MARCELO DOS SANTOS CRUZ

UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES REAIS NAS ESCOLAS DE PIRANGA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T

C957e
2013

Cruz, Marcelo dos Santos, 1980
Um estudo sobre as funções reais nas escolas de Piranga / Marcelo dos Santos Cruz.– Viçosa, MG, 2013.
iii, 48f. : il. (algumas color.) ; 29cm.

Inclui anexo.
Orientador: Allan de Oliveira Moura
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 46-48

1. Funções (Matemática). 2. Software educacional. 3. Ensino médio I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515

MARCELO DOS SANTOS CRUZ

UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES REAIS NAS ESCOLAS DE PIRANGA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de março de 2013.

José Barbosa Gomes

Mércio Botelho Faria

Allan de Oliveira Moura
(Orientador)

Resumo

CRUZ, Marcelo dos Santos, M. Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2013. **Um Estudo sobre as Funções Reais nas Escolas de Piranga.** Orientador: Allan de Oliveira Moura.

Neste trabalho foi feito um estudo do ensino de funções reais nas escolas de Piranga-MG, apresentando algumas dificuldades e deficiências do processo ensino-aprendizagem através de um questionário respondido pelos professores do município e da análise dos resultados de suas escolas no *Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica* (PROEB) visando apontar como estes problemas podem ser enfrentados. Como principais sugestões para melhoria do processo ensino-aprendizagem do conteúdo funções reais, são apresentados a utilização do computador como ferramenta de ensino, e a abordagem de problemas de modelagem relacionado com assuntos presentes no cotidiano dos alunos.

Abstract

CRUZ, Marcelo dos Santos, M. Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2013. **A Study of Real Functions in the Schools of Piranga.** Adviser: Allan de Oliveira Moura.

This work was done the real functions of teaching in schools Piranga-MG present some difficulties and shortcomings of the teaching-learning process through a questionnaire completed by teachers of the county and the analysis of the results of their schools in *Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica* (PROEB), indicate how these problems can be tackled, the main suggestion for improvement of the teaching-learning content real functions, are present the use of computers as a teaching tool , and the approach of modelling problems related issues presents in everyday life of students.

Sumário

Introdução

O trabalho trata-se de uma análise do ensino de Matemática, mais especificamente do ensino das funções reais, nas escolas de Piranga-MG, através de um questionário respondido pelos professores de matemática do município e dos resultados do *Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica* (PROEB) de 2011, procurando identificar os problemas e dificuldades encontrados pelos professores de Piranga, e as razões pela qual acontecem, buscando encontrar maneiras de melhorar a aprendizagem deste conteúdo em pesquisas de especialistas e no relato de experiências bem sucedidas por outros professores.

É muito comum hoje em dia numa sala de aula, enquanto um professor explica matéria, encontrar alunos distraídos em conversas, dispersos em pensamentos ou até mesmo, jogando e trocando mensagens no celular, sendo que um dos principais desafios do professor hoje, é conseguir prender a atenção dos alunos para temas que para eles, na sua maioria, não fazem parte de seu cotidiano, alunos que muitas vezes, não têm motivação ou perspectivas de melhorar sua "qualidade de vida" através dos estudos. Estes alunos não veem no ensino das funções reais, e na maior parte do conteúdo da matemática, aplicações práticas para sua vida, a matemática da maneira que é ensinada, lhes parece incompreensível e desnecessária para sua formação como cidadão. Uma maneira de contornar estes problemas é tornar o estudo da matemática e das funções reais mais próximo da sua realidade. Para isto, podemos abordá-los através de problemas de modelagem que envolvam situações que façam parte de seu cotidiano e utilizar instrumentos que lhes sejam atraentes.

O tema *"estudo das funções"* foi escolhido por tratar-se, como podemos ver em [Rêg00], de um dos mais importantes itens no contexto da matemática, possui uma ampla variedade de aplicações e é um dos principais pré-requisitos para grande parte dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Superior, porém os alunos apresentam diversas dificuldades ao tentar compreendê-lo. No ensino básico, mais precisamente no ensino médio, uma função pode ser vista como uma relação "especial" entre dois conjuntos numéricos, como um conjunto de pares ordenados de números reais, ou ainda como uma interdependência entre variáveis. O professor deve primeiramente compreender bem estes conceitos para que possa ensiná-los com clareza.

> (...) para ensinar, é preciso, antes de tudo, compreender (...) [Gar09]

Os trabalhos de [Ros06] e [Rez11] apontam que um importante tema, no assunto funções, é deixado de lado no ensino médio, o termo "taxa de variação" de uma função simplesmente não é mencionado nas aulas do ensino médio, ou por sua complexidade (muitos professores temem o assunto), ou por desconhecimento de sua importância na modelagem, para a caracterização do tipo de função a ser utilizado, como se pode ver em [LCWM06], portanto dentro da proposta de se trabalhar com modelagem, faz-se necessário que este tema seja bem abordado como pré-requisito.

A modelagem matemática, aplicada com problemas do cotidiano dos alunos, atende a teoria da "Aprendizagem Significativa" que foi formulada por D. Ausubel na década de 1960 com um enfoque cognitivista e depois seguida por Joseph Novak na década de 1980 com enfoque mais humanista. Em [Mor99], o autor define a Aprendizagem Significativa, como um processo, por meio do qual, o sujeito que aprende relaciona, de maneira não arbitrária e substantiva, uma nova informação a um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva, ou seja, aprende associando a informação a um assunto que lhe seja familiar.

Vivemos hoje em uma era, na qual os computadores e celulares tomam a maior parte do tempo livre de nossos alunos, podemos então, buscar a atenção destes alunos, com a inserção do computador e outras tecnologias na sala de aula. Hoje, a grande maioria dos alunos já tem acesso às novidades tecnológicas como *computadores, celulares*, *"tablets"* etc, e gastam grande parte do seu tempo em jogos eletrônicos ou em redes sociais, e os que ainda não tiveram esta oportunidade, já ficariam empolgados com a possibilidade do primeiro contato com o computador. A afinidade da maioria dos alunos, com o computador, é um auxílio que não pode mais ser descartado pelo professor. Hoje há uma grande variedade de *"softwares"* educacionais livres, que podem e devem ser explorados no ensino de matemática e principalmente no ensino das funções reais. O professor que realmente quer alcançar melhores resultados, deve vencer suas limitações e explorar cada vez mais as potencialidades destas tecnologias no ensino.

O elevado índice de informatização dos meios de produção, e do estilo de vida moderno juntamente com a evolução das tecnologias e sua introdução em todas as áreas de desenvolvimento humano, impõe a utilização destas tecnologias no ensino.

> (...)Usualmente, a ênfase para o ensino de funções se dá via álgebra. Assim, é comum encontrarmos em livros didáticos um grande destaque para a expressão analítica de uma função e quase nada para os aspectos gráficos ou tabulares. Tal destaque muitas vezes está ligado à própria mídia utilizada. Sabemos que é difícil a geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel e, então, faz sentido que não se dê muita ênfase a esse tipo de representação(...) [DFS10].

O computador, aliado ao *"software"* adequado, pode tornar prática a análise gráfica de uma função, e auxiliar na compreensão dos diversos parâmetros de sua expressão analítica. Isso pode livrar o ensino das funções da ênfase em sua expressão analítica, podendo tratar igualmente as representações gráficas e tabular de uma função, o que geralmente não é possível com a utilização de lápis e papel apenas. A discussão dos resultados apresentados pelo computador, debatendo as limitações dos softwares com base em arredondamentos, interpolações etc. podem e devem levar os alunos a detalhes que normalmente passam despercebidos por eles como por exemplo os números irracionais!

Além disso, o uso do computador como ferramenta de ensino, só por tornar o estudo mais atraente e prazeroso aos alunos já deve ser bem visto, e levado em consideração pelos professores.

No Capítulo 1 falarei um pouco sobre o município de Piranga apontando algumas questões socioeconômicas que influenciam no rendimento estudantil dos alunos, e descreverei como anda o ensino de matemática e das funções reais nas escolas do município através dos resultados do PROEB-2011.

No Capítulo 2 descreverei como anda o ensino das funções no município de Piranga, pela visão dos professores, através de um questionário respondido por eles em outubro de 2012, expondo a importância dada por eles ao tema, os recursos didáticos utilizados, a abertura para utilização de recursos tecnológicos entre outros.

Para finalizar, no Capítulo 3 irei sugerir alternativas para melhorias no ensino das funções, levantando a importância da inclusão da utilização da modelagem matemática no ensino das funções, e da inserção do computador como ferramenta didática no ensino da matemática, além de propor uma atividade dentro deste contexto.

Capítulo 1

O Panorama Atual do Ensino de Funções

Na Seção 1.1, falarei sobre o município de Piranga expondo algumas questões socioeconômicas que interferem no processo ensino-aprendizagem do município, na Seção 1.2 farei um diagnóstico do ensino de matemática do município com base nos resultados do *Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica* (PROEB) de 2011 e na seção 1.3 ainda utilizando os resultados do PROEB, farei a análise de como anda o ensino das funções no município. As principais referências utilizadas neste capítulo são [IBG10], [Nev13], [dD11], [dE13] e [dAC11].

1.1 O Município de Piranga

Segundo dados do Censo-IBGE-2010 [IBG10] e do sítio eletrônico do município [Nev13], Piranga está localizada na Zona da Mata mineira, a 169 km de Belo Horizonte. Sua população residente ultrapassa 17 mil habitantes, sua principal atividade econômica é o comércio e prestação de serviços responsável por 68% do Produto Interno Bruto (PIB), as atividades agropecuária são responsáveis por cerca de 21% do PIB, enquanto a atividade industrial por cerca de 11%. O valor do rendimento nominal médio mensal per capita é de R$ 385,51 sendo que o valor dos rendimentos mediano per capita é de R$ 255,00. Dois terços dos habitantes, vivem na zona rural, com valor do rendimento nominal médio mensal per capita de R$ 266,04, e valor dos rendimentos mediano per capita de R$ 175,00.

As consequências desta disparidade social na educação de Piranga, pode ser evidenciada nos números a seguir. Aproximadamente 13 mil pessoas residentes no município em 2010, tinham mais de 14 anos de idade, destas, cerca de 10 mil ainda não tinham concluído o ensino fundamental. Tal quadro é alarmante, pois a maioria dos alunos de hoje, são filhos ou filhas destas parcela da população e não visualizam nos pais exemplo de aproveitamento dos estudos, o que pode os ter levado ao descaso pela própria educação, é muito comum ouvir dos alunos frases do tipo, "Meu pai não estudou e vive bem", é claro que este "vive bem" pode ser contestado, mas o fato é que grande parte destes alunos, só está na escola por causa do assistencialismo do governo federal com o programa "Bolsa Família", ou por ordem do promotor e do conselho tutelar que devem garantir sua frequência na escola pela *Lei de Diretrizes e Bases* (LDB)[dD11], tendo estes alunos assim a escola como uma obrigação, e não como um local de busca de conhecimento.

Muitos dos alunos de Piranga, ainda ocupa seu tempo fora da escola com atividades que necessitam pouca instrução, ou na lavoura, ou como ajudante de pedreiro, ou como empregadas domésticas, muitas vezes para ganhar muito menos que um salário mínimo, mas conseguindo seu próprio dinheiro e acham que se não tivessem que ir a escola, poderiam estar dedicando mais tempo a estas atividades e ganhando mais. A maioria dos nossos estudantes, está interessada nas realizações imediatas, no que eles podem conseguir agora, os frutos dos estudos está muito longe para que se preocupem ou planejem agora, frutos que muitos nem acreditam ser possíveis.

Cerca de 4,8 mil habitantes de Piranga frequentava a escola em 2010, sendo 3,4 mil no ensino Básico Regular, 2,7 mil no Ensino Fundamental e 0,7 mil no Ensino Médio, na sua maioria (mais de 99%), no ensino Público (não há instituições privadas no município).

1.2 As Escolas de Piranga e o Ensino de Matemática

Piranga tem quatro escolas que oferecem os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º Ano) e o Ensino Médio, todas estaduais, sendo uma localizada na zona urbana *"E E Cel. José Ildefonso"* que é uma das maiores escolas da região, com cerca de 2000 alunos (60% do total de alunos do município), e as demais na zona rural "*E E Francisco Sales Ferreira*" no distrito de Pinheiros Altos, *"E E Antônio de Paula Dias"* no distrito de Santo Antônio do Pirapetinga e "*E E Francisco Ferreira Maciel"* na comunidade do Carioca. Para um diagnóstico de como anda o ensino de Matemática nessas escolas, tomaremos como base os resultados do *Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica* (PROEB), que está vinculado ao *Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública* (SIMAVE) . O PROEB realiza uma prova de Matemática e outra de Língua Portuguesa ao final de cada ano letivo, nas turmas de finais de ciclo (5º e 9ºanos do Ensino Fundamental e 3º Ano Ensino Médio) buscando aferir todas as dimensões do sistema educacional da rede pública estadual. (Maiores informações sobre o SIMAVE e PROEB podem ser encontradas em [dE13]).

Tal diagnóstico será feito utilizando como parâmetro, o gráfico com o percentual dos alunos por nível de proficiência e padrão de desempenho de cada uma das escolas citadas acima e também o resultado geral de Minas Gerais em caráter informativo. Para as avaliações em larga escala da educação básica realizadas no Brasil, os resultados dos alunos em Matemática são dispostos em uma escala de proficiência definida pelo *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* (SAEB), com tal escala é possível traduzir as medidas obtidas em diagnósticos qualitativos do desempenho escolar.

Os padrões de desempenho são estabelecidos a partir da escala de proficiência: padrão **baixo** (proficiência até 225 no 9º Ano Ensino Fundamental e proficiência até 300 no 3º Ano do Ensino médio), padrão padrão **intermediário** (proficiência de 225 até 300 para o 9º Ano Ensino Fundamental e de 300 até 375 no 3º Ensino Médio) e padrão **recomendado** (acima de 300 para o 9º Ano Ensino Fundamental e acima de 375 3º Ano Ensino Médio).

A tabela abaixo mostra com os números da participação dos alunos na prova de Matemática do PROEB 2011, em Minas Gerais e nas Escolas de Piranga.

Tabela 1.1: Relação de Participação dos Alunos no PROEB-Matemática: [dAC11]

ESCOLA	Minas Gerais		E E Cel. José Ildefonso		E E Antônio de Paula Dias		E E Francisco Ferreira Maciel		E E Francisco Sales Ferreira	
SÉRIE	9º ANO	3º ANO	9º ANO	3º ANO	9º ANO	3º ANO	9º ANO	3º ANO	9º ANO	3º ANO
ALUNOS MATRICULADOS	184.490	182.045	136	111	20	8	40	8	54	25
ALUNOS PRESENTES	158.458	141.556	116	103	20	8	37	8	48	22
PERCENTUAL (%)	85,89	77,76	85,29	92,79	100	100	92,5	100	88,89	88

A seguir, temos os gráficos com o **Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho** da rede estadual mineira e das escolas piranguenses, como podemos ver em [dAC11].

