contínuo do ferromagneto de Heisenberg bidimensional é descrito pelo modelo sigma não-linear, conhecido por sua rica estrutura topológica e de grande relevância também em física de partículas por sua similaridade com a teoria de Yang-Mills. Por sua vez, além da descrição do vácuo ferromagnético de energia normalizada a zero, condições de contorno adequadas levam à emergência natural de soluções topológicas não-lineares estáveis, como os skyrmions e bimerons.

Os skyrmions e os bimerons são estruturas de spin caracterizadas por possuírem magnetização contrária em seu centro, quando comparado com suas bordas confinantes. Essa estrutura é responsável por sua estabilidade e robustez. Carregando uma carga topológica unitária, skyrmions e bimerons são as excitações mais favoráveis energeticamente e não podem ser deformados continuamente à estruturas com diferentes cargas topológicas. Essas características, aliada ao fato de que são estruturas relativamente pequenas que necessitam de menores densidades de correntes de spin para movimentá-las (comparado, por exemplo, com paredes de domínio), as tornam as mais promissoras candidatas para aplicações em dispositivos spintrônicos [3,4].

Um problema de relevância experimental e teórica consiste na investigação das transformações entre skyrmions e bimerons. Nesse sentido, o principal objetivo da presente dissertação concentra-se na apresentação de forma didática de alguns dos principais tópicos que envolvem o estudo dos skyrmions e bimerons para que, futuramente, a transformação mútua entre essas duas estruturas possa ser investigada analiticamente.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, serão revisitados alguns dos principais tópicos relacionados à obtenção e investigação de soluções solitônicas estáticas em sistemas ferromagnéticos bidimensionais, em particular, skyrmions e bimerons de carga topológica unitária. Por fim, será feita uma breve caracterização dessas duas estruturas. As seções 2.1 e 2.2 foram elaboradas seguindo o mesmo raciocínio do livro texto “Solitons and instantons” de R. Rajaraman [2].

2.1 Teorema de Derrick-Hobart

Esse teorema, devido à Derrick [5] e Hobart [6] e também conhecido como teorema do Virial, fornece informações prévias sobre como um sistema deve ser para comportar soluções solitônicas. Sendo $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = [\phi_i(\mathbf{x}, t); i = 1, \dots, N]$ um conjunto de N campos escalares acoplados em $D + 1$ dimensões e o potencial $U[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)]$ uma função não-negativa que se anula apenas em seu mínimo absoluto, o teorema mostra que *soluções solitônicas não-triviais estáticas* estão restritas aos sistemas cuja dimensionalidade D do espaço é menor que três e quando a Lagrangiana tem a seguinte forma relativística padrão

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\phi}) - U[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)]. \quad (2.1.1)$$

Uma solução estática $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ obedece à equação

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}), \quad (2.1.2)$$

em que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_D^2}$$

define o operador laplaciano em D dimensões espaciais. A equação (2.1.2) é obtida da condição de extremização $\delta E = 0$ do funcional da energia $E[\Phi]$ que, no caso estático, é escrito como

$$\begin{aligned} E[\Phi] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla_i \Phi \cdot \nabla_i \Phi + U(\Phi(\mathbf{x})) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_i \Phi \cdot \nabla_i \Phi) + \int d^D x U(\Phi(\mathbf{x})) \\ &= U_K[\Phi] + U_V[\Phi], \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

em que

$$U_K[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \nabla_i \Phi \cdot \nabla_i \Phi \quad \text{e} \quad U_V[\Phi] = \int d^D x U(\Phi) \quad (2.1.4)$$

são não-negativos. De posse de uma solução estática $\Phi_1(\mathbf{x})$, considere a família de configurações de parâmetro único

$$\Phi_m(\mathbf{x}) = \Phi_1(m\mathbf{x}). \quad (2.1.5)$$

Usando essas transformações de escala no funcional da energia, segue que

$$\begin{aligned} E[\Phi_m] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla_i \Phi_m \cdot \nabla_i \Phi_m + U(\Phi_m(\mathbf{x})) \right] \\ &= U_K[\Phi_m] + U_V[\Phi_m] \\ &= m^{2-D} U_K[\Phi_1] + m^{-D} U_V[\Phi_1]. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Uma vez que $\Phi_1(\mathbf{x})$ é solução, ela extremiza o funcional $E[\Phi]$, de modo que $m = 1$ é um ponto estacionário de $E[\Phi_m]$, isto é,

$$\left. \frac{dE[\Phi_m]}{dm} \right|_{m=1} = 0. \quad (2.1.7)$$

Diferenciando (2.1.6) com respeito ao parâmetro m e usando (2.1.7), obtém-se diretamente que

$$(2 - D)U_K[\phi_1] - DU_V[\phi_1] = 0. \quad (2.1.8)$$

Conclui-se que, como U_K e U_V são não-negativos, não há soluções não-triviais estáticas para $D \geq 3$. Note que a equação acima não é satisfeita nesse caso, a menos que $U_K[\phi_1] = U_V[\phi_1] = 0$, implicando ϕ_1 constante e igual a seu valor no vácuo (estado fundamental), sendo então uma solução trivial. Para $D = 1$, as soluções são do tipo kink, exemplificadas nas seções 2.3 e 2.5 da referência [2]. O caso $D = 2$ implica que $U_V[\phi_1] = 0$, de modo que ϕ_1 deve ser igual ao seu valor no vácuo; porém, com escolhas convenientes das condições de contorno, é possível a obtenção de soluções estáticas não-triviais. Este é o caso de principal interesse na presente dissertação e será tratado a seguir. Os resultados do teorema são válidos apenas para soluções estáticas e Lagrangianas na forma de (2.1.1).

2.2 O modelo sigma não-linear

Uma solução estática derivada da Lagrangiana (2.1.1) para o caso mais simples de $U(\phi) = 0$ deve satisfazer, de acordo com (2.1.2), à

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.2.1)$$

com funções constantes como soluções não-singulares. A imposição de um vínculo não-trivial $\phi \cdot \phi = 1$ ao modelo o torna não-linear e permite soluções não-triviais. Este modelo é dito modelo $O(N)$ não-linear.

O modelo $O(3)$ ou sigma não-linear, caso particular em que $N = 3$, consiste de três campos escalares reais

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \{\phi_a(\mathbf{x}, t); a = 1, 2, 3\} \quad (2.2.2)$$

que devem satisfazer o vínculo

$$\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1; \forall(\mathbf{x}, t), \quad (2.2.3)$$

e a dinâmica é determinada pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\phi}). \quad (2.2.4)$$

Nesse caso, o campo $\boldsymbol{\phi}$ pode ser considerado como um vetor no “espaço interno” (ou espaço-campo) tridimensional com suas componentes representadas pelo subíndice a , que difere dos vetores no espaço de coordenadas, que são representadas pelos subíndices de Lorentz μ . Além disso, note que o vínculo (2.2.3) e a Lagrangiana (2.2.4) são invariantes sob rotações $O(3)$ globais no espaço interno.

O vínculo é imposto usualmente no modelo através de um multiplicador de Lagrange $\lambda(\mathbf{x}, t)$ e a equação de campo é obtida pelo princípio variacional de Euler-Lagrange aplicado à ação

$$S[\boldsymbol{\phi}] = \int \int dx dt \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\phi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\phi}) + \lambda(\mathbf{x}, t)(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} - 1) \right], \quad (2.2.5)$$

o que resulta em

$$\partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{\phi} + \lambda \boldsymbol{\phi} = (\square + \lambda) \boldsymbol{\phi} = 0. \quad (2.2.6)$$

Tomando o produto escalar da equação acima por $\boldsymbol{\phi}$ e, em seguida, usando a identidade (2.2.3), o multiplicador de Lagrange $\lambda(\mathbf{x}, t)$ pode ser eliminado, de modo que

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\phi} \cdot \square \boldsymbol{\phi} \quad (2.2.7)$$

e, portanto, a equação de campo do modelo é escrita como

$$\square\Phi - (\Phi \cdot \square\Phi)\Phi = 0. \quad (2.2.8)$$

Passando agora ao caso de interesse, isto é, à consideração de soluções *estáticas* no espaço *bidimensional*, a equação de campo se reduz imediatamente a

$$\nabla^2\Phi - (\Phi \cdot \nabla^2\Phi)\Phi = 0. \quad (2.2.9)$$

A nova equação de campo (2.2.9) é não-linear e será verificado que ela gera soluções topológicas não-triviais, diferentemente da equação (2.2.1) que admitia apenas funções constantes como soluções não-singulares.

O funcional da energia de uma solução estática, obtido de (2.2.4), é

$$E[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu\Phi) \cdot (\partial_\mu\Phi); \mu = 1, 2; \quad (2.2.10)$$

em que $\mu = 1, 2$ refere-se às duas componentes espaciais. Considerando inicialmente soluções de energia nula (o “vácuo clássico”), nota-se que

$$\partial_\mu\Phi = 0 \quad (2.2.11)$$

é a condição a ser satisfeita para todo \mathbf{x} , implicando que

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^0, \quad (2.2.12)$$

ou seja, qualquer vetor constante e unitário (devido ao vínculo) no espaço interno. Além disso, ele pode apontar em uma direção qualquer no espaço interno, gerando

uma família contínua de soluções degeneradas com energia mínima nula, relacionadas umas às outras por rotações $O(3)$ no espaço interno. Este é um caso de quebra espontânea de simetria a nível clássico.

Agora, serão investigadas soluções com energia diferente de zero, porém finita, aqui referidas como as soluções solitônicas ou sólitons – configurações de campo com energia finita e com densidade de energia localizada e, ao tratar-se da dinâmica, se propagam com velocidade constante e sem dissipação. Reescrevendo, convenientemente, a energia (2.2.10) em termos de coordenadas polares (r, φ) no espaço de coordenadas,

$$E[\Phi] = \frac{1}{2} \int |\nabla\Phi|^2 r dr d\varphi, \quad (2.2.13)$$

a seguinte condição,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |\nabla\Phi|^2 = 0 \quad (2.2.14)$$

ou

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}) = \Phi^0, \quad (2.2.15)$$

deve ser satisfeita para que, assintoticamente, o campo tome valores finitos para a finitude da energia. Portanto, de forma assintótica, o campo deve assumir o mesmo valor do vácuo Φ^0 , sendo portanto novamente um vetor constante unitário no espaço interno.

Uma vez que o campo $\Phi(\mathbf{x})$ tende ao mesmo valor Φ^0 em todos os pontos no infinito, o plano de coordenadas físico \mathbb{R}_2 pode ser compactado em uma superfície esférica, a qual será denominada como S_2^{fis} . Em termos técnicos, isso é feito por um mapeamento estereográfico e, de modo mais informal, o plano \mathbb{R}_2 pode ser modelado (dobrado) em uma superfície esférica, com seu círculo no infinito reduzido, por exemplo, ao polo norte da esfera (figura 2.2.1). Por outro lado, o espaço dos campos (espaço interno) ϕ_a , sujeitos ao vínculo (2.2.3), é também uma superfície esférica e de raio unitário, a qual será denominada como S_2^{int} . Portanto, qualquer configuração estática $\Phi(\mathbf{x})$ com energia finita é um mapeamento de S_2^{fis} em S_2^{int} (figura 2.2.2).

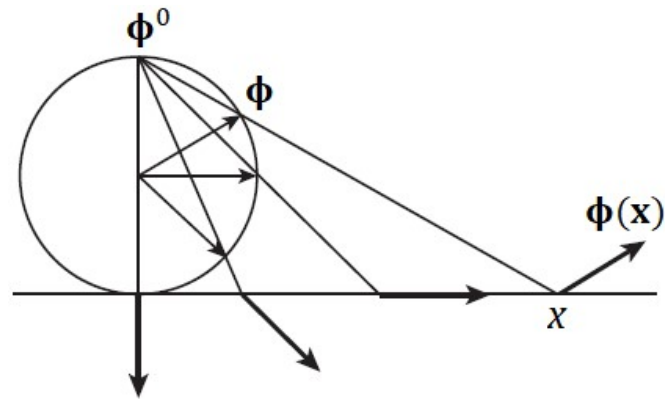


Figura 2.2.1: Ilustração de um mapeamento estereográfico de uma configuração de campo. **Fonte:** Extraída e adaptada de [7].

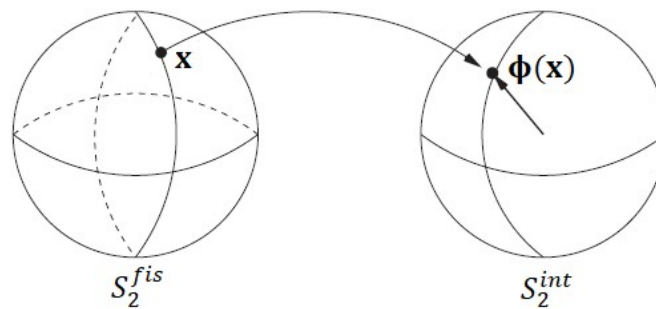


Figura 2.2.2: Mapeamento entre duas superfícies esféricas base S_2^{fis} e alvo S_2^{int} . **Fonte:** Retirada e adaptada de [8].

