

RODOLFO ANDRADE CARDOSO

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA DUAS CLASSES DE  
SISTEMAS ELÍPTICOS SINGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Edir Júnior Ferreira Leite

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2021

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

C268e  
2021  
Cardoso, Rodolfo Andrade, 1991-  
Existência de soluções positivas para duas classes de  
sistemas elípticos singulares / Rodolfo Andrade Cardoso. –  
Viçosa, MG, 2021.  
67 f. ; 29 cm.

Orientador: Edir Junior Ferreira Leite.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 66-67.

1. Análise funcional. 2. Funções elípticas. 3. Galerkin,  
Métodos de . I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento  
de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
II. Título.

CDD 22. ed. 515.7


RODOLFO ANDRADE CARDOSO

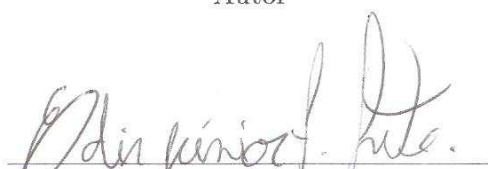
EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA DUAS CLASSES DE  
SISTEMAS ELÍPTICOS SINGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 10 de maio de 2021.

Assentimento:

  
Rodolfo Andrade Cardoso  
Autor

  
Edir Júnior Ferreira Leite  
Orientador

*Dedico este trabalho à memória de meus Tios Bernardino Batista de Andrade  
e José Ivo de Andrade, quem tiveram fortíssima presença em minha  
infância e sempre vão estar em minhas lembranças e coração.*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Marco e Irene pelo apoio e torcida, motivação e carinho, em especial minha mãe, sem sua perseverança e insistência jamais teria chegado até este momento.

Agradeço à Pollyane pela paixão, amizade, presença e amor. Das infinitas épocas e locais em que eu poderia ter nascido, ser seu contemporâneo no mundo e viver nosso amor com tanta intensidade me faz sentir uma felicidade imensurável. Te amo!

Agradeço ao meu irmão Miguel. À minha filha Ágatha. Às famílias Cardoso e Andrade, em especial meus primos Rafael, Samoel, Bruno, Lara e Hugo, minhas Tias Eva, Margarida e Neusa e Helena, meus Tios Bernardino, Juninho, Adélio, Paulo, Ivo, Nino e a Vó Mariazinha: um exemplo de luta, força, compaixão e amor. Aos meus amigos Tiago e Fabrício. Aos amigos de Ouro Preto: Adriana e Jefferson, que me acompanharam também em Viçosa. À República Tigrada, em especial, Buxexa, Dizis e Megas, Bolshói, Thumé e Jirão. Agradeço a todos por todos os momentos, aprendizado e presença.

Agradeço ao Professor Edir, pela dedicada orientação, incentivo e aprendizado essenciais para minha formação matemática, pelos conselhos e paciência que me fizeram chegar até aqui.

Agradeço também aos professores da banca Anderson Luís A. de Araújo, Jéssyca Lange F. M. Gurjão, Laís Moreira dos Santos e Olímpio Hiroshi Miyagaki, pelas sugestões e correções que enriqueceram este trabalho.

Aos professores e funcionários do DEMAT-UFOP e DMA-UFV, por colaborarem com minha formação e pelos eficientes serviços prestados, em especial aos Professores Vinícius Vivaldino e Eder Marinho.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Jamais me esquecerei de qualquer um.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

As visões que oferecemos a nossos filhos formam o futuro. O conteúdo dessas visões é *importante*, pois elas podem torna-se profecias. Os sonhos são mapas.

---

CARL SAGAN

# Resumo

CARDOSO, Rodolfo Andrade, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2021.  
**Existência de soluções positivas para duas classes de sistemas elípticos singulares.** Orientador: Edir Junior Ferreira Leite.

Neste trabalho estudamos a existência de solução fraca para sistemas elípticos singulares da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{H(x, u, v)} + T(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{S(x, u, v)} + K(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado e suave,  $n \geq 2$  e  $H, K, T, S$  são funções contínuas, como por exemplo

$$H(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}}{h_1(x)}, T(x, u, v) = u^{\beta_1}, S(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}}{h_2(x)} \text{ e } K(x, u, v) = v^{\beta_2},$$

em que  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$  são funções contínuas e  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in (0, 1)$  para  $j = 1, 2$ , e

$$H(x, u, v) = u^{\alpha_1}, T(x, u, v) = v^{\gamma_1}, S(x, u, v) = u^{\alpha_2} \text{ e } K(x, u, v) = v^{\gamma_2},$$

com  $\alpha_j, \gamma_j \in (0, 1)$ .

**Palavras-chave:** Sistemas Elípticos. Método de Galerkin. Existência de Solução Fraca.

# Abstract

CARDOSO, Rodolfo Andrade, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2021.  
**Existence of positive solutions for two classes of singular elliptic systems.**  
Adviser: Edir Junior Ferreira Leite.

The present work deals with existence of weak solutions for elliptic systems of the form:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{H(x, u, v)} + T(x, u, v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{S(x, u, v)} + K(x, u, v) & \text{in } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  is a smooth bounded domain,  $n \geq 2$  and  $H, K, T, S$  are continuous, such as

$$H(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}}{h_1(x)}, T(x, u, v) = u^{\beta_1}, S(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}}{h_2(x)} \text{ and } K(x, u, v) = v^{\beta_2},$$

where  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$  are continuous functions and  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in (0, 1)$  for  $j = 1, 2$ , and

$$H(x, u, v) = u^{\alpha_1}, T(x, u, v) = v^{\gamma_1}, S(x, u, v) = u^{\alpha_2} \text{ and } K(x, u, v) = v^{\gamma_2},$$

with  $\alpha_j, \gamma_j \in (0, 1)$ .

**Keywords:** Elliptic Systems. Galerkin Method. Existence of Weak Solution.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Análise Funcional	13
1.2 Medida e Integração	16
1.3 Espaços Funcionais	16
1.4 Espaços de Sobolev $W^{k,p}$	19
1.4.1 Imersões Contínuas	21
1.4.2 Imersões Compactas	21
1.5 Alguns Resultados sobre o Espaço $H_0^1(\Omega)$	22
1.6 Princípios de Máximo	24
<b>2 Uma Primeira Classe de Sistemas</b>	<b>26</b>
2.1 Introdução	26
2.2 Existência de uma Solução para cada Problema $(P1_\epsilon)$	28
2.2.1 Aplicação do Método de Galerkin	32
2.3 Existência de uma Solução para $(P1)$	42
<b>3 Uma Segunda Classe de Sistemas</b>	<b>47</b>
3.1 Introdução	47
3.2 Existência de uma Solução para cada $(P2_\epsilon)$	48
3.2.1 Aplicação do Método de Galerkin	51
3.3 Existência de uma Solução para $(P2)$	60
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>

# Introdução

Neste trabalho, apresentaremos resultados que garantem a existência de solução para duas classes de sistemas elípticos singulares que têm como protótipo o problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \frac{1}{H(x, u, v)} + T(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{S(x, u, v)} + K(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado e suave,  $n \geq 2$  e  $H, K, T, S$  são funções contínuas.

Os problemas elípticos com singularidades já são estudados a algumas décadas, como por exemplo em Crandall e Rabinowitz [10], em que procura-se solução para

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu = g(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde  $L$  é um operador elíptico,  $\Omega$  é um aberto limitado em  $\mathbb{R}^N$  e  $g$  é singular no sentido que

$$g(x, u_n) \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } u_n \rightarrow 0.$$

Alguns problemas escalares, já explorados na literatura, poderiam ser considerados boas motivações para os estudos de sistemas deste trabalho, vejamos um exemplo. Consideremos o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \frac{h(x)}{u^\gamma} + \lambda u^\alpha & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (*)$$

onde  $\lambda \geq 0$  e  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$ . No caso em particular, que  $\lambda = 0$  e  $h$  é uma função não-negativa e não-trivial em  $L^2(\Omega)$ , então o problema (\*) possui uma única solução fraca positiva em  $H_0^1(\Omega)$  (vide Lair e Shacker [15], Teorema 4). Também, quando  $h \equiv 1$ ,  $\lambda \geq 0$  o problema (\*) possui pelo menos uma solução clássica (vide Stuart [20], Teorema 2.1).

Para outros problemas escalares que poderiam inspirar os estudos dos sistemas deste

trabalho, vide: Alves et al. [2], Ghergu et al. [11] e Sun et al. [21].

Algo importante a se considerar é que muitos problemas semelhantes ao anterior surgem em estudos de fenômenos não-lineares, como em Callegari e Nachman [9] (sobre fluidos pseudoplásticos), Low ([17] e [18]) (sobre astrofísica e física nuclear) e Wong [23] (uma aplicação em matemática sobre equações Emden-Flower).

No Capítulo 1, definiremos quais os espaços de funções em que trabalharemos, como:  $L^p(\Omega)$ ,  $C^m(\Omega)$ ,  $C^m(\bar{\Omega})$ , os espaços de Hölder  $C^{m,\alpha}(\Omega)$  e  $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ , os espaços de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$ , em que  $p \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \in (0, 1]$ . Apresentaremos também, resultados e definições envolvendo Análise Funcional, Teoria Elíptica e Medida e Integração, como por exemplo as Imersões de Sobolev, em destaque para o caso em que o espaço de Sobolev é  $H_0^1(\Omega)$ . As principais referências deste capítulo são Biezuner [4], Botelho et al. [6], Brezis [7], Gilbarg e Trudinger [12], Medeiros e Miranda [19] e Tausk [22].

No Capítulo 2, inspirados pelo trabalho de Alves, Corrêa e Gonçalves, [1], trataremos de solução clássica para o problema (P). Mais precisamente considerando

$$H(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}}{h_1(x)}, T(x, u, v) = u^{\beta_1}, S(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}}{h_2(x)}, K(x, u, v) = v^{\beta_2}, \quad (\text{F})$$

em que  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$  são funções contínuas e  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in (0, 1)$  para  $j = 1, 2$ , estabeleceremos a existência de um par  $(u, v) \in (C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2$  que satisfaz as equações e condições de fronteira em (P).

Para provar a existência de solução clássica, inicialmente mostraremos que (P) admite solução fraca, isto é, existe um par  $(u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$  que satisfaz

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \varphi}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + \int_{\Omega} u^{\beta_1} \varphi, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \psi}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} v^{\beta_2} \psi, \end{cases}$$

para todos  $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ . A existência de solução fraca é estabelecida combinando-se argumento de penalização e método de Galerkin. Observe que a natureza singular do problema tratado, inviabiliza a abordagem direta de (P) via método de Galerkin. Dessa maneira, considere

$$H_{\epsilon}(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1} + \epsilon}{h_1(x)} \quad \text{e} \quad S_{\epsilon}(x, u, v) = \frac{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2} + \epsilon}{h_2(x)},$$

aproximações de  $H$  e  $S$ , respectivamente, eo seguinte problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \frac{1}{H_\epsilon(x, u, v)} + T(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{S_\epsilon(x, u, v)} + K(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{P}_\epsilon)$$

Uma vez que  $(\text{P}_\epsilon)$  não é singular em  $u = v = 0$ , podemos mostrar através de métodos usuais, que para cada  $\epsilon$  fixado, tal problema admite uma solução clássica  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega))^2$ .

Para tanto, aplicaremos o método de Galerkin combinado com o seguinte resultado, que é consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:

**Proposição 0.1.** *Suponha que  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função contínua tal que*

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}^m} = r \Rightarrow \langle F(\xi), \xi \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0,$$

para algum  $r > 0$ , em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^m$  e  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$  é a norma induzida por este produto interno. Então, existe  $z_0 \in \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{\mathbb{R}^m} \leq r\}$ , tal que  $F(z_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$ .

Seja  $S = \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$  a base de Schauder do espaço  $H_0^1(\Omega)$  e para cada  $m \in \mathbb{N}$ , consideremos o subespaço  $U_m = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  com norma induzida de  $H_0^1(\Omega)$ . Como  $U_m$  é isometricamente isomorfo à  $\mathbb{R}^m$ , é possível utilizar a Proposição 0.1 para encontrar funções  $u_m, v_m \in U_m$  satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u_m|^{\alpha_1} |v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \phi_i, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \phi_i = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u_m|^{\alpha_2} |v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \phi_i, \end{array} \right.$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ . Através do processo de limite da sequência  $(u_m, v_m)_{m=1}^{+\infty}$  é possível encontrar um par  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in (H_0^1(\Omega))^2$  satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \psi_1}{u_\epsilon^{\alpha_1} v_\epsilon^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} u_\epsilon^{\beta_1} \psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \psi_2}{u_\epsilon^{\alpha_2} v_\epsilon^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} v_\epsilon^{\beta_2} \psi_2, \end{array} \right.$$

para todo  $\psi_1, \psi_2 \in H_0^1(\Omega)$ , em que  $u_\epsilon, v_\epsilon$  são positivas. E, ao considerarmos a Teoria da Regularidade Elíptica, concluiremos que o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  é também solução clássica para cada problema aproximado  $(\text{P}_\epsilon)$ .

Da família de soluções  $(u_\epsilon, v_\epsilon)_{\epsilon>0}$  é possível extrair uma sequência  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  tomando

$\epsilon_n = \frac{1}{n}$ , que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \frac{h_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} + u_n^{\beta_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v_n = \frac{h_2(x)}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2} + \frac{1}{n}} + v_n^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ u_n, v_n \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

no sentido clássico. É possível concluir que tal sequência é fracamente convergente para algum par  $(u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$  incluindo a hipótese de que

$$\frac{h_1}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}}, \frac{h_2}{w^{\alpha_2} z^{\gamma_2}} \in L^2(\Omega), \quad (\text{H})$$

onde  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$ , e  $w, z \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  são funções que satisfazem

$$-\Delta w = w^{\beta_1} \text{ em } \Omega, \quad w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

e

$$-\Delta z = z^{\beta_2} \text{ em } \Omega, \quad z = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Finalmente usando a Teoria da Regularidade Elíptica concluímos que o par  $(u, v)$  é solução para nosso problema  $(\text{P})$  quando  $H, S, T, K$  são como em  $(\text{F})$ .

No Capítulo  $\text{3}$ , usaremos a mesma estratégia para encontrar solução clássica para o problema  $(\text{P})$  com

$$H(x, u, v) = u^{\alpha_1}, T(x, u, v) = v^{\gamma_1}, S(x, u, v) = v^{\gamma_2} \text{ e } K(x, u, v) = u^{\alpha_2},$$

com  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$ . Como no caso anterior, ao aplicarmos o método de Galerkin encontraremos uma constante  $r > 0$  que será útil para limitar uma sequência  $(u_m, v_m)_{m=1}^{+\infty} \in U_m^2$ , que convergirá para a sequência  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in (H_0^1(\Omega))^2$ , para cada  $\epsilon > 0$  fixado. Neste caso  $r$  não depende de  $\epsilon$ , o que implicará em

$$\|(u_\epsilon, v_\epsilon)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r,$$

para todo  $\epsilon > 0$ . Este fato substitui a necessidade de uma hipótese como  $(\text{H})$  nesse capítulo, pois ao tomarmos  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$  a sequência  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  será limitada e por isso convergente para um par  $(u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ , que via desigualdade de Hardy mostraremos que é solução do problema.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

### 1.1 Análise Funcional

Nesta seção, vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar Biezuner [5] e Botelho et al. [6].

**Definição 1.1.** *Um espaço normado  $(E, \|\cdot\|_E)$  completo com a métrica  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|_E$  induzida pela sua norma, é chamado de espaço de Banach.*

**Definição 1.2.** *Sejam  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  espaços normados sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .*

(i) *Dizemos que  $T : X \rightarrow Y$  é um operador linear, se para quaisquer  $x, y \in X$  e  $a \in \mathbb{R}$  tem-se:*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ,
- $T(ax) = aT(x)$ .

(ii) *Dizemos que  $T : X \rightarrow Y$  é um operador linear contínuo, para cada  $x_0 \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$ , sempre que  $\|x - x_0\|_X < \delta$ .*

(iii) *O conjunto dos operadores lineares de  $X$  para  $Y$  é denotador por  $\mathcal{L}(X, Y)$ .*

(iv) *Um operador linear  $T : X \rightarrow Y$  é dito compacto se  $\overline{T(B_X)}$  é conjunto compacto em  $Y$ , em que  $B_X = \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$ .*

**Definição 1.3.** (i) *Uma função  $f : M \rightarrow N$  entre espaços métricos é uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),$$

*para todos  $x, y \in M$ .*

- (ii) Um isomorfismo entre espaços normados  $X$  e  $Y$  é um homeomorfismo linear  $T : X \rightarrow Y$ . Neste caso, dizemos que  $X$  e  $Y$  são isomorfos. Se além disso  $T$  for uma isometria, isto é,  $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$  para todo  $x \in X$ , dizemos que  $T$  é um isomorfismo isométrico e que  $X$  e  $Y$  são isometricamente isomorfos.