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

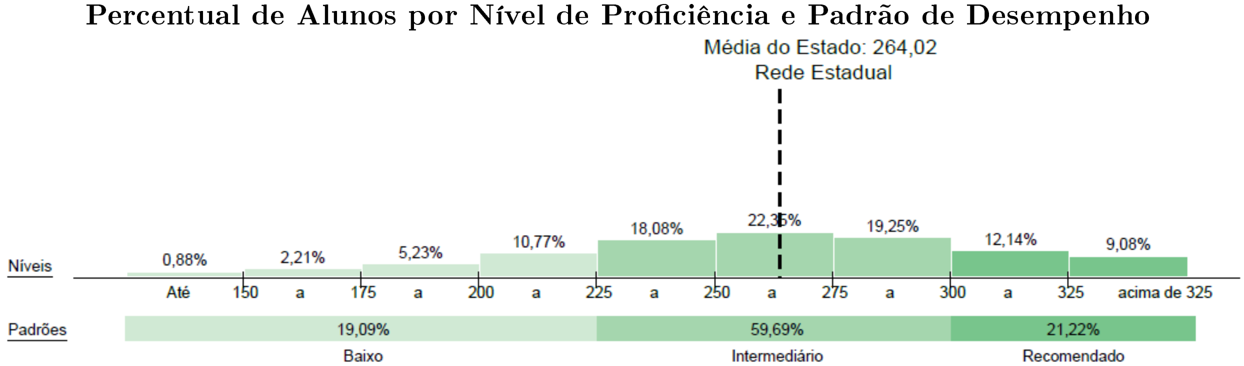

Figura 1.1: 9º Ano Ensino Fundamental - Rede Estadual de Minas Gerais - Fonte: [dAC11]

Podemos ver no gráfico da Figura 1.1 que apenas pouco mais de 20% dos alunos que concluíram o ensino fundamental em 2011 no Estado de Minas Gerais, tinham alcançado os níveis de proficiência recomendado, e que um número quase idêntico a esse de alunos estavam num nível baixo, o que significa que quase 60% dos alunos que estavam por concluir o ensino fundamental em 2011, não atingiram o nível de aprendizado esperado (nível de proficiência recomendado), e quase 20% não conseguiu nem mesmo iniciar o processo de aprendizagem (nível de proficiência baixo).

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

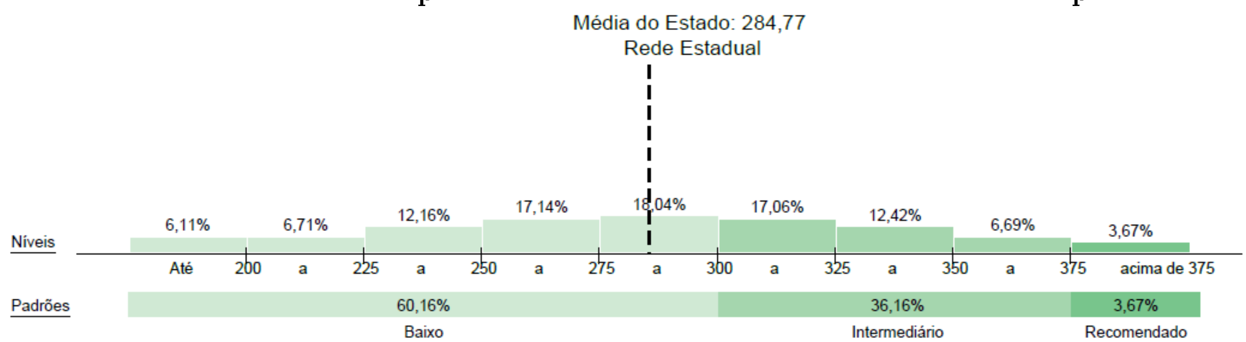

Figura 1.2: 3º Ano Ensino Médio - Rede Estadual de Minas Gerais - Fonte: [dAC11]

A situação piora quando analisamos os resultados do Ensino Médio (Figura 1.2). Menos de 4% dos alunos que concluíram o ensino médio em 2011 no estado de Minas Gerais, atingiram os níveis de proficiência recomendado, e mais de 60% tinham índices de proficiência considerados baixo.

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

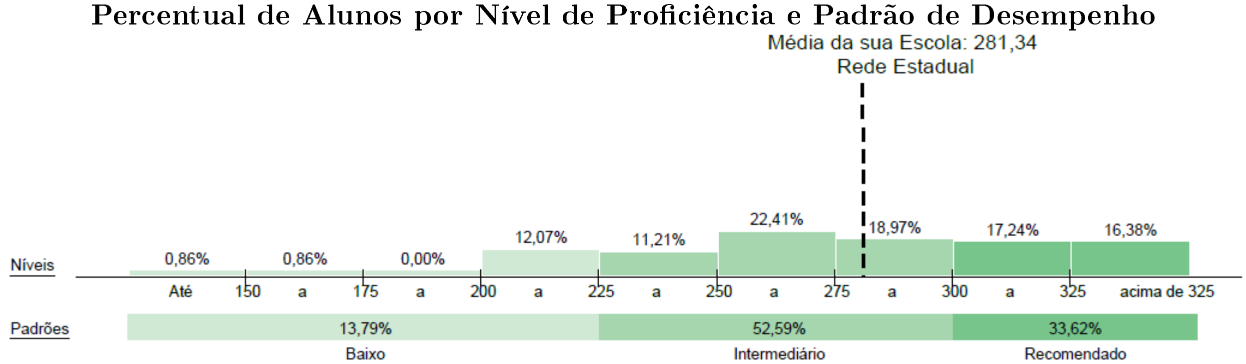

Figura 1.3: 9º Ano Ensino Fundamental - E.E.Cel.José Ildefonso - Fonte: [dAC11]

Os Percentuais do 9º Ano do Ensino Fundamental da E E Cel. José Ildefonso (Figura 1.3) foram melhores que os do estado, mesmo assim, dos alunos que concluíram o Ensino Fundamental em 2011, quase $\frac{2}{3}$ não atingiram os níveis recomendados.

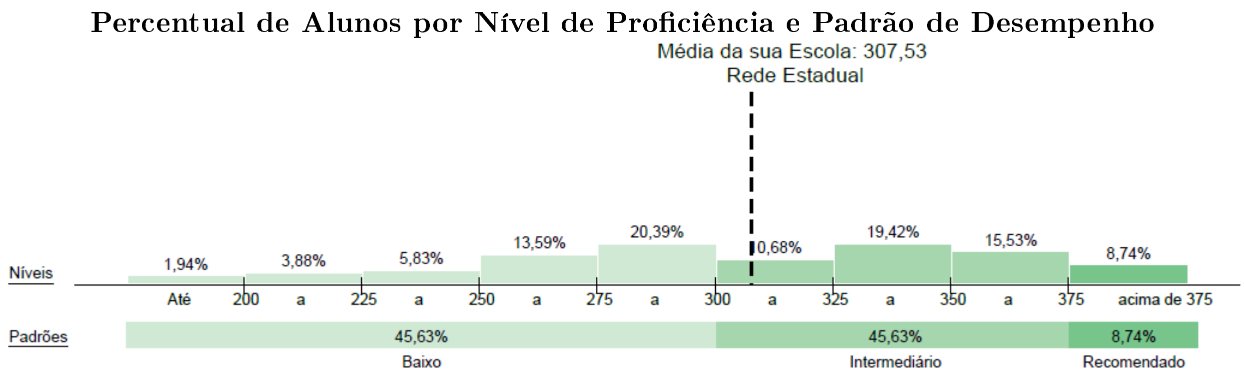

Figura 1.4: 3º Ano Ensino Médio - E.E.Cel.José Ildefonso - Fonte: [dAC11]

A situação no Ensino Médio (Figura 1.4) é ainda pior, pois menos de 9% dos alunos que o concluíram em 2011 obtiveram níveis de proficiência dentro do recomendado.

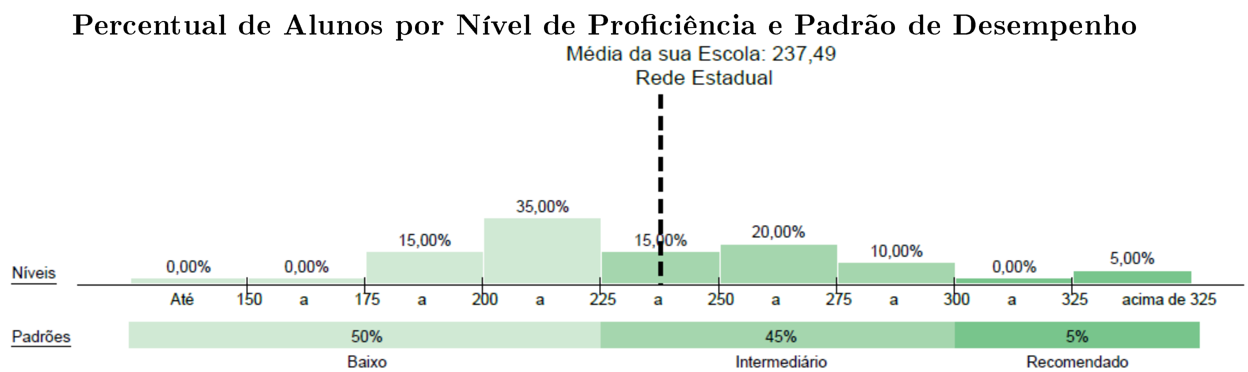

Figura 1.5: 9º Ano Ensino Fundamental - E.E. Antônio de Paula Dias - Fonte: [dAC11]

A escola E. E. Antônio de Paula Dias Apresentou 5% dos alunos do 9º Ano Ensino Fundamental dentro do padrão recomendado (Figura 1.5)

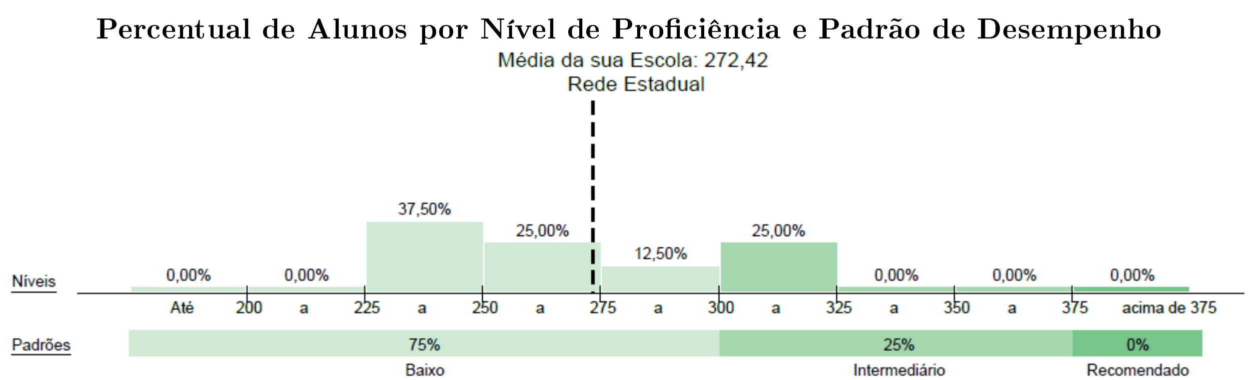

Figura 1.6: 3º Ano Ensino Médio - E.E. Antônio de Paula Dias - Fonte: [dAC11]

Nenhum aluno no 3º ano do Ensino Médio da escola E. E. Antônio de Paula Dias encontrava-se no padrão recomendado (Figura 1.6)

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

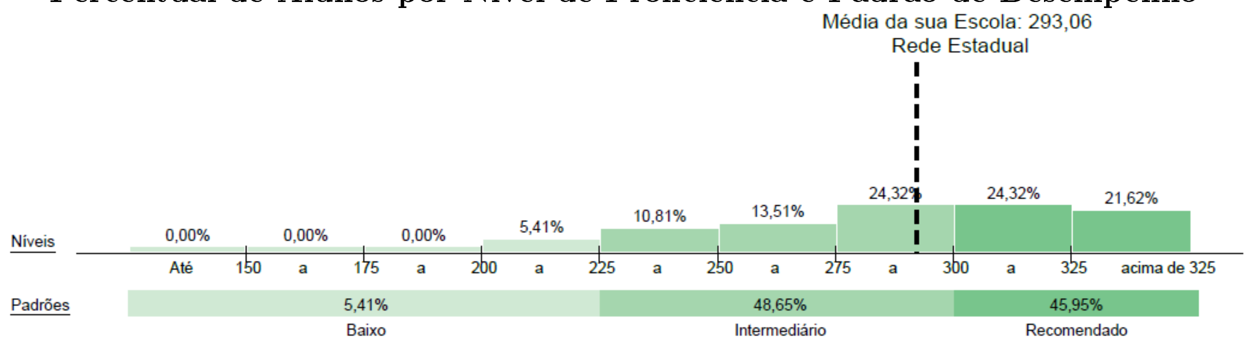

Figura 1.7: 9º Ano Ensino Fundamental - E.E. Francisco Ferreira Maciel - Fonte: [dAC11]

Os melhores resultados foram apresentados pela Escola E. E. Francisco Ferreira Maciel, quase 46% dos alunos do 9º Ano Ensino Fundamental estavam dentro do padrão recomendado de proficiência e menos de 6% estavam no padrão baixo (Figura 1.7).

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

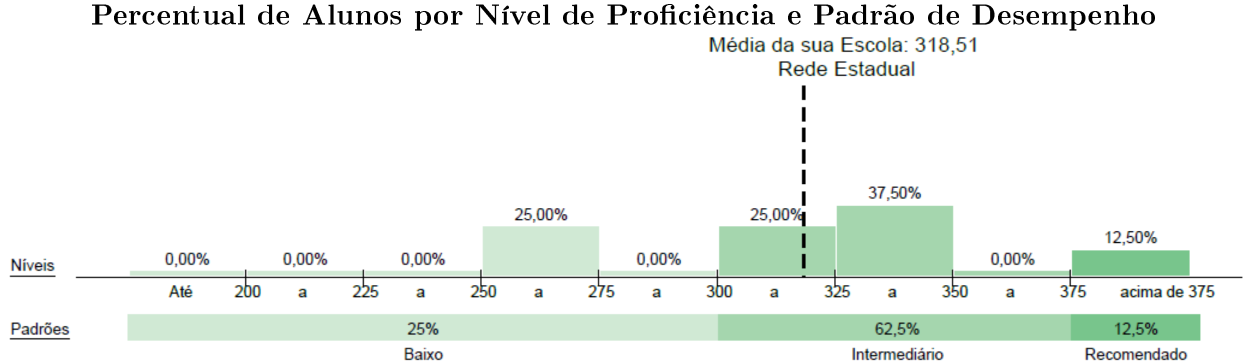

Figura 1.8: 3º Ano Ensino Médio - E.E. Francisco Ferreira Maciel - Fonte: [dAC11]

Já no 3º do Ensino Médio, o número de alunos no padrão recomendado cai para 12,5% e no padrão baixo sobe para 25% (Figura 1.8).