Tendo dito isso, é de interesse a investigação de mapeamentos envolvendo superfícies esféricas pois, topologicamente, o modelo sigma não-linear é um mapeamento de uma superfície esférica S_2^{fis} contendo as coordenadas do espaço físico em uma superfície esférica S_2^{int} correspondente aos campos ϕ_a como coordenadas do espaço interno.

Segundo a topologia, sendo X e Y dois espaços topológicos, dois mapeamentos

$$f: X \rightarrow Y \text{ e } g: X \rightarrow Y \quad (2.2.16)$$

são ditos *homotópicos* se f pode ser deformado continuamente em g e vice-versa. Além disso, se um mapeamento, por exemplo f , possui um inverso $f^{-1}: Y \rightarrow X$ e ambos são contínuos, diz-se que os dois espaços X e Y são *homeomórficos* ou topologicamente equivalentes. Um caso clássico de homeomorfismo é a deformação contínua entre um donut e uma caneca (figura 2.2.3). Neste caso, os dois objetos pre-

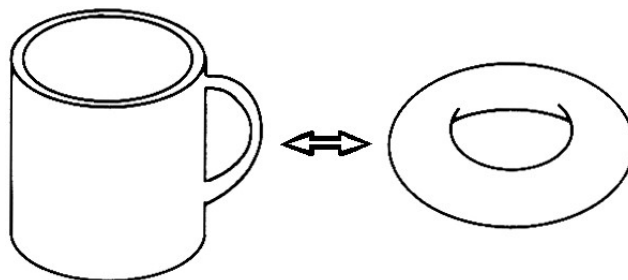


Figura 2.2.3: A caneca é homeomórfica ao donut. **Fonte:** Extraída e adaptada de [9].

servam uma cavidade sem a necessidade de uma abertura ou torção, isto é, uma descontinuidade. Portanto, tais objetos são homeomórficos ou equivalentes do ponto de vista topológico.

Todos os mapeamentos não-singulares entre duas superfícies esféricas podem ser classificados em setores de homotopia, que podem ser caracterizados pelo conjunto dos números inteiros, positivos, negativos e zero. Em termos matemáticos, isto é escrito como

$$\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}, \quad (2.2.17)$$

em que $\pi_m(S_n)$ é o grupo de homotopia associado aos mapeamentos $S_m \rightarrow S_n$ e \mathbb{Z} é o grupo dos inteiros. Ademais, mapeamentos dentro de um mesmo setor podem ser deformados continuamente uns nos outros, enquanto que mapeamentos de setores distintos não. Exemplos e maiores detalhes sobre as últimas definições topológicas podem ser consultados nas referências [2,9].

A conexão entre a topologia e o modelo sigma não-linear se dá pois configurações estáticas com energia finita em duas dimensões espaciais podem ser

classificadas em setores homotópicos, caracterizados por algum número inteiro, Q . Por definição,

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}), \quad (2.2.18)$$

sendo $\mu, \nu = 1, 2$ as coordenadas espaciais cartesianas, fornece o “winding number” (ou carga topológica), como será visto a seguir.

No lugar das três coordenadas cartesianas ϕ_a , sujeitas ao vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$, a superfície esférica do espaço interno S_2^{int} pode ser descrita em termos de duas variáveis $\{\xi_1, \xi_2\}$, como os ângulos polar e azimutal (figura 2.2.4). Dessa forma, uma expressão conhecida que fornece o elemento de área da superfície como escrito em termos das variáveis cartesianas e esféricas é

$$dS_a^{int} = d^2\xi \left(\frac{1}{2} \epsilon_{rs} \epsilon_{abc} \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \phi_c}{\partial \xi_s} \right). \quad (2.2.19)$$

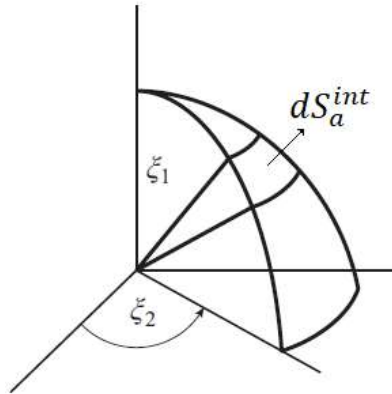


Figura 2.2.4: Elemento infinitesimal de área. **Fonte:** Extraída e adaptada de [7].

Escrevendo a carga topológica de (2.2.18) em notação indicial, usando em sequência a regra da cadeia e o Jacobiano da mudança de variáveis de $\{x_1, x_2\}$ para $\{\xi_1, \xi_2\}$, dado por

$$\epsilon_{rs} d^2\xi = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_\nu} d^2x, \quad (2.2.20)$$

segue que

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_c}{\partial x^\nu} \\
&= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi_c}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x^\nu} \\
&= \frac{1}{8\pi} \int d^2\xi \epsilon_{rs} \epsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \phi_c}{\partial \xi_s}.
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Por último, inserindo (2.2.19) em (2.2.21), conclui-se que

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S}^{int} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{4\pi} \int dS^{int}, \tag{2.2.22}$$

pois $\boldsymbol{\Phi}$ é um vetor unitário e normal à superfície. Portanto, como S_2^{int} é a superfície de uma esfera de raio unitário, com área 4π , Q fornece o número de vezes em que o espaço interno é coberto à medida em que o espaço físico \mathbb{R}_2 (compactado em S_2^{fis}) é estendido sobre ele.

Essa classificação homotópica é válida para qualquer *configuração* de campo estática para o qual o funcional da energia (2.2.10) é finito e não necessariamente uma *solução* – com mínima energia – da equação de campo (2.2.9), pois *soluções* de energia finita são subconjuntos de *configurações* de energia finita e a mesma classificação aplica-se a ambos. A carga topológica não varia se o campo sofre variações suaves e contínuas. Para a obtenção de soluções para qualquer setor Q , será reproduzido a seguir o formalismo desenvolvido por Belavin e Polyakov [10]. Partindo da expressão

$$\int d^2x (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi} \pm \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi} \pm \epsilon_{\mu\sigma} \boldsymbol{\Phi} \times \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi}) \geq 0, \tag{2.2.23}$$

tem-se que, após expansão dos termos e uma integração por partes,

$$\begin{aligned} \int d^2x [(\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}) + \epsilon_{\mu\nu}(\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}) \cdot \epsilon_{\mu\sigma}(\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi})] &\geq \\ &\geq \pm 2 \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\Phi} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}). \end{aligned}$$

(2.2.24)

Usando a identidade vetorial

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

pode-se mostrar que os dois termos do membro esquerdo de (2.2.24) são iguais, pois

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} (\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}) \cdot \epsilon_{\mu\sigma} (\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi}) &= \\ &= \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\sigma} (\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi}) \\ &= \delta_{\mu\sigma} (\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\boldsymbol{\Phi} \times \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi}) \\ &= \delta_{\mu\sigma} [(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi})(\partial_\nu \boldsymbol{\Phi} \cdot \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi}) - (\boldsymbol{\Phi} \cdot \partial_\sigma \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{\Phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\Phi})] \\ &= (\partial_\nu \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\partial_\nu \boldsymbol{\Phi}), \end{aligned}$$

em que no último passo foi usado o vínculo $\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi} = 1$ e sua derivada $\boldsymbol{\Phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\Phi} = 0$. Portanto,

$$2 \int d^2x (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi}) \geq \pm 2 \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\Phi} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\Phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}), \quad (2.2.25)$$

ou, usando (2.2.10) e (2.2.18),

$$E \geq 4\pi|Q|. \quad (2.2.26)$$

Essa inequação fornece um limite inferior para a energia de qualquer configuração estática em um determinado setor Q .

Em qualquer dado setor Q , a energia é mínima quando a igualdade de (2.2.26) e, conseqüentemente, de (2.2.23), é satisfeita; o que acontecerá se, e somente se

$$\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \pm \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} = 0. \quad (2.2.27)$$

Note agora que para qualquer configuração de campo que satisfaz (2.2.27), segue que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{\phi} &= \partial_\mu \partial_\mu \boldsymbol{\phi} = \mp \partial_\mu (\epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \\ &= \mp (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} + \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\mu \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) \\ &= \mp \epsilon_{\mu\nu} (\mp \epsilon_{\mu\sigma} \boldsymbol{\phi} \times \partial_\sigma \boldsymbol{\phi}) \times \partial_\nu \boldsymbol{\phi} \\ &= \delta_{\nu\sigma} [\partial_\sigma \boldsymbol{\phi} (\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi}) - \boldsymbol{\phi} (\partial_\sigma \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{\phi})]. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Pela diferenciação do vínculo $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$, podem obter-se que

$$(i) \quad \partial_\mu (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}) \Rightarrow \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi} = 0;$$

$$(ii) \quad \partial_\mu (\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi}) \Rightarrow \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{\phi} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\phi}.$$

Usando (i) e (ii) em (2.2.28), segue imediatamente

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi} (\boldsymbol{\phi} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\phi}), \quad (2.2.29)$$

que é justamente a equação de campo (2.2.9). Como conclusão, qualquer configuração de campo que satisfaz (2.2.27), bem como o vínculo (2.2.3), minimizará a energia E em algum dado setor Q e satisfará automaticamente a condição de extremização dada pela equação de campo (2.2.9). Em suma, qualquer campo que satisfaz (2.2.27) também satisfará (2.2.29); porém, o inverso não é necessariamente verdadeiro. Soluções de (2.2.29) que não satisfazem (2.2.27), não representam um

mínimo absoluto da energia no setor Q correspondente, mas algum maior valor extremo, tal como um mínimo local. Além disso, a equação (2.2.27) é, a princípio, mais fácil de ser resolvida por ser uma equação diferencial de primeira ordem, ao passo que a equação de campo “original” é de segunda ordem. Esse formalismo permite a busca de soluções solitônicas sem a necessidade da resolução da equação de campo do sistema e o próximo passo consiste em encontra-las.

Pode-se simplificar a equação (2.2.27) realizando uma mudança de variáveis. Foi visto que os valores permitidos de ϕ geram a superfície de uma esfera unitária S_2^{int} (em razão do vínculo), de modo a poder-se realizar uma projeção estereográfica da superfície esférica sobre um plano (neste caso, complexo), cujas coordenadas cartesianas são representadas por ω_1 e ω_2 :

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \rightarrow \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Sendo o plano $\{\omega_1, \omega_2\}$ – o qual a projeção é feita – paralelo ao plano $\{\phi_1, \phi_2\}$ e contendo o polo sul da esfera (figura 2.2.5), as variáveis envolvidas são relacionadas como

$$\omega_1 = \frac{2\phi_1}{1-\phi_3} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{2\phi_2}{1-\phi_3}. \quad (2.2.30)$$

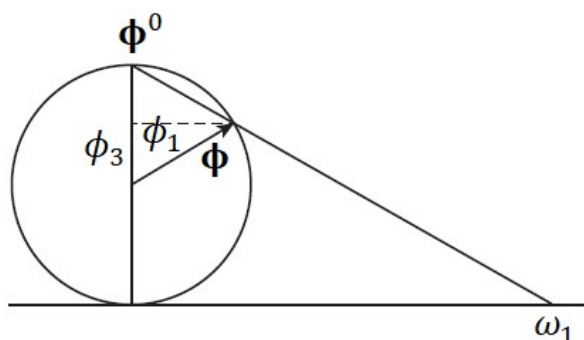


Figura 2.2.5: Projeção estereográfica do espaço dos campos. **Fonte:** Extraída e adaptada de [7].

