

BRUNA APARECIDA VIEIRA ALMEIDA

**FLUXOS ANOSOV DE CODIMENSÃO UM EM VARIEDADES  
COMPACTAS COM BORDO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2019

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

A447f  
2019  
Almeida, Bruna Aparecida Vieira, 1994-  
Fluxos Anosov de codimensão um em variedades  
compactas com bordo / Bruna Aparecida Vieira Almeida. –  
Viçosa, MG, 2019.  
vii, 58f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Bulmer Mejía García.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f.57-58.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Variedades  
diferenciais. 3. Equações diferenciais hiperbólicas.  
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de  
Matemática. Mestrado em Matemática. II. Título.

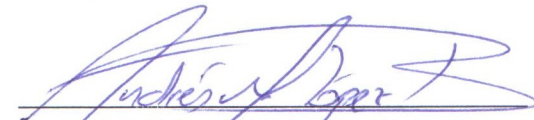
CDD 22 ed. 515.3

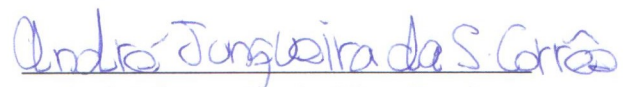
BRUNA APARECIDA VIEIRA ALMEIDA

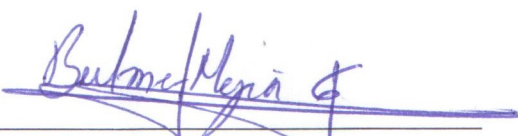
FLUXOS ANOSOV DE CODIMENSÃO UM EM VARIEDADES  
COMPACTAS COM BORDO

Dissertação apresentada à Universidade  
Federal de Viçosa, como parte das  
exigências do Programa de Pós-Graduação  
em Matemática, para obtenção do título de  
*Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de fevereiro de 2019.

  
Andrés Mauricio López Barragán

  
André Junqueira da Silva Corrêa

  
Bulmer Mejía García  
(Orientador)

*Dedico este trabalho à minha mãe Maria Aparecida  
e à minha irmã Simone,  
com amor e carinho.*

E guardemos a certeza pelas  
próprias dificuldades já superadas  
que não há mal que dure para  
sempre.

---

Chico Xavier

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida, pelo cuidado e pela oportunidade de ter chegado até aqui.

Agradeço a minha estimada família, em especial a minha mãe e ao meu saudoso pai, por todo amor e principalmente pelo apoio incondicional e sacrifício ao longo destes anos.

Sou muitíssimo grata ao meu orientador Bulmer pela sabedoria, compreensão, incentivo e atenção dedicadas a mim sempre com carinho e muita paciência.

Agradeço aos meus amigos do mestrado e da graduação que torceram por mim e me apoiaram, em especial a Verônica pela amizade, pelos momentos de estudos e descontração.

Agradeço ao Arthur pelo carinho, incentivo, paciência e por ter sido meu apoio nos momentos que mais precisei.

Agradeço a todos os professores e funcionários do DMA-UFV que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta dissertação.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Resumo

ALMEIDA, Bruna Aparecida Vieira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Fluxos Anosov de codimensão um em variedades compactas com bordo**. Orientador: Bulmer Mejía García. Coorientador: Enoch Humberto Apaza Calla.

Fluxos Anosov de codimensão um têm sido objeto de estudo frequente em Sistemas Dinâmicos. Gerando, entre outras linhas de pesquisa recentes, a hiperbolicidade parcial, a decomposição dominada e os fluxos pseudo-Anosov. No presente trabalho, nosso objetivo principal é mostrar que se  $M$  é uma variedade compacta com bordo então  $M$  não suporta fluxos Anosov de codimensão um. Este resultado foi provado por Aguilar, Apaza e Morales no artigo [1].

# Abstract

ALMEIDA, Bruna Aparecida Vieira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **Nonexistence of codimension one Anosov flows on compact manifolds with boundary.** Adviser: Bulmer Mejía García. Co-adviser: Enoch Humberto Apaza Calla.