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

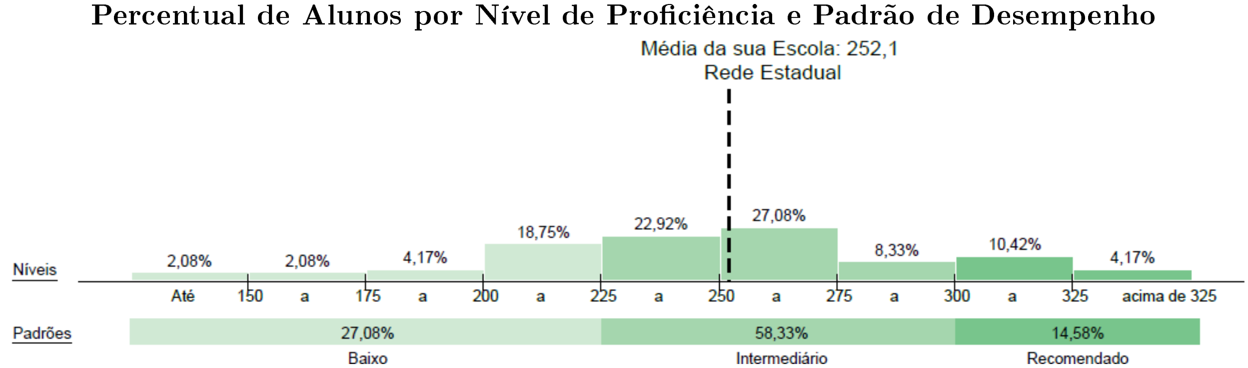

Figura 1.9: 9º Ano Ensino Fundamental - E. E. Francisco Sales Ferreira - Fonte: [dAC11]

A escola E.E. Francisco Sales Ferreira apresentou menos de 15% dos alunos no padrão de proficiência recomendado, no 9º Ano Ensino Fundamental (Figura 1.9)

Percentual de Alunos por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho

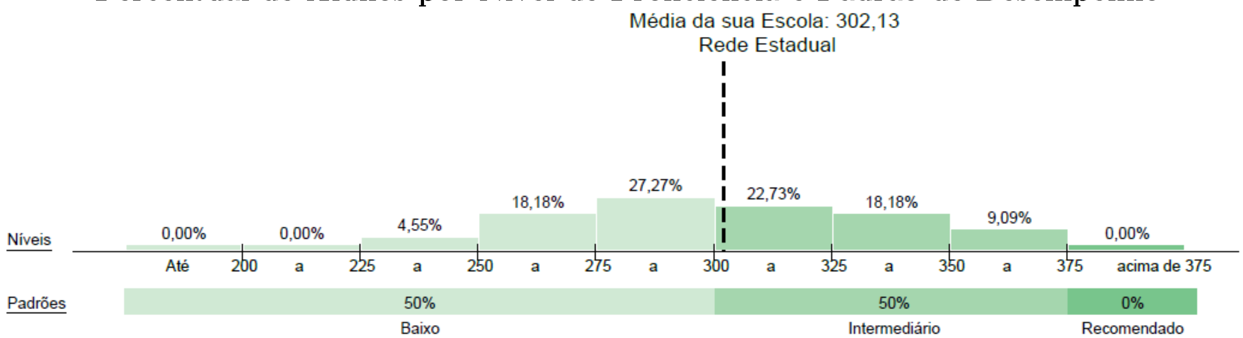

Figura 1.10: 3º Ano Ensino Médio - E.E. Francisco Sales Ferreira - Fonte: [dAC11]

Nenhum aluno no 3º ano do Ensino Médio da escola E.E. Francisco Sales Ferreira encontrava-se no padrão recomendado .

Podemos perceber que os resultados do ensino de matemática nas escolas de Minas Gerais e de Piranga estão longe do desejado, e a situação piora no ensino médio, o que faz necessária uma reflexão na prática pedagógica dos professores para mudar esta situação, e da melhor maneira possível, aprimorar sua prática profissional elevando assim os índices de aprendizagem de matemática em nossas escolas.

1.3 O Ensino das funções em Piranga

Vimos na seção anterior que o ensino de matemática em Piranga, e em todo o estado de Minas Gerais, está bem abaixo do esperado, e as coisas não são diferentes quando nos restringimos ao estudo das funções. Aproveitando ainda os resultados do PROEB, vamos analisar os resultados específicos das competências envolvidas no estudo das funções através das escalas de proficiência das escolas. Como a ênfase do estudo das funções é dada no ensino médio, vamos analisar apenas as escalas de proficiência do 3º ano do Ensino Médio.

Primeiramente vamos nos familiarizar com a escala de proficiência (ver figura 1.11).

Na primeira coluna da escala são apresentados os grandes domínios do conhecimento em Matemática para toda a educação básica. Esses domínios são agrupamentos de competências que, por sua vez, agregam as habilidades presentes na Matriz de Referência de Matemática relativa ao *Conteúdo Básico Comum* (CBC) de Minas Gerais. As colunas seguintes mostram a relação entre a escala e a matriz, para cada competência, trazendo os descritores que lhes são relacionados

A Estrutura da Escala de proficiência

Figura 1.11: Escala Padrão de Proficiência 3º Ano Matemática - Fonte:[dAC11]

As habilidades, representadas por diferentes cores, que vão do amarelo-claro ao vermelho, estão dispostas nas várias linhas da escala. Essas cores indicam a gradação de complexidade das habilidades pertinentes a cada competência. Assim, por exemplo, a cor amarelo-claro indica o primeiro nível de complexidade da habilidade, passando pelo laranja e indo até o nível mais complexo, representado pela cor vermelha. A legenda explicativa das cores informa sobre essa gradação na própria escala. Na primeira linha da Escala estão divididos todos os intervalos em faixas de 25 pontos, que vão de zero a 500 pontos. Em tons de verde, estão agrupados os padrões de desempenho definidos pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais para o 3º ano do Ensino Médio. Os limites entre os padrões cortam a escala, no sentido vertical, da primeira à última linha [dAC11].

Domínios e Competências

Os domínios da escala de proficiência agrupam as competências básicas ao aprendizado da Matemática para toda a educação básica. Ao relacionar os resultados da escola a cada um dos domínios da escala de proficiência e aos respectivos intervalos de gradação de complexidade da habilidade, é possível diagnosticar, com grande precisão, dois pontos principais: o primeiro se refere ao nível de desenvolvimento obtido no teste e o segundo ao que é esperado dos alunos nas etapas de escolaridade em que se encontram. Com esses dados, é possível implementar ações em nível de sala de aula com vistas ao desenvolvimento das habilidades ainda não consolidadas, o que, certamente, contribuirá para a melhoria do processo educativo da escola [dAC11].

Observe que as competências relativas ao estudo das funções encontram-se no domínio "Números e Operações/Álgebra e Funções", mais precisamente na competência "Utilizar Procedimento Algébrico". A descrição desta competência pelo SIMAVE é apresentada a seguir:

O estudo da álgebra possibilita ao estudante desenvolver várias capacidades, dentre elas a capacidade de abstrair, generalizar, demonstrar, sintetizar procedimentos de resolução de problemas. As habilidades referentes à álgebra são desenvolvidas no Ensino Fundamental e vão desde situações problema em que se pretende descobrir o valor da incógnita em uma equação utilizando uma balança de dois pratos, até a resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau. Uma das habilidades básicas desta competência diz respeito ao cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, em que é utilizado o conceito de variável. No Ensino Médio, esta competência envolve a utilização de procedimentos algébricos para resolver problemas envolvendo o campo dos diferentes tipos de funções: linear, afim, quadrática e exponencial [dAC11].

Os estudantes cuja proficiência se encontra na faixa branca, de 0 a 275 pontos, ainda não desenvolveram as habilidades relacionadas a esta competência.

No intervalo representado pelo amarelo, 275 a 300 pontos, os estudantes calculam o valor numérico de uma expressão algébrica.

No intervalo de 300 a 350 pontos, indicado pelo laranja claro, os estudantes já identificam a equação de primeiro grau, e sistemas de primeiro grau, adequados à resolução de problemas. Esses estudantes também determinam o cálculo numérico de uma expressão algébrica em sua forma fatorada e resolvem problemas envolvendo: grandezas diretamente proporcionais, variações entre mais de duas grandezas, juros simples, porcentagem e lucro.

O laranja escuro, 350 a 400 pontos na escala, indica uma maior complexidade nas habilidades associadas a esta competência. Neste nível de proficiência, os estudantes resolvem problemas que recaem em equação do segundo grau, e sistemas de equações do primeiro grau e problemas mais complexos envolvendo juros simples. Resolvem problemas envolvendo a resolução de equações exponenciais. Reconhecem a expressão algébrica que representa uma função linear ou afim a partir de uma tabela e a expressão de uma função do primeiro grau a partir do seu gráfico. Calculam o termo de uma Progressão Aritmética – P.A. – dada a fórmula do termo geral.

Estudantes cuja proficiência se localiza no intervalo de 400 a 425 pontos, vermelho claro, resolvem problemas que envolvem grandezas inversamente proporcionais e sistemas de duas equações. No campo das sequências numéricas, identificam uma regularidade em uma sequência numérica e determinam o número que ocupa uma determinada posição na sequência. Reconhecem intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, interpretam os coeficientes da equação de uma reta quando o gráfico não está explicitado no problema. Reconhecem o gráfico de uma reta quando são dados dois pontos ou um ponto e a reta por onde passa. Reconhecem as raízes de um polinômio dada a sua decomposição em fatores do primeiro grau.

Acima de 425 pontos na escala, indicado pela cor vermelho-escuro, os estudantes resolvem problemas relacionando a representação algébrica com a geométrica (gráfica) de um sistema de equações do primeiro grau. Relacionam a função do segundo grau com a descrição textual de seu gráfico, reconhecem a expressão algébrica que representa uma função não polinomial a partir de uma tabela, resolvem problemas envolvendo a determinação de ponto de máximo de uma função do segundo grau. Resolvem problemas que envolvem a determinação de algum termo de uma P.G. quando não é fornecida a fórmula do termo geral. Relacionam a expressão de um polinômio com a sua decomposição em fatores do primeiro grau. Resolvem problemas envolvendo a função exponencial, identificam gráficos da função seno e cosseno. Resolvem problemas envolvendo sistemas de equação com duas equações e duas incógnitas. Relacionam as raízes de um polinômio com a sua decomposição em fatores do primeiro grau. Identificam gráficos de funções exponenciais no contexto de crescimento populacional e juros compostos.

Sendo assim, para analisar o ensino das funções das escolas de Piranga, vamos analisar o desempenho de cada escola do município na competência "Utilizar Procedimento Algébrico" na escala de proficiência do 3º Ano do Ensino Médio.

Escala de Proficiência - 3ºAno do Ensino Médio - E.E. Cel. José Ildefonso

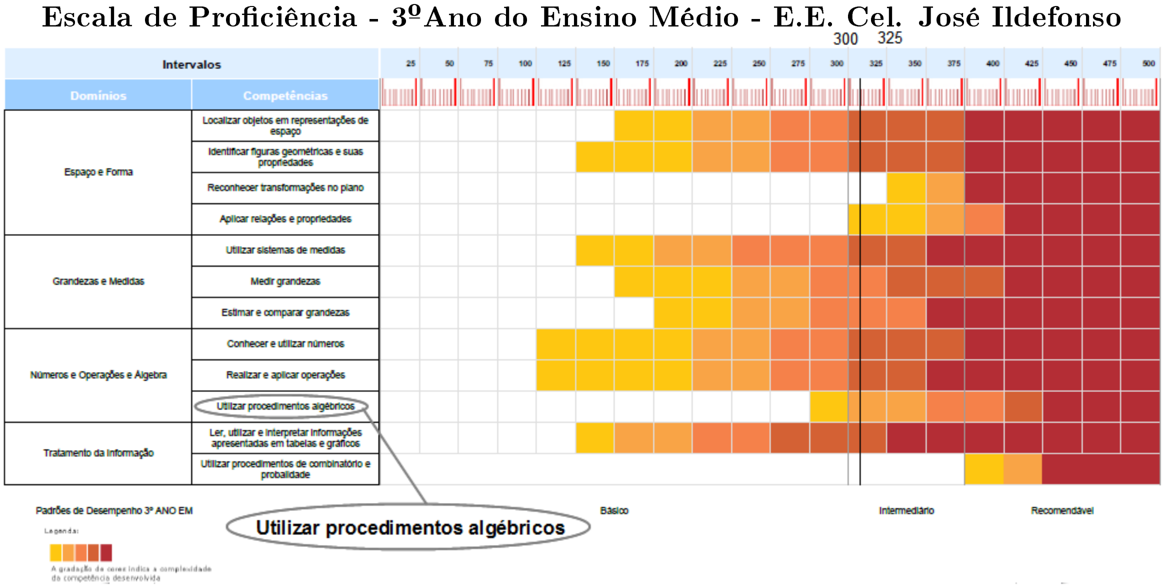

Figura 1.12: Escala de Proficiência Matemática - 3º Ano E. M. - E.E. Cel. José Ildefonso - Fonte: [dAC11]

A Escola E.E. Cel. José Ildefonso, teve índice de proficiência média 307,53 indicado pela linha preta vertical na Figura 1.12. Na competência "Utilizar Procedimentos Algébricos", este nível cai na faixa laranja claro. Isto indica que, em média, os estudantes que concluíram o ensino médio em 2011, apenas identificavam a equação de primeiro grau, e sistemas de primeiro grau, adequados à resolução de problemas. Esses estudantes também determinavam o cálculo numérico de uma expressão algébrica em sua forma fatorada e resolviam problemas envolvendo: grandezas diretamente proporcionais, variações entre mais de duas grandezas, juros simples, porcentagem e lucro.

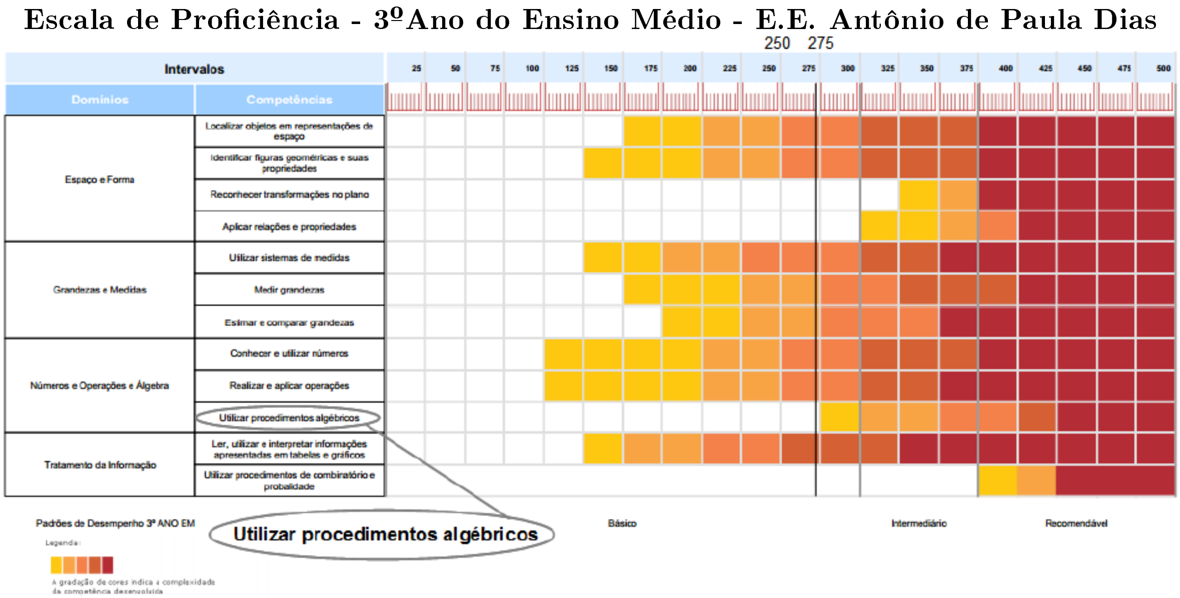

Figura 1.13: Escala de Proficiência Matemática - 3º Ano E. M. - E.E. Antônio de Paula Dias - Fonte: [dAC11]

O índice de proficiência médio da escola E.E. Antônio de Paula Dias é de 272,42, que cai na faixa branca da competência analisada como podemos ver na Figura1.13, o que indica que a grande maioria dos alunos não desenvolveram as habilidades relacionadas a esta competência.