É útil a construção das seguintes quantidades complexas:

$$\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2;$$

$$\omega \equiv \omega_1 + i\omega_2 = \frac{2\phi}{1 - \phi_3}.$$

Desse modo, é possível a obtenção das seguintes igualdades:

$$\partial_1 \omega = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{2\phi}{1 - \phi_3} \right) = \frac{2}{(1 - \phi_3)^2} (\partial_1 \phi + \phi \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi_3) \quad \text{e} \quad (2.2.31a)$$

$$\partial_2 \omega = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{2\phi}{1 - \phi_3} \right) = \frac{2}{(1 - \phi_3)^2} (\partial_2 \phi + \phi \overleftrightarrow{\partial}_2 \phi_3), \quad (2.2.31b)$$

onde, para compactação das expressões, foi definido que

$$\phi \overleftrightarrow{\partial}_i \phi_3 \equiv (\phi \partial_i \phi_3 - \phi_3 \partial_i \phi); \quad i = 1, 2. \quad (2.2.32)$$

Agora, a equação (2.2.27) fornece

$$\partial_1 \phi \pm \phi \times \partial_2 \phi = 0 \quad \text{e} \quad \partial_2 \phi \mp \phi \times \partial_1 \phi = 0. \quad (2.2.33)$$

Cada uma das expressões acima contém três equações referentes ao produto vetorial. Com isto, tem-se que

$$\partial_1 \phi = \pm i\phi \overleftrightarrow{\partial}_2 \phi_3 \quad \text{e} \quad (2.2.34a)$$

$$\partial_2 \phi = \mp i\phi \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi_3. \quad (2.2.34b)$$

Finalmente, usando (2.2.34) e (2.2.31b) em (2.2.31a), conclui-se que

$$\partial_1 \omega = \pm i \partial_2 \omega, \quad (2.2.35)$$

ou seja, ω_1 e ω_2 obedecem às equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = \mp \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad (2.2.36)$$

com ω sendo uma função analítica de z (para os sinais de cima) ou z^* (para os sinais de baixo), em que $z = x_1 + ix_2$. Logo, qualquer função analítica (não necessariamente inteira) $\omega(z)$ ou $\omega(z^*)$ satisfaz (2.2.27) e, conseqüentemente, a equação de campo, quando escrita em termos das variáveis originais ϕ_a e x .

Para o caso de ω ser analítico em z , por exemplo, pode-se escrever as expressões da energia E e da carga topológica Q em termos de ω , o que resulta em

$$E = \int d^2x \frac{|d\omega/dz|^2}{(1 + |\omega|^2/4)^2} \quad \text{e} \quad |Q| = \frac{E}{4\pi}. \quad (2.2.37)$$

Para Q positivo arbitrário, uma solução particular é da forma

$$\omega(z) = \left(\frac{z - z_0}{\lambda} \right)^n, \quad (2.2.38)$$

em que n é qualquer inteiro positivo, λ é qualquer número real e z_0 é qualquer número complexo. Uma vez que essa solução é uma função analítica, ela produz uma solução estática exata da equação de campo, quando escrita em termos das variáveis originais. Por exemplo, para $n = 1$ e $z_0 = 0$, obtêm-se

$$\phi_1 = \frac{4\lambda x}{r^2 + 4\lambda^2}; \quad \phi_2 = \frac{4\lambda y}{r^2 + 4\lambda^2}; \quad \phi_3 = \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad (2.2.39)$$

mostrado na figura 2.2.6. Além disso, sob transformações de Lorentz para um referencial em movimento, (2.2.38) levará à soluções dependentes do tempo exatas que movem-se sem distorção.

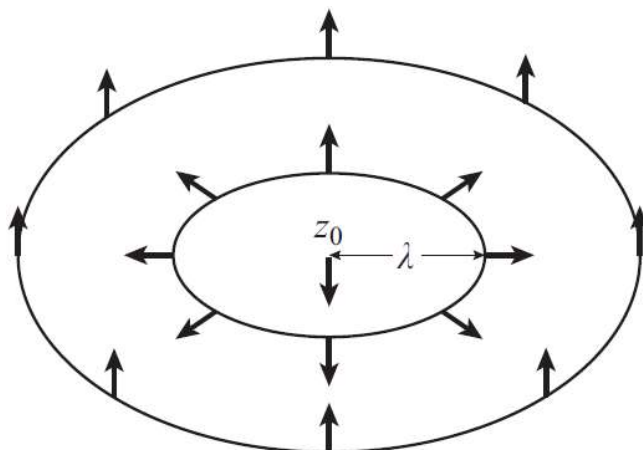


Figura 2.2.6: Sóliton de carga topológica unitária. **Fonte:** Extraída e adaptada de [7].

Substituindo a solução (2.2.38) em (2.2.37), a carga topológica se escreve

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{n^2 |z - z_0|^{2n-2} \lambda^{2n}}{(\lambda^{2n} + \frac{1}{4} |z - z_0|^{2n})^2}. \quad (2.2.40)$$

Fazendo

$$z - z_0 = r e^{i\theta} \quad \text{e} \quad d^2x = r dr d\theta,$$

a integração leva a

$$Q = n. \quad (2.2.41)$$

Portanto, $\omega(z)$ corresponde ao setor $Q = n$. Ademais,

$$E = 4\pi Q = 4\pi n, \quad (2.2.42)$$

é finita, mostrando que (2.2.38) são soluções explícitas de ondas solitárias para qualquer n inteiro positivo. As constantes λ e z_0 representam a escala e a localização do sólito, respectivamente. A arbitrariedade de tais constantes nas soluções, além do fato de que nem a energia E , nem a carga topológica Q dependam delas, refletem as invariâncias de escala e translacional do modelo.

Conforme dito, (2.2.38) é uma solução particular. A solução geral é dada como [7, 10–12].

$$\omega(z) = \prod_i \left(\frac{z - z_i}{\lambda} \right)^{m_i} \prod_j \left(\frac{\lambda}{z - z_j} \right)^{n_j}, \quad (2.2.43)$$

em que z_i são os zeros de multiplicidade m_i e z_j são os polos de ordem n_j . A carga topológica neste caso é

$$Q = \sum_i (m_i - n_i). \quad (2.2.44)$$

2.3 Ferromagneto de Heisenberg bidimensional

Um material na fase ferromagnética exibe polarização magnética – magnetização – espontânea em volumes macroscópicos mesmo na ausência de um campo aplicado. Essa magnetização desaparece acima de uma temperatura correspondente a uma transição de fase de segunda ordem (ponto de Curie), e o material passa a uma fase paramagnética. Nos materiais ferromagnéticos, os momentos magnéticos são acoplados principalmente via interação de troca, cuja importância foi pontuada primeiramente por Ya. I. Frenkel [13], Ya. G. Dorfman [14] e W. Heisenberg [1] em 1928 [15], formando a base do famoso modelo de Heisenberg, definido pela seguinte hamiltoniana:

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (2.3.1)$$

O somatório é feito sobre todos os pares distintos i e j , sendo \mathbf{S}_i o spin do íon localizado no sítio i e J_{ij} o termo de acoplamento de troca entre os spins \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j , que denota a intensidade da interação. $J_{ij} > 0$ representa um acoplamento ferromagnético, que tende a alinhar os spins paralelamente uns aos outros, enquanto que $J_{ij} < 0$ leva ao acoplamento antiferromagnético. Além disso, pode-se impor um vínculo entre as componentes de spin de modo que

$$\mathbf{S}^2 = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2 = 1. \quad (2.3.2)$$

O modelo de Heisenberg é originado da interação coulombiana entre elétrons e do princípio de exclusão de Pauli e descreve a origem microscópica do magnetismo na matéria como tendo, portanto, caráter puramente quântico. Maiores detalhes sobre o modelo e a forma da interação podem ser consultados na referência [16]. Pode-se generalizá-lo para a consideração de uma tendência preferencial de orientação dos spins, pela introdução de um termo de anisotropia Λ , de modo que a hamiltoniana torna-se

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \Lambda S_i^z S_j^z). \quad (2.3.3)$$

Essa hamiltoniana reproduz modelos teóricos amplamente utilizados no magnetismo para determinados valores de Λ . Para

- (i) $\Lambda < 0$, têm-se o modelo de Heisenberg de eixo-fácil, no qual os spins preferencialmente alinham-se na direção perpendicular ao plano (figura 2.3.1);
- (ii) $\Lambda = 0$, têm-se o modelo de Heisenberg isotrópico de (2.3.1), caracterizado pela inexistência de uma direção preferencial;
- (iii) $0 < \Lambda < 1$, têm-se o modelo de plano-fácil, no qual os spins preferencialmente alinham-se paralelamente ao plano (figura 2.3.2);
- (iv) $\Lambda = 1$, têm-se modelos de forte anisotropia planar, como o Modelo XY e o Modelo Rotor Planar (em que $S^z = 0$).

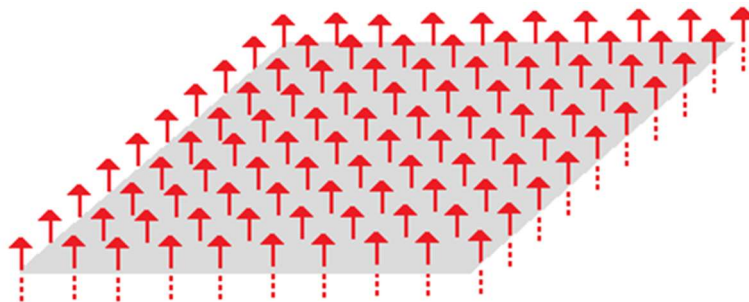


Figura 2.3.1: Sistema ferromagnético de eixo-fácil. **Fonte:** Autoral.

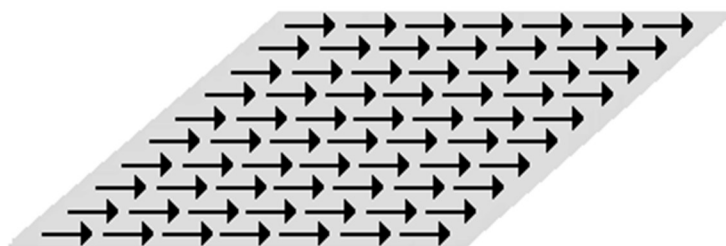


Figura 2.3.2: Sistema ferromagnético de plano-fácil. **Fonte:** Autoral.

A depender, por exemplo, dos tipos de excitações que se investiga em um sistema magnético e da precisão almejada em suas descrições, interações adicionais podem ser consideradas. Três das interações mais relevantes na natureza são as interações Zeeman, dipolar e de Dzyaloshinskii-Moriya.

Para um sistema sob efeito de um campo magnético externo \mathbf{B} , a energia da interação Zeeman

$$H_Z = -g\mu_B \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i, \quad (2.3.4)$$

em que g é o fator de Landé e μ_B é o magneton de Bohr, quantifica a tendência dos spins se alinharem na direção do campo. Um outro tipo de interação entre os momentos magnéticos de um material é a interação dipolo-dipolo magnética, ou simplesmente interação dipolar, clássica e de longo alcance que contribui energeticamente como [17]

$$H_D = \frac{1}{2} (g\mu_B)^2 \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} D_{ij}^{\alpha\beta} S_i^\alpha S_j^\beta, \quad (2.3.5)$$

em que α e β representam as coordenadas cartesianas e as interações dipolares $D_{ij}^{\alpha\beta}$ escrevem-se como [17]

$$D_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{|\mathbf{r}_{ij}|^2 \delta_{\alpha\beta} - 3r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta}{|\mathbf{r}_{ij}|^5}; \quad \mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \quad (2.3.6)$$

Por último, a interação de Dzyaloshinskii-Moriya (iDM) [18,19]

$$H_{DM} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j), \quad (2.3.7)$$

é uma interação quiral que representa uma correção energética relativística devido ao acoplamento spin-órbita e quebra de simetria de inversão. Ela pode ser considerada como uma interação de troca antissimétrica, $\mathbf{D}_{ij} = -\mathbf{D}_{ji}$, em que \mathbf{D}_{ij} são os vetores de Dzyaloshinskii-Moriya, cujas orientações satisfazem regras de simetria de Moriya [19] e podem ser estimadas a partir da regra de Levy-Fert [20]. Por exemplo, na interface entre um material magnético e um metal pesado, como Co/Pt, os vetores DM são perpendiculares ao plano formado pelos dois sítios da rede i, j e o átomo de metal pesado mais próximo (figura 2.3.3) [21,22].

Embora a interação de troca seja a principal responsável pelo alinhamento paralelo dos momentos magnéticos nos materiais ferromagnéticos, competições entre as diferentes interações citadas levam à inclinação de spins mais distantes e ao surgimento de diferentes arranjos não-colineares, característicos das excitações magnéticas solitônicas como, por exemplo, skyrmions e bimerons.

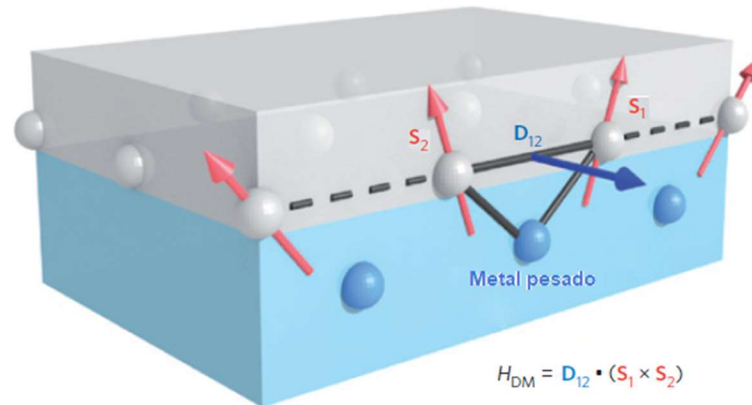


Figura 2.3.3: Esboço da iDM na interface entre um material ferromagnético (cinza) e um metal pesado (azul). **Fonte:** Extraída e adaptada de [3].