**Exemplo 1.4.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $0$  o vetor nulo de  $\mathbb{R}^m$ . Consideremos  $\mathbb{R}^m$  com sua norma usual e  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$  um espaço vetorial normado com a norma induzida de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Então os espaços  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^m \times \{0\}$  são isomorfos isometricamente. De fato, as funções  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\}$ ,  $g(x) = (x, 0)$  e sua inversa  $g^{-1} : \mathbb{R}^m \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g^{-1}(x, 0) = x$  são contínuas e lineares. Além disso,

$$\|g(x)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} = \|(x, 0)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} = \|x\|_{\mathbb{R}^m} + \|0\|_{\mathbb{R}^m} = \|x\|_{\mathbb{R}^m}.$$

**Teorema 1.5.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear. Então são equivalentes:

- (a)  $T$  é lipschitziano.
- (b)  $T$  é uniformemente contínuo.
- (c)  $T$  é contínuo.
- (d)  $T$  é contínuo em algum ponto de  $X$ .
- (e)  $T$  é contínuo na origem.
- (f)  $\sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$ .
- (g) Existe uma constante  $C \geq 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.* Veja Botelho et al. [6], Teorema 2.1.1. □

**Definição 1.6.** Um espaço vetorial com produto interno  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  que é Banach com a norma induzida pelo produto interno, isto é, com a norma  $\|\cdot\|_H : H \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$ , é chamado de espaço de Hilbert.

**Definição 1.7.** Seja  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço vetorial com produto interno.

- (a) Um conjunto  $S \subseteq E$  é dito ortonormal se para todos  $x, y \in S$ , tem-se

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y, \\ 1 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

- (b) Um conjunto ortonormal  $S$  tal que  $S^\perp = \{0\}$  é chamado sistema ortonormal completo.

**Definição 1.8.** Seja  $E$  espaço de Banach. Dizemos que a sequência  $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset E$  constitui uma base de Schauder para  $E$ , se todo vetor  $x \in E$  se escreve de maneira única como

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n,$$

para alguns escalares  $(a_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.9.** Os sistemas ortonormais completos em espaços de Hilbert são bases de Schauder (vide [6], Exemplo 10.3.3. (a)).

**Proposição 1.10.** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $S = \{x_i \in H : i \in I\}$  um conjunto ortonormal. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) Para cada  $x \in H$ , temos  $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \cdot x_i$ .

(b)  $S$  é um sistema ortonormal completo.

(c)  $\overline{\text{span}(S)} = H$ .

(d) Para cada  $x \in H$  é válido  $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$ .

(e) Para todo,  $x, y \in H$ , temos  $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \langle y, x_i \rangle$ .

*Demonstração.* Veja Botelho et al. [6], Teorema 5.3.10]. □

**Teorema 1.11.** *Um espaço de Hilbert  $H$  de dimensão infinita é separável se, e somente se,  $H$  possui um sistema ortonormal completo e enumerável.*

*Demonstração.* Veja Botelho et al. [6], Teorema 5.4.3]. □

**Proposição 1.12.** *Espaços de Hilbert separáveis são reflexivos.*

*Demonstração.* Veja Botelho et al. [6], Corolário 5.4.5]. □

**Proposição 1.13.** *Se  $E$  é um espaço reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

*Demonstração.* Veja Botelho et al. [6], Teorema 6.5.4]. □

**Proposição 1.14.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

(a) *Se  $T$  é compacto, então a seguinte implicação é válida:*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E \Rightarrow T(x_n) \rightarrow T(x) \text{ em } F. \quad (1.1)$$

(b) *Se  $E$  é reflexivo, então  $T$  é compacto se, e somente se, vale (1.1).*

*Demonstração.* Veja Botelho, Pellegrino e Teixeira [6], Proposição 7.2.8]. □

**Exemplo 1.15.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , um domínio  $C^\infty$  limitado. O problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

*possui um conjunto enumerável de autovalores positivos convergindo para infinito cujas autofunções associadas formam uma base de Schauder de  $L^2(\Omega)$  (vide Biezuner [5], Teorema 8.35]).*

## 1.2 Medida e Integração

Nesta seção vamos descrever as notações, definições e resultados sobre Medida e Integração que serão usados neste trabalho. Para mais detalhes consultar Tausk [22].

**Definição 1.16.** (a) Uma  $\sigma$ -álgebra no conjunto  $X$  é uma família  $\Sigma$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz

- (i)  $\emptyset, X \in \Sigma$ ;
- (ii) se  $A \in \Sigma$ , então  $X \setminus A \in \Sigma$ ;
- (iii) se  $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \Sigma$ , então

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \Sigma.$$

(b) O par  $(X, \Sigma)$  é chamado espaço mensurável.

**Definição 1.17.** Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável. Uma medida em  $(X, \Sigma)$  é uma função  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- dado  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma$ , uma sequência disjunta, vale

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Consideremos um espaço de medida  $(X, \Sigma)$ . Dizemos que uma propriedade  $\mathbb{P}$  referente aos pontos de  $X$  é válida em quase todo ponto de  $X$ , se existe um conjunto  $X' \in \Sigma$  tal que  $\mu(X \setminus X') = 0$  e  $\mathbb{P}$  é válida em todos os pontos de  $X'$ .

**Definição 1.18.** Sejam  $(X, \Sigma)$  e  $(Y, \Sigma')$  espaços mensuráveis. Uma função  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \Sigma')$  é dita mensurável se  $f^{-1}(E) \in \Sigma$ , para todo  $E \in \Sigma'$ .

**Teorema 1.19** (Teorema da Convergência Dominada). Sejam  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida,  $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$  uma sequência de funções mensuráveis não-negativas definidas em  $\Omega$  com  $f_n(x) \rightarrow f(x)$   $\mu$ -q.t.p. em  $\Omega$ . Suponhamos que exista uma função não-negativa e integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq |g|$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mu$ -q.t.p. em  $\Omega$ . Então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f.$$

*Demonstração.* Veja Tausk [6], Teorema 2.5.4. □

## 1.3 Espaços Funcionais

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços funcionais que serão usados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes consultar Biezuner ([4] e [5]), Botelho et al. [6] e Brezis [7]. Nestas definições,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto.

**Definição 1.20.** *Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. O suporte de  $u$ , é definido por  $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ . Se  $\text{supp}(u)$  for um subconjunto compacto de  $\Omega$ , então dizemos que  $u$  possui suporte compacto. Denotamos por  $C_0(\Omega)$  o espaço das funções contínuas em  $\Omega$  com suporte compacto.*

**Definição 1.21.**  *$C^m(\Omega)$  é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $m$  contínuas em  $\Omega$  ( $m$  inteiro não-negativo ou  $m = \infty$ ). Denotaremos por  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ .*

**Definição 1.22.** *Definimos o espaço  $C^m(\overline{\Omega})$  como o espaço das funções reais definidas em  $\Omega$  cujas derivadas parciais até ordem  $m$  (inclusive) são limitadas e uniformemente contínuas (isso garante que elas possuem uma única extensão contínua ao  $\overline{\Omega}$ ), isto é,*

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{f \in C^m(\Omega) : D^\gamma f \text{ é limitada e unif. contínua em } \Omega, \forall |\gamma| \leq m\}.$$

*Temos  $C^m(\overline{\Omega})$  um espaço normado com a seguinte norma*

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma| \leq m} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Definição 1.23.** *O conjunto das funções que pertencem à  $C^m(\overline{\Omega})$  e têm derivadas até a ordem  $m$  contínuas em  $\Omega$  e que têm suporte compacto, é denotado por  $C_0^m(\Omega)$  (ou  $C_0^\infty$  se  $m = \infty$ ).*

Usaremos a notação de multi-índice para denotar a derivada parcial

$$D^\gamma f(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}(x),$$

em que  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$  e  $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ .

**Definição 1.24.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Denotamos por  $L^p(\Omega)$  o espaço de Banach das (classes de equivalências) funções definidas em  $\Omega$  com valores em  $\mathbb{R}$ , tais que  $|u|^p$  é integrável no sentido de Lebesgue, munido da norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Para  $p = \infty$ , denotamos por  $L^\infty(\Omega)$  o espaço de Banach das (classes de equivalência) funções mensuráveis definidas em  $\Omega$  que são essencialmente limitadas, dotada da norma*

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

**Definição 1.25.** *Sejam  $1 \leq p < \infty$ . Diremos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente integrável em  $L^p(\Omega)$ , e denotaremos por  $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ , se  $f$  for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tivermos*

$$\int_K |f|^p < +\infty.$$

**Teorema 1.26** (Desigualdade de Young). *Sejam  $a, b > 0$  e  $p, q \in \mathbb{R}$  expoentes conjugados.*

Então,

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

*Demonstração.* Veja Botelho et al. [[6] Prova do Teorema 1.2.1]. □

**Teorema 1.27** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $p_1, \dots, p_n > 1$  tais que*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$$

*e funções  $f_1 \in L^{p_1}(\Omega)$ ,  $f_2 \in L^{p_2}(\Omega)$ ,  $\dots$ ,  $f_n \in L^{p_n}(\Omega)$ . Então  $f_1 \cdot \dots \cdot f_n \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |f_1 \cdot \dots \cdot f_n| \, dx \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$

*Demonstração.* Veja Brezis [[7], p. 92]. □

**Teorema 1.28** (Desigualdade de Hölder Reversa). *Seja  $p > 1$  e  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que*

$$\int_{\Omega} |f|^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad e \quad 0 < \int_{\Omega} |g|^{\frac{-1}{1-p}} < +\infty.$$

Então,

$$\int_{\Omega} |fg| \geq \left( \int_{\Omega} |f|^{\frac{1}{p}} \right)^p \left( \int_{\Omega} |g|^{\frac{-1}{1-p}} \right)^{p-1}.$$

*Demonstração.* Veja Biezuner [[5], p. 47]. □

**Teorema 1.29.** *Suponha que  $1 < p < +\infty$  e  $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset L^p(\Omega)$  tal que  $(\|f_n\|_p)_{n=1}^{+\infty}$  é uma sequência limitada em  $\mathbb{R}$ . Se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ , então  $f_n \rightharpoonup f$  em  $L^p(\Omega)$ .*

*Demonstração.* Veja Hewitt et al. [[13], Teorema 13.44]. □

**Definição 1.30.** *Dizemos que uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é Hölder contínua com expoente  $\alpha$ , se*

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha}} < +\infty,$$

*para algum  $0 < \alpha \leq 1$ . Neste caso, representamos por  $C^{\alpha}(\Omega)$  e  $C^{0,1}(\Omega)$  e que são Hölder contínuas com expoente  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\alpha = 1$ , respectivamente. Além disso, para  $f \in C^{\alpha}(\Omega)$ , denotamos*

$$[f]_{C^{\alpha}(\Omega)} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha}}.$$

Em particular, note que se  $f$  é Hölder contínua em  $\Omega$  com expoente  $\alpha$ , então

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{C^{\alpha}(\Omega)} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha}$$

para todos  $x, y \in \Omega$ . Claramente, se uma função  $f$  é Hölder contínua em  $\Omega$ , então ela é uniformemente contínua em  $\Omega$ . Por esta razão, é usual na literatura que as funções de

Hölder sejam tratadas por funções uniformemente Hölder contínuas. Uma função Hölder contínua com expoente  $\alpha = 1$  é uma função Lipschitz contínua.

**Definição 1.31.** Os espaços de Hölder  $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$  ( $C^{m,\alpha}(\Omega)$ ) são definidos como os subespaços de  $C^m(\overline{\Omega})$  ( $C^m(\Omega)$ ) das funções cujas derivadas parciais até a ordem  $m$  (inclusive) são todas Hölder contínuas em  $\Omega$  com expoente  $\alpha$ :

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^m(\overline{\Omega}) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leq m\}$$

e

$$C^{m,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^m(\Omega) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leq m\}.$$

O espaço  $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$  é um normado com a seguinte norma

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma| \leq m} [D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}. \quad (1.3)$$

Podemos incluir os espaços  $C^m(\overline{\Omega})$  ( $C^m(\Omega)$ ) entre os espaços Hölder, se permitirmos  $\alpha = 0$ . Neste caso,

$$C^m(\overline{\Omega}) = C^{m,0}(\overline{\Omega}) \quad e \quad C^m(\Omega) = C^{m,0}(\Omega).$$

**Proposição 1.32.** Os espaços de Hölder  $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$  munidos com a norma (1.3) são espaços de Banach.

*Demonstração.* Veja Biezuner [4], Teorema 9.5. □

**Definição 1.33.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Dizemos que  $\partial\Omega$  ou  $\Omega$  é de classe  $C^{k,\alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , se para todo  $x_0 \in \partial\Omega$  existem uma bola  $B = B(x_0, r)$ , um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e um difeomorfismo  $\psi : B \rightarrow U$ , tais que

(i)  $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n$ ,

(ii)  $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$ ,

(iii)  $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$ ,

(iv)  $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(U)$ ,

em que  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ . Em particular, se  $\alpha = 0$  dizemos que  $\partial\Omega$  ou  $\Omega$  é de classe  $C^k$ . Se  $\Omega$  é de classe  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então dizemos que  $\Omega$  é um domínio limitado e suave.

## 1.4 Espaços de Sobolev $W^{k,p}$

Vejam agora, algumas definições e resultados sobre os espaços de Sobolev. Para mais detalhes, consultar Gilbarg e Trudinger [12], Kesavan [14] e Medeiros et al. [19].

**Definição 1.34.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

(a) Dizemos que  $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$  é a  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$ , se para todo  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  tivermos

$$\int_{\Omega} u \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi \right) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx,$$

em que  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Neste caso, denotamos

$$D^\alpha u = \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u \right) = v_\alpha.$$

(b) Dizemos que  $u$  é fracamente diferenciável se existir  $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx,$$

para todo  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ou seja, existe  $D^\alpha u$  para todo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  com  $|\alpha| = 1$ ;

(c)  $u$  é fracamente diferenciável  $k$ -vezes, quando existir  $D^\alpha u$  para todos  $\alpha$  tal que  $0 \leq |\alpha| \leq k$ .

**Definição 1.35.** Sejam  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \geq 1$  e  $k \geq 0$  um inteiro. Definimos o espaço de Sobolev como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\gamma u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\gamma| \leq k\},$$

que um espaço munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \int_{\Omega} |D^\gamma u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

Definimos ainda

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \text{fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Em particular, no caso em que  $p = 2$ , denotamos  $W^{k,2}(\Omega)$  simplesmente por  $H^k(\Omega)$  e  $W_0^{k,2}(\Omega)$  por  $H_0^k(\Omega)$ , para todo  $k \in \{0, 1, \dots\}$ .

**Teorema 1.36.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio. Então  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach se  $1 \leq p < \infty$  e é reflexivo se  $1 < p < \infty$ .

*Demonstração.* Veja Medeiros et al. [19], Proposição 2.2.1 e Teorema 2.2.3]. □

**Teorema 1.37.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio. Então  $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Veja Gilbarg e Trudinger [12], Teorema 7.9]. □

### 1.4.1 Imersões Contínuas

**Teorema 1.38.** *Se  $k < \frac{n}{p}$  definimos*

$$p^* = \frac{np}{n - kp}.$$

*Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^k$ ,  $n \geq 2$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então, as seguintes imersões são contínuas:*

- (i)  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [1, p^*]$  se  $kp < n$ ,
- (ii)  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [1, \infty)$  se  $kp = n$ ,
- (iii)  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$  se  $kp > n$ .

*No item (iii)  $m$  é um inteiro satisfazendo  $m < k - \frac{n}{p} < m + 1$  e  $\alpha$  um real que satisfaz  $0 < \alpha \leq k - m - \frac{n}{p} = \alpha_0$  se  $\alpha_0 < 1$  e  $0 < \alpha < 1$  se  $\alpha_0 = 1$ .*

*Demonstração.* Veja Medeiros e Miranda [[19](#)], Teorema 2.5.1]. □

**Teorema 1.39.** *Sejam  $1 \leq p < \infty$ ,  $k$  um inteiro positivo. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

- (i)  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $q \in [p, p^*]$  se  $kp < n$ ,
- (ii)  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $q \in [p, \infty)$  se  $kp = n$ ,
- (iii)  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  se  $kp > n$ .

*No item (iii),  $m$  é um inteiro satisfazendo  $m < k - \frac{n}{p} < m + 1$  e  $\alpha$  um real satisfazendo  $0 < \alpha \leq k - m - \frac{n}{p} := \alpha_0$  se  $\alpha_0 < 1$  e  $0 < \alpha < 1$  se  $\alpha_0 = 1$ .*

*Demonstração.* Veja Medeiros e Miranda [[19](#)], Corolário 5, Teorema 2.3.2 e Teorema 2.3.3]. □

### 1.4.2 Imersões Compactas

**Teorema 1.40.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^k$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então as seguintes imersões são compactas:*

- (i)  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [1, p^*)$  se  $kp < n$ ,
- (ii)  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $q \in [1, \infty)$  se  $kp = n$ ,
- (iii)  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ , para todo  $m$  inteiro não negativo satisfazendo  $m < k - \frac{n}{p} \leq m + 1$  se  $kp > n$ .