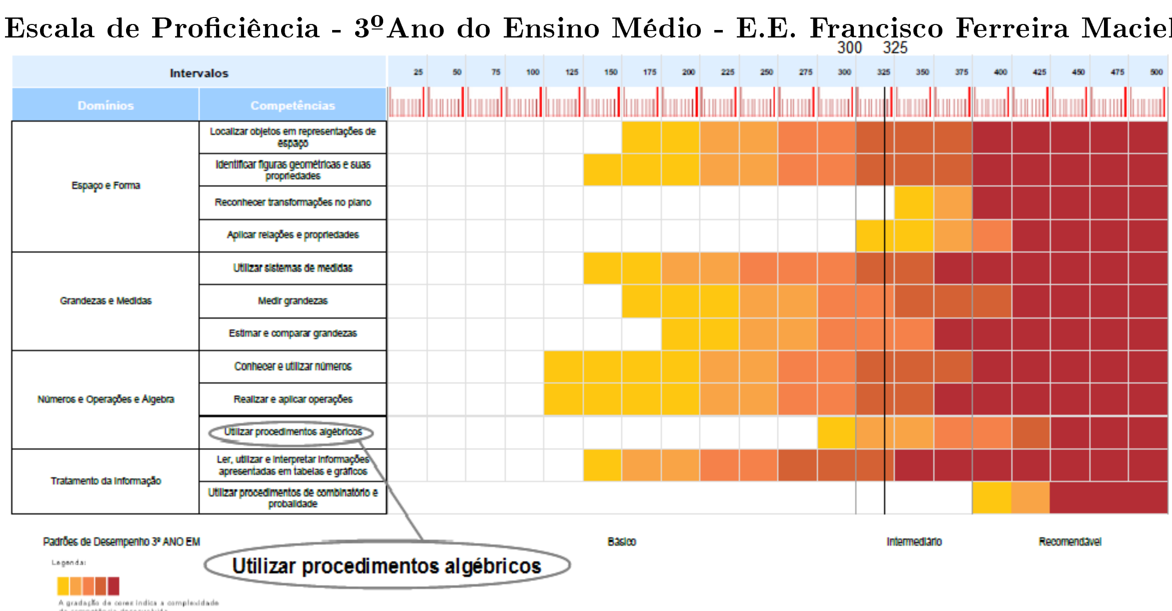

Figura 1.14: Escala de Proficiência Matemática - 3º Ano E. M. - E.E. Francisco Ferreira Maciel - Fonte: [dAC11]

A Figura 1.14 (página anterior) nos mostra que o índice de proficiência médio de 318,51 da E.E. Francisco Ferreira Maciel, cai na faixa laranja claro, o que indica que os estudantes que concluíram o 3º Ano do Ensino Médio em 2011, apenas identificavam a equação de primeiro grau, e sistemas de primeiro grau, adequados à resolução de problemas. Esses estudantes também determinavam o cálculo numérico de uma expressão algébrica em sua forma fatorada e resolviam problemas envolvendo: grandezas diretamente proporcionais, variações entre mais de duas grandezas, juros simples, porcentagem e lucro.

Escala de Proficiência - 3ºAno do Ensino Médio - E.E. Francisco Sales Ferreira

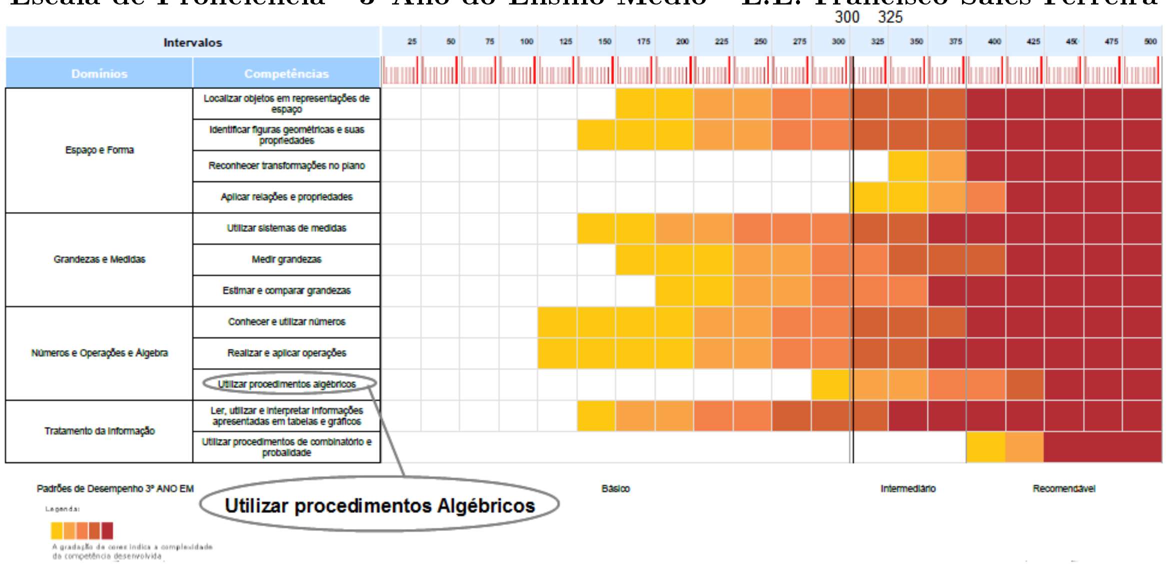

Figura 1.15: Escala de Proficiência Matemática - 3º Ano E. M. - E.E. Francisco Sales Ferreira - Fonte: [dAC11]

A Escola E.E. Francisco Sales Ferreira, teve proficiência média 302,13 que também cai na faixa laranja claro, como podemos ver na Figura 1.15, sendo assim as habilidades desenvolvidas por seus alunos são similares as dos alunos das escolas E.E. Cel. José Ildefonso e E.E. Francisco Ferreira Maciel.

Como os alunos analisados estavam concluindo o ensino médio, seria esperado que a grande maioria estivesse nas faixas vermelhas (claro ou escuro), para poder considerar que o ensino das funções foi satisfatório, mas como vimos, os resultados estão longe deste patamar, o que evidencia a necessidade de melhoras no processo de ensino-aprendizagem do estudo das funções.

Capítulo 2

No Olhar dos Professores

Neste capítulo, descrevo como os professores de Piranga se posicionam sobre o ensino das funções no município, através de uma entrevista feita por mim, na forma de um questionário composto por questões discursivas e respondido por eles em outubro de 2012. Na Seção 2.1 faço uma breve descrição do questionário, e relato sobre a metodologia aplicada na sua análise. Na Seção 2.2 descrevo meu interesse em cada questão do questionário, a análise das respostas dos professores e finalizo o capítulo na Seção 2.3 com uma análise geral dos resultados. As principais referências são [dSM04], [Pai11], [GGJC09] e [IL09].

2.1 Metodologia da Análise

Foi aplicado um questionário com 15 questões referentes a prática didática dos professores de Piranga, relativas ao ensino das funções reais buscando mapear o ensino das funções no município. O questionário foi entregue para os 15 professores de Matemática que trabalhavam nas escolas de Piranga em outubro de 2012, sendo que apenas 9 destes entregaram o questionário respondido. Foram abordadas perguntas sobre a importância do ensino das funções, como este conteúdo é apresentado, quais os recursos disponíveis e como anda o ensino das funções nas escolas. Entre os 9 professores que entregaram os questionários, 6 atuam na E.E. Cel. José Ildefonso, 2 na E.E. Francisco Sales Ferreira e 1 atua nas escolas E.E. Antônio de Paula Dias e E.E. Francisco Ferreira Maciel, sendo que temos disponíveis relatos de todas as escolas.

Para a análise dos questionários, por ser baseado em questões discursivas, utilizei a metodologia da "Análise de Conteúdo" que como podemos ver em [dSM04], busca sua lógica na interpretação cifrada do material de caráter qualitativo, buscando expor o ensino das funções em Piranga, como é visto por seus professores. Tal método foi escolhido por tornar mais clara a análise, que foi possível devido ao pequeno número de questionários, procurei expor todas as ideias presentes sem dar ênfase às frequências estatísticas.

Em [dSM04], a "Análise de Conteúdo" é definida como um conjunto de técnicas de análise da comunicação, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdos das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção destas mensagens.

2.2 Resultados da Análise

Com a questão número 1, meu interesse era em saber a série onde o conteúdo é iniciado, e onde é dada a maior ênfase. De acordo com a Proposta Curricular do "*Conteúdo Básico Comum*" (CBC) da Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais, o ensino das funções no Ensino Fundamental aparece como conteúdo complementar (deve ser visto se der tempo) e obrigatório no Ensino Médio onde, no 1º Ano, deve-se introduzir e apresentar as funções elementares e no 2º e 3º Anos deve-se aprofundar nos estudos destas funções, a modelagem está no CBC, como conteúdo complementar. Usualmente os professores introduzem o conceito de função no final do 9º Ano do Ensino Fundamental, afim de habilitar os alunos para manipularem fórmulas e introduzir a interpretação de gráficos cartesianos, como aparece nos livros didáticos, e no 1º Ano do Ensino Médio, aprofundam os estudos do conceito de função e das funções reais elementares, dificilmente trabalham com modelagem, a não ser em exercícios propostos pelo livro didático no tópico da função elementar estudada.

A questão 2 foi importante para saber se os professores que lecionavam nas séries anteriores, principalmente os do Ensino Fundamental tinham consciência da importância de conteúdos como "Equações", "Expressões Algébricas" e "O Conjunto dos Números Reais", para a boa compreensão das funções. A maioria dos professores citaram estes conteúdos, alguns ainda citaram "Representação Gráfica e Tabelas" .

Com a questão 3 procurei identificar a importância dada ao ensino das funções pelos professores e também na aplicabilidade que eles dão a este conteúdo. A maioria dos professores citam a importância das funções na relação entre diferentes grandezas, em outras disciplinas como Física e Química e também para o dia a dia do aluno, esta última nos mostra a importância de se trabalhar modelagem no Ensino Médio, mas infelizmente pelo CBC tratá-lo como tema complementar, este tema acaba não sendo visto no Ensino Básico.

A questão 4 trata de como o conteúdo é exposto aos alunos. de forma geral os professores apresentam o tema como proposto pelo livro didático, através de situações problemas e apresentando as formas de representação de uma função, o que aponta um problema, as aulas são planejadas com base exclusivamente no livro didático, o professor praticamente ignora outros recursos didáticos, principalmente pelo tempo necessário para prepará-los.

Nas questões 5 e 6 procurei informações de como os professores tratam do livro didático. Temos aí um problema pois os livros didáticos são fornecidos pelo "*Ministério da Educação e Cultura*" (MEC) e assim todos os livros citados vêm seriados de acordo com o "*Parâmetros Curriculares Nacionais*" (PCN), que é ordenado de forma diferente ao CBC de Minas Gerais, o que dificulta a utilização dos livros didáticos como material base, fazendo com que os professores optem muitas vezes por um livro por vir em volume único, quando possível, sem analisá-lo adequadamente para esta escolha.

Na questão 7, indaguei sobre a abordagem feita pelo livro sobre o conteúdo funções. De acordo com os professores os livros abordam o tema de maneira adequada, introduzindo o assunto através de situações problemas, de maneira clara e objetiva, com exercícios de grau de dificuldade diferentes.

Com a questão 8, procurei saber sobre a existência e utilização de laboratórios de informática nas escolas. Das quatro escolas do município, duas não possuem laboratórios e nas que possuem, os laboratórios não são utilizados nas aulas.

Na questão 9, procurei saber sobre a familiaridade que os professores tem com softwares educacionais. A maioria dos professores não tem conhecimentos sobre softwares educacionais, alguns professores citaram o GeoGebra , o Winplot e Planilhas Eletrônicas, mas não os utilizam em aula.

Na questão 10, pedi aos professores que opinassem sobre a utilização de recursos computacionais no ensino das funções. A maioria dos professores acha que a utilização desses recursos contribuiria muito para a aprendizagem, principalmente por prender a atenção dos alunos e permitir a visualização e construção dos exercícios.

Na questão 11, foi pedida a sugestão de outros recursos para o ensino das funções. Alguns professores sugeriram materiais que propiciassem a construção ou a utilização na prática de funções, como bulas de remédio, para mostrar a dosagem do medicamento em função do peso da pessoa; medir e pesar os alunos para calcular seu *Índice de Massa Corporal* (IMC), etc.

A questão 12 tratava da utilização dos recursos citados na questão 11 e dos recursos computacionais, alguns professores citaram a utilização do material concreto e os professores que o utiliza relataram que os resultados com esse recursos são bem melhores, e um professor citou a utilização do "*AutoCad*" para trabalhar coordenadas cartesianas, e os resultados também foram bons.

Na questão 13, pedi a opinião dos professores sobre o nível de aprendizagem da matemática. E a maioria concorda que os níveis estão baixos e que precisam ser melhorados, e responsabilizam estes níveis à defasagem de aprendizagem que os alunos carregam desde as séries iniciais e ao desinteresse dos alunos e da família.

Com a questão 14, quis me informar se os professores estão abertos a novas práticas pedagógicas e se consideram possível melhorar os níveis de aprendizagem com elas. Essa questão tive resposta unânime, todos os professores concordam que novas práticas pedagógicas podem melhorar o processo de ensino-aprendizagem, mas ressaltaram que é necessário que os órgãos públicos propiciem aos professores condições de planejamento e capacitação para tornar estas práticas possíveis.

Para finalizar, na questão 15, perguntei aos professores o que pode ser feito para melhorar o ensino na sua escola e no município. Os professores relataram a necessidade de maior compromisso dos pais, alunos e até mesmo dos professores com a educação, investimento do governo na capacitação dos professores e valorização do profissional da educação.

2.3 Análise Geral

De um modo geral, em Piranga, o estudo das funções é iniciado no final do 9º Ano do Ensino Fundamental e continua ao longo do Ensino Médio, principalmente no 1º Ano, onde é dada uma ênfase maior. Na opinião dos professores, para entender o ensino das funções, os alunos deveriam dominar as operações com números reais, a interpretação de gráficos e tabelas, as propriedades das expressões algébricas, a interpretação de gráficos tabelas e as representações no plano cartesiano. Para esses professores o ensino de funções é importante por:

- Levar o aluno a fazer relações entre diferentes tipos de grandezas;
- Auxiliar a compreensão de conteúdos de outras disciplinas como a Química e a Física;
- Desenvolver a interpretação de diferentes formas de informação como gráficos e tabelas;
- Auxiliar na resolução de problemas envolvendo o cotidiano do aluno.

A maioria dos professores trabalha o ensino das funções seguindo o livro didático apenas, utilizando eventualmente exercícios ou trabalhos de outros livros. No Ensino Médio, todos trabalham com o livro "Matemática" de Manoel Paiva [Pai11], já no 9º Ano do Ensino Fundamental foram mencionados os livros "A Conquista da Matemática" de Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci[GGJC09] e "Matemática" Imenes e Lellis [IL09].

De maneira geral, os professores acham que os livros mencionados, abordam o tema "funções" de maneira adequada, com problemas contextualizados por situações do dia a dia, despertando a curiosidade dos alunos, dando ênfase às suas representações algébricas e gráficas ou por tabelas.