2.4 O limite contínuo do ferromagneto de Heisenberg

A interação de troca é tipicamente de curto alcance e, como uma primeira boa aproximação, J_{ij} é apreciável apenas entre os primeiros vizinhos, de modo que

$$J_{ij} = J, \text{primeiros vizinhos } \langle i, j \rangle ;$$

$$J_{ij} = 0, \text{caso contrário} .$$

Desse modo, a hamiltoniana (2.3.3) pode ser escrita como

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 - \Lambda) S_i^z S_j^z] . \quad (2.4.1)$$

Uma vez que está sendo analisado o caso bidimensional, é conveniente considerar o material como formado por uma rede quadrada com espaçamento de rede a . Assim, um spin localizado no sítio i interage com seus primeiros vizinhos $i \pm 1$ e $i \pm 2$, localizados na horizontal e vertical, respectivamente (figura 2.3.4).

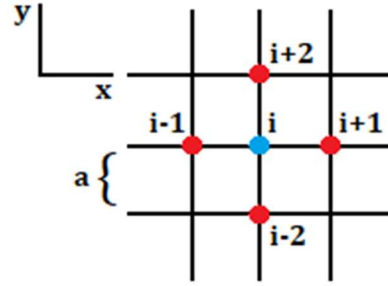


Figura 2.3.4: Ilustração de uma rede quadrada bidimensional. **Fonte:** Autoral.

Definindo o termo de interação entre primeiros vizinhos T^α ,

$$T^\alpha = S_i^\alpha (S_{i+1}^\alpha + S_{i-1}^\alpha) + S_i^\alpha (S_{i+2}^\alpha + S_{i-2}^\alpha); \quad \alpha = x, y, z, \quad (2.4.2)$$

a hamiltoniana (2.4.1) escreve-se

$$H = -J \sum_i [T^x + T^y + (1 - \Lambda)T^z]. \quad (2.4.3)$$

Para a obtenção do limite contínuo do ferromagneto bidimensional, considera-se que o espaçamento de rede é desprezível, ou melhor, é muito pequeno quando comparado com outras escalas espaciais do sistema. Isso implica em uma análise da região de baixas frequências e baixas energias, sendo relevante, portanto, no regime de baixas temperaturas [23]. Neste caso, considera-se que as flutuações térmicas são insignificantes, de modo que as variações das direções dos spins são graduais, isto é, variam lentamente. Portanto, pode-se expandir as componentes de spin dos primeiros vizinhos em séries de Taylor, conservando apenas os termos até segunda ordem. Assim,

$$S_{i\pm 1}^\alpha = S_i^\alpha \pm a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2}, \quad (2.4.4a)$$

$$S_{i\pm 2}^\alpha = S_i^\alpha \pm a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2}. \quad (2.4.4b)$$

A substituição de (2.4.4) em (2.4.2) leva a

$$T^\alpha = 4(S_i^\alpha)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} \right) S_i^\alpha. \quad (2.4.5)$$

Considerando os três termos de interação T^α , aproximando os somatórios em i por integrais

$$\sum_i a^2 \rightarrow \int d^2x,$$

isto é, integrando sobre todo o material, e dividindo o resultado pela metade a fim de evitar a contagem dupla de cada par de sítios ($\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$), obtém-se que

$$\begin{aligned} H = & -2J \int \frac{d^2r}{a^2} \mathbf{S}^2 - \frac{J}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \int d^2r \left(\frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2} \right) S^\alpha + \\ & + \Lambda \frac{J}{2} \int d^2r \left(\frac{\partial^2 S_i^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^z}{\partial y^2} \right) S_i^z + 2\Lambda J \int \frac{d^2r}{a^2} (S^z)^2. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

O primeiro termo da equação acima representa a energia do estado fundamental. Visto que $\mathbf{S}^2 = 1$, ele diverge para uma rede infinita e, como solução, a energia fundamental deve ser renormalizada para zero. Além disso, realizando nos dois seguintes termos de (2.4.6) integrações por partes do tipo

$$\int dx_i \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x_i^2} S^\alpha = - \int dx_i \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x_i} \right)^2,$$

têm-se o resultado geral desejado. A aproximação contínua da hamiltoniana de Heisenberg (2.3.3) é

$$\begin{aligned}
H &= \frac{J}{2} \int d^2r \sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] + (1 - \Lambda) \frac{J}{2} \int d^2r \left[\left(\frac{\partial S^z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^z}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
&\quad + 2\Lambda J \int \frac{d^2r}{a^2} (S^z)^2 = \\
&= \frac{J}{2} \int d^2r \left[(\partial_\mu \mathbf{S}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{S}) - \Lambda (\partial_\mu S^z) \cdot (\partial_\mu S^z) \right] + \Lambda \frac{2J}{a^2} \int d^2r (S^z)^2 \quad (2.4.7)
\end{aligned}$$

ou, de forma mais compacta e elegante,

$$H = \frac{J}{2} \int d^2r \left[(\partial_\mu \mathbf{S})^2 - \Lambda (\partial_\mu S^z)^2 + \frac{4\Lambda}{a^2} (S^z)^2 \right]; \quad \mu = 1, 2. \quad (2.4.8)$$

Como um resultado particular, usando $\Lambda = 0$ (e $J > 0$), o limite contínuo do ferromagneto de Heisenberg bidimensional isotrópico é dado por

$$H = \frac{J}{2} \int d^2r (\partial_\mu \mathbf{S}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{S}); \quad \mu = 1, 2; \quad (2.4.9)$$

que, a menos da constante multiplicativa J e juntamente com o vínculo $\mathbf{S}^2 = 1$, é exatamente o modelo sigma não-linear (2.2.10) da seção 2.2. Além de sua grande importância em física da matéria condensada, o modelo sigma também possui grande relevância em física de partículas e campos devido à sua analogia com a teoria de Yang-Mills em quatro dimensões [23].

2.5 Equações de movimento

Antes de partir-se para a obtenção de excitações solitônicas de carga topológica unitária de Belavin e Polyakov para o ferromagneto bidimensional, será útil a obtenção das equações de movimento que governam a dinâmica dos spins. De

posse do vínculo $S^2 = 1$, pode-se parametrizar o campo vetorial de spins por meio de dois campos escalares $m = \cos\theta$ e Φ (figura 2.5.1), de modo que

$$\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z) = \left(\sqrt{1 - m^2} \cos\Phi, \sqrt{1 - m^2} \sin\Phi, m \right). \quad (2.5.1)$$

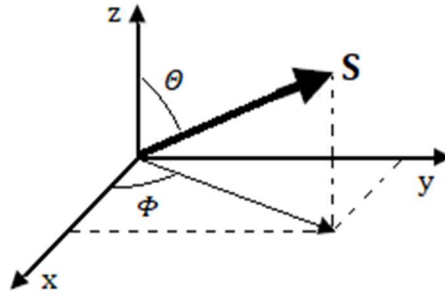


Figura 2.5.1: Parametrização do campo vetorial de spins. **Fonte:** Autoral.

Note que $\mathbf{S} = \mathbf{S}(m, \Phi)$, em que m e Φ são funções das coordenadas espaciais. Desse modo, a hamiltoniana (2.4.8) escreve-se como

$$H = \frac{J}{2} \int d^2r \left[\frac{|\nabla m|^2}{1 - m^2} + (1 - m^2)|\nabla\Phi|^2 - \Lambda|\nabla m|^2 + \frac{4\Lambda}{a^2} m^2 \right], \quad (2.5.2)$$

em que $\nabla = \hat{x}(\partial/\partial x) + \hat{y}(\partial/\partial y)$.

Partindo da equação de movimento quântica

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [h, \mathbf{S}], \quad (2.5.3)$$

em que h é a densidade hamiltoniana de (2.5.2),

$$h = \frac{J}{2} \left[\frac{|\nabla m|^2}{1 - m^2} + (1 - m^2)|\nabla\Phi|^2 - \Lambda|\nabla m|^2 + \frac{4\Lambda}{a^2} m^2 \right], \quad (2.5.4)$$

e tomando o limite clássico, definido para

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\rightarrow \infty, \quad \hbar \rightarrow 0; \\ \hbar \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{CL} = \text{constante}, \end{aligned}$$

segue que a equação (2.5.3) é escrita como

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\mathbf{S} \times \frac{\delta h}{\delta \mathbf{S}}, \quad (2.5.5)$$

em que $\delta h/\delta \mathbf{S}$ é uma derivada funcional de h . Desse modo, as equações de movimento reduzem-se a [24,25]

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\delta h}{\delta \Phi} = \frac{\partial h}{\partial \Phi} - \nabla \cdot \frac{\partial h}{\partial (\nabla \Phi)}, \quad (2.5.6a)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\delta h}{\delta m} = -\frac{\partial h}{\partial m} + \nabla \cdot \frac{\partial h}{\partial (\nabla m)}, \quad (2.5.6b)$$

uma vez que $h = h(m, \nabla m, \nabla \Phi)$. Os campos m e Φ constituem um par de variáveis canonicamente conjugadas. De (2.5.4) e (2.5.6) obtêm-se as equações de movimento do modelo:

$$\frac{1}{J} \frac{dm}{dt} = -[(1 - m^2)\nabla^2 \Phi - 2m\nabla m \cdot \nabla \Phi], \quad (2.5.7a)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{1 - m^2} - \Lambda \right) \nabla^2 m + \frac{m}{(1 - m^2)^2} |\nabla m|^2 + m |\nabla \Phi|^2 - \frac{4\Lambda}{a^2} m. \quad (2.5.7b)$$

2.6 Soluções solitônicas de carga topológica unitária

Nesta seção, considerando o ferromagneto de Heisenberg bidimensional isotrópico, será reproduzida uma solução solitônica estática de carga topológica

unitária segundo a técnica de Belavin e Polyakov da seção 2.2, para a condição de contorno

$$\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z) \rightarrow (0, 0, 1) \text{ quando } r \rightarrow \infty; \quad (2.6.1)$$

que deve satisfazer as equações de movimento (2.5.7) nos limites considerados, isto é,

$$\dot{m} = \dot{\phi} = 0; \quad \Lambda = 0; \quad J > 0.$$

Tal perfil de solução é conhecido como skyrmion. Será mostrado também um outro perfil de solução, dito bimeron e, por fim, será feita uma breve caracterização geométrica de tais estruturas.

O ferromagneto bidimensional é descrito pelo modelo sigma não-linear. Isso pode ser verificado pela comparação das equações (2.4.9) e (2.2.10), que são idênticas, a menos da constante multiplicativa J (termo de acoplamento de troca). Além da descrição do vácuo ferromagnético, o modelo ainda admite como soluções excitações lineares (ondas de spins) e excitações topológicas não-lineares (sólitons). As últimas serão abordadas em maiores detalhes a seguir.