*Demonstração.* Veja Medeiros e Miranda [[19](#)], Teorema 2.5.5]. □

O seguinte caso particular das imersões anteriores, quando  $k = 1$  e  $p = 2$ , será utilizado neste trabalho diversas vezes.

**Corolário 1.41.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Então, as seguintes imersões são compactas:*

$$(i) \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, \frac{2n}{n-2}) \text{ se } n \geq 3,$$

$$(ii) \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, +\infty) \text{ se } n = 2,$$

$$(iii) \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}), \text{ se } n = 1.$$

**Observação 1.42.** *As imersões anteriores também valem para  $H_0^1(\Omega)$ , já que este é um subconjunto de  $H^1(\Omega)$ .*

## 1.5 Alguns Resultados sobre o Espaço $H_0^1(\Omega)$

Nesta subseção, vejamos algumas definições e resultados, especificamente, sobre o espaço de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$ . Para mais detalhes, consultar Gilbarg e Trudinger [[12](#)] e Kesavan [[14](#)].

**Proposição 1.43.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado. O espaço vetorial  $H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert munido com o produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

*Demonstração.* Veja Gilbarg e Trudinger [[12](#)], Seção 7.5, página 154]. □

**Teorema 1.44.** *O espaço  $H_0^1(\Omega)$  é separável.*

*Demonstração.* Veja Kesavan [[14](#)], Teorema 1.2.1]. □

**Corolário 1.45.** *O espaço  $H_0^1(\Omega)$  é reflexivo.*

*Demonstração.* Como  $H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert separável, pela Proposição [1.12](#) concluímos que ele é reflexivo. □

**Corolário 1.46.** *O espaço  $H_0^1(\Omega)$  contém um sistema ortonormal completo.*

*Demonstração.* Concluímos diretamente da Proposição [1.11](#) e do Teorema [1.44](#). □

**Teorema 1.47** (Desigualdade de Hardy-Sobolev). *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor do problema do Exemplo 1.15,  $\alpha \in [0, 1]$  e*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1 - \alpha}{N}.$$

Então,

$$\frac{u}{\phi^\alpha} \in L^q(\Omega)$$

e existe  $C > 0$  tal que

$$\left\| \frac{u}{\phi^\alpha} \right\|_q \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

*Demonstração.* \*\*\*\*\* □

**Proposição 1.48.** *Seja  $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$  sequência limitada em  $H_0^1(\Omega)$ . Então, existe uma subsequência  $(u_{m_k})_{k=1}^{+\infty}$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tais que*

- (a)  $u_{m_k} \rightharpoonup u$  em  $H_0^1(\Omega)$ ;
- (b)  $u_{m_k} \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$ ;
- (c)  $u_{m_k}(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$  limitada em  $H_0^1(\Omega)$ . Como o espaço  $H_0^1(\Omega)$  é reflexivo, pela Proposição 1.13 existe uma subsequências  $(u_{m_k})_{k=1}^{+\infty}$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ , concluindo o item (a).

Pelo Corolário 1.41, temos que  $H_0^1(\Omega)$  está imerso compactamente em  $L^2(\Omega)$ . Com isso,

$$u_{m_k} \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega),$$

quando  $k \rightarrow +\infty$  o que conclui a prova do item (b).

Do item anterior, segue que

$$\|u_{m_k} - u\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ . Usando que

$$\|u\|_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{1.4}$$

(vide Tausk [[22], equivalência 4.4.2]), temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_{m_k} - u) = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto,  $u_{m_k}(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ , concluindo o item (c). □

## 1.6 Princípios de Máximo

Nesta seção, abordaremos alguns Princípios de Máximo. Para mais informações, veja Biezuner [4] e Gilbarg e Trudinger [12].

**Definição 1.49.** *Considere o seguinte operador diferencial linear  $L$  de segunda*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu, \quad (1.5)$$

onde  $a_{ij} = a_{ij}(x)$ ,  $b_i = b_i(x)$ ,  $c = c(x)$ ,  $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  e  $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Assuma ainda que a matriz  $A(x) = (a_{ij}(x))$  é simétrica para cada  $x \in \Omega$ .

- (a) Dizemos que  $L$  é elíptico no ponto  $x \in \Omega$ , se a matriz dos coeficientes é positiva definida, isto é, se  $\lambda(x), \Lambda(x)$  denotam o maior e o menor autovalor de  $A(x)$ , respectivamente, então

$$0 < \lambda(x) \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) \|\xi\|^2, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

em que  $\|\xi\|^2 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ .

- (b) O operador é dito elíptico em  $\Omega$ , se o for em cada ponto  $x \in \Omega$ .
- (c) Dizemos que o operador  $L$  é estritamente elíptico em  $\Omega$ , se existe  $\lambda_0 > 0$ , tal que  $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ , para todo  $x \in \Omega$ .
- (d) Se  $x \mapsto \frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$  é limitado em  $\Omega$ , então  $L$  é dito uniformemente elíptico.

**Teorema 1.50** (Princípio do Máximo Forte). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $L$  um operador uniformemente elíptico.*

- (a) Suponha que  $c = 0$  e  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaz  $Lu \geq 0$  ( $Lu \leq 0$ ) em  $\Omega$ . Se  $u$  atinge o seu máximo (mínimo) no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.
- (b) Se  $c \leq 0$  e  $u$  atinge um máximo não-negativo (mínimo não-positivo) no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.
- (c) Independentemente do sinal de  $c$ , se  $u$  atinge um máximo igual a 0 (mínimo igual a 0) no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.

*Demonstração.* Veja Gilbarg e Trudinger [12], Teorema 3.5]. □

Para este trabalho, é interessante o caso em particular do teorema anterior.

**Corolário 1.51.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $\Delta u \leq 0$  e  $u$  atinge o seu mínimo no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.*

---

*Demonstração.* Este corolário é uma aplicação direta do item (a) do Teorema 1.50, uma vez que  $\Delta$  é um operador uniformemente elíptico com  $c = 0$ .  $\square$

**Definição 1.52.** Dizemos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  satisfaz  $\Delta u \geq 0$  (sub-harmônica) fracamente, se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \leq 0,$$

para todo  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  em que  $\varphi \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ .

**Teorema 1.53** (Princípio do Máximo Fraco). Se  $u \in H_0^1(\Omega)$  satisfaz  $\Delta u \geq 0$  fracamente em  $\Omega$ , então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

*Demonstração.* Veja Trudinger [[12], Teorema 8.1].  $\square$

# Capítulo 2

## Uma Primeira Classe de Sistemas

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, temos como objetivo encontrar solução fraca para problema a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \frac{h_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + u^{\beta_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{h_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + v^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (P1)$$

em que  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$  são funções contínuas,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ , e  $\Omega$  é um aberto suave e limitado de  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 2$ .

**Definição 2.1.** Dizemos que o par  $(u, v)$  é solução clássica do problema (P1), se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $(u, v)$  satisfaz problema (P1).

**Definição 2.2.** Dizemos que o par  $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  é solução fraca do problema (P1), se  $u$  e  $v$  são positivas e  $(u, v)$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \varphi_1}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + \int_{\Omega} u^{\beta_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \varphi_2}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} v^{\beta_2} \varphi_2, \end{array} \right.$$

para todos  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

As singularidades do sistema associado ao problema (P1) impedem a aplicação direta do método de Galerkin da forma que este trabalho propõe-se a fazê-la. Por isto,

inicialmente trabalharemos com a seguinte família de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{h_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1} + \epsilon} + u^{\beta_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{h_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2} + \epsilon} + v^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P1_\epsilon)$$

que através de uma perturbação nos quocientes, por hora, contorna a singularidade do problema inicial.

**Definição 2.3.** Para  $\epsilon > 0$  fixado, dizemos que o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  é solução clássica do problema  $(P1_\epsilon)$ , se  $u_\epsilon, v_\epsilon \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  satisfaz o problema  $(P1_\epsilon)$ .

**Definição 2.4.** Para  $\epsilon > 0$  fixado, dizemos que o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  é solução fraca do problema  $(P1_\epsilon)$ , se  $u_\epsilon$  e  $v_\epsilon$  são positivas e o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  satisfaz:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \varphi_1}{u_\epsilon^{\alpha_1} v_\epsilon^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} u_\epsilon^{\beta_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \varphi_2}{u_\epsilon^{\alpha_2} v_\epsilon^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} v_\epsilon^{\beta_2} \varphi_2, \end{cases}$$

para todos  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

Para os cálculos deste capítulo (e do próximo), será necessária a seguinte consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:

**Proposição 2.5.** Suponha que  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função contínua tal que

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}^m} = r \Rightarrow \langle F(\xi), \xi \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0,$$

para algum  $r > 0$ , em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^m$  e  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$  é a norma induzida por este produto interno. Então, existe  $z_0 \in \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{\mathbb{R}^m} \leq r\}$ , tal que  $F(z_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$ .

*Demonstração.* Veja Lions [\[16\]](#), Lema 4.3. □

Ao combinar a proposição anterior com o Método de Galerkin, obteremos uma família  $(u_\epsilon, v_\epsilon)_{\epsilon > 0} \subset H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  de soluções fracas para  $(P1_\epsilon)$ . Através da Teoria da Regularidade Elíptica veremos ainda que tais soluções também são clássicas. Dessa maneira, considerando  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{N}$ , teremos uma sequência  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  de soluções clássicas para os problemas aproximados.

Posteriormente, consideraremos  $h_1, h_2$  tais que

$$\frac{h_1}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}}, \frac{h_2}{w^{\alpha_2} z^{\gamma_2}} \in L^2(\Omega),$$

em que  $-\Delta w = w^{\beta_1}$ ,  $-\Delta z = z^{\beta_2}$  em  $\Omega$  e  $w = z = 0$  em  $\partial\Omega$ . Essa hipótese sobre as funções  $h_1, h_2$  implicará que as sequências  $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$  e  $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$  são limitadas em  $H_0^1(\Omega)$  e pela Proposição 1.48, existem  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  tais que  $u_n \rightharpoonup u$  e  $v_n \rightharpoonup v$ , a menos de uma subsequência. Finalmente, concluiremos que  $(u, v)$  é solução fraca do problema (P1).

## 2.2 Existência de uma Solução para cada Problema $(P1_\epsilon)$

O objetivo desta seção é encontrar uma solução fraca  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  para cada problema  $(P1_\epsilon)$ , com  $\epsilon > 0$  fixado, combinando o Método de Galerkin e a Proposição 2.5, e concluir sua positividade através dos princípios de máximo. Para tal, consideremos o espaço  $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  munido com produto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (z_1, z_2) &\mapsto \langle z_1, z_2 \rangle_E = \langle u_1, u_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

em que  $z_1 = (u_1, v_1)$  e  $z_2 = (u_2, v_2)$ , e a norma associada ao produto interno

$$\|z\|_E^2 = \langle z, z \rangle_E = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

com  $z = (u, v)$  e

$$\|x\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \langle x, x \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $x \in H_0^1(\Omega)$ . Sejam também o sistema ortonormal completo

$$S = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$$

de  $H_0^1(\Omega)$ , assegurado pelo Corolário 1.46, e a seguinte família de subespaços  $(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$  dados por

$$U_m = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para os cálculos futuros, é importante o seguinte resultado envolvendo os subespaços  $U_m$ .

**Lema 2.6.** *Seja  $m \in \mathbb{N}$ . Considere  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  munido de sua norma usual e  $U_m \times U_m$  com norma induzida pela norma de  $E$ . Então,  $U_m \times U_m$  e  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  são espaços normados isometricamente isomorfos.*

*Demonstração.* Seja a aplicação  $I : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow U_m \times U_m$ , dada por

$$I(\xi, \eta) = \left( \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i, \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i \right),$$

em que  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  e  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  são elementos pertencentes à  $\mathbb{R}^m$ .

(a) **Linearidade:** Sejam  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_m)$  e

$b = (b_1, \dots, b_m)$  elementos de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m \in S$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 I((\xi, \eta) + \lambda(a, b)) &= I(\xi + \lambda a, \eta + \lambda b) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^m (\xi_i + \lambda a_i) \phi_i, \sum_{i=1}^m (\eta_i + \lambda b_i) \phi_i \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i + \lambda \sum_{i=1}^m a_i \phi_i, \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i + \lambda \sum_{i=1}^m b_i \phi_i \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i, \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i \right) + \lambda \left( \sum_{i=1}^m a_i \phi_i, \sum_{i=1}^m b_i \phi_i \right) \\
 &= I(\xi, \eta) + \lambda I(a, b).
 \end{aligned}$$

(b) **Continuidade:** Dados  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  em que  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  e  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ , temos

$$\|I(\xi, \eta)\|_E^2 = \left\| \left( \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i, \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i \right) \right\|_E^2 = \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left\| \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Logo,

$$\|I(\xi, \eta)\|_E^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i, \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \left\langle \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i, \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i \right\rangle_{H_0^1(\Omega)}$$

Como  $\phi_i \in S$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , e  $S$  é um sistema ortonormal completo, vale

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Daí,

$$\|I(\xi, \eta)\|_E^2 = \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 \|\phi_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^m |\eta_i|^2 \|\phi_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|(\xi, \eta)\|^2.$$

Consequentemente

$$\|I(\xi, \eta)\|_E = \|(\xi, \eta)\|. \tag{2.1}$$

Portanto  $I$  é contínua (vide Teorema 1.5).

(c) **Isomorfismo isométrico:** Da equação (2.1), concluímos que  $I$  é uma isometria. Mais ainda, se  $(w, z) \in \text{Ker}(I)$ , temos

$$0 = \|I(z, w)\|_E = \|(z, w)\|.$$

Equivalentemente,  $(z, w) = (0_{\mathbb{R}^m}, 0_{\mathbb{R}^m})$ . Portanto  $\text{ker}(I) = \{(0_{\mathbb{R}^m}, 0_{\mathbb{R}^m})\}$  e concluímos que  $I$  é um isomorfismo.

Portanto dos itens (a), (b) e (c) concluímos que  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  e  $U_m \times U_m$  são espaços isometricamente isomorfos.  $\square$

Como nosso objetivo é utilizar a Proposição 2.5, precisamos definir uma função contínua. O próximo resultado será útil nesse sentido.

**Lema 2.7.** *Seja  $\epsilon > 0$  fixado. Suponhamos  $h_1, h_2 \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ,  $u, v \in U_m$  e  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  elementos de  $\mathbb{R}^m$ , tais que*

$$u = \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \quad e \quad v = \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i.$$

Então, as funções  $F_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$F_i(\xi, \eta) = \xi_i - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_1} |v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} \phi_i$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \eta_i - \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_2} |v|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2} \phi_i,$$

são contínuas, para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

*Demonstração.* Seja uma sequência  $(\xi_k, \eta_k)_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  convergindo para  $(\xi_0, \eta_0)$ , em que  $\xi_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_m^k)$ ,  $\eta_k = (\eta_1^k, \dots, \eta_m^k)$ ,  $\xi_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$ ,  $\eta_0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_m^0)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e

$$\xi_i^0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_i^k \quad e \quad \eta_i^0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \eta_i^k, \quad (2.2)$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ . Mostraremos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_i(\xi_k, \eta_k) = F_i(\xi_0, \eta_0) \quad e \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} G_i(\xi_k, \eta_k) = G_i(\xi_0, \eta_0),$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ . Para tal, consideremos  $u_k, v_k \in U_m$  tais que

$$u_k = \sum_{i=1}^m \xi_i^k \phi_i \quad e \quad v_k = \sum_{i=1}^m \eta_i^k \phi_i.$$

Logo, existem  $u_0, v_0 \in U_m$ , tais que

$$u_0 = \sum_{i=1}^m \xi_i^0 \phi_i = \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \xi_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \quad (2.3)$$

e

$$v_0 = \sum_{i=1}^m \eta_i^0 \phi_i = \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \eta_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \eta_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k. \quad (2.4)$$

Consideremos também as sequências  $(F_i(\xi_k, \eta_k))_{k=1}^{+\infty}$  e  $(G_i(\xi_k, \eta_k))_{k=1}^{+\infty}$ , dadas por

$$F_i(\xi_k, \eta_k) = \xi_i^k - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u_k|^{\alpha_1} |v_k|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u_k^+)^{\beta_1} \phi_i$$

e

$$G_i(\xi_k, \eta_k) = \eta_i^k - \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u_k|^{\alpha_2} |v_k|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v_k^+)^{\beta_2} \phi_i,$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, \dots, m$ .