Segundo os professores, as escolas “E.E. Cel. José Ildefonso” e “E.E. Francisco Sales Ferreira” são as únicas que possuem laboratórios de informática, mesmo assim estes laboratórios raramente são utilizados, ou até mesmo não são utilizados, como recursos didáticos por diversos motivos, tais como, falta de profissional de apoio, alto índice de alunos por computadores, falta de capacitação para os professores, dentre outros. Mesmo assim, todos concordam que a utilização dos recursos computacionais pode tornar as aulas mais interessantes, e deve ser utilizada, desde que as ressalvas feitas acima sejam solucionadas. A utilização desses recursos pode facilitar a visualização gráfica e as alterações realizadas pela mudança de parâmetros, o que não pode ser feito no quadro, além de a tecnologia fazer parte do estilo de vida dos alunos, poucos professores conhecem *“softwares”* que possam ser utilizados para o ensino de funções, os que conhecem citaram o Geogebra, o Winplot e planilha eletrônica.

Perguntados sobre quais outros recursos poderiam ser utilizados no ensino das funções, os professores sugeriram aplicações práticas de comparação de grandezas, como cálculo do *Índice de Massa Corporal* (IMC) dos alunos, leitura da bula de remédios para indicar a quantidade de remédio a ser ministrada em função do peso do doente, etc. Os professores conseguiram melhores resultados quando trabalharam com estes recursos.

Todos os professores concordam que é preciso melhorar os níveis de ensino-aprendizagem nas escolas de Piranga, mesmo achando que comparados aos níveis do estado, os níveis do município são relativamente bons. Os professores acreditam que é possível melhorar o ensino através de novas práticas pedagógicas, mas também dão importância a novas políticas educacionais e maior participação dos pais na escola, apontam que a valorização profissional do professor é essencial para que ele possa ter tempo e recursos didáticos suficientes para poder dar aulas melhores.

Capítulo 3

Alternativas Para o Ensino de Funções

Podemos verificar pelo capítulo anterior que entre os problemas apresentados pelos professores, o único que pode ser encarado por ação própria exclusiva, é a falta de interesse dos alunos, pois isto não depende diretamente do governo ou das famílias dos alunos, é claro que a participação destes outros dois grupos interfere diretamente no processo de ensino-aprendizagem, mas esta análise foge do foco deste trabalho. Sendo assim apresentarei duas alternativas para ajudar a prender a atenção dos alunos, são elas, a aplicação de **problemas de modelagem, envolvendo situações do cotidiano dos alunos** (Seção 3.1) e a **utilização de recursos computacionais** (Seção 3.2) onde também descreverei brevemente alguns programas de computador que podem ser utilizados com esta finalidade. Finalizo o capítulo na Seção 3.3 sugerindo algumas atividades que podem ser utilizadas segundo estas alternativas. As principais referências são [Bel09], [D'A02], [Mor99], [PHDS11], [Cha05], [Ros06], [Rez11], [Gui11], *[LCWM06],* [Val97], [GMC12], [Geo13a], [Nér07], [alt13], [Sou04], [Bor06], [dEdCeT11] e [Geo13b]

3.1 Modelagem em Problemas de Situações Cotidianas

A maioria dos alunos questiona os professores sobre a importância, na sua vida fora da escola, de certos conteúdos que lhes são cobrados. Eles não conseguem se interessar por um determinado tema, se não veem aplicação prática daquilo para sua vida. Isto ressalta a importância de se trabalhar modelagem, como aplicação do conceito de função, principalmente se os problemas envolvidos tiverem ligação com a vida dos alunos. Outro fator importante em defesa da modelagem, é que os alunos só aprenderão a usar a matemática, em situações concretas de sua vida, se aprenderem como fazer isto, na escola, é o que nos diz Maria Beltrão em sua tese de Doutorado:

> (...) ter aprendido matemática puramente teórica, não habilita a utilizá-la em situações ainda não totalmente matematizadas. Assim se quisermos que os alunos tenham competência para desenvolver Aplicações e Modelagem, cumpre incluir tais assuntos explicitamente no currículo de ensino da Matemática.(...) [Bel09]

Apesar de aparecer no CBC como conteúdo complementar, a modelagem matemática pode contribuir para que ocorra a aprendizagem de técnicas e conceitos do estudo das funções, se para isto forem utilizadas situações relevantes para os alunos, que possam motivar a aprendizagem, dando suporte para sua realização.

> (...) o ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo, isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino (...) [D'A02].

A modelagem matemática exemplifica a aplicação da matemática e das funções, mostrando para o aluno como a matemática e o estudo das funções pode ser útil. Se tratados com problemas de aplicações concreta do cotidiano dos alunos, pode ainda facilitar sua compreensão, pois desta forma, segundo a teoria da "Aprendizagem Significativa", o aluno associaria os conteúdos a algo de seu conhecimento, facilitando assim sua assimilação.

A "Aprendizagem Significativa" foi formulada por D. Ausubel na década de 1960 com um enfoque cognitivista e depois seguida por Joseph Novak na década de 1980 com enfoque mais humanista [PHDS11]. Em [Mor99] o autor define a "Aprendizagem Significativa", como um processo, por meio do qual, o sujeito que aprende relaciona, de maneira não arbitrária e substantiva, uma nova informação a um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva.

Em [Cha05] a autora apresenta cinco argumentos para a inclusão da modelagem no currículo do ensino médio. São eles:

- Motivação: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;

- Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;

- Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no cotidiano e no mundo do trabalho;
- Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
- Compreensão do papel sociocultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais.

Como podemos ver, a modelagem pode tornar o ensino das funções muito mais atraente, e deixar seus resultados mais satisfatórios. Mas para que seja bem ensinada é necessário que um conceito que vem sendo esquecido pelos professores seja bem ensinado. Os trabalhos de [Ros06] e [Rez11], nos mostra que a maioria dos professores, omitem o termo "taxa de variação" no ensino das funções, porém a taxa de variação média é muito importante quando se trabalha com modelagem, pois pode nos indicar, que tipo de função deve ser utilizada para modelar um problema ao qual se conhece um conjunto discreto de pontos, e pode ser ensinado, sem que se faça necessário o conhecimento do Cálculo Infinitesimal.

Vamos primeiramente lembrar da definição de taxa de variação média e de alguns resultados úteis na resolução de problemas de modelagem :

Definição 3.1. Seja a função $y = f(x)$. A razão, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, é a taxa média de variação de f entre x e $x + \Delta x$. [Gui11]

Exemplos:

1. A velocidade média de um móvel é a taxa de variação média da posição em função do tempo.
2. A aceleração média de um móvel é a taxa de variação média da velocidade em função do tempo.

Teorema 3.2. *[LCWM06]* ***Teorema Fundamental da Proporcionalidade:*** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (estritamente crescente ou estritamente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*e todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Pondo* $a = f(1)$, *tem-se* $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.3. *[LCWM06]* ***Caracterização da Função Afim:*** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$, depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim. Ou em outras palavras, se a taxa de variação $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ for constante, então f é uma função afim.*

Note que a função $\varphi(h)$ atende o Teorema 3.2, pois como f é monótona e injetiva, é fácil ver que φ também será, e com monotonicidade idêntica a de f. Além disto:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Logo,

$$\varphi(h) = ah,$$

onde $a = \varphi(1)$.

Assim, se $h \neq 0$

$$f(x+h) - f(x) = ah \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

e ainda, se $f(0) = b$, temos

$$f(h) - b = ah,$$

ou seja,

$$f(h) = ah + b$$

ou

$$f(x) = ax + b.\square$$

Exemplo 3.4. – (Fonte: [Rez11])– A tabela abaixo mostra a variação de posição de um trem em movimento uniforme que passava no quilômetro 40 de uma ferrovia quando o movimento começou a ser observado (t = 0). Depois de quanto tempo após o início da viagem, o trem passou pelo quilômetro 120 da ferrovia?

Tempo (horas)	0	1	2	3	4
Espaço (km)	40	70	100	130	160

Solução

Note que a posição do trem é dado em função do tempo, mas a tabela não mostra em que instante o trem passa pelo quilômetro 120 da ferrovia, de maneira que teremos que modelar este problema afim de encontrar uma expressão analítica do tipo $s = f(t)$, para tornar possível a solução deste problema, mas qual tipo de função utilizar?

Observe que, como o trem esta em movimento uniforme, sua posição aumenta conforme o tempo aumenta, logo trata-se de uma função estritamente crescente, e portanto injetiva. Além disto, a taxa de variação média de s em função de t (velocidade média do trem) é $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 30$, para quaisquer t_1,t_2 escolhidos na tabela, ou seja a taxa de variação média da função definida pela tabela é constante e igual a 30. Assim pelo teorema da função afim, $s(t) = at + b$, onde $a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 30$ e $b = s(0) = 40$, isto é, $s(t) = 30t + 40$

Assim para determinar depois de quanto tempo após o início da viagem o trem passou pelo quilômetro 120 da ferrovia, basta resolver a equação

$$s(t) = 120 \Rightarrow 30t + 40 = 120 \Rightarrow t = \frac{8}{3}.$$

Assim, o trem passou pelo quilômetro 120 da rodovia em $t = \frac{8}{3}$ de horas, isto é, 2 horas e 40 minutos após o início da viagem.□

Nota: Problemas como este, podem ser trabalhados de forma interdisciplinar com a Física, pois fornecem uma maneira de se chegar à fórmula da função horária do movimento uniforme!

Teorema 3.5. *(Caracterização das Funções Quadráticas.) A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante x_1,x_2, ...,x_n,... seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ...,$y_n = f(x_n)$, ...*

Exemplo 3.6. (Fonte: [Rez11]) – Um estudante anotou a posição de um móvel em movimento uniformemente variável ao longo do tempo e obteve a seguinte tabela:

Tempo (s)	0	10	20	30	40	50
Posição (cm)	17	45	81	125	177	237

Calcular a posição do móvel nos instantes 5s e 35s.

Solução

A posição s dada em função do tempo t é uma função contínua.

Observe a tabela, note que na linha Tempo os valores estão em PA de primeira ordem.

$45 - 17 = 28$; $81 - 45 = 36$; $125 - 81 = 44$; $177 - 125 = 52$; $237 - 177 = 60$, os valores 28, 36, 44, 52, 60 formam uma PA de razão 8,

deste modo 17, 45, 81, 125, 177, 237 formam nesta ordem uma PA de segunda ordem,

portanto, as colunas da tabela, indicam pontos de uma função quadrática $s(t) = at^2 + bt + c$

Como temos $s(0) = 17$, $s(10) = 45$ e $s(20) = 81$, para determinar os coeficientes a, b e c, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} c = 17 \\ 100a + 10b + c = 45 \\ 400a + 20b + c = 81 \end{cases} \text{, cuja solução é } a = \tfrac{1}{25},\ b = \tfrac{12}{5} \text{ e } c = 17$$

Portanto, a função quadrática que representa o movimento uniformemente variado do problema é

$$s(t) = \frac{t^2}{25} + \frac{12t}{5} + 17,\ s(5) = 30 \text{ e } s(35) = 150.$$

Logo, a posição do móvel no instante 5s é 30cm e no instante 35s é 150cm.□

Outros resultados referentes à caracterização das funções reais podem ser encontrados em [LCWM06].

3.2 Uso de Recursos Computacionais na Sala de Aula

Hoje a informatização dos meios de produção e informação avançam em ritmo acelerado, fazendo-se necessário que a população acompanhe estes avanços e para isso, é necessário a intervenção da escola. Os alunos devem se familiarizar com os computadores, utilizando-o também como instrumento pedagógico, já que uma grande parte destes, já o utiliza no lazer, com as redes sociais e jogos eletrônicos. Os jovens do nosso tempo já passam a maior parte do seu tempo com os computadores e celulares, e este fato pode ser aproveitado para trazer a atenção destes alunos para os conteúdos didáticos. Partindo do pressuposto que o computador passou a ser o "brinquedo" favorito das crianças, torna-se cada vez mais difícil pensar em ensinar, sem utilizá-lo, como nos diz [Val97]. Atualmente, as grandes novidades tecnológicas já estão acessíveis à grande maioria dos alunos, e os poucos que ainda não tiveram a oportunidade do contato com o computador, teriam uma motivação a mais para acompanhar atentamente os conteúdos ministrados utilizando o computador como ferramenta didática. Estas potencialidades não podem mais serem descartadas pelo professor.

Hoje há uma grande variedade de *"softwares"* educacionais livres para o ensino de matemática como: *GeoGebra; Graphmática; KmPlot; Winplot; WxMaxima; Planilha Eletrônica,* que podem e devem ser utilizados no ensino das funções. Todos facilmente encontrados para serem baixados na internet e de manuseio relativamente simples, permitindo que rapidamente o professor, mesmo sozinho, consiga dominar seus comandos básicos, sendo assim capaz de elaborar atividades para utilizá-los com os alunos em sala de aula.

O computador, aliado ao *"software"* adequado, pode tornar prática a análise gráfica de uma função, e auxiliar na compreensão dos diversos parâmetros de sua expressão analítica e sua influência na representação gráfica. A utilização de *"softwares"* que plotam os gráficos das funções, a partir de suas expressões analíticas pode livrar o ensino das funções da ênfase algébrica, podendo tratar igualmente as representações gráficas e tabular de uma função, o que geralmente não é possível com a utilização de lápis e papel apenas. A discussão dos resultados apresentados pelo computador, debatendo as limitações dos softwares com base em arredondamentos, interpolações etc. podem e devem levar os alunos a detalhes que normalmente passam despercebidos por eles como por exemplo os números irracionais.

Para que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados, os professores devem estar cientes que de forma geral, as atividades devem procurar conduzir a conclusões e generalizações matemáticas, sem o apoio do computador. Os professores devem ser orientados no sentido de que, em sala de aula, as atividades com o computador devem, sempre que possível, serem complementadas com discussões e argumentações matemáticas, sem o uso de tecnologias. A abordagem pedagógica com o uso de tecnologias digitais deve ser planejada de tal forma que a aprendizagem dos conceitos matemáticos dos alunos não dependa permanentemente do apoio dessas tecnologias [GMC12].

A seguir farei uma breve descrição de cada um dos programas de computador citados acima :

3.2.1 Geogebra

O *GeoGebra* é um *"software"* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Ele tem recebido vários prêmios na Europa e nos Estados Unidos, como podemos ver em [Geo13a], onde também podemos encontrá-lo para baixar e instalar.

A figura 3.1 nos mostra a interface do GeoGebra com o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$. O programa nos dá a possibilidade de definir os parâmetros a (coeficiente angular) e b (coeficiente linear) variando no intervalo que desejarmos, de maneira que podemos mudar estes parâmetros no intervalo pré-definido, sendo que o gráfico da função acompanha estas mudanças automaticamente. Na figura 3.1 a seguir temos os parâmetros $a = -1$ e $b = 2$. Para alterar estes valores basta clicar e arrastar o ponto sobre os controles deslizantes em destaque na figura, atividades análogas podem ser feitas com as demais funções elementares.

Aos interessados, em [HH09] podemos encontrar um tutorial do GeoGebra em português de uma versão anterior à atual, mas são poucas as diferenças entre estas versões. Porém, para os que já tem alguma familiaridade com o computador, é completamente possível dominar os recursos básicos, manipulando as ferramentas sem qualquer tipo de ajuda externa. E em [Geo13b], podemos encontrar diversas atividades prontas, que podem livremente serem utilizadas em sala de aula.