Identificando o campo ϕ como sendo o campo de spin \mathbf{S} , a estrutura espacial do sóliton pode então ser obtida pelo mapeamento estereográfico de (2.2.30),

$$\{S^x, S^y, S^z\} \rightarrow \{\omega_1, \omega_2\},$$

lembrando que o plano $\{\omega_1, \omega_2\}$ – o qual a projeção é feita – é paralelo ao plano $\{S^x, S^y\}$ e contém o polo sul da esfera ($\mathbf{S}^2 = 1$), de modo que

$$\omega_1 = \frac{2S^x}{1 - S^z} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{2S^y}{1 - S^z} \quad (2.6.2)$$

é a relação entre as coordenadas cartesianas do plano físico e as componentes do spin. Usando que $Q = n = 1$ em (2.2.38), segue que

$$\omega(z) = \frac{z - z_0}{\lambda}, \quad (2.6.3)$$

em que $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Uma vez que o modelo é invariante sob translações e mudanças de escala, por conveniência, pode-se considerar o sóliton como localizado na origem do sistema de coordenadas ($z_0 = 0$). Usando também que o raio do sóliton seja dado como $R = 2\lambda$, então

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{z}{\lambda} = \frac{x}{\lambda} + i \frac{y}{\lambda} \\ &= \frac{2x}{R} + i \frac{2y}{R} \\ &= \omega_1 + i\omega_2. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Por comparação direta de (2.6.2) e (2.6.4),

$$S^x = \frac{x}{R}(1 - S^z) \quad \text{e} \quad S^y = \frac{y}{R}(1 - S^z) \quad (2.6.5)$$

e, usando o vínculo $S^2 = 1$, a seguinte equação de 2º grau é obtida:

$$\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)(S^z)^2 - 2\frac{r^2}{R^2}S^z + \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) = 0,$$

em que $r^2 = x^2 + y^2$. Descartando a solução trivial $S^z = 0$, obtêm-se que

$$S^x = \frac{2xR}{r^2 + R^2}; \quad S^y = \frac{2yR}{r^2 + R^2}; \quad S^z = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}. \quad (2.6.6)$$

Note que essas são as mesmas soluções antes exemplificadas em (2.2.39). Usando novamente a parametrização

$$\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z) = (\text{sen}\theta\cos\Phi, \text{sen}\theta\text{sen}\Phi, \cos\theta),$$

a solução sóliton de Belavin e Polyakov com $|Q| = 1$ nesse caso possui a forma (figura 2.6.1)

$$m = \cos\theta = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}; \quad \Phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.6.7)$$

com energia independente do raio R ,

$$E = 4\pi J. \quad (2.6.8)$$

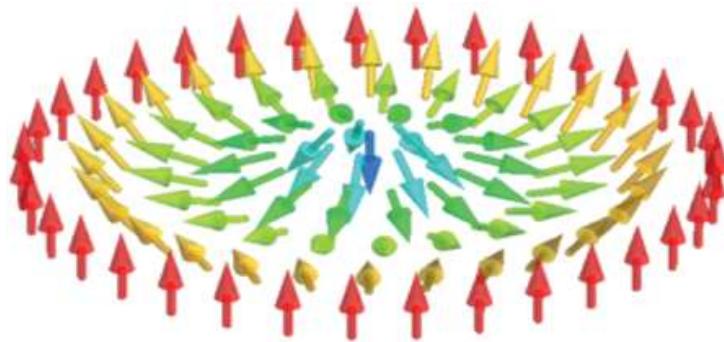


Figura 2.6.1: Representação de um skyrmion de carga topológica unitária. **Fonte:** Extraída de [4].

Skyrmions

Conforme já mencionado, a estrutura magnética obtida anteriormente é conhecida como sendo um skyrmion. Note que a solução (2.6.7) satisfaz as equações de movimento no regime estático e isotrópico, escritas como

$$\nabla \cdot [(1 - m^2)\nabla\Phi] = 0, \quad (2.6.9a)$$

$$\nabla^2 m + \frac{m}{1 - m^2} |\nabla m|^2 + m(1 - m^2) |\nabla\Phi|^2 = 0, \quad (2.6.9b)$$

conforme esperado.

Os skyrmions foram originalmente previstos por Tony Skyrme no início da década de 1960, no contexto da física de partículas [26,27], e detectados em 2009 [28]. Até os dias atuais, os skyrmions têm sido encontrados, além de no magnetismo, em vários campos da física, como por exemplo em física de partículas [29], condensados de Bose-Einstein [30] e teoria das cordas [31].

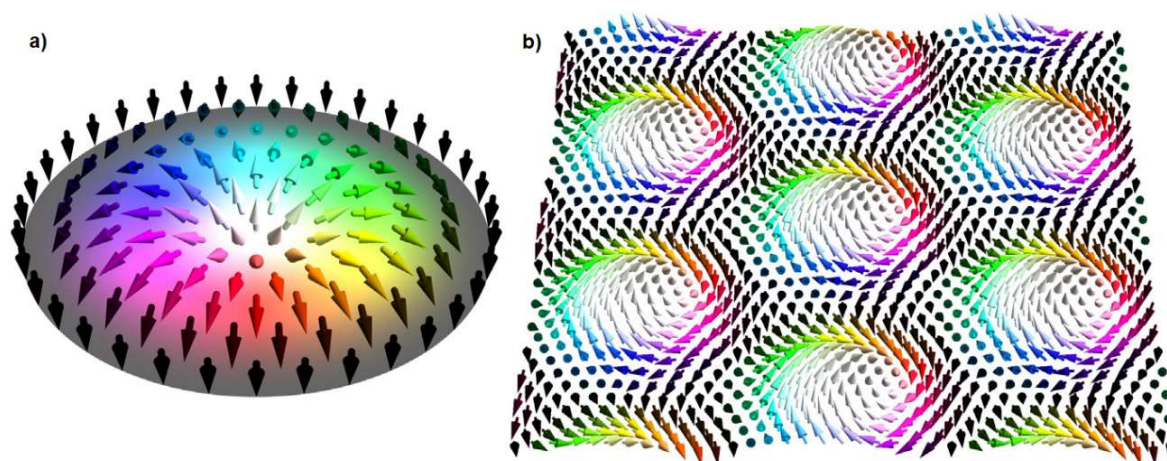


Figura 2.6.2: Ilustração de um skyrmion individual em **a)** e de uma rede de skyrmions em **b)**. **Fonte:** Extraída e adaptada de [21].

No contexto desta dissertação, os skyrmions num meio ferromagnético bidimensional são caracterizados por uma densidade de magnetização $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ que varia de forma constante, a qual é orientada no sentido oposto em seu centro, quando comparada com o ambiente circundante. O raio R de um skyrmion é caracterizado pela distância entre seu centro e onde os spins ficam paralelos ao plano. Essas estruturas podem ocorrer como quasipartículas individuais ou como redes periódicas (figura 2.6.2). Seu caráter topológico pode ser compreendido por uma projeção estereográfica; por exemplo, na figura 2.6.3 têm-se um ponto de Bloch tridimensional mapeado no plano, construindo um skyrmion bidimensional. Note que neste caso o plano contém o polo norte da esfera, e não o polo sul como nas situações anteriores.

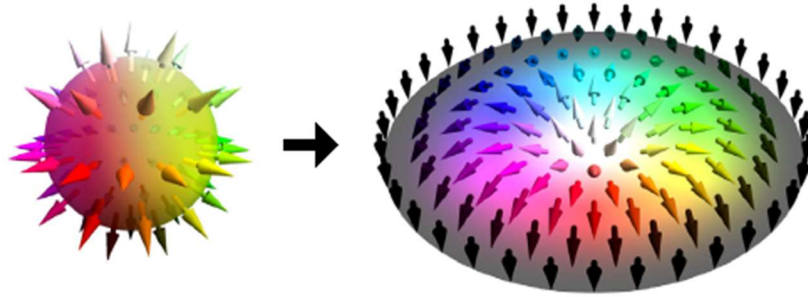


Figura 2.6.3: Projeção estereográfica. **Fonte:** Extraída e adaptada de [21].

Os skyrmions – no contexto do limite contínuo – são altamente estáveis devido à sua topologia do espaço real não-trivial, quantificada pela carga topológica

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2r \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot [\partial_x \mathbf{m}(\mathbf{r}) \times \partial_y \mathbf{m}(\mathbf{r})]. \quad (2.6.10)$$

Expressando $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ em coordenadas esféricas, a carga topológica se escreve como

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} \text{sen} \theta(r) \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos \theta(r) \right]_{r=0}^{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \Phi(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\ &= p \cdot v, \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

em que

$$p = \left[-\frac{1}{2} \cos \theta(r) \right]_{r=0}^{r \rightarrow \infty} = \pm 1 \quad (2.6.12a)$$

e

$$v = \left[\frac{1}{2\pi} \Phi(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6.12b)$$

Como resultado, a carga topológica de um skyrmion é dada por um número inteiro, de modo que skyrmions não podem ser transformados para o estado fundamental ferromagnético ($Q = 0$) sem mudanças descontínuas em sua densidade de magnetização.

Os skyrmions podem ser caracterizados geometricamente por três fatores: polaridade p , vorticidade v e helicidade h . A magnetização na direção fora do plano no centro de um skyrmion é invertida quando comparada com sua borda confinante, sendo isso quantificado pela *polaridade* p , dada por (2.6.12a). Note que essa definição basicamente indica se a magnetização central do skyrmion aponta em um sentido “up” ($p = +1$) ou “down” ($p = -1$). A continuidade de $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ implica que o ângulo azimutal possa envolver apenas múltiplos inteiros de 2π , de modo que a vorticidade v é definida por (2.6.12b). A vorticidade de um skyrmion é sempre positiva – uma vorticidade negativa caracteriza um antiskyrmion (figura 2.6.4) [21]. Além disso, skyrmions também podem diferir por sua magnetização na direção paralela ao plano. Os ângulos azimutais da densidade de magnetização Φ e do vetor posição φ em cada coordenada são relacionados linearmente,

$$\Phi = v\varphi + h, \quad (2.6.13)$$

definindo a helicidade h (figura 2.6.4) que, diferentemente das outras duas quantidades, é um parâmetro contínuo. Na figura 2.6.5 são exemplificados oito diferentes tipos de skyrmions, dentre outros possíveis.

No limite contínuo, um skyrmion magnético é estável devido à sua proteção topológica, não podendo ser transformado continuamente no vácuo ferromagnético, ainda que este seja o estado de menor energia. No entanto, em sistemas reais finitos e discretos, os skyrmions constituem de momentos magnéticos discretos em vez de uma densidade contínua, de modo que interações estabilizadoras adicionais podem ser necessárias [21]. Em teoria, os skyrmions têm sido gerados e estabilizados em sistemas com anisotropia perpendicular (de eixo-fácil) por vários mecanismos, os quais podem contribuir simultaneamente [21,32], sendo eles: (1) interações dipolares [34], (2) iDM [32], (3) interações de troca frustradas [35] e (4) interações de quatro spins [36].

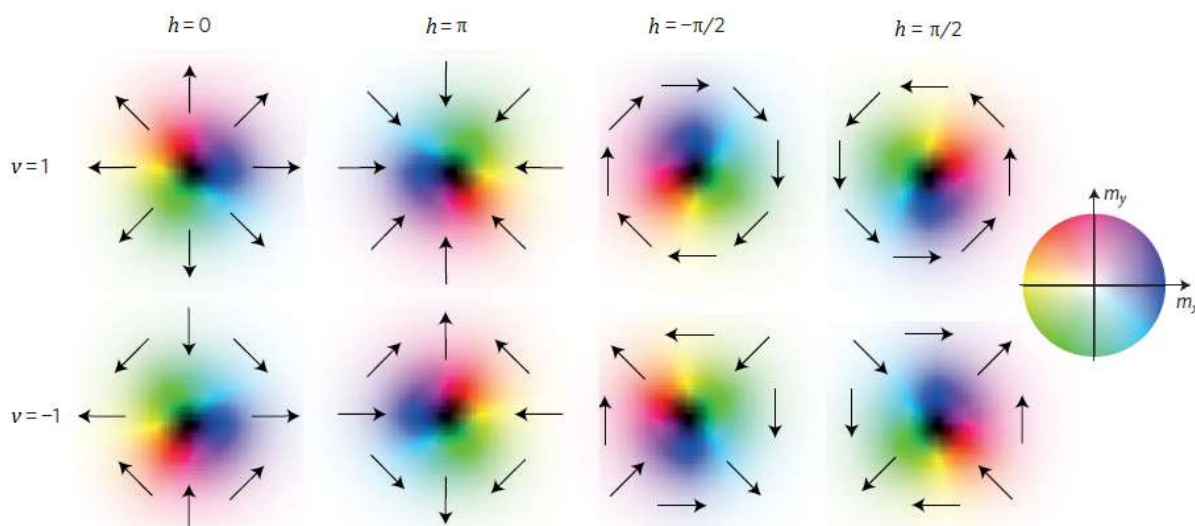


Figura 2.6.4: Ilustração de skyrmions e antiskyrmions com diferentes vorticidades e helicidades. **Fonte:** Extraída e adaptada de [32].