Inicialmente definamos para cada  $i = 1, \dots, m$  as seqüências de funções  $(f_k^i)_{k=1}^{+\infty}$  e  $(g_k^i)_{k=1}^{+\infty}$  definidas em  $\Omega$ , dadas por

$$f_k^i(x) = \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_k^+)^{\beta_1}\phi_i(x)$$

e

$$g_k^i(x) = \frac{h_2(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_k^+)^{\beta_2}\phi_i(x).$$

Definamos também as funções  $f_0^i, g_0^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f_0^i(x) = \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_0|^{\alpha_1}|v_0|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_0^+)^{\beta_1}\phi_i(x)$$

e

$$g_0^i(x) = \frac{h_2(x)\phi_i}{|u_0|^{\alpha_2}|v_0|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_0^+)^{\beta_2}\phi_i(x),$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ . Por (2.3) e (2.4) podemos concluir

$$f_k^i(x) = \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_k^+)^{\beta_1}\phi_i(x) \rightarrow \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_0|^{\alpha_1}|v_0|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_0^+)^{\beta_1}\phi_i(x) = f_0^i(x),$$

e

$$g_k^i(x) = \frac{h_2(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_k^+)^{\beta_2}\phi_i(x) \rightarrow \frac{h_2(x)\phi_i}{|u_0|^{\alpha_2}|v_0|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_0^+)^{\beta_2}\phi_i(x) = g_0^i(x),$$

para todo  $x \in \Omega$  e  $i = 1, 2, \dots, m$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Por outro lado, como a seqüência  $(\xi_k, \eta_k)_{k=1}^{+\infty}$  é limitada, existe  $N > 0$  tal que

$$\|(\xi_k, \eta_k)\| \leq N,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Pelo Exemplo 1.4, temos

$$\|\xi_k\|_{\mathbb{R}^m} = \|(\xi_k, 0)\| \leq N \quad \text{e} \quad \|\eta_k\|_{\mathbb{R}^m} = \|(\eta_k, 0)\| \leq N,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Dessa maneira, para cada  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$|\xi_k^i| \leq N \quad \text{e} \quad |\eta_k^i| \leq N, \tag{2.5}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Definamos também as funções  $l_1^i, l_2^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$l_1^i(x) = \frac{1}{\epsilon}|h_1(x)||\phi_i(x)| + N^{\beta_1} \sum_{j=1}^m |\phi_j(x)|^{\beta_1} |\phi_i(x)|$$

e

$$l_2^i(x) = \frac{1}{\epsilon}|h_2(x)||\phi_i(x)| + N^{\beta_2} \sum_{j=1}^m |\phi_j(x)|^{\beta_2} |\phi_i(x)|,$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ . Segue da desigualdade de Hölder que  $l_1^i, l_2^i \in L^1(\Omega)$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ , pois, por hipótese  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$  e por construção  $\phi_1, \dots, \phi_m \in S \subset L^2(\Omega)$ .

No caso do somatório, a integrabilidade de cada parcela é verificada aplicando-se a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados  $\frac{2}{\beta_i}$  e  $\frac{2}{2-\beta_i}$ .

Notemos que  $|f_k^i| \leq |l_1^i|$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . De fato,

$$|f_k^i(x)| = \left| \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_k^+)^{\beta_1}\phi_i(x) \right| \leq \frac{|h_1(x)||\phi_i(x)|}{|u_k(x)|^{\alpha_1}|v_k(x)|^{\gamma_1} + \epsilon} + |(u_k^+)^{\beta_1}\phi_i(x)|.$$

Como

$$\epsilon < |u_k(x)|^{\alpha_1}|v_k(x)|^{\gamma_1} + \epsilon \quad \text{e} \quad |(u_k^+)^{\beta_1}(x)| \leq |u_k(x)|,$$

ainda temos

$$|f_k^i(x)| \leq \frac{|h_1(x)||\phi_i(x)|}{\epsilon} + |u_k(x)|^{\beta_1}|\phi_i(x)|.$$

Pela definição de  $u_k$  e usando (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} |f_k^i(x)| &\leq \frac{|h_1(x)||\phi_i(x)|}{\epsilon} + |u_k(x)|^{\beta_1}|\phi_i(x)| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}|h_1(x)||\phi_i(x)| + \sum_{j=1}^m |\xi_j^k|^{\beta_1}|\phi_j(x)|^{\beta_1}|\phi_i(x)| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}|h_1(x)||\phi_i(x)| + N^{\beta_1} \sum_{j=1}^m |\phi_j(x)|^{\beta_1}|\phi_i(x)| \\ &= l_1^i(x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Analogamente, podemos concluir  $|g_k^i| \leq |l_2^i|$ , para  $k \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, \dots, m$ .

Estamos então sob as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada. Logo, podemos concluir que  $f_0^i, g_0^i \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_k^+)^{\beta_1}\phi_i(x) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\phi_i}{|u_0|^{\alpha_1}|v_0|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_0^+)^{\beta_1}\phi_i(x)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{h_2(x)\phi_i}{|u_k|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_k^+)^{\beta_2}\phi_i(x) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\phi_i}{|u_0|^{\alpha_2}|v_0|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_0^+)^{\beta_2}\phi_i(x),$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ . Portanto, das duas convergências anteriores e de (2.2), concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_i(\xi_k, \eta_k) = F_i(\xi_0, \eta_0) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} G_i(\xi_k, \eta_k) = G_i(\xi_0, \eta_0).$$

Consequentemente,  $F_i$  e  $G_i$  são contínuas para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . □

## 2.2.1 Aplicação do Método de Galerkin

Nesta parte do texto, procuraremos por soluções em  $U_m \times U_m$  para um sistema que se aproxima das definição de solução clássica do problema (P1<sub>ε</sub>), que serão encontradas via Método de Galerkin.

**Lema 2.8.** *Suponha  $h_i \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  e  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ . Então, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe um par  $(u_m, v_m) \in U_m \times U_m$  que satisfaz*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u_m|^{\alpha_1} |v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \phi_i, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \phi_i = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u_m|^{\alpha_2} |v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \phi_i, \end{cases} \quad (\text{S1})$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

*Demonstração.* Dados  $u, v \in U_m$ , existem  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  elementos de  $\mathbb{R}^m$  tais que

$$u = \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i. \quad (2.6)$$

Definamos também a aplicação  $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , dada por

$$F(\xi, \eta) = ((F_1(\xi, \eta), \dots, F_m(\xi, \eta)), (G_1(\xi, \eta), \dots, G_m(\xi, \eta))),$$

em que

$$F_i(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_1} |v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} \phi_i$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_2} |v|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2} \phi_i$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ . Usando a definição do produto interno de  $H_0^1(\Omega)$ , podemos reescrever as funções anteriores como

$$F_i(\xi, \eta) = \langle u, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_1} |v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} \phi_i. \quad (2.7)$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \langle v, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_2} |v|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2} \phi_i. \quad (2.8)$$

Pela equações de (2.6), obtemos

$$\langle u, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \sum_{j=1}^m \xi_j \phi_j, \phi_i \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^m \xi_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \xi_i$$

e

$$\langle v, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \sum_{j=1}^m \eta_j \phi_j, \phi_i \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^m \eta_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \eta_i.$$

Logo, podemos reescrever (2.7) e (2.8) como

$$F_i(\xi, \eta) = \xi_i - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u|^{\alpha_1} |v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} \phi_i.$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \eta_i - \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\phi_i}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2}\phi_i,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ao calcular o produto interno usual de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  entre  $F(\xi, \eta)$  e  $(\xi, \eta)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &= \sum_{i=1}^m \left( \xi_i - \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\phi_i}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1}\phi_i \right) \xi_i \\ &+ \sum_{i=1}^m \left( \eta_i - \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\phi_i}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2}\phi_i \right) \eta_i \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &= \sum_{i=1}^m \xi_i^2 - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) (\sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i)}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} \left( \sum_{i=1}^m \phi_i \xi_i \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \eta_i^2 - \int_{\Omega} \frac{h_2(x) (\sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i)}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2} \left( \sum_{i=1}^m \phi_i \eta_i \right). \end{aligned}$$

Donde obtemos a equação

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} \frac{h_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} \frac{h_2(x)v}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2} + \epsilon} \\ &- \int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1}u - \int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2}v. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vejam algumas desigualdades envolvendo os termos do lado direito da equação anterior. Em primeiro lugar, observe que

$$\int_{\Omega} \frac{h_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} h_1(x)u.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} h_1(x)u \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |h_1(x)u| \leq \frac{1}{\epsilon} \|h_1\|_2 \|u\|_2,$$

isto é,

$$- \int_{\Omega} \frac{h_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} \geq -\frac{1}{\epsilon} \|h_1\|_2 \|u\|_2.$$

Pelas Imersões de Sobolev, existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|w\|_2 \leq C_1 \|w\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $w \in H_0^1(\Omega)$ . Logo,

$$- \int_{\Omega} \frac{h_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} \geq -\frac{1}{\epsilon} \|h_1\|_2 C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

e como  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|(u, v)\|_E$ , ainda temos

$$-\int_{\Omega} \frac{h_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \epsilon} \geq -\frac{C_1}{\epsilon} \|h_1\|_2 \|(u, v)\|_E. \quad (2.10)$$

De maneira análoga, obtemos

$$-\int_{\Omega} \frac{h_2(x)v}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2} + \epsilon} \geq -\frac{C_1}{\epsilon} \|h_2\|_2 \|(u, v)\|_E. \quad (2.11)$$

Para os termos restantes, usaremos as seguintes desigualdades

$$\int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} u \leq \int_{\Omega} |u^+|^{\beta_1} |u| \leq \int_{\Omega} |u|^{\beta_1+1} = \|u\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1}.$$

Como  $1 < \beta_1 + 1 < 2$ , segue das Imersões de Sobolev que, existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\|\omega\|_{\beta_1+1} \leq C_2 \|\omega\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ . Daí,

$$\int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} u \leq C_2^{\beta_1+1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\beta_1+1} \leq C_2^{\beta_1+1} \|(u, v)\|_E^{\beta_1+1},$$

isto é,

$$-\int_{\Omega} (u^+)^{\beta_1} u \geq -C_2^{\beta_1+1} \|(u, v)\|_E^{\beta_1+1}. \quad (2.12)$$

Analogamente, como  $1 < \beta_2 + 1 < 2$ , existe  $C_3 > 0$  tal que

$$-\int_{\Omega} (v^+)^{\beta_2} v \geq -C_3^{\beta_2+1} \|(u, v)\|_E^{\beta_2+1}. \quad (2.13)$$

Por (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e tomando  $K_1 = \left(\frac{C_1\|h_1\|_2}{\epsilon}\right) + \left(\frac{C_1\|h_2\|_2}{\epsilon}\right)$ ,  $K_3 = C_2^{\beta_1+1}$  e  $K_3 = C_3^{\beta_2+1}$ , temos de (2.9)

$$\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle \geq \|(u, v)\|_E^2 - K_1 \|(u, v)\|_E - K_3 \|(u, v)\|_E^{\beta_1+1} - K_4 \|(u, v)\|_E^{\beta_2+1}.$$

Pelo Lema 2.6 concluímos

$$\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle \geq \|(\xi, \eta)\|^2 - K_1 \|(\xi, \eta)\| - K_3 \|(\xi, \eta)\|^{\beta_1+1} - K_4 \|(\xi, \eta)\|^{\beta_2+1}. \quad (2.14)$$

Logo, para cada  $\epsilon > 0$ , é possível encontrar  $r_\epsilon > 0$  suficientemente grande tal que

$$\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle \geq 0,$$

para todos  $(\xi, \eta) \in S_{r_\epsilon}(0) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  e qualquer  $m \in \mathbb{N}$ . De fato, suponha que este fato não se verifique para algum  $\epsilon_0 > 0$ . Então, para qualquer  $r > 0$ , existe  $(\xi_0, \eta_0) \in S_r(0)$  tal que

$$\langle F(\xi_0, \eta_0), (\xi_0, \eta_0) \rangle < 0$$

e assim,

$$1 - \frac{K_1}{\|(\xi_0, \eta_0)\|} - \frac{K_3}{\|(\xi_0, \eta_0)\|^{1-\beta_1}} - \frac{K_4}{\|(\xi_0, \eta_0)\|^{1-\beta_2}} < 0.$$

Como  $\|(\xi_0, \eta_0)\| = r$ , podemos reescrever a desigualdade anterior como

$$1 - \frac{K_1}{r} - \frac{K_3}{r^{1-\beta_1}} - \frac{K_4}{r^{1-\beta_2}} < 0, \quad (2.15)$$

que pela hipótese de contradição deve valer para todo  $r > 0$ . O que é uma contradição!, pois como  $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$ , temos

$$\left(1 - \frac{K_1}{r} - \frac{K_3}{r^{1-\beta_1}} - \frac{K_4}{r^{1-\beta_2}}\right) \rightarrow 1, \quad \text{quando } r \rightarrow +\infty.$$

Assim, para  $r_0 > 0$  suficientemente grande,

$$1 - \frac{K_1}{r_0} - \frac{K_3}{r_0^{1-\beta_1}} - \frac{K_4}{r_0^{1-\beta_2}} > 0,$$

o que contraria (2.15).

Portanto, existe  $r_\epsilon > 0$  tal que

$$(\xi, \eta) \in S_\epsilon(0) \Rightarrow \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle > 0. \quad (2.16)$$

Assim, como  $F$  é contínua pelo Lema 2.7 e da implicação (2.16), segue da Proposição 2.5, existe um par  $(u_m, v_m) \in U_m \times U_m$  e  $(\xi_m, \eta_m) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , em que  $\xi_m = (\xi_1^m, \dots, \xi_m^m)$ ,  $\eta_m = (\eta_1^m, \dots, \eta_m^m)$  e

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i^m \phi_i, \quad v_m = \sum_{i=1}^m \eta_i^m \phi_i,$$

tais que

$$\|(u_m, v_m)\|_E = \|(\xi_m, \eta_m)\| \leq r_\epsilon \quad \text{e} \quad F(\xi_m, \eta_m) = 0_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m},$$

para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Ou seja, temos

$$0 = F_i(\xi_m, \eta_m) = \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \phi_i}{|u_m|^{\alpha_1} |v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \phi_i,$$

e

$$0 = G_i(\xi_m, \eta_m) = \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \phi_i}{|u_m|^{\alpha_2} |v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} - \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \phi_i,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . Portanto, o sistema (S1) possui solução para cada  $i = 1, \dots, m$  com  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Observação 2.9.** Notemos que a constante  $r_\epsilon$  mencionada na prova do lema anterior não depende de  $m$ . Com efeito, para cada  $m$  natural a desigualdade (2.14) vale para todo  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Logo, é possível encontrar  $r_\epsilon > 0$  suficientemente grande tal que  $\|(\xi, \eta)\| = r_\epsilon$  implica em  $\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle > 0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

**Corolário 2.10.** Suponha  $h_i \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  e  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$  e  $k$  um número natural menor ou igual à  $m$ . Então, as soluções  $(u_m, v_m)$  de (S1) também são

soluções de

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\psi_1}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\psi_2}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \psi_2, \end{cases}$$

para todos  $\psi_1, \psi_2 \in U_k \subseteq U_m$ .

*Demonstração.* Fixemos um natural  $k \leq m$  e tomemos  $(\psi_1, \psi_2) \in U_k \times U_k$ , isto é,

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^k a_i \phi_i \quad \text{e} \quad \psi_2 = \sum_{i=1}^k b_i \phi_i,$$

$(a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ . Multiplicando as equações do  $i$ -ésimo sistema S1 por  $a_i$  e  $b_i$ , respectivamente, temos

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i a_i = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\phi_i a_i}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \phi_i a_i, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \phi_i b_i = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\phi_i b_i}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \phi_i b_i. \end{cases}$$

Somando as  $k$  parcelas, temos

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_m \left( \sum_{i=1}^k \nabla \phi_i a_i \right) = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \left( \sum_{i=1}^k \phi_i a_i \right)}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \left( \sum_{i=1}^k \phi_i a_i \right), \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \left( \sum_{i=1}^k \nabla \phi_i b_i \right) = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \left( \sum_{i=1}^k \phi_i b_i \right)}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \left( \sum_{i=1}^k \phi_i b_i \right). \end{cases}$$

Como  $\nabla \psi_1 = \sum_{i=1}^k a_i \nabla \phi_i$  e  $\nabla \psi_2 = \sum_{i=1}^k b_i \nabla \phi_i$ , obtemos

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\psi_1}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1} \psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\psi_2}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2} \psi_2, \end{cases}$$

como queríamos mostrar. □

Como consequência da observação 2.9, podemos concluir que as sequências  $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$ ,  $(v_m)_{m=1}^{+\infty} \in U_m$ , obtidas no Lema 2.8 são limitadas em  $H_0^1(\Omega)$  pois

$$\|(u_m, v_m)\|_E \leq r_\epsilon, \tag{2.17}$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

**Observação 2.11.** Também é relevante observar que, da hipótese  $h_1$  e  $h_2$  serem positivas,

temos  $u_m \neq 0$  e  $v_m \neq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . De fato, se  $h_1$  e  $h_2$  são positivas, o par  $(0_{H_0^1(\Omega)}, 0_{H_0^1(\Omega)})$  não pode ser solução do sistema (S1). Portanto,  $u_m$  e  $v_m$  são soluções não nulas de (S1).