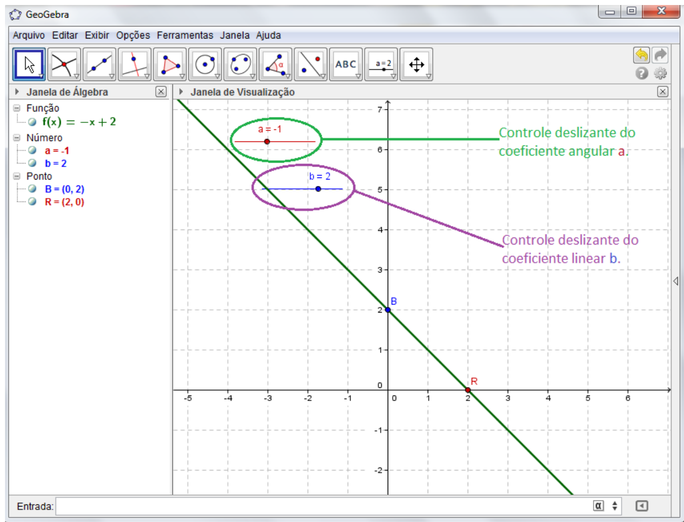

Figura 3.1: Interface do Geogebra

3.2.2 Graphmatica

Como podemos ver em [Nér07], o *Graphmática* é um aplicativo que trabalha com duas dimensões, disponível nas plataformas Windows, Mac OS X e iOS sendo capaz de representar graficamente funções polinomiais de qualquer grau, funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, etc. Também é útil no Cálculo Diferencial e Integral: hachura áreas para ilustrar integrais, desenha gráficos de derivadas e cria gráficos de equações diferenciais ordinárias. Possibilita, assim, aplicações diversas em matemática. O Graphmática é versátil, uma vez que possibilita, em trigonometria, trabalhar com o ângulo em graus ou em radianos. Além disso, os gráficos podem ser representados com coordenadas cartesianas ou em polares, facilitando a criação de figuras que envolvam funções trigonométricas. É permitida a construção por parâmetros (retas paramétricas, por exemplo), e inequações são representadas muito facilmente. O programa foi criado por Keith Hertzer, um bacharel em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação. O endereço da Internet em que o programa está disponível é escrito em inglês [Kso13], mas as versões disponíveis são diversas: desde uma original (em inglês) até traduções para o espanhol, francês, coreano e, inclusive, português. O artigo citado [Nér07] é um excelente tutorial do software e está disponível em pdf, e em português do Brasil.

Logo abaixo, temos a figura 3.2, com a interface do Graphmática com a função quadrática $y = -x^2 + x + 2$ com as raízes e o ponto de máximo em destaque.

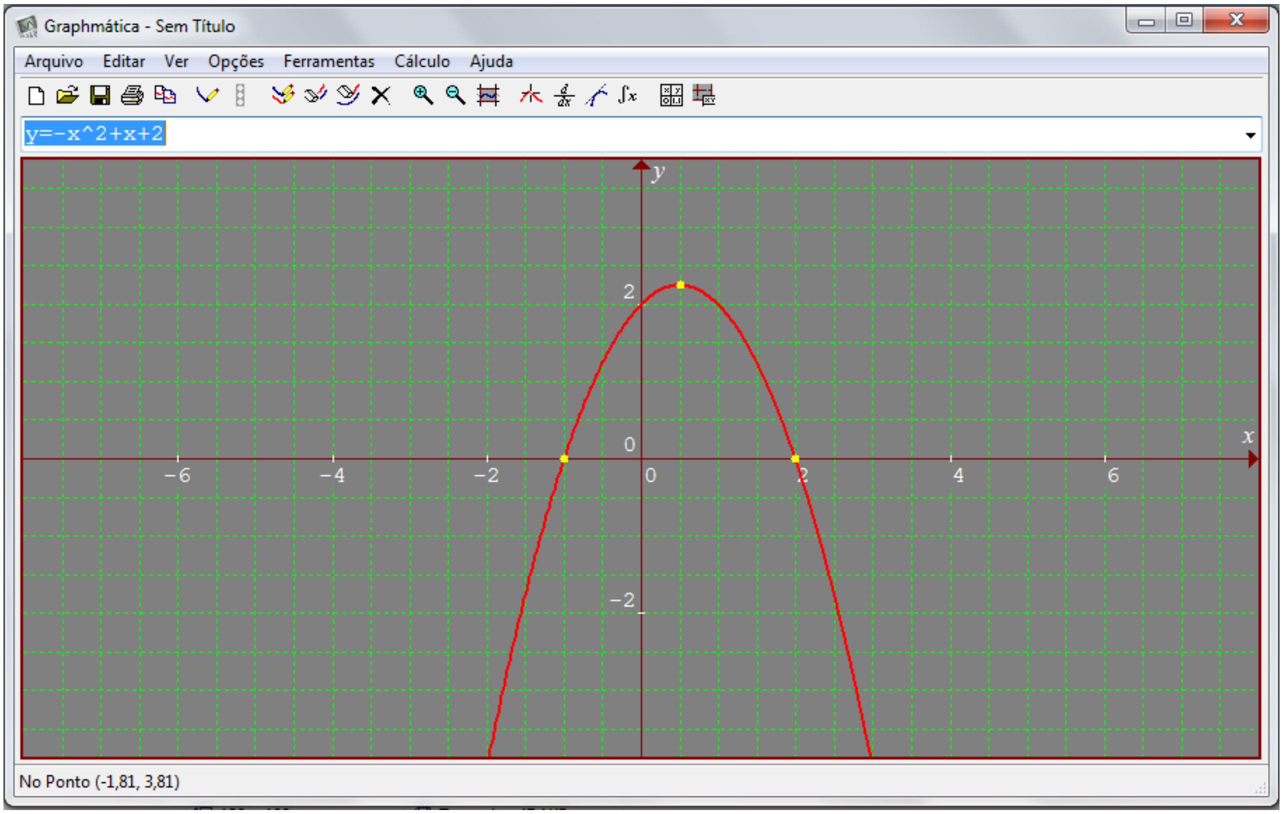

Figura 3.2: Interface do Graphmática

3.2.3 KmPlot

O *Kmplot* é um KDE plotter matemático poderoso, capaz de traçar várias funções simultaneamente e combiná-los em novas funções. Funções cartesianas, paramétricas e diferencial são suportados, bem como funções usando coordenadas polares. Permite a impressão com alta precisão métrica. *KmPlot* também fornece recursos numéricos e visuais como o preenchimento e cálculo da área entre o gráfico e o primeiro eixo, encontrar máximos e mínimos, mudando os parâmetros da função de forma dinâmica, e plotagem funções derivadas e integrais.

O Kmplot foi projetado para plataforma Linux, e já vem pré instalado nos computadores dos laboratórios montados pelo governo nas escolas públicas. Na figura 3.3 vemos sua interface, apresentando o gráfico das funções: $y = 3senx$ em azul, $y = 2cosx$ em verde e $y = 2senx$ em vermelho.

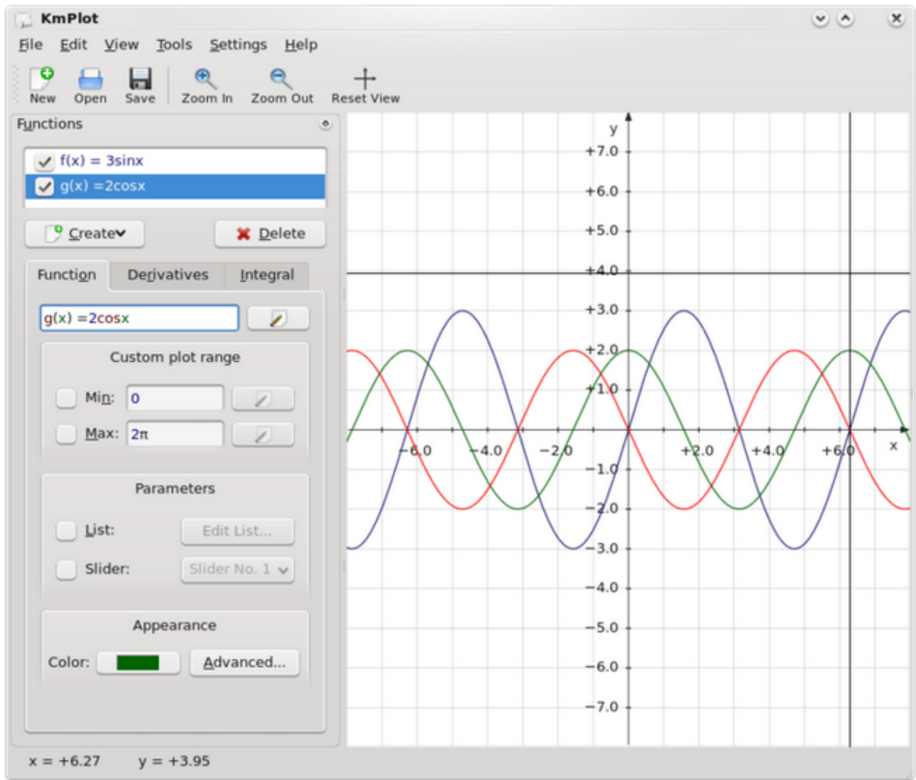

Figura 3.3: Interface do Kmplot - Fonte: [alt13]

3.2.4 Winplot

O *Winplot é* uma excelente ferramenta computacional para fazer gráficos 2D e 3D de maneira bastante simples e, diria até, intuitiva. Em [Sou04], que é ótimo tutorial sobre o *Winplot*, o autor nos dá 5 "pequenos" motivos para a utilização deste programa:

- **Inteiramente gratuito!** Foi desenvolvido pelo Professor Richard Parris "Rick" (rparris@exeter.edu), da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. Escrito em C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. Com o lançamento do Windows 3.1, o programa foi rebatizado de "Winplot". A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

- **É de simples utilização**, pois os menus, são bastante amigáveis, existe ajuda em todas partes do programa e aceita as funções matemáticas de modo natural. Ex.: 2xcos(Pi) = dobro do valor x multiplicado pelo cosseno de π.

- **É muito pequeno e portável** comparado com os programas existentes hoje em dia, menos de 600Kb e roda em sistemas Windows 95/98/ME/2K/XP/Vista/7 e agora também em Linux.

- **É sempre atualizado**. Por exemplo a ultima versão é de 13/09/2012*;
- **Está também em português**, onde o trabalho de tradução resultou da iniciativa e empenho de Professor Adelmo Ribeiro de Jesus (adelmo.jesus@unifacs.br) e com a participação nas versões mais recentes do Professor Carlos César de Araújo (cca@gregosetroianos.mat.br)

A figura 3.4, abaixo nos mostra a interface do winplot com o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

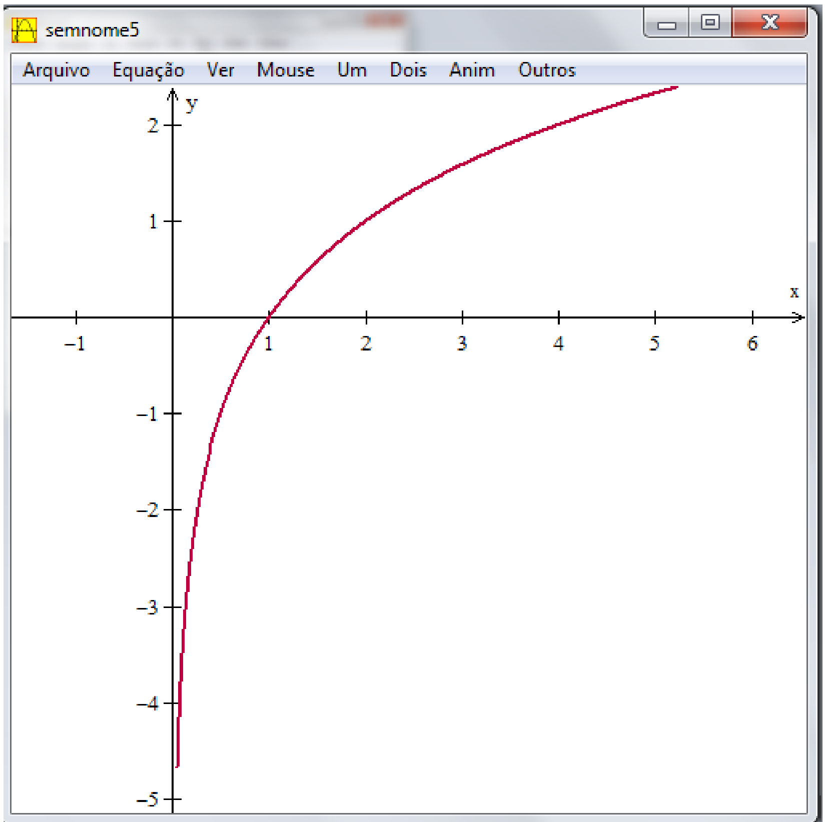

Figura 3.4: Interface do Winplot

3.2.5 Planilha Eletrônica

Um outro recurso que pode ser muito útil no ensino das funções são as planilhas eletrônicas, com o *MS-Excel* para o Windows ou o *K-Calc* para o Linux, ou o Libreoffice, onde o aluno poderá tabular dados de uma função definindo sua lei de formação e também construir seu gráfico. Mas deve-se ressaltar que o gráfico construído neste ambiente, é formado unindo-se os pontos tabelados por segmentos de reta como podemos ver na figura 3.5 abaixo, de maneira que é necessário a tabulação de muitos pontos para o gráfico apresentar o aspecto correto.

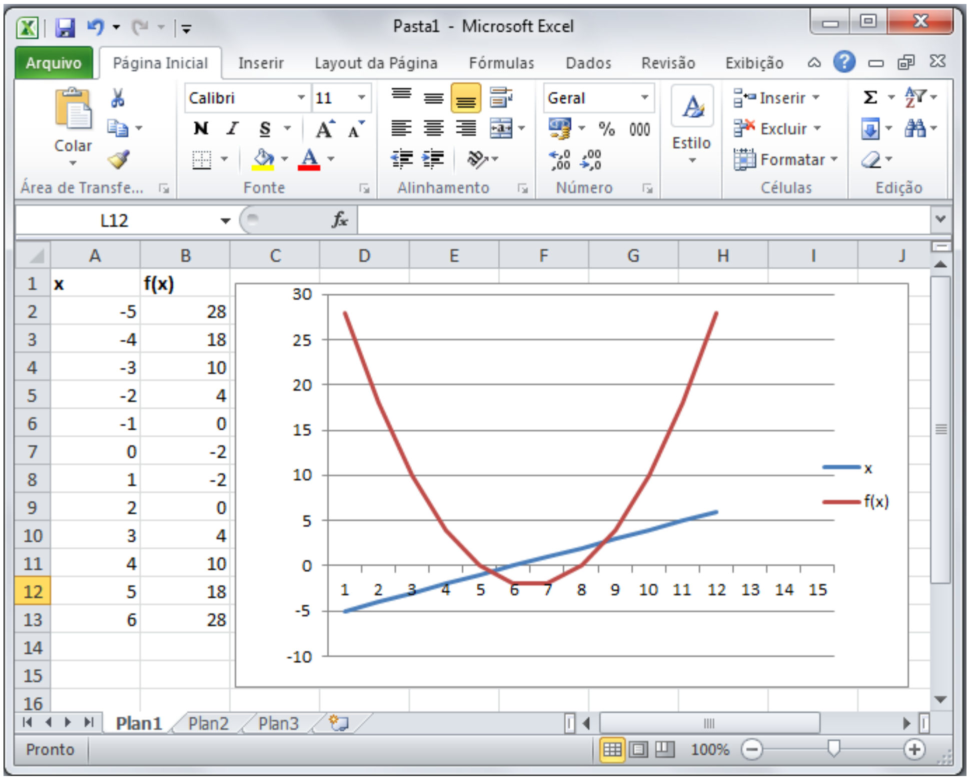

Figura 3.5: Gráfico da função Quadrática no MS-Excel

3.2.6 WxMáxima

O *Máxima* é um Sistema de Álgebra Computacional e o Wx máxima é uma interface gráfica criada para ele, com grandes potencialidades no campo da Álgebra e do Cálculo, e pode ser utilizado também no ensino das funções, ele nos permite definir várias funções, calcular valores destas funções, fazer operações com estas funções, inclusive calcular a função composta e a função inversa, e nos permite também plotar o gráfico destas funções, oferecendo duas opções de plotagem, uma na própria interface de comando (Figura 3.5), outra abrindo uma janela diferente com o gráfico (Figura 3.6). Em [Bor06], encontra-se um tutorial em pdf escrito em português sobre o Máxima, onde o leitor poderá saber mais sobre todas as suas potencialidades e limitações.