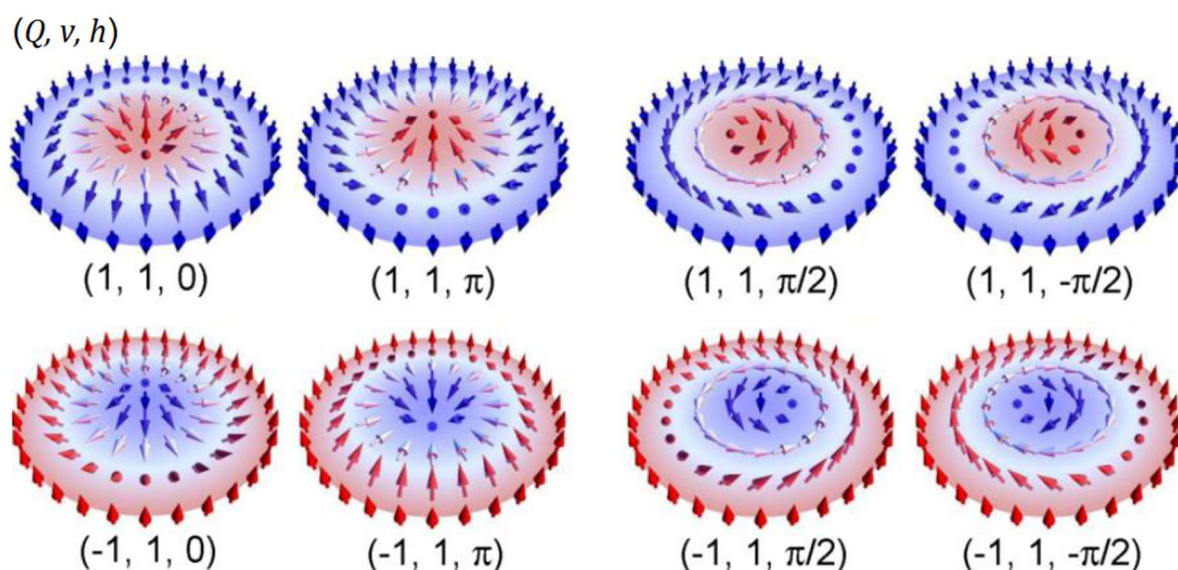


Figura 2.6.5: Ilustração de diferentes tipos de skyrmions. Os quatro skyrmions superiores (inferiores) têm polaridade positiva (negativa). Todos eles possuem vorticidade positiva, conforme mencionado, e igual a um, de modo que a carga topológica é unitária. Os skyrmions com helicidade 0 ou π são ditos skyrmions de Néel, enquanto que os com helicidade $\pm\pi/2$ são ditos skyrmions de Bloch. Além disso, uma vez que a helicidade é um parâmetro contínuo, existem também os skyrmions com helicidade arbitrária (ou skyrmions intermediários), para os quais $h \neq 0, \pi, \pm\pi/2$. [21]. **Fonte:** Extraída e adaptada de [33].

O caso (1) foi intensamente estudado na década de 1970 visando aplicações em dispositivos de memória magnética. Neste caso, os skyrmions são da ordem de $100nm$ a $1000nm$. O caso (2) é tópico de intensa pesquisa nos dias atuais, responsável pela estabilidade da maioria dos skyrmions observados experimentalmente [21], sendo tipicamente da ordem de $5nm$ a $100nm$. Nesses dois casos, os skyrmions são de grande escala e maiores que a constante de rede, justificando-se uma aproximação contínua. Os casos (3) e (4) também são assuntos de intensa pesquisa com skyrmions típicos da ordem da constante de rede ($\sim 1nm$) [32].

Bimerons

Outro perfil de solução obtida das equações (2.6.9) para condições de contorno do tipo

$$\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z) \rightarrow (\pm 1, 0, 0) \text{ quando } r \rightarrow \infty, \quad (2.6.14)$$

é conhecido como sendo um bimeron, sendo dado por

$$m = \frac{Rx}{r^2 + R^2/4}; \quad \Phi = \arctan\left(\frac{x - R/2}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x + R/2}{y}\right), \quad (2.6.15)$$

também com energia $E = 4\pi J$, representado na figura 2.6.6a). Note que a componente central da magnetização é também invertida quando comparada com a região circundante porém, agora paralelas ao plano. Em (2.6.15), o bimeron tem seu centro de massa na origem, com os dois núcleos (merons) localizados no eixo-x e separados por uma distância R .

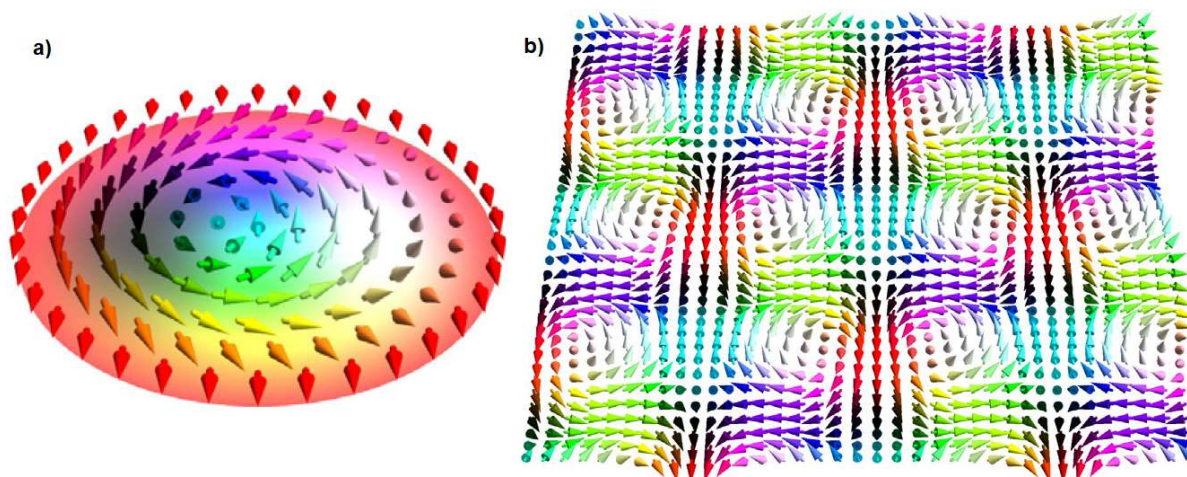


Figura 2.6.6: Ilustração de um bimeron individual em **a)** e de uma rede de bimerons em **b)**. **Fonte:** Extraída e adaptada de [21].

O skyrmion é uma excitação topológica fundamental em materiais ferromagnéticos com anisotropia de eixo-fácil, e o análogo para ferromagnetos com anisotropia de plano-fácil é o bimeron [21,37]. Os bimerons, assim como os skyrmions, podem ocorrer como excitações individuais ou redes periódicas (figura 2.6.6). Eles são constituídos por dois merons ou, mais especificamente, por um par meron-antimeron, em que cada meron possui uma carga topológica

$$Q = \frac{pv}{2} = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.6.16)$$

Os merons são excitações intimamente relacionadas aos skyrmions. Eles são configurados como os skyrmions na proximidade de seus centros, mas com os momentos magnéticos girados de $\pi/2$ em suas bordas (figura 2.6.7), e não de π – como no caso dos skyrmions – e isso é relacionado à anisotropia magnética planar (de plano-fácil). Desse modo, são topologicamente equivalentes à meio skyrmion. Esses objetos são relevantes para a formação de texturas não-triviais como o bimeron [38] ou cristais meron-antimeron [39]. Eles existem em pares ou grupos, mas não como excitações singulares [38,39].

É importante dizer que os dois merons constituintes de um bimeron necessariamente possuem polaridades p e vorticidades v mutuamente opostas (figura

2.6.7), de modo que a carga topológica de um bimeron, dada como a soma da carga topológica dos dois merons, seja unitária:

$$p_1 = -p_2 \text{ e } v_1 = -v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{p_1 v_1}{2} + \frac{p_2 v_2}{2} = \pm 1. \quad (2.6.17)$$

Caso contrário, a carga topológica do bimeron seria nula, de modo que o bimeron pertenceria ao mesmo setor de homotopia do estado fundamental, podendo ser deformado continuamente ao vácuo ferromagnético trivial [38,40].

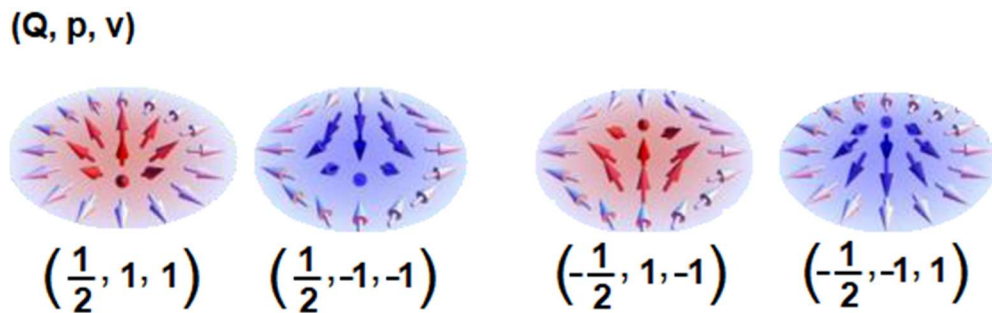


Figura 2.6.7: Merons com diferentes polaridades e vorticidades. Os merons da esquerda (direita) podem ser combinados para a formação de um bimeron com $Q = 1$ ($Q = -1$). **Fonte:** Extraída e adaptada de [33].

Topologicamente equivalente aos skyrmions, os bimerons também podem ser entendidos como excitações skyrmiônicas em ferromagnetos de anisotropia planar [22]. Por esse motivo, os bimerons por vezes são encontrados na literatura como “type II skyrmions” [41] e “double core skyrmions” [42]. Partindo de um skyrmion convencional de Néel, por exemplo, uma rotação de todos os momentos magnéticos em torno de um eixo comum do plano por um ângulo de $\pi/2$ no espaço da magnetização resulta na textura de um bimeron. Tal rotação deixa a carga topológica invariante (figura 2.6.8).

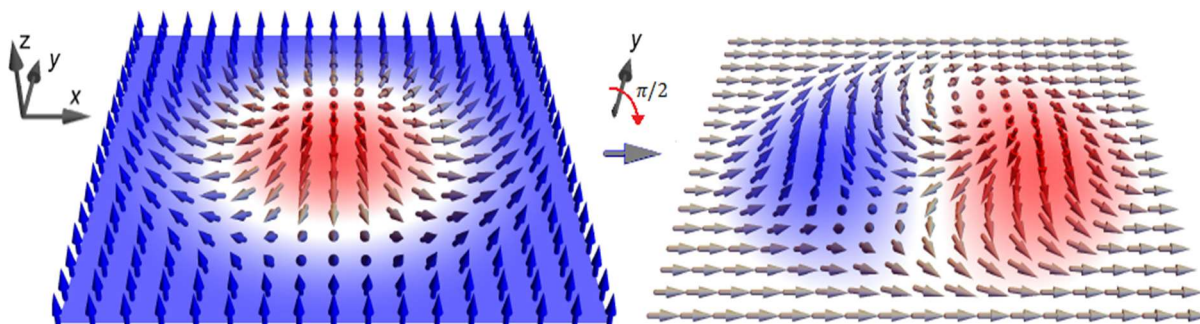


Figura 2.6.8: Bimeron como excitação skyrmiônica em um material ferromagnético com magnetização no plano. **Fonte:** Extraída e adaptada de [22].

As duas excitações magnéticas abordadas anteriormente são as mais favoráveis energeticamente, por possuírem carga topológica unitária. Outras estruturas e com diferentes cargas topológicas também são possíveis e de grande importância, sendo elas comumente formadas por combinações de skyrmions ou merons. As principais excitações investigadas são apresentadas, por exemplo, em [21].

3 Transformações Skyrmions-Bimerons

Os skyrmions e os bimerons são duas excitações magnéticas de fundamental importância teórica e experimental. Devido às características que essas quasipartículas compartilham como, por exemplo, possuem tamanho relativamente pequeno, proteção topológica não-trivial e não-volatilidade, skyrmions e bimerons são as excitações mais robustas em sistemas com magnetização fora do plano e no plano, respectivamente, sendo os mais fortes candidatos a portadores de informações em novas tecnologias. Além disso, algumas características distintas entre sistemas magnéticos de skyrmions e bimerons podem ser úteis para a materialização de futuras possíveis aplicabilidades; por exemplo, skyrmions com cargas topológicas opostas parecem não poder coexistir em um mesmo domínio magnético, ao passo que essa coexistência é possível para os bimerons [37,38,43].

Tradicionalmente, o conceito de fabricação de dispositivos spintrônicos topológicos geralmente envolve apenas um tipo de excitação, seja skyrmions ou bimerons, a depender das propriedades do material. Conforme informado anteriormente, skyrmions (bimerons) padrão são formados em materiais com anisotropia magnética de eixo-fácil (plano-fácil) e iDM [44]. Por pertencerem ao mesmo setor de homotopia, teoricamente, skyrmions e bimerons podem ser continuamente deformados uns nos outros – no contexto do limite contínuo – e um importante problema trata dessa transformação mútua, essencial para futuras tecnologias spintrônicas baseadas em diferentes texturas topológicas de spin que possam trabalhar em conjunto e desempenhar papéis distintos [44].