Das Observações 2.9 e 2.11, podemos concluir que, dado  $\epsilon > 0$ , existem duas seqüências  $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$  e  $(v_m)_{m=1}^{+\infty}$  de termos não nulos e limitadas em  $H_0^1(\Omega)$ , tal que  $(u_m, v_m)$  é solução de (S1). Consequentemente, pela Proposição 1.48, a menos de uma subsequência, temos

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u_\epsilon \text{ e } v_m \rightharpoonup v_\epsilon \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ u_m \rightarrow u_\epsilon \text{ e } v_m \rightarrow v_\epsilon \text{ em } L^2(\Omega), \\ u_m(x) \rightarrow u_\epsilon(x) \text{ e } v_m(x) \rightarrow v_\epsilon(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{cases} \quad (\text{C1})$$

para algum par  $(u, v) \in E$ .

**Lema 2.12.** *Sejam  $h_i \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$ , e  $k$  um número natural fixo menor ou igual à  $m$ . Então, para cada  $\epsilon > 0$ , existem  $u_\epsilon, v_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  que satisfazem*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \psi_1}{|u_\epsilon|^{\alpha_1} |v_\epsilon|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_\epsilon^+)^{\beta_1} \psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \psi_2}{|u_\epsilon|^{\alpha_2} |v_\epsilon|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_\epsilon^+)^{\beta_2} \psi_2, \end{cases}$$

para todo  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ .

*Demonstração.* Da convergência fraca em (C1), temos

$$\langle u_m, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle u_\epsilon, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \text{ quando } m \rightarrow +\infty,$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$  (pela definição de convergência fraca em um espaço de Hilbert). Em particular,

$$\int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \psi_1 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \psi_1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \psi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \psi_2, \quad (2.18)$$

para qualquer par  $(\psi_1, \psi_2) \in U_k \times U_k$ .

Sejam as seqüências de funções  $(f_m)_{m=1}^{+\infty}$  e  $(g_m)_{m=1}^{+\infty}$ , dadas por

$$f_m(x) = \frac{h_1(x)}{|u_m|^{\alpha_1} |v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_m^+)^{\beta_1}(x),$$

e

$$g_m(x) = \frac{h_2(x)}{|u_m|^{\alpha_2} |v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_m^+)^{\beta_2}(x),$$

para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Sejam também as funções

$$f_\epsilon(x) = \frac{h_1(x)}{|u_\epsilon|^{\alpha_1} |v_\epsilon|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_\epsilon^+)^{\beta_1}(x)$$

e

$$g_\epsilon(x) = \frac{h_2(x)}{|u_\epsilon|^{\alpha_2} |v_\epsilon|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_\epsilon^+)^{\beta_2}(x).$$

Pela terceira convergência de (C1), podemos concluir que

$$f_m(x) = \frac{h_1(x)}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_m^+)^{\beta_1}(x) \rightarrow \frac{h_1(x)}{|u_\epsilon|^{\alpha_1}|v_\epsilon|^{\gamma_1} + \epsilon} + (u_\epsilon^+)^{\beta_1}(x) = f_\epsilon(x),$$

e

$$g_m(x) = \frac{h_2(x)}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_m^+)^{\beta_2}(x) \rightarrow \frac{h_2(x)}{|u_\epsilon|^{\alpha_2}|v_\epsilon|^{\gamma_2} + \epsilon} + (v_\epsilon^+)^{\beta_2}(x) = g_\epsilon(x),$$

q.t.p. em  $\Omega$ , quando  $m \rightarrow +\infty$ . Da segunda convergência de (C1), existe  $M > 0$  tal que

$$\|u_m\|_2 \leq M, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}$$

e usando a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados,

$$\frac{1}{\beta_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1 - \beta_1},$$

temos

$$\begin{aligned} \|(u_m^+)^{\beta_1}\|_2^2 &\leq \int_{\Omega} |u_m|^{2\beta_1} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (|u_m|^{2\beta_1})^{\frac{1}{\beta_1}} \right)^{\beta_1} \left( \int_{\Omega} |1|^{\frac{1}{1-\beta_1}} \right)^{1-\beta_1} \\ &= \|u_m\|_2^{2\beta_1} |\Omega|^{1-\beta_1} \\ &\leq M^{2\beta_1} |\Omega|^{1-\beta_1}, \end{aligned}$$

par todo  $m \in \mathbb{N}$ . Como  $h_1 \in L^2(\Omega)$ , consideremos

$$C_1 = \left\| \frac{h_1(x)}{\epsilon} \right\|_2.$$

Logo,

$$\|f_m\|_2 \leq \left\| \frac{h_1(x)}{\epsilon} \right\|_2 + \|(u_m^+)^{\beta_1}\|_2 \leq C_1 + M^{\beta_1} |\Omega|^{\frac{1-\beta_1}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, existe  $C_3 > 0$  tal que

$$\|g_m\|_2 \leq C_3, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Teorema 1.29, temos

$$f_m \rightharpoonup f_\epsilon \quad \text{e} \quad g_m \rightharpoonup g_\epsilon, \quad \text{em } L^2(\Omega),$$

isto é,

$$\int_{\Omega} f_m \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi_1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} g_m \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} g \varphi_2,$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\Omega)$ . Em particular vale

$$\int_{\Omega} \frac{h_1(x)\psi_1}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\beta_1}\psi_1(x) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\psi_1}{|u_\epsilon|^{\alpha_1}|v_\epsilon|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_\epsilon^+)^{\beta_1}\psi_1(x)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{h_2(x)\psi_2}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\beta_2}\psi_2(x) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\psi_2}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_2}|v_{\epsilon}|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_{\epsilon}^+)^{\beta_2}\psi_2(x),$$

para qualquer  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ .

Portanto, das convergências anteriores e de (2.18) e do corolário anterior, temos

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\psi_1}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_1}|v_{\epsilon}|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^+)^{\beta_1}\psi_1,$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\epsilon} \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\psi_2}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_2}|v_{\epsilon}|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_{\epsilon}^+)^{\beta_2}\psi_2,$$

para todo  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ , como queríamos mostrar.  $\square$ 

**Teorema 2.13.** *Sejam  $h_i \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  e  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ . Então, para cada  $\epsilon > 0$ , existem  $u_{\epsilon}, v_{\epsilon} \in H_0^1(\Omega)$  não-negativas, tais que o par  $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$  satisfaz*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\varphi_1}{u_{\epsilon}^{\alpha_1}v_{\epsilon}^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} u_{\epsilon}^{\beta_1}\varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_{\epsilon} \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\varphi_2}{u_{\epsilon}^{\alpha_2}v_{\epsilon}^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} v_{\epsilon}^{\beta_2}\varphi_2, \end{cases}$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

*Demonstração.* Pelo lema anterior, para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ , existem  $u_{\epsilon}$  e  $v_{\epsilon}$  em  $H_0^1(\Omega)$  satisfazendo

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\psi_1}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_1}|v_{\epsilon}|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^+)^{\beta_1}\psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_{\epsilon} \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\psi_2}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_2}|v_{\epsilon}|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_{\epsilon}^+)^{\beta_2}\psi_2. \end{cases} \quad (\text{S2})$$

Como  $S = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$  é uma base de Schauder em  $H_0^1(\Omega)$  (vide Exemplo 1.9), podemos escrever qualquer elemento  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$  de forma única como

$$\varphi_1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k a_i \phi_i \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k b_i \phi_i,$$

em que  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . E mais,

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^k a_i \phi_i \rightarrow \varphi_1 \quad \text{e} \quad \psi_2 = \sum_{i=1}^k b_i \phi_i \rightarrow \varphi_2, \quad \text{em } H_0^1(\Omega),$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ . Portanto, fazendo  $k \rightarrow +\infty$  nas equações do sistema (S2), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\varphi_1}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_1}|v_{\epsilon}|^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^+)^{\beta_1}\varphi_1, \quad (2.19)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\epsilon} \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \varphi_2}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_2} |v_{\epsilon}|^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} (v_{\epsilon}^+)^{\beta_2} \varphi_2, \quad (2.20)$$

para quaisquer  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

Note que,

$$\int_{\Omega} \nabla(-u_{\epsilon}) \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \varphi}{|u_{\epsilon}|^{\alpha_1} |v_{\epsilon}|^{\gamma_1} + \epsilon} - \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^+)^{\beta_1} \varphi \leq 0.$$

para todo  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , em que  $\varphi \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Assim,  $-u_{\epsilon}$  fracamente sub-harmônicas e pelo Princípio do Máximo Fraco para funções fracamente sub-harmônicas (ver Teorema [1.53](#)), temos

$$-u_{\epsilon} \leq \sup_{\Omega}(-u_{\epsilon}) \leq \sup_{\partial\Omega}(-u_{\epsilon}^+) = 0,$$

isto é,  $u_{\epsilon} \geq 0$  em  $\Omega$ . Analogamente é possível concluir que  $v_{\epsilon} \geq 0$  em  $\Omega$ . Dessa maneira, podemos reescrever [\(2.19\)](#) e [\(2.20\)](#) como

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \varphi_1}{u_{\epsilon}^{\alpha_1} v_{\epsilon}^{\gamma_1} + \epsilon} + \int_{\Omega} u_{\epsilon}^{\beta_1} \varphi_1$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\epsilon} \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \varphi_2}{u_{\epsilon}^{\alpha_2} v_{\epsilon}^{\gamma_2} + \epsilon} + \int_{\Omega} v_{\epsilon}^{\beta_2} \varphi_2,$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ . Portanto, o par  $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon} = \frac{h_1(x)}{u_{\epsilon}^{\alpha_1} v_{\epsilon}^{\gamma_1} + \epsilon} + u_{\epsilon}^{\beta_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v_{\epsilon} = \frac{h_2(x)}{u_{\epsilon}^{\alpha_2} v_{\epsilon}^{\gamma_2} + \epsilon} + v_{\epsilon}^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ u_{\epsilon}, v_{\epsilon} \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_{\epsilon} = v_{\epsilon} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

fracamente. □

**Teorema 2.14.** *Sejam  $h_i \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  e  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$ . Então, para cada  $\epsilon > 0$ , o problema [\(P1 \$\_{\epsilon}\$ \)](#) possui uma solução clássica.*

*Demonstração.* Temos  $u_{\epsilon}, v_{\epsilon} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  (vide Alves et al. [\[2\]](#) e Gilbarg et. al [\[12\]](#)). Pelo Corolário [1.51](#), caso exista  $x_0$  no interior de  $\Omega$ , tal que  $u_{\epsilon}(x_0) = v_{\epsilon}(x_0) = 0$ , teríamos  $u_{\epsilon} \equiv v_{\epsilon} \equiv 0$ , o que não é possível, pois por um argumento semelhante ao da Observação [2.11](#), é possível mostrar que  $(0_{H_0^1(\Omega)}, 0_{H_0^1(\Omega)})$  não é solução para [\(P1 \$\_{\epsilon}\$ \)](#). Portanto,  $u_{\epsilon}, v_{\epsilon} > 0$  em  $\Omega$ . □

## 2.3 Existência de uma Solução para (P1)

Anteriormente, dado  $\epsilon > 0$ , encontramos um par  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  que é solução clássica do problema (P1 $_\epsilon$ ). Nosso objetivo agora, é fazer  $\epsilon$  tender à 0 e através disso obter uma solução para o problema (P1). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomemos  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ . Logo, o par  $(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n}) = (u_n, v_n)$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \frac{h_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} + u_n^{\beta_1} & \text{em } \Omega \\ -\Delta v_n = \frac{h_2(x)}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2} + \frac{1}{n}} + v_n^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ u_n, v_n > 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P1}_n)$$

no sentido clássico.

Para tal, sejam  $w, z \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  as únicas soluções dos problemas

$$\begin{cases} -\Delta w = w^{\beta_1} & \text{em } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta z = z^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ z > 0 & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

(vide Brezis e Oswald [8]). Do problema (P1 $_n$ ), podemos concluir que

$$-\Delta u_n \geq u_n^{\beta_1} \text{ e } -\Delta v_n \geq v_n^{\beta_2} \text{ em } \Omega.$$

Dessa maneira, como  $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$ , temos

$$u_n(x) \geq w(x) \text{ e } v_n(x) \geq z(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\star)$$

como por exemplo na prova do Teorema 2.2 em Ambrosseti, Brezis e Cerami [3].

**Lema 2.15.** *Sejam  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$  e  $h_1, h_2$  tais que*

$$\frac{h_1}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}}, \frac{h_2}{w^{\alpha_2} z^{\gamma_2}} \in L^2(\Omega). \quad (\text{H})$$

*Então, a sequência  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  é limitada em  $E$ , onde  $(u_n, v_n)$  é solução de (P1 $_n$ ).*

*Demonstração.* Sejam  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  a sequência de soluções do sistema (P1 $_n$ ). Pela definição de solução fraca, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) u_n}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} + \int_{\Omega} u_n^{\beta_1+1}. \quad (2.21)$$

De  $(\star)$ , podemos concluir que

$$u_n^{\alpha_1}(x) \geq w^{\alpha_1}(x) \quad \text{e} \quad v_n^{\gamma_1}(x) \geq z^{\gamma_1}(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Logo,

$$u_n^{\alpha_1}(x)v_n^{\gamma_1}(x) \geq w^{\alpha_1}(x)z^{\gamma_1}(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad (\star\star)$$

e conseqüentemente

$$\frac{h_1(x)u_n}{u_n^{\alpha_1}v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} \leq \frac{h_1(x)u_n}{w^{\alpha_1}z^{\gamma_1} + \frac{1}{n}}$$

q.t.p. em  $\Omega$ . Tomando a integral em  $\Omega$  de ambos e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{h_1(x)u_n}{u_n^{\alpha_1}v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} \leq \int_{\Omega} \frac{h_1(x)u_n}{w^{\alpha_1}z^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} \leq \int_{\Omega} \frac{h_1(x)}{w^{\alpha_1}z^{\gamma_1}} u_n \leq \left\| \frac{h_1(x)}{w^{\alpha_1}z^{\gamma_1}} \right\|_2 \|u_n\|_2.$$

Pelas Imersões de Sobolev, existem  $C_1, C_2 > 0$  tais que

$$\|\omega\|_2 \leq C_1 \|\omega\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|\omega\|_{\beta_1+1} \leq C_2 \|\omega\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ . Da desigualdade anterior e da equação  $(2.21)$ , obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq C_1 \left\| \frac{h_1(x)}{w^{\alpha_1}z^{\gamma_1}} \right\|_2 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + C_2 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{\beta_1+1}.$$

De maneira análoga, existe  $C_3 > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \leq C_1 \left\| \frac{h_2(x)}{w^{\alpha_2}z^{\gamma_2}} \right\|_2 \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} + C_3 \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{\beta_2+1}.$$

Escrevendo

$$K_1 = C_1 \left\| \frac{h_1(x)}{w^{\alpha_1}z^{\gamma_1}} \right\|_2, \quad K_3 = C_1 \left\| \frac{h_2(x)}{w^{\alpha_2}z^{\gamma_2}} \right\|_2,$$

$K_2 = C_2$ ,  $K_4 = C_3$  e usando o fato que

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|(u_n, v_n)\|_E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.22)$$

obtemos

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq K_1 \|(u_n, v_n)\|_E + K_2 \|(u_n, v_n)\|_E^{\beta_1+1}$$

e

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \leq K_3 \|(u_n, v_n)\|_E + K_4 \|(u_n, v_n)\|_E^{\beta_2+1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Somando as duas inequações anteriores e escrevendo  $K_1 + K_3 = K_5$ , obtemos

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq K_5 \|(u_n, v_n)\|_E + K_2 \|(u_n, v_n)\|_E^{\beta_1+1} + K_4 \|(u_n, v_n)\|_E^{\beta_2+1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(u_n)_{n_1}^{+\infty}$  e  $(v_n)_{n_1}^{+\infty}$  são seqüências limitadas em  $H_0^1(\Omega)$ . De fato, suponhamos que tais seqüências sejam ilimitadas. Como  $u_n, v_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos  $\|(u_n, v_n)\|_E^2 \neq 0$ . Assim, podemos dividir ambos os lados da desigualdade anterior

por  $\|(u_n, v_n)\|_E^2$  e obter

$$1 \leq \frac{K_5}{\|(u_n, v_n)\|_E} + \frac{K_2}{\|(u_n, v_n)\|_E^{1-\beta_1}} + \frac{K_4}{\|(u_n, v_n)\|_E^{1-\beta_2}},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Elevando ao quadrado em ambos os lados da desigualdade, obtemos ainda

$$1 \leq K \left( \frac{1}{\|(u_n, v_n)\|_E^2} + \frac{1}{(\|(u_n, v_n)\|_E^2)^{1-\beta_1}} + \frac{1}{(\|(u_n, v_n)\|_E^2)^{1-\beta_2}} \right), \quad (\bullet)$$

para algum  $K > 0$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De (2.22) caso alguma das seqüências  $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$  e  $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$  sejam ilimitadas em  $H_0^1(\Omega)$ , obtemos

$$\|(u_n, v_n)\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow +\infty, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como supusemos que ambas seqüências são ilimitadas, para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, vale

$$K \left( \frac{1}{\|(u_{n_0}, v_{n_0})\|_E^2} + \frac{1}{(\|(u_{n_0}, v_{n_0})\|_E^2)^{1-\beta_1}} + \frac{1}{(\|(u_{n_0}, v_{n_0})\|_E^2)^{1-\beta_2}} \right) < 1. \quad (\bullet\bullet)$$

Um absurdo!, pois temos  $(\bullet)$  e  $(\bullet\bullet)$ , ocorrendo simultaneamente. Portanto  $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$  e  $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$  são limitadas em  $H_0^1(\Omega)$ .  $\square$

Da limitação de  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  em  $E$  obtida no lema anterior, segue da Posposição 1.48, que a menos de uma subseqüência, temos

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ e } v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ u_n \rightarrow u \text{ e } v_n \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega), \\ u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ e } v_n(x) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{cases} \quad (\text{C2})$$

para algum par  $(u, v) \in E$ .