Função $y = 2^x$

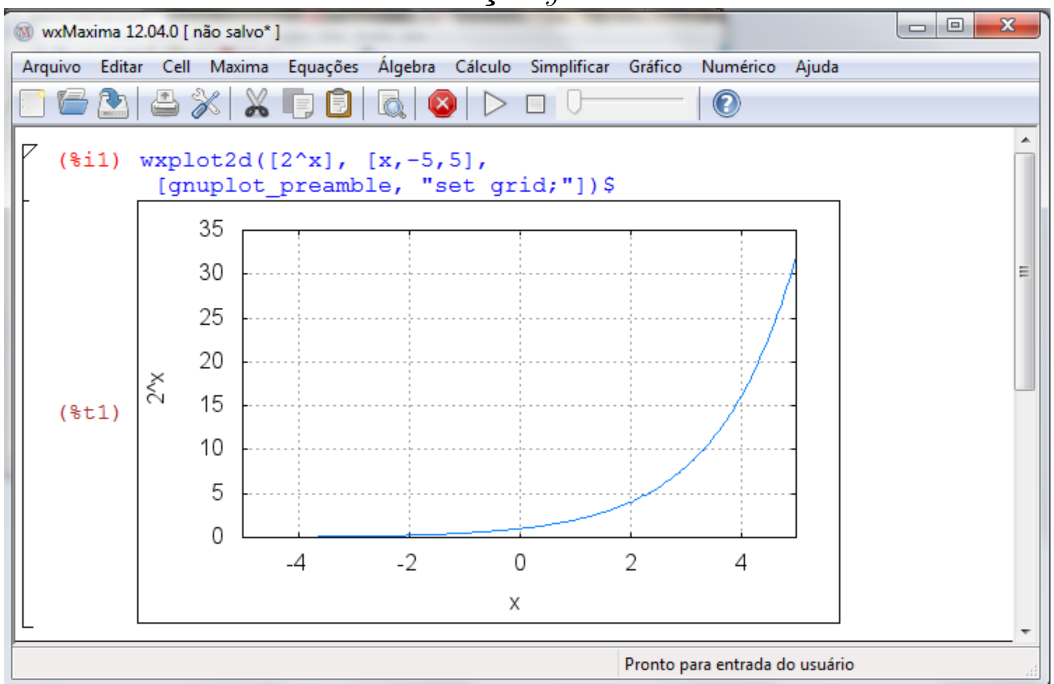

Figura 3.6: Interface do WxMáxima - gráfico plotado na própria interface

Função $y = 2^x$

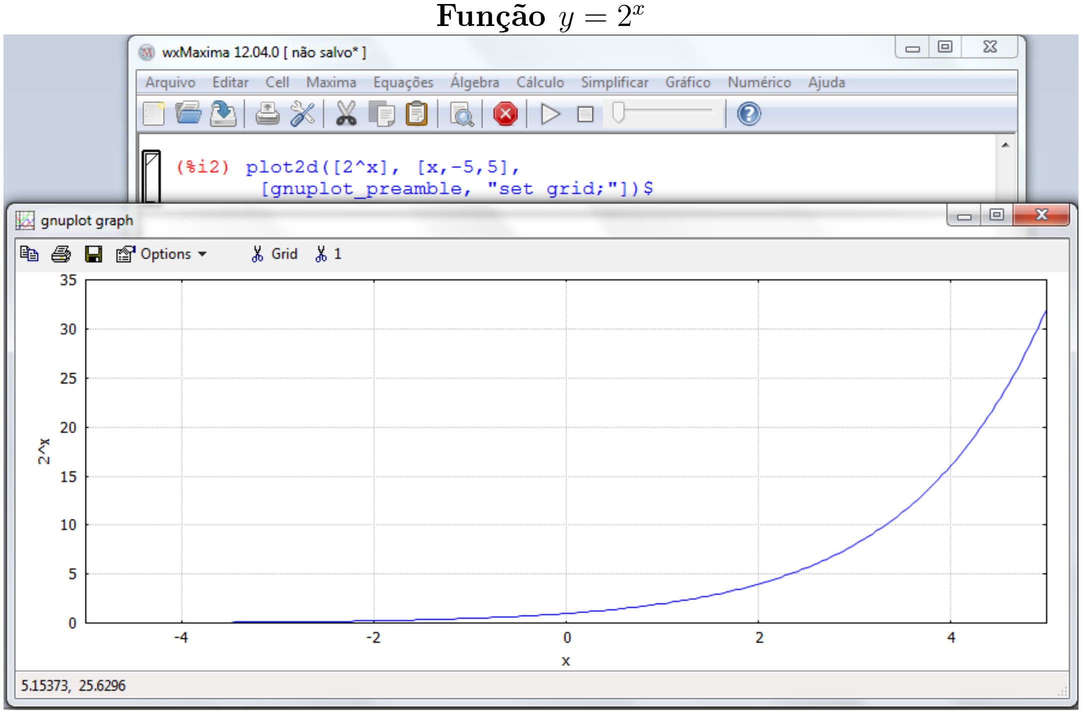

Figura 3.7: Interface do WxMáxima - gráfico plotado em outra janela

3.3 Atividade Sugerida

Uma atividade interessante elaborada por mim, que pode ser tomada dentro da proposta deste trabalho é a análise dos planos de telefonia celular através da modelagem, já que quase todos os alunos de ensino médio hoje tem seu próprio celular, e quase não conseguem largar estes aparelhos para nada.

O ideal é que esta atividade seja feita utilizando o laboratório, dividindo a turma em pequenos grupos, mas na ausência deste, pode também ser feita com a turma toda em equipe, utilizando-se de um projetor multimídia.

Para análise dos planos, faremos a modelagem do valor mensal cobrado em função do tempo de uso, buscando no final analisar quais os planos mais vantajosos para cada faixa de consumo.

A atividade em sala deverá seguir o seguinte roteiro:

1. **Recolhimento dos dados,** o professor deverá pedir aos alunos para trazerem informações sobre alguns planos de telefonia para sala, os quais serão analisados;

2. **Organização dos dados**, os alunos deverão tabular estes planos para facilitar a modelagem matemática de cada um deles;

3. **Modelagem**, seguindo os critérios vistos na seção 3.1, os alunos deverão modelar matematicamente cada plano;

4. **Análise dos resultados**, utilizando um dos recurso computacionais citados na seção 3.2, os alunos deverão plotar as funções encontradas no estágio anterior para comparar qual plano é mais vantajoso de acordo com sua faixa de consumo.

5. **Resultados finais**, analisando os gráficos produzidos na etapa anterior, os alunos deverão apresentar qual plano deve ser escolhido, para cada faixa de consumo.

1. Recolhimento dos dados

Os planos escolhidos tem por base um consumidor que utiliza internet no celular até 300 MB, e envia até 100 torpedos sms por mês. O custo analisado é baseado nos valores mensais cobrado (dados reais referentes a fevereiro de 2013) em função do número de minutos utilizados em chamadas locais entre operadoras diferentes e para telefone fixo, já que para as chamadas entre ligações da mesma operadora são utilizados serviço de bônus, ou até mesmo sem tarifação. Foram escolhidos dois planos das quatro principais operadoras que atuam na região. Foram analisados o plano pré-pago simples e o plano pós-pago que mais se enquadra a um consumidor com o perfil descrito.

A **Operadora A** oferece os seguintes planos:

- **Plano1:** R$30,00 + R$1,53 por minuto;
- **Plano 2:** R$71,70 até 60 minutos + R$1,53 por minuto excedente;

A **Operadora B** oferece os seguintes planos:

- **Plano1:** R$25,00 + R$1,41 por minuto;
- **Plano 2:** R$54,90 até 45 minutos + R$1,41 por minuto excedente;

A **Operadora C** oferece os seguintes planos:

- **Plano1:** R$30,00 + R$1,41 por minuto;
- **Plano 2:** R$49,90 +R$ 0,75 por minuto ;

A **Operadora D** oferece os seguintes planos:

- **Plano1:** R$19,80 + R$1,55 por minuto;
- **Plano 2:** R$56,80 até 45 minutos + R$1,55 por minuto excedente;

2. Organização dos Dados

A seguir temos uma tabela, produzida de acordo com os dados obtidos acima, que apresenta o valor pago em cada plano de acordo com os minutos consumidos. Na coluna **plano**, temos cada um dos planos analizados representados por uma letra indicando a operadora e um número indicando o plano, sendo que o plano A1, por exemplo, representa o **Plano 1** da **Operadora A.**

Tabulando os dados acima na planilha eletrônica chegamos na seguinte tabela:

Tabela 3.1: Valor Gasto X Minutos Utilizados

Planos de celulares com internet e torpedos sms							
plano \ min	0	15	30	45	60	75	90
A1	R$ 30,00	R$ 52,95	R$ 75,90	R$ 98,85	R$ 121,80	R$ 144,75	R$ 167,70
A2	R$ 71,60	R$ 71,60	R$ 71,60	R$ 71,60	R$ 71,60	R$ 94,55	R$ 117,50
B1	R$ 25,00	R$ 46,15	R$ 67,30	R$ 88,45	R$ 109,60	R$ 130,75	R$ 151,90
B2	R$ 54,90	R$ 54,90	R$ 54,90	R$ 54,90	R$ 76,05	R$ 97,20	R$ 118,35
C1	R$ 30,00	R$ 51,15	R$ 72,30	R$ 93,45	R$ 114,60	R$ 135,75	R$ 156,90
C2	R$ 49,90	R$ 61,15	R$ 72,40	R$ 83,65	R$ 94,90	R$ 106,15	R$ 117,40
D1	R$ 19,90	R$ 43,15	R$ 66,40	R$ 89,65	R$ 112,90	R$ 136,15	R$ 159,40
D2	R$ 56,80	R$ 56,80	R$ 56,80	R$ 56,80	R$ 80,05	R$ 103,30	R$ 126,55

3. Modelagem

Vamos então modelar o custo pago pelo consumidor em função do tempo de utilização como explicamos no início da seção. É preciso observar que em alguns casos (na maioria dos planos 2) teremos que utilizar funções definidas por duas sentenças, pois até a utilização de todos os minutos da franquia, o valor pago é sempre o mesmo o que define uma função constante, neste intervalo. Apesar de termos tabulado um consumo de no máximo 90 minutos, vamos considerar o domínio das nossas funções como sendo todo o conjunto dos números positivos, vamos supor também que seja cobrado qualquer fração de minuto, assim poderemos supor que as funções são contínuas.

Plano A1: Os valores apresentados na tabela 3.1 nos mostram que a taxa de variação do custo em função do tempo de consumo é constante e igual a 1,53, logo pelo Teorema 3.3 (Caracterização da função afim, página 24) a função que define o valor total pago no mês em função dos minutos utilizados é a função afim $a_1(x) = 1,53x + 30$;

Plano A2: Neste plano, o cliente pagará R$ 71,60 até um consumo de 60 minutos, ultrapassando este tempo, o valor pago começa a crescer com o tempo, novamente com taxa de variação constante igual a 1,53, esta função deve ser definida por duas partes, sendo a primeira constante e a segunda uma função afim, uma atenção especial deve ser tomada na segunda parte da função, é que só o tempo que ultrapassa os minutos da franquia é que são cobrados além do valor da franquia, assim estes devem ser levados em consideração na expressão da função. Desta forma temos $a_2(x) = \begin{cases} 71,6 & para\ x \leq 60 \\ 1,53(x-60)+71,6, & se\ x > 60 \end{cases}$ que equivale a

$$a_2(x) = \begin{cases} 71,6 & se\ 0 \leq x \leq 60 \\ 1,53x - 20,2 & se\ x > 60 \end{cases}.$$

Os planos B1, C1, C2 e D1, são análogos ao plano A1 diferindo apenas pelos valores, e portanto também serão representados por funções afim, enquanto os planos B2 e C2, são semelhantes ao plano A2, também diferindo apenas pelos valores e assim serão definidos por duas sentenças, a primeira constante, e a segunda uma função afim. Assim temos:

Plano B1:$b_1(x) = 1,41x + 25$;

Plano B2:$b_2(x) = \begin{cases} 54,9, & se\ 0 \leq x \leq 45 \\ 1,41x - 8,55 & se\ x > 45 \end{cases}$;

Plano C1:$c_1(x) = 1,41x + 30$;

Plano C2:$c_2(x) = 0,75x + 49,9$;

Plano D1: $d_1(x) = 1,55x + 19,80$;

Plano D2: $d_2(x) = \begin{cases} 56,8, & se\ 0 \leq x \leq 45 \\ 1,55x - 12,95 & se\ x > 45 \end{cases};$

Temos então as expressões analíticas das funções que representam cada plano.

4. Análise dos Resultados

Observe que o que devemos fazer agora é analisar os intervalos em que uma função é menor do que as outras, o que seria muito trabalhoso para se resolver analiticamente, mas se tivermos todos os gráficos plotados num mesmos sistema de eixos, basta escolher os que estiverem mais próximos do eixo das abscissas, sendo assim, dos plotadores citados acima devemos escolher um que permita a plotagem simultânea de todas as funções.

Vou analisar utilizando o Geogebra, simplesmente pela familiaridade que já tenho com este programa. Ele não permite que definamos o domínio das funções, como só estamos interessados em valores maiores ou iguais a zero, definiremos todas as funções em sentenças, atribuindo valor nulo, aos pontos de abcissa negativa .

Vamos aos resultados.

Podemos ver na Análise Gráfica feita na Figura 3.8 abaixo que:

- Até o ponto $A = (22,65\,,\ 54,9)$, a função $d_1(x)$ encontra-se mais próxima do eixo das abscissas, e assim assume os menores valores se $0 \leq x < 26,65$, no ponto A temos $d_1(x) = b_2(x)$, a partir daí a função $d_1(x)$ ultrapassa a $b_2(x)$ e deixa de assumir os menores valores ;

- Entre os pontos $A = (22,65\,,\ 54,9)$ e $B = (56,84\,,\ 71,6)$ o gráfico mais próximo do eixo das abscissas é o da função $b_2(x)$, ou seja, $26,65 < x < 56,84$, a função $b_2(x)$ assume os menores valores entre as analisadas, no ponto B temos $b_2(x) = a_2(x)$, e a partir daí temos $b_2(x) > a_2(x)$;

- Entre os pontos $B = (56,84\,,\ 71,6)$ e $D = (89,87\,,\ 117,3)$, isto é para $56,84 < x < 89,87$ a função $a_2(x)$ assume os menores valores entre as funções analisadas, em D, temos $a_2(x) = c_2(x)$ e a partir daí $a_2(x) < c_2(x)$ e se $x > 89,87$, temos que a função que assume os menores valores é $c_2(x)$.