Recentemente, dois trabalhos abordaram transformações entre skyrmions e bimerons (transformações skyrmion-bimeron) em sistemas quasibidimensionais ferromagnéticos. No primeiro caso, por demonstrações experimentais e simulacionais, transformações skyrmion-bimeron foram realizadas em um disco ferromagnético por meio de variações de campo magnético aplicado e consequentes variações de temperatura e anisotropia magnética [44]. No segundo caso, as transformações skyrmion-bimeron foram realizadas por meio de simulações, pela propagação de tais estruturas ao longo de uma nanopista ferromagnética com gradientes de anisotropia [45]. Nos dois casos citados, as cargas topológicas entre as duas estruturas

permanecem invariantes. Skyrmions com $Q = \pm 1$ são transformados em bimerons também com $Q = \pm 1$ de forma reversível (figura 3.1) e diferentes estruturas intermediárias são mostradas. As transformações são induzidas principalmente pelas variações da anisotropia magnética entre anisotropia perpendicular e paralela ao plano.

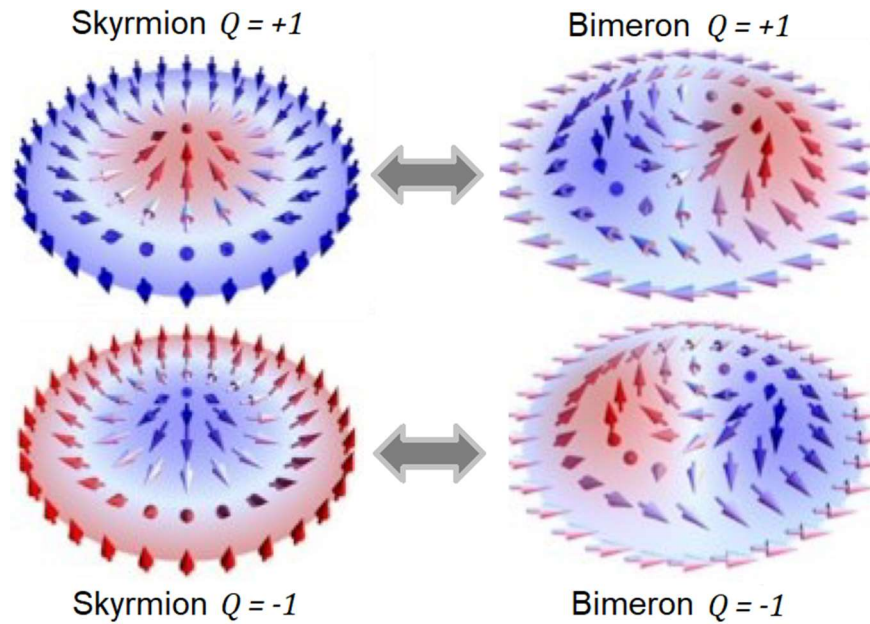


Figura 3.1: Skyrmions com $Q = \pm 1$ são transformados em bimerons também com $Q = \pm 1$. **Fonte:** Extraída e adaptada de [44].

Nesse contexto, buscando-se uma investigação analítica das conversões skyrmion-bimeron em um ferromagneto bidimensional, partiu-se de um modelo de Heisenberg genérico

$$H = - \sum_{i \neq j} [J^x(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^x S_j^x + J^y(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^y S_j^y + J^z(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^z S_j^z] ; \quad J^\alpha(|\mathbf{r}_{ij}|) > 0, \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Pela consideração de que o sistema possa admitir uma preferência direcional sutil – paralela ou perpendicular ao plano – usou-se que

$$\mathcal{J}^x(|\mathbf{r}_{ij}|) = \mathcal{J}^y(|\mathbf{r}_{ij}|) = \mathcal{J}(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}^z(|\mathbf{r}_{ij}|) = \mathcal{J}'(|\mathbf{r}_{ij}|),$$

de modo a assumir-se uma forma fracamente anisotrópica da interação de troca, dada por

$$H = - \sum_{i \neq j} [\mathcal{J}(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^x S_j^x + \mathcal{J}(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^y S_j^y + \mathcal{J}'(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^z S_j^z], \quad \text{para } |\mathcal{J} - \mathcal{J}'| \ll \mathcal{J}. \quad (3.2)$$

Pela introdução de

$$\delta\mathcal{J} = \mathcal{J} - \mathcal{J}',$$

o modelo (3.2) escreve-se

$$H = - \sum_{i \neq j} [\mathcal{J}(|\mathbf{r}_{ij}|) \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \delta\mathcal{J}(|\mathbf{r}_{ij}|) S_i^z S_j^z]. \quad (3.3)$$

De posse do modelo de Heisenberg fracamente anisotrópico (3.3), os seguintes passos consistem da obtenção de seu limite contínuo e suas equações de movimento, para a investigação de possíveis soluções com diferentes valores de anisotropia, dada aqui, a princípio, como $\delta\mathcal{J}(|\mathbf{r}_{ij}|)$. Seguindo o mesmo procedimento descrito na seção 2.4, isto é, pela suposição de que

- (i) as distâncias interatômicas são muito menores do que as escalas de comprimento típicas do sistema, de modo a aproximar-se os somatórios por integrais, e
- (ii) o tamanho da área de localização da interação de troca \mathcal{J} (e $\delta\mathcal{J}$) é muito menor quando comparada às não uniformidades do campo de spins, de modo que as componentes de spin possam ser expandidas em séries de Taylor (até segunda ordem),

então o limite contínuo de (3.3) é escrito como

$$H = A_{ij} \int d^2r (\partial_i \mathbf{S}) \cdot (\partial_j \mathbf{S}) - B_{ij} \int d^2r (\partial_i S^z) \cdot (\partial_j S^z) + K \int d^2r (S^z)^2, \quad (3.4)$$

em que

$$A_{ij} = \frac{1}{2a_0^2} \int d^2r \mathcal{J}(r) x_i x_j; \quad B_{ij} = \frac{1}{2a_0^2} \int d^2r \delta \mathcal{J}(r) x_i x_j; \quad K = \frac{2}{a_0^2} \int d^2r \delta \mathcal{J}(r), \quad (3.5)$$

sendo a_0 a área da célula magnética unitária contendo um momento magnético de spin e K uma constante efetiva de anisotropia.

De posse da equação (3.4), por observação direta de sua similaridade com o limite contínuo em (2.4.8) e por conveniente simplificação, assume-se que o sistema é descrito por uma rede quadrada (com espaçamento de rede a) e que a interação de troca \mathcal{J} é constante e apreciável apenas entre os vizinhos imediatos. Portanto, passa-se à investigação do modelo (2.4.8)

$$H = \frac{J}{2} \int d^2r \left[(\partial_\mu \mathbf{S})^2 - \Lambda (\partial_\mu S^z)^2 + \frac{4\Lambda}{a^2} (S^z)^2 \right]; \quad \mu = 1, 2. \quad (3.6)$$

no regime de fraca anisotropia correspondente a

$$|\Lambda| \ll 1, \quad (3.7)$$

com a identificação de que

$$\delta \mathcal{J} = \Lambda J,$$

lembrando que $\Lambda < 0$ ($\Lambda > 0$) leva a anisotropia de eixo-fácil (plano-fácil). A parametrização do campo de spins em coordenadas esféricas leva imediatamente a

$$H = \frac{J}{2} \int d^2r \left[\frac{|\nabla m|^2}{1-m^2} + (1-m^2)|\nabla\Phi|^2 - \Lambda|\nabla m|^2 + \frac{4\Lambda}{a^2}m^2 \right]. \quad (3.8)$$

Na equação (3.8) acima, podem-se identificar três termos como

$$H_0 = \frac{J}{2} \int d^2r \left[\frac{|\nabla m|^2}{1-m^2} + (1-m^2)|\nabla\Phi|^2 \right], \quad (3.9a)$$

$$H_1 = -\Lambda \frac{J}{2} \int d^2r |\nabla m|^2, \quad (3.9b)$$

$$H_2 = \frac{2\Lambda}{a^2} J \int d^2r m^2, \quad (3.9c)$$

de modo que as soluções skyrmion e bimeron conhecidas

$$m_S = \cos\theta = \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2}; \quad \Phi_S = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.10a)$$

e

$$m_B = \cos\theta = \frac{Rx}{r^2 + R^2/4}; \quad \Phi_B = \arctan\left(\frac{x - R/2}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x + R/2}{y}\right), \quad (3.10b)$$

serão utilizadas como uma primeira aproximação no cálculo energético.

O termo H_0 representa a energia de troca pura, correspondente ao caso do modelo isotrópico. A substituição dos campos m e Φ correspondentes aos perfis de solução conhecidos (3.10) em (3.9a), e a integração em todo o espaço leva a

$$H_{0S} = H_{0B} = 4\pi J, \quad (3.11)$$

como esperado, onde os subíndices S e B são para skyrmions e bimerons. O segundo termo H_1 é uma contribuição energética devida à anisotropia. Novamente, as

respectivas substituições dos campos m e Φ correspondentes às soluções skyrmion e bimeron em (3.9b), e as integrações em todo o espaço levam a

$$H_{1S} = H_{1B} = -\frac{4}{3}\pi J\Lambda. \quad (3.12)$$

Por último, o termo H_2 é uma contribuição energética devida à anisotropia efetiva. Este termo leva à quebra da invariância de escala do modelo [46] e as mesmas substituições anteriores e integrações em todo o espaço levam à divergência de H_2 e da energia total. Essa divergência pode ser contornada se o raio R dos sólitons for muito menor do que uma escala de comprimento característica [46], que pode ser definida como

$$L = \frac{a}{\sqrt{4\Lambda}}. \quad (3.13)$$

Desse modo, para $R \ll L$, as integrações

$$H_{2S} = \frac{J}{L^2} \int_0^{2\pi} \int_0^L r dr d\varphi m_S^2 \quad \text{e} \quad H_{2B} = \frac{J}{L^2} \int_0^{2\pi} \int_0^L r dr d\varphi m_B^2 \quad (3.14)$$

produzem contribuições energéticas com termos dominantes dados como

$$H_{2S} \propto -2\pi J \frac{R^2}{L^2} \ln\left(\frac{R^2 + L^2}{R^2}\right) \quad (3.15a)$$

e

$$H_{2B} \propto \frac{\pi J R^2}{4 L^2} \ln\left(\frac{R^2 + 4L^2}{R^2}\right). \quad (3.15b)$$

Essas primeiras aproximações energéticas podem ser úteis em cálculos futuros e possíveis escolhas adequadas dos parâmetros Λ , L e R .

As equações de movimento do modelo seguem de acordo com a seção 2.5 e são dadas como

$$\frac{1}{J} \frac{dm}{dt} = - [(1 - m^2) \nabla^2 \Phi - 2m \nabla m \cdot \nabla \Phi], \quad (3.16a)$$

$$\frac{1}{J} \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{1 - m^2} - \Lambda \right) \nabla^2 m + \frac{m}{(1 - m^2)^2} |\nabla m|^2 + m |\nabla \Phi|^2 - \frac{4\Lambda}{a^2} m. \quad (3.16b)$$

O objetivo, a partir daqui, torna-se a investigação de possíveis soluções analíticas gerais dos campos como funções do parâmetro geral de anisotropia, $m(r, \Lambda)$ e $\Phi(r, \Lambda)$, para o caso estático, descrito pelas equações

$$[(1 - m^2) \nabla^2 \Phi - 2m \nabla m \cdot \nabla \Phi] = 0, \quad (3.17a)$$

$$\left(\frac{1}{1 - m^2} - \Lambda \right) \nabla^2 m + \frac{m}{(1 - m^2)^2} |\nabla m|^2 + m |\nabla \Phi|^2 - \frac{4\Lambda}{a^2} m = 0, \quad (3.17b)$$

de modo que a escolha do parâmetro Λ possa levar a perfis de soluções “skyrmônicas”, “bimerônicas” ou intermediárias.

Uma vez que a obtenção de soluções analíticas exatas do sistema de equações (3.17) é de grande dificuldade, passa-se para a investigação de possíveis deformações das excitações skyrmion e bimeron – que são obtidas de um modelo isotrópico – por um tratamento perturbativo, devido à adição de anisotropia ao sistema. De posse dos perfis de soluções conhecidos (3.10), propõe-se soluções perturbativas das equações (3.17) como

$$m = m_0 + m_\Lambda \quad \text{e} \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_\Lambda, \quad (3.18)$$

em que os subíndices 0 e Λ representam, respectivamente, as soluções conhecidas de (3.10) e suas perturbações devido à anisotropia. As quantidades m_Λ e Φ_Λ serão consideradas independentes do tempo e reduzem-se a zero quando $\Lambda = 0$.