Das convergências anteriores e de  $(\star)$ , podemos concluir que

$$u(x) \geq w(x) \text{ e } v(x) \geq z(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

**Teorema 2.16.** *Sejam  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$  e assumamos  $(H)$ . Então, existem  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  não-negativas, tais que o par  $(u, v)$  satisfaz*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x) \varphi_1}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + \int_{\Omega} u^{\beta_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x) \varphi_2}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} v^{\beta_2} \varphi_2, \end{cases}$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

*Demonstração.* Primeiramente provaremos a existência de soluções fracas para  $(P1)$ .

Da primeira convergência de (C2) vale

$$\langle u_n, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle u, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ . Ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2, \quad (2.23)$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

Sejam as sequências de funções  $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$  e  $(g_n)_{n=1}^{+\infty}$ , definidas em  $\Omega$  e dadas por

$$f_n(x) = \frac{h_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} + u_n^{\beta_1}(x)$$

e

$$g_n(x) = \frac{h_2(x)}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2} + \frac{1}{n}} + v_n^{\beta_2}(x),$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . De (\*\*), temos

$$\left( \frac{h_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} \right)^2 \leq \left( \frac{h_1(x)}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}} \right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e por (H), vale

$$\left\| \frac{h_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} \right\|_2 \leq \left\| \frac{h_1(x)}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}} \right\|_2 \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum  $C > 0$ . Procedendo de maneira análoga a prova do Lema 2.12, temos

$$\int_{\Omega} \frac{h_1(x)\varphi_1}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} + \int_{\Omega} u_n^{\beta_1} \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\varphi_1}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + \int_{\Omega} u^{\beta_1} \varphi_1,$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{h_2(x)\varphi_2}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2} + \frac{1}{n}} + \int_{\Omega} v_n^{\beta_2} \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\varphi_2}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} v^{\beta_2} \varphi_2,$$

se  $n \rightarrow +\infty$ , para quaisquer  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ . Portanto, das duas convergências anteriores e de (2.23) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\varphi_1}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + \int_{\Omega} u^{\beta_1} \varphi_1,$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{h_2(x)\varphi_2}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} v^{\beta_2} \varphi_2,$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ , como queríamos mostrar.

As funções  $u$  e  $v$  são positivas q.t.p em  $\Omega$ , pois satisfazem (\*). Vejamos agora que  $u$  e  $v$  são funções não-negativas em todo  $\Omega$ . Para isso, note que

$$\int_{\Omega} \nabla(-u) \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \frac{h_1(x)\varphi}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} - \int_{\Omega} u^{\beta_1} \varphi \leq 0,$$

para todo  $\varphi \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Ou seja,  $u$  é fracamente sub-harmônica e usando o Princípio do Máximo Fraco para funções fracamente sub-harmônicas, temos

$$-u \leq \sup_{\Omega} -u \leq \sup_{\partial\Omega} -u^+ = 0.$$

Isto é,  $u \geq 0$  em  $\Omega$ . Analogamente, podemos concluir que  $v \geq 0$  em  $\Omega$ . Mais ainda, por  $(\star)$  temos

$$u \geq 0 \text{ em } \Omega, \quad u > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$v \geq 0 \text{ em } \Omega, \quad v > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, o par  $(u, v)$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{h_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + u^{\beta_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{h_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + v^{\beta_2} & \text{em } \Omega, \\ u, v \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

fracamente. □

**Teorema 2.17.** *Sejam  $h_i \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (0, 1)$  para  $i = 1, 2$  e assumindo  $(H)$ . Então, o par  $(u, v) \in E$  obtido no Teorema  $(2.16)$ , é uma solução clássica de  $(P1)$ .*

*Demonstração.* Considerando  $(u, v) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega))^2$  (vide Alves et al.  $[2]$  e Gilbarg et. al  $[12]$ ), temos  $u, v > 0$ . □

# Capítulo 3

## Uma Segunda Classe de Sistemas

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, temos como objetivo encontrar soluções para o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \frac{1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{v^{\gamma_2}} + u^{\alpha_2} & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (\text{P2})$$

onde  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ , e  $\Omega$  é um aberto suave e limitado de  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 2$ .

**Definição 3.1.** Dizemos que o par  $(u, v)$  é solução clássica do problema (P2), se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $(u, v)$  satisfaz o problema (P2).

**Definição 3.2.** Dizemos que o par  $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  é solução fraca do problema (P2), se  $u$  e  $v$  são positivas e  $(u, v)$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_2}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\alpha_2} \varphi_2, \end{array} \right.$$

para todos  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

De maneira análoga ao capítulo anterior, para contornarmos as singularidades do problema (P2), primeiramente procuraremos soluções em problemas aproximados. Para

tal, consideremos

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \frac{1}{(u + \epsilon)^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{(v + \epsilon)^{\gamma_2}} + u^{\alpha_2} & \text{em } \Omega \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (\text{P2}_\epsilon)$$

para cada  $\epsilon > 0$ .

**Definição 3.3.** Para  $\epsilon > 0$  fixado, dizemos que o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  é solução clássica do problema  $(\text{P2}_\epsilon)$ , se  $u_\epsilon, v_\epsilon \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  satisfaz o problema  $(\text{P2}_\epsilon)$ .

**Definição 3.4.** Para  $\epsilon > 0$  fixado, dizemos que o par  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  é solução fraca do problema  $(\text{P2}_\epsilon)$ , se  $u_\epsilon$  e  $v_\epsilon$  são positivas e  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1}{(u_\epsilon + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v_\epsilon^{\gamma_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_2}{(v_\epsilon + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u_\epsilon^{\alpha_2} \varphi_2, \end{array} \right.$$

para todos  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

Combinando novamente a Proposição 2.5 com o Método de Galerkin obteremos uma família  $(u_\epsilon, v_\epsilon)_{\epsilon > 0} \subset H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  de soluções fracas para os problemas da forma  $(\text{P2}_\epsilon)$ , que juntamente com a Teoria da Regularidade Elíptica nos fornecerá uma solução clássica para cada problema  $(\text{P2}_\epsilon)$ . Tomando  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$  (com  $n \in \mathbb{N}$ ), teremos duas seqüências  $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$  e  $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$  limitadas em  $H_0^1(\Omega)$  que, a menos de uma subsequência, convergirão fracamente para  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , com o par  $(u, v)$  solução fraca de  $(\text{P2})$ .

## 3.2 Existência de uma Solução para cada $(\text{P2}_\epsilon)$

De forma análoga ao capítulo anterior, usaremos que  $H_0^1(\Omega)$  possui um sistema ortonormal completo  $S = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ , uma família de subespaços  $(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$  dados por

$$U_m = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m],$$

e o isomorfismo isométrico entre  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  e  $U_m \times U_m$ .

Como nosso objetivo é utilizar a Proposição 2.5 antes de avançarmos é necessário o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 3.5.** Seja  $\epsilon > 0$  fixado. Suponhamos  $u, v \in U_m$  e  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  elementos de  $\mathbb{R}^m$ , tais que

$$u = \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \quad e \quad v = \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i$$

com  $\phi_1, \dots, \phi_m \in S$ . Então, as funções  $F_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$F_i(\xi, \eta) = \xi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} \phi_i$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \eta_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} \phi_i$$

são contínuas.

*Demonstração.* Seja  $(\xi_k, \eta_k)_{k=1}^{+\infty}$  uma seqüência convergindo para  $(\xi_0, \eta_0)$  em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Consideremos  $\xi_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_m^k)$ ,  $\eta_k = (\eta_1^k, \dots, \eta_m^k)$ ,  $\xi_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$ ,  $\eta_0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_m^0)$  em que

$$\xi_i^0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_i^k \quad \text{e} \quad \eta_i^0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \eta_i^k, \quad (3.1)$$

para todo  $i = 1, \dots, m$  e cada  $k \in \mathbb{N}$ . Pelo Lema [2.6](#), existem  $u_k, v_k \in U_m$  tais que

$$u_k = \sum_{i=1}^m \xi_i^k \phi_i \quad \text{e} \quad v_k = \sum_{i=1}^m \eta_i^k \phi_i.$$

Analogamente, existem  $u_0, v_0 \in U_m$  funções associadas a  $\xi_0$  e  $\eta_0$  pela seguinte igualdade

$$u_0 = \sum_{i=1}^m \xi_i^0 \phi_i \quad \text{e} \quad v_0 = \sum_{i=1}^m \eta_i^0 \phi_i,$$

com  $\phi_1, \dots, \phi_m \in S$ . Dos limites [\(3.1\)](#) e das definições de  $u_k, v_k, u_0, v_0$ , obtemos

$$u_0 = \sum_{i=1}^m \xi_i^0 \phi_i = \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \xi_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \quad (3.2)$$

e

$$v_0 = \sum_{i=1}^m \eta_i^0 \phi_i = \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \eta_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \eta_i^k \phi_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k. \quad (3.3)$$

Consideremos também as seqüências  $(F_i(\xi_k, \eta_k))_{k=1}^{+\infty}$  e  $(G_i(\xi_k, \eta_k))_{k=1}^{+\infty}$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ , onde

$$F_i(\xi_k, \eta_k) = \xi_i^k - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u_k| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v_k^+)^{\gamma_1} \phi_i$$

e

$$G_i(\xi_k, \eta_k) = \eta_i^k - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v_k| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u_k^+)^{\alpha_2} \phi_i,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Para concluir a continuidade das funções  $F_i$  e  $G_i$ , mostremos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_i(\xi_k, \eta_k) = F_i(\xi_0, \eta_0) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} G_i(\xi_k, \eta_k) = G_i(\xi_0, \eta_0),$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Consideremos as seqüências de funções  $(f_k^i)_{k=1}^{+\infty}$  e  $(g_k^i)_{k=1}^{+\infty}$  definidas em  $\Omega$  e dadas por

$$f_k^i(x) = \frac{\phi_i(x)}{(|u_k| + \epsilon)^{\alpha_1}} + (v_k^+)^{\gamma_1} \phi_i(x)$$

e

$$g_k^i(x) = \frac{\phi_i(x)}{(|v_k| + \epsilon)^{\gamma_2}} + (u_k^+)^{\alpha_2} \phi_i(x),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, \dots, m$ . Sejam também as funções  $g_0^i, f_0^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$f_0^i(x) = \frac{\phi_i(x)}{(|u_0| + \epsilon)^{\alpha_1}} + (v_0^+)^{\gamma_1} \phi_i(x)$$

e

$$g_0^i(x) = \frac{\phi_i(x)}{(|v_0| + \epsilon)^{\gamma_2}} + (u_0^+)^{\alpha_2} \phi_i(x),$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ . Utilizando (3.2) e (3.3) concluímos que

$$f_k^i(x) = \frac{\phi_i(x)}{(|u_k| + \epsilon)^{\alpha_1}} + (v_k^+)^{\gamma_1} \phi_i(x) \rightarrow \frac{\phi_i(x)}{(|u_0| + \epsilon)^{\alpha_1}} + (v_0^+)^{\gamma_1} \phi_i(x) = f_0^i(x),$$

e

$$g_k^i(x) = \frac{\phi_i(x)}{(|v_k| + \epsilon)^{\gamma_2}} + (u_k^+)^{\alpha_2} \phi_i(x) \rightarrow \frac{\phi_i(x)}{(|v_0| + \epsilon)^{\gamma_2}} + (u_0^+)^{\alpha_2} \phi_i(x) = g_0^i(x),$$

para todo  $x \in \Omega$  e  $i = 1, \dots, m$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Como a sequência  $(\xi_k, \eta_k)_{k=1}^{+\infty}$  é limitada (já que é convergente), existe  $N > 0$ , tal que

$$\|(\xi_k, \eta_k)\| \leq N,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como no Exemplo 1.4, concluímos que

$$\|\xi_k\|_{\mathbb{R}^m} = \|(\xi_k, 0)\| \leq N \quad \text{e} \quad \|\eta_k\|_{\mathbb{R}^m} = \|(\eta_k, 0)\| \leq N,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Dessa maneira, para cada  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$|\xi_k^i| \leq N \quad \text{e} \quad |\eta_k^i| \leq N,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Daí, sejam as funções  $h_1^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_2^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$h_1^i(x) = \frac{|\phi_i(x)|}{\epsilon^{\alpha_1}} + N^{\gamma_1} \sum_{j=1}^m |\phi_j(x)|^{\gamma_1} |\phi_i(x)|$$

e

$$h_2^i(x) = \frac{|\phi_i(x)|}{\epsilon^{\gamma_2}} + N^{\alpha_2} \sum_{j=1}^m |\phi_j(x)|^{\alpha_2} |\phi_i(x)|,$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ . Notemos que  $h_1^i, h_2^i \in L^1(\Omega)$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Mais ainda,

$$|f_k^i(x)| = \left| \frac{\phi_i(x)}{(|u_k| + \epsilon)^{\alpha_1}} + (v_k^+)^{\gamma_1} \phi_i(x) \right| \leq \frac{|\phi_i(x)|}{(|u_k(x)| + \epsilon)^{\alpha_1}} + |(v_k^+(x))^{\gamma_1} \phi_i(x)|.$$

Usando que

$$(|u| + \epsilon)^{\alpha_1} \geq \epsilon^{\alpha_1},$$

temos

$$|f_k^i(x)| \leq \frac{|\phi_i(x)|}{2^{\alpha_1-1}\epsilon^{\alpha_1}} + |v_k(x)|^{\gamma_1} |\phi_i(x)|.$$

Pela definição de  $v_k$  podemos escrever

$$\begin{aligned} |f_k^i(x)| &\leq \frac{|\phi_i(x)|}{2^{\alpha_1-1}\epsilon^{\alpha_1}} + |v_k(x)|^{\gamma_1} |\phi_i(x)| \\ &\leq \frac{|\phi_i(x)|}{2^{\alpha_1-1}\epsilon^{\alpha_1}} + \left| \left( \sum_{j=1}^m \eta_j \phi_j \right) (x) \right|^{\gamma_1} |\phi_i(x)| \\ &\leq \frac{|\phi_i(x)|}{2^{\alpha_1-1}\epsilon^{\alpha_1}} + \sum_{j=1}^m |\eta_j|^{\gamma_1} |\phi_j(x)|^{\gamma_1} |\phi_i(x)| \\ &\leq \frac{|\phi_i(x)|}{2^{\alpha_1-1}\epsilon^{\alpha_1}} + N^{\gamma_1} \sum_{j=1}^m |\phi_j(x)|^{\gamma_1} |\phi_i(x)|, \\ &= h_1^i(x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega$  e  $i = 1, \dots, m$ . De maneira análoga, podemos concluir que  $|g_k^i| \leq |h_2^i|$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, \dots, m$ .

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u_k| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_k^+)^{\gamma_1} \phi_i \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u_0| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_0^+)^{\gamma_1} \phi_i \quad (3.4)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v_k| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (u_k^+)^{\gamma_1} \phi_i \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v_0| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (u_0^+)^{\gamma_1} \phi_i, \quad (3.5)$$

se  $k \rightarrow +\infty$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Portanto, de (3.1), (3.4) e (3.5) concluímos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_i(\xi_k, \eta_k) = F_i(\xi_0, \eta_0) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} G_i(\xi_k, \eta_k) = G_i(\xi_0, \eta_0),$$

consequentemente  $F_i$  e  $G_i$  são contínuas para todo  $i = 1, \dots, m$ .  $\square$

### 3.2.1 Aplicação do Método de Galerkin

Para usar a Proposição 2.5 neste capítulo, será necessário encontrar expoentes conjugados convenientes. Por hipótese, o número  $\gamma_1 \in (0, 1)$ . Logo, definamos os números reais

$$\frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1}. \quad (3.6)$$

Como  $0 < \gamma_1 < 1$ , temos  $\frac{1}{\gamma_1} > 1$  e consequentemente

$$\frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1 > 1.$$

Também temos  $0 < \gamma_1^2 < 1$ , implicando em

$$1 < \gamma_1^2 + 1 < 2 \quad e \quad 0 < \gamma_1^2 - \gamma_1 + 1 < 1.$$

Logo,

$$1 < \frac{1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1} < +\infty.$$

Finalmente,

$$1 < \frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1} < +\infty. \quad (3.7)$$

Mais ainda,

$$\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1} + \frac{1}{\frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + 1} + \frac{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1}{\gamma_1^2 + 1} = 1.$$

Portanto os números definidos em (3.6) são expoentes conjugados.