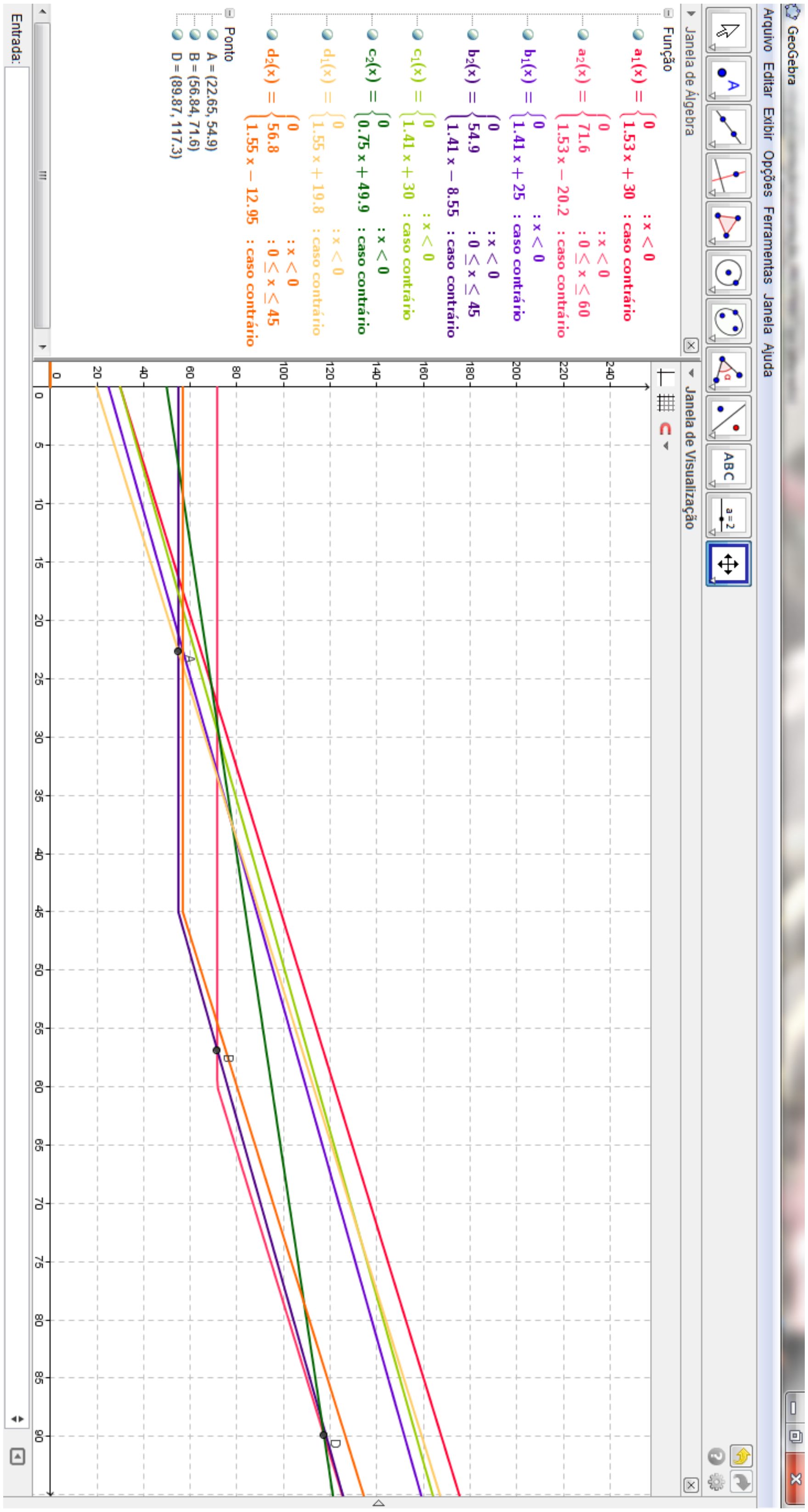

Figura 3.8: Análise Gráfica dos Planos de Telefonia Celular

5. Resultados Finais

De acordo com a análise gráfica dos planos de Telefonia Celular, podemos concluir o seguinte:

- os consumidores que utilizam até 22,65 minutos em chamadas locais para diversas operadoras e para telefone fixo, devem optar pelo **Plano 1** da **Operadora D;**

- os consumidores que utilizam entre 22,65 e 56,84 minutos, devem optar pelo **Plano 2** da **Operadora B;**

- os consumidores que utilizam entre 56,84 e 89,87 minutos, devem optar pelo **Plano 2** da **Operadora A;**

- e por fim, os consumidores que utilizam mais que 89,87 minutos, devem optar pelo **Plano 2** da **Operadora C.**

Atividades como esta, além de tratar de um assunto do cotidiano dos alunos (celulares), é importante por focar as três formas de representação das funções (tabela, expressão analítica e gráfico), e mostrar aos alunos como o conteúdo das funções pode ser aplicado no seu dia a dia.

Conclusão

O estudo das funções reais é um dos principais conteúdos da matemática na educação básica, pois além de permitir que a análise de situações mediante a um modelo matemático, é fundamental na formação universitária em áreas ligadas à engenharia e ciências exatas, porém a realidade nos mostra que estes objetivos não vêm sendo alcançados de maneira satisfatória. Através das pesquisas feitas para este trabalho, pude confirmar minhas observações como professor do município que os alunos estão cada vez mais desinteressados pela Matemática, e mais ainda sobre o conteúdo "*funções reais*". É dever nosso como professores, buscar meios de alcançar esta atenção através de novos recursos e metodologias. Com este trabalho, busco trazer alternativas aos professores de matemática das escolas de educação básica de Piranga-MG, e a outros professores de matemática da rede pública que passam por problemas similares. O uso de problemas de modelagem com problemas envolvidos na realidade dos alunos trará relevância ao estudo das funções e o computador como ferramenta de ensino, trará mais prazer e interesse aos alunos, de maneira a contribuírem significativamente para a aprendizagem do conteúdo.

Referente ainda à utilização dos computadores, é importante salientar que mesmo que se sua escola não possua um laboratório de informática, existem várias atividades que podem ser apresentadas pelo professor utilizando um *"notebook"* (próprio de preferência, para facilitar a preparação das atividades) e um projetor multimídia, que hoje em dia as escolas já possuem. Muitas atividades com *"softwares"* educacionais podem ser encontradas na internet, em [Geo13b], o professor encontrará atividades prontas feitas por outros professores com o GeoGebra e em [dEdCeT11], encontrará vários recursos educacionais como sugestões de aulas e outras atividades com o computador. Vale a pena ao professor gastar um pouco de seu tempo livre consultando-os.

Anexo

PROFMAT	**PROJETO DE PESQUISA – UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES REAIS NAS ESCOLAS DE PIRANGA**	Universidade Federal de Viçosa
	ORIETADOR: Allan de Oliveira Moura	
	ORIENTANDO : Marcelo dos Santos Cruz	

Caro Professor, este questionário trata-se de uma pesquisa de campo, com o intuito de coletar dados para minha dissertação de Mestrado, nada que for relatado aqui será posto em conhecimento público, ou de terceiros, nem será utilizado para penalizá-lo ou avaliá-lo perante alguma política do governo, ou de sua escola, peço sua colaboração ao respondê-lo, sua ajuda será de grande valia!

Marcelo dos Santos Cruz, professor de Matemática e Física da E E "Cel. José Ildefonso", e aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-UFV

IDENTIFICAÇÃO

Nome:
Escola Onde Leciona:
Turmas que trabalha (apenas séries) em 2012:

QUESTIONÁRIO

1) Em que turmas o conteúdo "Funções" é trabalhado na sua escola?
____
____
____

2) Quais são os pré-requisitos (conteúdos) necessários para que um aluno consiga entender o estudo das funções?
____
____
____
____
____

3) Na sua opinião, qual a importância deste conteúdo, na grade curricular do ensino básico?
____
____
____
____
____

4) De que maneira você (ou sua escola) trabalha este conteúdo?
____
____
____
____
____

5) Qual o livro didático adotado em sua escola?

6) Como ele aborda o conteúdo "funções"?

7) Você considera essa abordagem adequada? Justifique:

8) Sua escola tem laboratórios de informática? Ele é utilizado em aulas?

9) Você conhece algum software ou algum outro recurso computacional que poderia ser utilizado no ensino das funções reais? Relate sobre os que você acha mais interessante.

10) Você acha que a utilização de recursos computacionais pode tornar as aulas mais interessantes para os alunos? Justifique!

11) Que outros recursos você sugere para utilização em aulas no estudo de funções?

12) Você já utilizou os recursos citados até aqui?

( ) Sim ( ) Não

Caso afirmativo, quais foram os resultados?

____
____
____
____
____
____

Caso negativo, você utilizaria tais recursos? Justifique!

____
____
____
____
____
____

13) O que você tem a dizer sobre o nível de ensino-aprendizagem matemática nas escolas de Piranga e particularmente na sua?

____
____
____
____
____
____
____

14) Você considera que o baixo nível de aprendizagem em matemática pode ser melhorado por práticas pedagógicas diferentes? Justifique:

____
____
____
____
____
____
____
____

15) O que pode ser feito para melhoria do nível ensino-aprendizagem na sua escola e no município?

____
____
____
____
____
____

Caro Professor, obrigado por sua atenção, caso queira fazer algum comentário ou indagação deixe por escrito na parte de observações logo abaixo, junto de seu e-mail e responderei assim que possível, novamente meus sinceros agradecimentos!
Marcelo dos Santos Cruz,
professor de Matemática da E E "Cel. José Ildefonso",
e aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-UFV.

Oservações:____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção." Paulo Freire.

Referências Bibliográficas

[alt13] alternativeTo, *Interface kmplot*, "http://alternativeto.net/software/kmplot/-visitado em 11/02/2013, 2013.

[Bel09] M. E. P. Beltrão, *O ensino de cálculo, pela modelagem matemática e aplicações - teoria e prática*, Ph.D. thesis, Pontifícia Univercidade Católica de São Paulo PUC/SP, 2009.

[Bor06] H. J. Bortol, *Manual do máxima*, "http://www.professores.uff.br/- acessado em 11/02/2013, sem 2 2006.

[Cha05] M. I. de A. Chaves, *Modelando matemáticamente questões ambientais relacionadas com a Água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do ensino médio*, Master's thesis, Universidade Federal do Pará, 2005.

[D'A02] U. D'Ambrósio, *A matemática nas escolas*, Educação Matemática em Revista. **Ano 9,n. 11** (2002.), p. 29– 33.

[dAC11] Portal da Avaliação CAEd/UFJF, *Resultados simave*, "http://www.simave.caedufjf.net/- acessado em 21/01/2013, 2011.

[dD11] Câmara dos Deputados, *Lei de diretrizes e bases da educação nacional-6ª edição*, "http://bd.camara.gov.br- visitado em 22/01/2013, Out. 2011.

[dE13] Secretaria Estadual da Educação, *Sistema mineiro de avaliação da educação pública - simave*, "https://www.educacao.mg.gov.br/component/content/article/1414-sistema-mineiro-de-avaliacao-da-educacao-publica-/ 421-sistema-mineiro-de-avaliacao-da-educacao-publica-simave- acessada em 19/01/2013, jan. 2013.

[dEdCeT11] Ministério da Educação e Ministério da Ciência e Tecnologia, *Portal do professor*, portaldoprofessor.mec.gov.br-visitado em 13/02/2013, 2008-2011.

[DFS10] A. O. Dias, S. E. Ferreira, e A. C. da Silva, *Ensino de funções mediado pelo computador: Software winplot*, Anais do CNMAC Publicação da SBMAC (2010).

[dSM04] M.C. de Souza Minayo, *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saude*, Hucitec, 2004.

[Gar09] V. C. Garcia, *Funções: O professor compreende este conceito*, VIDYA **v.29** (jul./dez. 2009), 43–52.

[Geo13a] Geogebra.org, *Geogebra*, "http://www.geogebra.org-visitado em 09/02/2013", Fev. 2013.

[Geo13b] ______, *Repositório de construções com o geogebra*, www.geogebratube.org - visitado em 11/02/2013, 2013.

[GGJC09] J. R. Giovanni, J. R. Giovanni Jr, e G. Castrucci, *A conquista da matemática, 9º ano*, FTD - Didáticos, 2009.

[GMC12] V. Giraldo, F. Mattos, e P. Caetano, *Recursos computacionais no ensino de matemática*, (Apostila utilizada no curso MA36) PROFMAT SBM (2012).

[Gui11] L. H. Guidorizzi, *Um curso de cálculo vol.1*, Um curso de cálculo, LTC, 2011.

[HH09] M Hohenwarter e J Hohenwarter, *Tutorial geogebra*, http://www.geogebra.org - Tradução e adaptação para português de Portugal António Ribeiro, acessado em 11/02/2013, mai 2009.

[IBG10] IBGE, *Censo demográfico 2010*, "http://www.ibge.gov.br/cidadesat/xtras/perfil .php?codmun=315080&r=2"visitado em 17/01/2013, 2010.

[IL09] L. M. Imenes e M. C. Lellis, *Matemática 9º ano*, Moderna - Didáticos, 2009.

[Kso13] Ksoft, *Download do graphmática*, http://www.graphmatica.com/ - acessado em 11/02/2013, Fev. 2013.

[LCWM06] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, e A. C. Morgado, *A matemática do ensino medio*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[Mor99] M. A. Moreira, *Teorias de aprendizagem*, Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

[Nev13] T. D. Neves, *Site de piranga-mg,*, "http://www.piranga.com.br/- acessado em 18/01/2013, 2002-2013.

[Nér07] I. C. Néri, *Guia do usuário-graphmática*, http://www8.pair.com/ksoft/user/Guia DoUsuario-Graphmaticav2003p.pdf - acessado em 11/02/2013, 2007.

[Pai11] M. Paiva, *Matemática*, Moderna, 2011.

[PHDS11] R. F. Postal, C. Haetinger, M. M. Dullius, e D. C. Schossler, *Atividades de modelagem matemática visando-se a uma aprendizagem significativa de funções afins, fazendo uso do computador como ferramenta de ensino*, ALEXANDRIA, Revista de Educação em Ciência e Técnologia **v.4** (2011), p 153–173.

[Rez11] W.M. Rezende, *O conhecimento do professor de matemática sobre as funções reais*, XIII CIAEM Recife, Brasil (jun. 2011).

[Rêg00] R. G. do Rêgo, *Um estudo sobre a construção do conceito de função*, Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2000.

[Ros06] R. Rossini, *Saberes docente sobre o tema função: Uma investigação das praxeologias*, Ph.D. thesis, Faculdade de Ciências Exatas e Técnologia. PUC-SP, 2006.

[Sou04] S. de A. Souza, *Usando o winplot*, "http://www.mat.ufpb.br/ sergio/winplot/winplot.html-visitado em 11/02/2013., out. 2004.

[Val97] J. A. Valente, *O uso inteligente do computador na educação.*, Revista Pátio, (Ano l, n. 1, mai-jul. 1997.).