Assumindo que as quantidades m_Λ e Φ_Λ são pequenas, a substituição de (3.18) em (3.17) e seguinte consideração dos termos até primeira ordem em m_Λ e Φ_Λ leva a

$$(1 - m_0^2)\nabla^2\Phi_\Lambda = 0, \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 m_\Lambda + 2 \left[\frac{(\nabla m_0)^2 + m_0 \nabla m_0 \cdot \nabla}{1 - m_0^2} \right] m_\Lambda + 2m_0(1 - m_0^2)\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_\Lambda = \\ = \Lambda(1 - m_0^2)\nabla^2 m_0 + \frac{4\Lambda}{a^2} m_0(1 - m_0^2) \end{aligned} \quad (3.19b)$$

tendo sido usado as seguintes identidades conhecidas

$$(1 - m_0^2)^2(\nabla\Phi_0)^2 = (\nabla m_0)^2, \quad (3.20a)$$

$$\nabla^2\Phi_0 = 0, \quad (3.20b)$$

$$\nabla m_0 \cdot \nabla\Phi_0 = 0, \quad (3.20c)$$

além de que Λ é pequeno e $\nabla m \cdot \nabla\Phi = 0$, uma vez que as variações em m e Φ são perpendiculares.

Note que a equação (3.19a) implica que $\nabla\Phi_\Lambda = \text{constante}$. Pela imposição de que essa constante seja nula, pode-se investigar a perturbação em m para

$$\Phi_\Lambda = \text{constante}, \quad (3.21a)$$

$$\nabla^2 m_\Lambda + 2 \left[\frac{(\nabla m_0)^2 + m_0 \nabla m_0 \cdot \nabla}{1 - m_0^2} \right] m_\Lambda = \Lambda(1 - m_0^2)\nabla^2 m_0 + \frac{4\Lambda}{a^2} m_0(1 - m_0^2). \quad (3.21b)$$

Uma vez que m_0 é conhecido, as soluções da correspondente equação diferencial homogênea ($\Lambda = 0$) são dadas como [46]

$$M_{01} = 1 - m_0^2 \quad (3.22a)$$

$$M_{02} = m_0 + (1 - m_0^2) \ln \frac{r}{R}. \quad (3.22b)$$

De posse dessas soluções, é possível a obtenção da solução m_Λ da equação não-homogênea (3.21b) pelo método das funções de Green.

Em estudos futuros, espera-se obter a perturbação m_Λ , que é devida à anisotropia, para os perfis de solução skyrmion e bimeron isotrópicos. De posse destes resultados, as deformações resultantes no campo m de (3.18) serão analisadas para diferentes valores do termo de anisotropia Λ , para uma possível verificação de que uma solução “skyrmiônica” possa ser levemente deformada no sentido de haver uma transformação para uma solução “bimerônica” e vice-versa.

4 CONCLUSÕES

A presente dissertação teve como principal objetivo a construção de uma revisão bibliográfica, em que buscou-se sintetizar os principais tópicos envolvidos na obtenção de soluções solitônicas em sistemas ferromagnéticos bidimensionais, em particular, skyrmions e bimerons. A dizer, sistemas ferromagnéticos bidimensionais são usualmente analisados pelo modelo de Heisenberg que, no limite contínuo, é descrito por uma teoria de campos pelo modelo sigma não-linear. Dentre outras excitações possíveis, as excitações solitônicas estáticas, permitidas no modelo sigma pelo teorema de Derrick-Hobart, emergem naturalmente pela abordagem construída por Belavin e Polyakov e também pelas equações de movimento. Skyrmions e bimerons são duas dessas excitações; são sólitons de carga topológica unitária, energeticamente favoráveis em sistemas ferromagnéticos bidimensionais.

De posse das ferramentas teóricas essenciais que envolvem a descrição de skyrmions e bimerons em sistemas ferromagnéticos bidimensionais, é proposta uma investigação analítica de um problema relevante e ainda evasivo na física da matéria condensada, que envolve transformações entre skyrmions e bimerons, uma vez que essas estruturas pertencem a um mesmo setor topológico. Por si só, skyrmions e bimerons são de fundamental importância teórica e experimental e o estudo de suas transformações mútuas, além de contribuir para o avanço do conhecimento fundamental teórico, é essencial para a idealização de novos dispositivos tecnológicos.

Do ponto de vista teórico, as soluções exatas de skyrmions e bimerons são obtidas de um modelo isotrópico. Em sistemas reais e modelos simulacionais, skyrmions e bimerons são excitações topológicas fundamentais em sistemas com anisotropia de eixo-fácil e plano-fácil, respectivamente. Espera-se que, nessas excitações, suas estruturas de spin sejam deformadas na presença de anisotropia. A proposta de investigação baseia-se em avaliar, por exemplo, o efeito da mudança na estrutura dos spins de um skyrmion pela inserção ou adição de anisotropia planar no sistema pois, simulacionalmente, é esse tipo de variação anisotrópica que induz a transformação de um skyrmion em um bimeron, *in situ* ou não.

REFERÊNCIAS

- [1] HEISENBERG, W. Zur theorie des ferromagnetismus. **Zeitschrift für Physik**, v. 49, n. 9, p. 619–636, 1928.
- [2] RAJARAMAN, R. **Solitons and instantons**: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982.
- [3] FERT, A.; CROS, V.; SAMPAIO, J. Skyrmions on the track. **Nature Nanotechnology**, v. 8, n. 3, p. 152–156, mar. 2013.
- [4] FERT, Albert; REYREN, Nicolas; CROS, Vincent. Magnetic skyrmions: advances in physics and potential applications. **Nature Reviews Materials**, v. 2, n. 7, p. 1-15, 2017.
- [5] DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. **Journal of Mathematical Physics**, v. 5, n. 9, p. 1252, 1964.
- [6] HOBART, R. H. On the instability of a class of unitary field models. **Proceedings of the Physical Society**, v. 82, n. 2, p. 201, 1963.
- [7] FRADKIN, E. **Quantum field theory**: an integrated approach. Princeton: Princeton University Press, 2021.
- [8] FRADKIN, Eduardo. **Field theories of condensed matter physics**. Cambridge University Press, 2013.
- [9] NAKAHARA, Mikio. **Geometry, Topology and Physics**. 2. ed. CRC Press, 2003.
- [10] BELAVIN, A. A.; POLYAKOV, A. M. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets. **JETP Letters**, v. 22, n. 10, p. 245–248, 1975.
- [11] WATANABE, T.; OTSU, H. Vortices in Two-Dimensional Anisotropic σ Models. **Progress of Theoretical Physics**, v. 65, n. 1, p. 164–171, 1981.
- [12] PEREIRA, A. R.; PIRES, A. S. T.; GOUVÊA, M. E. Quantum fluctuations of solitons in two-dimensional anisotropic σ models. **Physical Review B**, v. 51, n. 22, p. 15974, 1995.
- [13] FRENKEL, J. Elementare Theorie magnetischer und elektrischer Eigenschaften der Metalle beim absoluten Nullpunkt der Temperatur. **Zeitschrift für Physik**, v. 49, n. 1, p. 31–45, 1928.
- [14] DORFMAN, J.; JAANUS, R. Die Rolle der Leitungselektronen beim Ferromagnetismus I. Teil. **Zeitschrift für Physik**, v. 54, n. 3, p. 277–288, 1929.

- [15] LANDAU, L. D. et al. **Electrodynamics of continuous media**. Vol. 8. Amsterdam: Elsevier, 2013.
- [16] AHARONI, Amikam. **Introduction to the Theory of Ferromagnetism**. Clarendon Press, 2000.
- [17] ZAHRA, H. **Linear and Nonlinear Dynamics of Spin Waves in Ferromagnetic Nanowires**. 2017. Tese (Doutorado) – The University of Western Ontario (Canada), 2017.
- [18] DZYALOSHINSKY, I. A thermodynamic theory of “weak” ferromagnetism of antiferromagnetics. **Journal of Physics and Chemistry of Solids**, v. 4, n. 4, p. 241–255, 1958.
- [19] MORIYA, T. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. **Physical Review**, v. 120, n. 1, p. 91, 1960.
- [20] FERT, A.; LEVY, P. M. Role of anisotropic exchange interactions in determining the properties of spin-glasses. **Physical Review Letters**, v. 44, n. 23, p. 1538, 1980.
- [21] GÖBEL, B.; MERTIG, I.; TRETIAKOV, O. A. Beyond skyrmions: Review and perspectives of alternative magnetic quasiparticles. **Physics Reports**, v. 895, p. 1–28, 2021.
- [22] GÖBEL, B. et al. Magnetic bimerons as skyrmion analogues in in-plane magnets. **Physical Review B**, v. 99, n. 6, p. 060407, 2019.
- [23] PEREIRA, Afranio Rodrigues; PIRES, Antonio Sérgio Teixeira. Teoria Quântica de Campos em Sistemas Magnéticos de Baixas Dimensões. **Universidade Federal de Viçosa e Universidade Federal de Minas Gerais**, 2008.
- [24] SCHNEIDER, T.; STOLL, E. Spin Dynamics of Heisenberg Chains. In: **Modern Problems in Condensed Matter Sciences**. Vol. 17. Elsevier, 1986. p. 129–240.
- [25] LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [26] SKYRME, Tony Hilton Royle. A non-linear field theory. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 260, n. 1300, p. 127-138, 1961.
- [27] SKYRME, Tony Hilton Royle. A unified field theory of mesons and baryons. **Nuclear Physics**, v. 31, p. 556-569, 1962.
- [28] MÜHLBAUER, S. et al. Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet. **Science**, v. 323, p. 915–919, 2009.
- [29] ADKINS, G. S.; NAPPI, C. R.; WITTEN, E. Static properties of nucleons in the Skyrme model. **Nuclear Physics B**, v. 228, n. 3, p. 552–566, 1983.

- [30] AL KHAWAJA, U.; STOOFF, H. Skyrmions in a ferromagnetic Bose–Einstein condensate. **Nature**, v. 411, p. 918–920, 2001.
- [31] VILENKIN, A.; VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. **Cosmic strings and other topological defects**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [32] NAGAOSA, N.; TOKURA, Y. Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions. **Nature Nanotechnology**, v. 8, n. 12, p. 899–911, 2013.
- [33] ZHANG, X. et al. Skyrmion-electronics: writing, deleting, reading and processing magnetic skyrmions toward spintronic applications. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 32, n. 14, p. 143001, 2020.
- [34] GAREL, T.; DONIACH, S. Phase transitions with spontaneous modulation-the dipolar Ising ferromagnet. **Physical Review B**, v. 26, n. 1, p. 325, 1982.
- [35] OKUBO, T.; CHUNG, S.; KAWAMURA, H. Multiple-q States and the Skyrmion Lattice of the Triangular-Lattice Heisenberg Antiferromagnet under Magnetic Fields. **Physical Review Letters**, v. 108, n. 1, p. 017206, 2012.
- [36] HEINZE, S. et al. Spontaneous atomic-scale magnetic skyrmion lattice in two dimensions. **Nature Physics**, v. 7, n. 9, p. 713–718, 2011.
- [37] SHEN, L. et al. Dynamics of ferromagnetic bimerons driven by spin currents and magnetic fields. **Physical Review B**, v. 102, n. 10, p. 104427, 2020.
- [38] GAO, N. et al. Creation and annihilation of topological meron pairs in in-plane magnetized films. **Nature Communications**, v. 10, n. 1, p. 5603, 2019.
- [39] YU, X. Z. et al. Transformation between meron and skyrmion topological spin textures in a chiral magnet. **Nature**, v. 564, n. 7734, p. 95–98, 2018.
- [40] TRETIAKOV, O. A.; TCHERNYSHYSHOV, O. Vortices in thin ferromagnetic films and the skyrmion number. **Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics**, v. 75, n. 1, p. 012408, 2007.
- [41] ARAÚJO, A. S. et al. Typical skyrmions versus bimerons: A long-distance competition in ferromagnetic racetracks. **Physical Review B**, v. 102, n. 10, p. 104409, 2020.
- [42] AMARAL, Marco Antonio et al. Discrete double core skyrmions in magnetic thin films. **Journal of magnetism and magnetic materials**, v. 321, n. 19, p. 3360-3363, 2009.
- [43] MOON, Kyoung-Woong et al. Existence of in-plane magnetic skyrmion and its motion under current flow. **Physical review applied**, v. 12, n. 6, p. 064054, 2019.
- [44] OHARA, K. et al. Reversible transformation between isolated skyrmions and bimerons. **Nano Letters**, v. 22, n. 21, p. 8559–8566, 2022.

[45] CASTRO, M. A. et al. Skyrmion-bimeron dynamic conversion in magnetic nanotracks. **Physical Review B**, v. 108, n. 9, p. 094436, 2023.

[46] ROCHA-FILHO, G. M.; PEREIRA, A. R. Dynamical skyrmions in Heisenberg two-dimensional easy-axis ferromagnets. **Solid state communications**, v. 122, n. 1-2, p. 83-87, 2002.