Analogamente, como  $\alpha_2 \in (0, 1)$ , podemos definir os números reais expoentes conjugados

$$\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_2 \quad e \quad \frac{\alpha_2^2 + 1}{\alpha_2^2 - \alpha_2 + 1}.$$

**Observação 3.6.** Como  $\gamma_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ , temos

$$1 < \frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1} < 2 \quad e \quad 1 < \frac{\alpha_2^2 + 1}{\alpha_2^2 - \alpha_2 + 1} < 2.$$

Mais ainda,

$$1 < \gamma_1 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1 \right) < 2 \quad e \quad 1 < \alpha_2 \left( \frac{1}{\alpha_2} + \alpha_2 \right) < 2.$$

De fato, temos

$$\frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1} < 2.$$

Unindo a desigualdade (3.7) com a anterior, concluímos

$$1 < \frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1} < 2.$$

Analogamente para  $\alpha_2$ , temos

$$1 < \frac{\alpha_2^2 + 1}{\alpha_2^2 - \alpha_2 + 1} < 2.$$

Para  $\gamma_1 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1 \right)$ , temos

$$\gamma_1 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1 \right) = \gamma_1^2 + 1.$$

Por hipótese  $0 < \gamma_1 < 1$  e conseqüentemente  $0 < \gamma_1^2 < 1$ . Logo,

$$1 < \gamma_1^2 + 1 < 2.$$

De maneira análoga para  $\alpha_2$ , podemos concluir

$$1 < \alpha_2^2 + 1 < 2.$$

como queríamos mostrar.

Para facilitar a notação, consideremos as seguintes igualdades:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_1^2 + 1}{\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{\alpha_2^2 + 1}{\alpha_2^2 - \alpha_2 + 1}.$$

Analogamente ao capítulo anterior, procuraremos por soluções em  $U_m$  e ao aplicarmos o Método de Galerkin encontraremos soluções fracas para cada um dos sistemas aproximados.

**Lema 3.7.** *Sejam  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ . Então, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe um par  $(u_m, v_m) \in U_m \times U_m$  que satisfaz*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i = \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\gamma_1} \phi_i, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \phi_i = \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v_m| + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha_2} \phi_i, \end{cases} \quad (\text{S3})$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

*Demonstração.* Consideremos  $u, v \in U_m$ . Pelo Lema 2.6, existe um par  $(\xi, \eta)$ , em que  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  e  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  elementos de  $\mathbb{R}^m$ , tais que

$$u = \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i, \quad v = \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i \quad \text{e} \quad \|(u, v)\|_E = \|(\xi, \eta)\|. \quad (\text{3.8})$$

Do Lema 3.5 podemos concluir que a aplicação  $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , dada por

$$F(\xi, \eta) = (F_1(\xi, \eta), \dots, F_m(\xi, \eta), G_1(\xi, \eta), \dots, G_m(\xi, \eta))$$

em que,

$$F_i(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} \phi_i,$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} \phi_i$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ , é contínua. Pela definição do produto interno de  $H_0^1(\Omega)$ , podemos reescrever as equações anteriores como

$$F_i(\xi, \eta) = \langle u, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} \phi_i,$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \langle v, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} \phi_i.$$

De (3.8), temos

$$\langle u, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \sum_{j=1}^m \xi_j \phi_j, \phi_i \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^m \xi_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \xi_i$$

e

$$\langle v, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle \sum_{j=1}^m \eta_j \phi_j, \phi_i \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^m \eta_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \eta_i.$$

Podemos reescrever, as funções  $F_i$  e  $G_i$  como

$$F_i(\xi, \eta) = \xi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} \phi_i,$$

e

$$G_i(\xi, \eta) = \eta_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} \phi_i,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . Por outro lado

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &= \sum_{i=1}^m \left( \xi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} \phi_i \right) \xi_i \\ &+ \sum_{i=1}^m \left( \eta_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} \phi_i \right) \eta_i. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &= \sum_{i=1}^m \xi_i^2 - \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} \sum_{i=1}^m \xi_i \phi_i \\ &+ \sum_{i=1}^m \eta_i^2 - \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} \sum_{i=1}^m \eta_i \phi_i. \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} \frac{u}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} \\ &- \int_{\Omega} \frac{v}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} u - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} v. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observemos algumas desigualdades envolvendo as parcelas do lado direito da equação (3.9). Como  $\alpha_1 \in (0, 1)$ , vale

$$(|u| + \epsilon)^{\alpha_1} \geq (|u|^{\alpha_1} + \epsilon^{\alpha_1}) \geq |u|^{\alpha_1}.$$

Logo, vale

$$\int_{\Omega} \frac{u}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} \leq \int_{\Omega} |u|^{1-\alpha_1},$$

onde

$$\frac{1}{1 - \alpha_1} \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 - \alpha_1 < 1.$$

Usando a desigualdade de Hölder reversa, temos

$$\left( \int_{\Omega} |u|^{1-\alpha_1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \leq \left( \int_{\Omega} |u \cdot 1| \right) \frac{1}{\left( \int_{\Omega} |1|^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}}}.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade anterior a  $1 - \alpha_1$ , obtemos

$$\int_{\Omega} |u|^{1-\alpha_1} \leq \left( \int_{\Omega} |u| \right)^{1-\alpha_1} |\Omega|^{\alpha_1}.$$

em que  $|\Omega|$  representa a medida de Lebesgue do conjunto  $\Omega$ . Consequentemente,

$$\int_{\Omega} \frac{u}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} \leq |\Omega|^{\alpha_1} \|u\|_1^{1-\alpha_1}.$$

Usando também as Imersões de Sobolev, existe  $C_1 > 0$  tal que  $\|u\|_1 \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$  para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Logo, da desigualdade anterior temos

$$\int_{\Omega} \frac{u}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} \leq C_1^{1-\alpha_1} |\Omega|^{\alpha_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\alpha_1}.$$

Assim, tomando

$$K_1 = C_1^{1-\alpha_1} |\Omega|^{\alpha_1}$$

segue da desigualdade anterior que

$$- \int_{\Omega} \frac{u}{(|u| + \epsilon)^{\alpha_1}} \geq -K_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\alpha_1}.$$

De maneira análoga, como  $\gamma_2 \in (0, 1)$ , é possível tomar

$$K_2 = C_1^{1-\gamma_2} |\Omega|^{\gamma_2}$$

tal que

$$- \int_{\Omega} \frac{v}{(|v| + \epsilon)^{\gamma_2}} \geq -K_2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\gamma_2}.$$

Logo, usando as desigualdades anteriores podemos escrever, a partir de [\(3.9\)](#) a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - K_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\alpha_1} - K_2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-\gamma_2} \\ &\quad - \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} u - \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} v. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Note que

$$\int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} u \leq \int_{\Omega} |v^+|^{\gamma_1} |u| \leq \int_{\Omega} |v|^{\gamma_1} |u|.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder no lado direito da desigualdade anterior, com os

números reais conjugados definidos em (3.6), obtemos

$$\int_{\Omega} |v|^{\gamma_1} |u| \leq \left( \int_{\Omega} (|v|^{\gamma_1})^{\frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + 1}} \left( \int_{\Omega} |u|^{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{\sigma_1}}.$$

Por Young, temos

$$\int_{\Omega} |v|^{\gamma_1} |u| \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + 1} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\gamma_1^2 + 1} + \frac{1}{\sigma_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\sigma_1}.$$

Pela Observação 3.6, sabemos que

$$1 < \sigma_1 < 2 \quad \text{e} \quad 1 < \gamma_1^2 + 1 < 2.$$

Logo, podemos usar o Corolário 1.41, para obter constantes existem  $C_3, C_4 > 0$ , tais que

$$\int_{\Omega} |v|^{\gamma_1} |u| \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + 1} C_3^{\gamma_1^2 + 1} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\gamma_1^2 + 1} + \frac{1}{\sigma_1} C_4^{\sigma_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\sigma_1}.$$

Escrevendo

$$K_3 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + 1} C_3^{\gamma_1^2 + 1} \quad \text{e} \quad K_4 = \frac{1}{\sigma_1} C_4^{\sigma_1},$$

obtemos

$$- \int_{\Omega} (v^+)^{\gamma_1} u \geq -K_3 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\gamma_1^2 + 1} - K_4 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\sigma_1}.$$

De maneira análoga para  $\alpha_2 \in (0, 1)$ , existem  $K_5, K_6 > 0$  tais que

$$- \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha_2} v \geq -K_5 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha_2^2 + 1} - K_6 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\sigma_2}.$$

Das desigualdades anteriores e de (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &\geq \|(u, v)\|_E^2 - K_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1 - \alpha_1} - K_2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{1 - \gamma_2} - K_3 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\gamma_1^2 + 1} \\ &\quad - K_4 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\sigma_1} - K_5 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha_2^2 + 1} - K_6 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\sigma_2}. \end{aligned}$$

Como  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|(u, v)\|_E$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &\geq \|(u, v)\|_E^2 - K_1 \|(u, v)\|_E^{1 - \alpha_1} - K_2 \|(u, v)\|_E^{1 - \gamma_2} - K_3 \|(u, v)\|_E^{\gamma_1^2 + 1} \\ &\quad - K_4 \|(u, v)\|_E^{\sigma_1} - K_5 \|(u, v)\|_E^{\alpha_2^2 + 1} - K_6 \|(u, v)\|_E^{\sigma_2}, \end{aligned}$$

para todo par  $(u, v) \in U_m \times U_m$ . De (3.8), temos

$$\begin{aligned} \langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle &\geq \|(\xi, \eta)\|^2 - K_1 \|(\xi, \eta)\|_E^{1 - \alpha_1} - K_2 \|(\xi, \eta)\|_E^{1 - \gamma_2} \\ &\quad - K_3 \|(\xi, \eta)\|^{\gamma_1^2 + 1} - K_4 \|(\xi, \eta)\|^{\sigma_1} \\ &\quad - K_5 \|(\xi, \eta)\|^{\alpha_2^2 + 1} - K_6 \|(\xi, \eta)\|^{\sigma_2}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Dessa maneira, para todo  $\epsilon > 0$ , é possível encontrar  $r > 0$

suficientemente grande tal que para todo  $(\xi, \eta) \in S_r(0) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , vale

$$\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle \geq 0,$$

para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ . De fato, como os expoentes das parcelas que subtraem do lado direito da desigualdade (3.11) estão pertencem à  $(0, 2)$ , isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < 1 - \gamma_1^2 < 1, \\ 0 < 1 - \alpha_2^2 < 1, \\ 0 < 1 - \alpha_1 < 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < 1 - \gamma_2 < 1, \\ 0 < \sigma_1 < 2, \\ 0 < \sigma_2 < 2, \end{array} \right.$$

para algum  $r > 0$  suficientemente grande, temos

$$\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle \geq 0,$$

para todo  $\|(\xi, \eta)\| = r$ , valendo para quaisquer  $m \in \mathbb{N}$  e  $\epsilon > 0$ . Logo, segue do Lema 3.5 que  $F$  é contínua e da Proposição 2.5 sabemos que existe um par  $(\xi_m, \eta_m) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , tal que

$$\|(\xi_m, \eta_m)\| \leq r \quad \text{e} \quad F(\xi_m, \eta_m) = 0,$$

em que  $\xi_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \dots, \xi_m^m)$ ,  $\eta_m = (\eta_1^m, \eta_2^m, \dots, \eta_m^m)$ . Pelo Lema 2.6, existem  $u_m, v_m \in U_m$  associados a  $\xi_m, \eta_m$  pelas seguintes igualdades

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i^m \phi_i \quad \text{e} \quad v_m = \sum_{i=1}^m \eta_i^m \phi_i,$$

com  $\phi_1, \dots, \phi_m \in S$ . Consequentemente, para todo  $i \in \mathbb{N}$ , temos

$$0 = F_i(\xi_m, \eta_m) = \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} (v_m^+)^{\gamma_1} \phi_i,$$

e

$$0 = G_i(\xi_m, \eta_m) = \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \phi_i - \int_{\Omega} \frac{\phi_i}{(|v_m| + \epsilon)^{\gamma_2}} - \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha_2} \phi_i.$$

Portanto, o problema aproximado (S3) possui solução para cada  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Corolário 3.8.** *Sejam  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ , e  $k$  um número natural menor ou igual à  $m$ . Então, as soluções  $(u_m, v_m)$  de (S3) são também soluções de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{\psi_1}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\gamma_1} \psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{\psi_2}{(|v_m| + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha_2} \psi_2, \end{array} \right.$$

para todos  $\psi_1, \psi_2 \in U_k \subseteq U_m$ .

*Demonstração.* Análogo a demonstração do Corolário 2.10.  $\square$

**Observação 3.9.** *Assim, como no capítulo anterior, a constante  $r > 0$  não depende de  $m \in \mathbb{N}$ , nem de  $\epsilon > 0$ . O motivo da independência a  $m$  é análogo ao apresentado na*

Observação 2.9 e como as constantes  $K_i$ , definidas no Lema 3.7 não dependem de  $\epsilon$ , a constante  $r > 0$  também pode ser tomada para todo  $\epsilon > 0$ .

Partindo da observação anterior, podemos afirmar que a sequência  $(u_m, v_m)_{m=1}^{+\infty}$  é limitada, pois

$$\|(u_m, v_m)\|_E \leq r,$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Logo, pela Proposição 1.48, a menos de uma subsequência, temos

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u_\epsilon \text{ e } v_m \rightharpoonup v_\epsilon, \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ u_m \rightarrow u_\epsilon \text{ e } v_m \rightarrow v_\epsilon, \text{ em } L^2(\Omega), \\ u_m(x) \rightarrow u_\epsilon(x) \text{ e } v_m(x) \rightarrow v_\epsilon(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \quad (\text{C3})$$

para algum par  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in E$ .

Através das informações coletadas até aqui, vamos mostrar o resultado a seguir:

**Teorema 3.10.** *Sejam  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , para  $i = 1, 2$ , e  $k$  um número natural fixo menor ou igual à  $m$ . Então, para cada  $\epsilon > 0$ , existem  $u_\epsilon$  e  $v_\epsilon$  que satisfazem*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{\psi_1}{(|u_\epsilon| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_\epsilon^+)^{\gamma_1} \psi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{\psi_2}{(|v_\epsilon| + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} (u_\epsilon^+)^{\alpha_2} \psi_2, \end{cases}$$

para todo  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ .

*Demonstração.* Pela primeira convergência em (C3), temos

$$\langle u_m, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle u_\epsilon, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ . Em particular, temos

$$\int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \psi_1 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \psi_1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \psi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v_\epsilon \nabla \psi_2,$$

para quaisquer  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ .

Sejam as sequências de funções  $(f_m)_{m=1}^{+\infty}$  e  $(g_m)_{m=1}^{+\infty}$ , definidas em  $\Omega$  e dadas por

$$f_m(x) = \frac{1}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}}(x) + (v_m^+)^{\gamma_1}(x)$$

e

$$g_m(x) = \frac{1}{(|v_m| + \epsilon)^{\gamma_2}}(x) + (u_m^+)^{\alpha_2}(x).$$

Como  $\alpha_1 \in (0, 1)$ , temos

$$\frac{1}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}} \leq \frac{1}{\epsilon^{\alpha_1}}, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{1}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}} \in L^2(\Omega).$$

Analogamente, vale

$$\frac{1}{(|v_m| + \epsilon)^{\gamma_2}} \in L^2(\Omega).$$

Daí, procedendo de maneira análoga ao Lema [2.12](#), obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\psi_1}{(|u_m| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_m^+)^{\gamma_1} \psi_1 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\psi_1}{(|u_{\epsilon}| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_{\epsilon}^+)^{\gamma_1} \psi_1$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\psi_2}{(|v_m| + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha_2} \psi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\psi_2}{(|v_{\epsilon}| + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^+)^{\alpha_2} \psi_2.$$

quando  $m \rightarrow +\infty$ , para quaisquer  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ . Portanto, do corolário anterior e das convergências anteriores, o par  $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon})$  satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \nabla \psi_1 = \int_{\Omega} \frac{\psi_1}{(|u_{\epsilon}| + \epsilon)^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} (v_{\epsilon}^+)^{\gamma_1} \psi_1,$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\epsilon} \nabla \psi_2 = \int_{\Omega} \frac{\psi_2}{(|v_{\epsilon}| + \epsilon)^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} (u_{\epsilon}^+)^{\alpha_2} \psi_2,$$

para todo  $\psi_1, \psi_2 \in U_k$ , como queríamos mostrar.  $\square$

**Teorema 3.11.** *Sejam  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ . Então, para cada  $\epsilon > 0$  o problema [\(P2 \$\_{\epsilon}\$ \)](#) possui solução fraca não negativa.*

*Demonstração.* Com argumentos análogos ao Teorema [2.13](#), concluímos que  $u_{\epsilon}$  e  $v_{\epsilon}$  satisfazem

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon} = \frac{1}{(u_{\epsilon} + \epsilon)^{\alpha_1}} + v_{\epsilon}^{\gamma_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v_{\epsilon} = \frac{1}{(v_{\epsilon} + \epsilon)^{\gamma_2}} + u_{\epsilon}^{\alpha_2} & \text{em } \Omega, \\ u_{\epsilon}, v_{\epsilon} \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_{\epsilon} = v_{\epsilon} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

fracamente, para cada  $\epsilon > 0$  com queríamos mostrar.  $\square$

O teorema anterior assegura que o problema [\(P2 \$\_{\epsilon}\$ \)](#) possui pelo menos uma solução fraca para cada  $\epsilon > 0$ . De maneira análoga ao capítulo anterior, é possível considerarmos  $u_{\epsilon}, v_{\epsilon} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  (vide Trudinger et al. [\[12\]](#) e Alves et al. [\[2\]](#)) para cada  $\epsilon > 0$ , e assim concluir sua positividade através do Princípio de Máximo Forte para funções  $C^2(\Omega)$ .

**Teorema 3.12.** *Sejam  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ . Então, o problema [\(P2 \$\_{\epsilon}\$ \)](#) possui uma solução clássica, para cada  $\epsilon > 0$ .*

*Demonstração.* Análogo a prova do Teorema [2.14](#).  $\square$

### 3.3 Existência de uma Solução para (P2)

Repetindo os argumentos do capítulo anterior, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  solução de (P2 $_\epsilon$ ). Em particular, para  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ , tomemos  $(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n}) = (u_n, v_n)$  satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} + v_n^{\gamma_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v_n = \frac{1}{(v_n + \frac{1}{n})^{\gamma_2}} + u_n^{\alpha_2} & \text{em } \Omega, \\ u_n, v_n > 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P2}_n)$$

em que

$$\|(u_n, v_n)\|_E \leq r, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad (3.12)$$

e para  $r > 0$  encontrado na demonstração do Lema 3.7.

Usando a primeira autofunção do problema do Exemplo 1.15, podemos encontrar  $\Phi, \Psi \in C^2(\bar{\Omega})$  soluções para os problemas

$$\begin{cases} -\Delta \Phi \leq \frac{1}{\Phi^{\alpha_1}} & \text{em } \Omega, \\ \Phi > 0 & \text{em } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta \Psi \leq \frac{1}{\Psi^{\gamma_2}} & \text{em } \Omega, \\ \Psi > 0 & \text{em } \Omega, \\ \Psi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que  $\alpha_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ . De fato, suponhamos  $\varphi$  a autofunção associada ao autovalor  $\lambda_1$  que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \lambda_1 \varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Caso  $\lambda_1 < 1$ , tomemos a constante  $c_0 := \frac{1}{\sup_{\bar{\Omega}} \varphi}$ . Assim, temos

$$(c_0)(-\Delta \varphi) = -\Delta(c_0 \varphi) = c_0 \lambda_1 \varphi < c_0 \varphi \leq (c_0 \varphi)^{\alpha_1} \leq \frac{1}{(c_0 \varphi)^{\alpha_1}},$$

em  $\Omega$ . Logo,

$$\begin{cases} -\Delta(c_0 \varphi) \leq \frac{1}{(c_0 \varphi)^{\alpha_1}} & \text{em } \Omega, \\ c_0 \varphi > 0 & \text{em } \Omega, \\ c_0 \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Caso  $\lambda_1 \geq 1$ , tomemos  $c_1 := \frac{1}{\lambda_1 \sup_{\bar{\Omega}} \varphi}$ . De maneira análoga ao caso anterior temos

$$-\Delta(c_1\varphi) = c_1\lambda_1\varphi \leq (c_1\lambda_1\varphi)^{\alpha_1} \leq \frac{1}{(c_1\lambda_1\varphi)^{\alpha_1}} \leq \frac{1}{(c_1\varphi)^{\alpha_1}}$$

em  $\Omega$ . Consequentemente

$$\begin{cases} -\Delta(c_1\varphi) \leq \frac{1}{(c_1\varphi)^{\alpha_1}} & \text{em } \Omega, \\ c_1\varphi > 0 & \text{em } \Omega, \\ c_1\varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações de  $(P2_n)$ , temos

$$-\Delta u_n \geq \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} \quad \text{e} \quad -\Delta v_n \geq \frac{1}{(v_n + \frac{1}{n})^{\gamma_2}}.$$

Como  $\alpha_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ , pelas desigualdades anteriores obtemos

$$u_n + \frac{1}{n} \geq \Phi \quad \text{e} \quad v_n + \frac{1}{n} \geq \Psi, \quad (\star)$$

em  $\bar{\Omega}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , (veja por exemplo a prova do Teorema 2.2 em Ambrosetti, Brezis e Cerami [3]).

**Observação 3.13.** As sequências  $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$  e  $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$  são limitadas em  $H_0^1(\Omega)$ . De fato, por (3.12) concluímos que  $(u_n, v_n)_{n=1}^{+\infty}$  é limitada em  $E$ .

Dessa maneira, pela Proposição 1.48, a menos de uma subsequência, temos

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ e } v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ u_n \rightarrow u \text{ e } v_n \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega), \\ u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ e } v_n(x) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \quad (C4)$$

para algum par  $(u, v) \in E$ .

Das convergências anteriores e de  $(\star)$ , podemos concluir que

$$u(x) \geq \Phi(x) \quad \text{e} \quad v(x) \geq \Psi(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (\star\star)$$

Consequentemente,  $u(x) > 0$  e  $v(x) > 0$  q.t.p. em  $\Omega$ .

**Lema 3.14.** Se  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , então existe um par  $(u, v) \in E$  que satisfaz

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \zeta_1 = \int_{\Omega} \frac{\zeta_1}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \zeta_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \zeta_2 = \int_{\Omega} \frac{\zeta_2}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\alpha_2} \zeta_2, \end{cases}$$

para todo  $\zeta_1, \zeta_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ .

*Demonstração.* Consideremos o par  $(u_n, v_n)$  solução no sentido clássico de  $(P2_n)$ . Consequentemente, são também soluções fracas

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v_n^{\gamma_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_2}{(v_n + \frac{1}{n})^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u_n^{\alpha_2} \varphi_2, \end{cases}$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ . O sistema anterior também vale em particular para quaisquer  $\zeta_1, \zeta_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ , isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \zeta_1 = \int_{\Omega} \frac{\zeta_1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v_n^{\gamma_1} \zeta_1,$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \zeta_2 = \int_{\Omega} \frac{\zeta_2}{(v_n + \frac{1}{n})^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u_n^{\alpha_2} \zeta_2.$$

Da primeira convergência de  $(C4)$ , temos

$$\langle u_n, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle u, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ . Logo, em particular

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \zeta_1 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \zeta_1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \zeta_2 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \zeta_2,$$

para todo  $\zeta_1, \zeta_2 \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ .

Notemos que

$$\frac{\zeta_1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}}(x) \rightarrow \frac{\zeta_1}{u^{\alpha_1}}(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Mais ainda, como

$$\left| \frac{\zeta_1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} \right| \leq \frac{|\zeta_1|}{\Phi^{\alpha_1}} \quad \text{e} \quad \frac{|\zeta_1|}{\Phi^{\alpha_1}} \in L^1(\Omega), \quad \forall \zeta_1 \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_{\Omega} \frac{\zeta_1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\zeta_1}{u^{\alpha_1}}, \quad \forall \zeta_1 \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para segunda parcela, como vale

$$v_n^{\gamma_1} \zeta_1(x) \rightarrow v^{\gamma_1} \zeta_1(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

usando o Teorema  $(1.29)$  e argumentos análogos ao Lema  $(2.12)$ , temos

$$\int_{\Omega} v_n^{\gamma_1} \zeta_1 \rightarrow \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \zeta_1, \quad \forall \zeta_1 \in C_0^\infty(\Omega).$$

Analogamente, obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\zeta_2}{(v_n + \frac{1}{n})^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u_n^{\alpha_2} \zeta_2 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\zeta_2}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\alpha_2} \zeta_2, \quad \forall \zeta_2 \in C_0^{\infty}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \zeta_1 = \int_{\Omega} \frac{\zeta_1}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \zeta_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \zeta_2 = \int_{\Omega} \frac{\zeta_2}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\alpha_2} \zeta_2, \end{cases}$$

para todo  $\zeta_1, \zeta_2 \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , como queríamos mostrar.  $\square$

**Lema 3.15.** *Se  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , então existem  $u, v$  que satisfazem*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \varphi_1, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_2}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\alpha_2} \varphi_2, \end{cases}$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ . Mais ainda,  $(u, v)$  é solução fraca não-negativa de [\(P2\)](#).

*Demonstração.* Da primeira convergência de [\(C4\)](#), temos

$$\langle u_n, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle u, \omega \rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ . Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2,$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

Do lema anterior, temos

$$\int_{\Omega} \frac{\zeta}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v_n^{\gamma_1} \zeta \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\zeta}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \zeta,$$

para todo  $\zeta \in C_0^{\infty}(\Omega)$ . Daí, dado  $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$  existe uma sequência  $(\zeta_n)_{n=1}^{+\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$  tal que

$$\|\zeta_n - \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Daí,

$$\left\| \left( \frac{\zeta_n}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \zeta_n \right) - \left( \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \varphi_1 \right) \right\|_1 \leq \left\| \frac{\zeta_n - \varphi_1}{u^{\alpha_1}} \right\|_1 + \|v^{\gamma_1} (\zeta_n - \varphi_1)\|_1$$

Dessa maneira, por [\(\\*\\*\)](#) e pela desigualdade de Hölder (usando os expoentes conjugados  $\frac{2}{\gamma_1}$  e  $\frac{2}{2-\gamma_1}$ ), temos também

$$\left\| \left( \frac{\zeta_n}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \zeta_n \right) - \left( \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \varphi_1 \right) \right\|_1 \leq \left\| \frac{\zeta_n - \varphi_1}{\Phi^{\alpha_1}} \right\|_1 + \|v\|_2^{\gamma_1} \|\zeta_n - \varphi_1\|_{\frac{2}{2-\gamma_1}}$$

Pela segunda convergência de (C4) e pelo Corolário 1.41, existem constantes  $M_1, M_2 > 0$  tais que

$$\|v\|_2 \leq M_1 \quad \text{e} \quad \|\omega\|_{\frac{2}{2-\gamma_1}} \leq M_2 \|\omega\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\left\| \left( \frac{\zeta_n}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \zeta_n \right) - \left( \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \varphi_1 \right) \right\|_1 \leq M_1 M_2 \|\zeta_n - \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por hipótese  $\alpha_1 \in (0, 1)$ , munido deste fato consideremos

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1 - \alpha_1}{N}$$

(em que  $N$  é a dimensão de  $\mathbb{R}^N$ ). Dessa maneira,  $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  e

$$\left\| \left( \frac{\zeta_n}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \zeta_n \right) - \left( \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \varphi_1 \right) \right\|_1 \leq \left\| \frac{\zeta_n - \varphi_1}{\Phi^{\alpha_1}} \right\|_q + M_1 M_2 \|\zeta_n - \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pela desigualdade Hardy, existe  $M > 0$  tal que

$$\left\| \left( \frac{\zeta_n}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \zeta_n \right) - \left( \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} \varphi_1 \right) \right\|_1 \leq M \|\zeta_n - \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} + M_1 M_2 \|\zeta_n - \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\int_{\Omega} \frac{\zeta_n}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \zeta_n \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}} + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \varphi_1,$$

para qualquer  $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ . De maneira análoga, temos

$$\int_{\Omega} \frac{\zeta_n}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\gamma_1} \zeta_n \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\varphi_2}{v^{\gamma_2}} + \int_{\Omega} u^{\gamma_1} \varphi_2,$$

para qualquer  $\varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ .

Portanto, obtemos um par  $(u, v) \in E$  que satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_1}{u^{\alpha_1}}(x) dx + \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \varphi_1(x) dx,$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi_2 = \int_{\Omega} \frac{\varphi_2}{v^{\gamma_2}}(x) dx + \int_{\Omega} u^{\alpha_2} \varphi_2(x) dx,$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$  como queríamos mostrar.

Notemos que,

$$\int_{\Omega} \nabla(-u) \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u^{\alpha_1}} - \int_{\Omega} v^{\gamma_1} \varphi \leq 0.$$

para todo  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  que  $\varphi \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Logo,  $-u$  é fracamente sub-harmônica e

pelo o Princípio do Máximo Fraco para funções fracamente sub-harmônicas, temos

$$-u \leq \sup_{\Omega}(-u) \leq \sup_{\partial\Omega}(-u)^+ = 0,$$

isto é,  $u_{\epsilon} \geq 0$  em  $\Omega$ . De maneira análoga,  $v \geq 0$  em  $\Omega$ . Unindo isto a  $(\star\star)$ , temos

$$u_{\epsilon} \geq 0 \text{ em } \Omega, \quad u > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$v_{\epsilon} \geq 0 \text{ em } \Omega, \quad v > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Portanto, o par  $(u, v)$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^{\alpha_1}} + v^{\gamma_1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{v^{\gamma_2}} + u^{\alpha_2} & \text{em } \Omega, \\ u, v \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

fracamente. □

**Teorema 3.16.** *Se  $\alpha_i, \gamma_i \in (0, 1)$ , então  $(P2)$  possui solução clássica.*

*Demonstração.* De maneira análoga ao Teorema 3.12, pela Teoria da Regularidade Elíptica é possível concluir que  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  (Alves et al. [2], Gilbarg e Trudinger [12]) e usando o Corolário 1.51 concluimos  $u, v > 0$ . □

# Referências Bibliográficas

- [1] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, J. V. A. Gonçalves - *Existence of Solutions for Some Classes of Singular Hamiltonian Systems*, Advanced Nonlinear Studies **5**, (2005), 265-278.
- [2] C. O. Alves, J. V. Gonçalves, L.A. Maia - *Singular Nonlinear Elliptic Equations in  $\mathbb{R}^n$* , Abstract and Applied Analysis **3** (1998), 411-423.
- [3] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami - *Combined Effects Concave and Convex Nonlinearities in some Elliptic Problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519-543.
- [4] R. J. Biezuner - *Notas de Aula, Equações Diferenciais Parciais I/II*, 2010.
- [5] R. J. Biezuner - *Notas de Aula, Análise Funcional*, 2009.
- [6] G. Botelho, D. Pelegrino, E. Teixeira - *Fundamentos de Análise Funcional*, Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [7] H. Brezis - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York, 2010.
- [8] H. Brezis, L. Oswald - *Remarks on Sublinear Elliptic Equations*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 55-64.
- [9] A. Callegari, A. Nachman - *A Nonlinear Singular Boundary Value Problem in the Theory of Pseudoplastic Fluids*, SIAM J. Appl. Math. **38** (1980), 275-282.
- [10] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, L. Tartar - *On a Dirichlet Problem with Singular Nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), 193-222.
- [11] M. Ghergu, V. Radulescu - *Sublinear Singular Elliptic Problems with Two Parameters*, J. Differential Equations **195** (2003), 520-536.
- [12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1977.
- [13] E. Hewitt, K. Stromberg - *Real and Abstract Analysis*, Springer New York, 1965.
- [14] S. Kesavan - *Topics in Functional Analysis and Applications*, New Age International, 2003.
- [15] A. V. Lair e A. W. Shaker - *Classical and Weak Solutions of a Singular Semilinear Elliptic Problem*, J. Math. Anal. Appl. **211**, (1997), 193-222.

- 
- [16] J. L. Lions - *Quelques Methodes de Resolution des Probléms aux Limites non Linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [17] B. C. Low - *Resistive Diffusion of Force-Free Magnetic Fields in a Passive Medium-I*, *Astrophysics J.* 181 (1973), 209-226.
- [18] B. C. Low - *Nonlinear Classical Diffusion in a Contained Plasma*, *Phys. Fluids* 25 (1973), 402-407.
- [19] L. A. Medeiros, M. Milla Miranda - *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000.
- [20] C. A. Stuart - *Existence and Approximation of Solutions of Non-linear Elliptic Equations*, *Math Z.* **147**, (1976), 53-63.
- [21] Y. Sun, S. Wu, Y. Long - *Combined Effects of Singular and Superlinear Nonlinearities in Some Singular Boundary Value problems*, *J. Differential Equations* 176 (2001), 511-531.
- [22] D. V. Tausk - *Notas Para o Curso de Medida e Integração*, <https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/NotasMedida.pdf>
- [23] J. S. W. Wong - *On the Generalized Emden-Fowler Equation*, *SIAM Rev.* 17 (1975), 339-360.