Anosov flows of codimension one have been the object of frequent study in Dynamic Systems. Generating, among others recent lines of research, partial hyperbolicity, dominated decomposition and pseudo-Anosov flows. In the present work, our main goal is to show that if  $M$  is a compact manifold with boundary then  $M$  does not support Anosov flows of codimension one. This result was proved by Aguilar, Apaza and Morales in article [1].

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>                                    | <b>1</b>  |
| <b>1 Conceitos Preliminares</b>                      | <b>3</b>  |
| 1.1 Noções sobre Variedades Diferenciáveis . . . . . | 3         |
| 1.1.1 Diferenciabilidade entre Variedades . . . . .  | 11        |
| 1.1.2 Espaço Tangente . . . . .                      | 13        |
| 1.1.3 Variedade Riemanniana . . . . .                | 16        |
| 1.1.4 Imersão e Submersão . . . . .                  | 17        |
| 1.2 Noções de Sistemas Dinâmicos . . . . .           | 18        |
| 1.2.1 Difeomorfismo Anosov . . . . .                 | 27        |
| 1.3 Folheações . . . . .                             | 29        |
| 1.4 Sombreamento . . . . .                           | 33        |
| <b>2 Fluxos Anosov</b>                               | <b>35</b> |
| 2.1 Teorema da Variedade Estável . . . . .           | 35        |
| 2.2 Fluxo Anosov: Propriedades e Exemplos . . . . .  | 39        |
| 2.2.1 Aplicação de Poincaré . . . . .                | 43        |
| <b>3 Teorema Principal</b>                           | <b>46</b> |
| 3.1 Resultados Auxiliares . . . . .                  | 46        |
| 3.2 Prova do Teorema Principal . . . . .             | 55        |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                          | <b>56</b> |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                    | <b>57</b> |

# Introdução

Os fluxos Anosov têm um papel importante no desenvolvimento e compreensão da teoria de sistemas dinâmicos diferenciáveis. Essa importância decorre de vários motivos, um deles é por se tratar de sistemas com hiperbolicidade global, além disso, possuem conexões com diversas outras áreas de pesquisa em matemática, como topologia diferenciável, geometria, folheações, entre outras.

A noção precisa de fluxos Anosov foi introduzida por Dmitri Anosov na década de 60. Ele propõe os Y-flows. No início da década de 70 o trabalho de Alberto Verjovsky levantou questões importantes sobre fluxos Anosov em variedades de dimensão 3. Alberto Verjovsky conjecturou e provou que fluxos Anosov de codimensão um em variedades fechadas de dimensão maior ou igual a 3 são transitivos. No entanto, pouco tempo depois foi encontrado um contra exemplo de um fluxo em dimensão igual a 3 que não era transitivo. Mais tarde, em sua tese de doutorado no ano de 1992, Thierry Barbot dá outra demonstração do resultado provado por Verjovsky que vale para dimensões maiores ou iguais a 4.

Neste trabalho, estamos interessados em fluxos Anosov de codimensão um. Nossos sistemas terão como ambiente variedades compactas com bordo. Sejam  $M$  uma variedade compacta com bordo e  $\phi_t : M \rightarrow M$  um fluxo Anosov. Isto significa que  $M$  é um conjunto hiperbólico, ou seja, existe uma decomposição contínua do fibrado tangente  $TM$  em subfibrados  $E_M^s$ ,  $E_M^o$  e  $E_M^u$  invariantes pela derivada do fluxo, onde  $E_M^o$  é a direção do fluxo,  $E_M^s$  e  $E_M^u$  são os subfibrados de contração e expansão de  $TM$ , respectivamente. Um fluxo Anosov terá codimensão um se sua decomposição hiperbólica  $TM = E_M^s \oplus E_M^o \oplus E_M^u$  satisfizer  $\dim(E_M^s) = 1$  ou  $\dim(E_M^u) = 1$ .

Esta dissertação tem como base o artigo *Nonexistence of codimension one Anosov flows on compact manifolds with boundary* de I. W. Aguilar, E. H. Apaza e C. A. Morales, publicado no Journal of Differential Equations, no ano de 2005 cujo objetivo principal é provar o seguinte teorema:

**Teorema:** Não existem fluxos Anosov de codimensão um em variedades compactas com bordo.

Este trabalho está organizado em capítulos, os quais descrevemos brevemente:

No capítulo 1 nos dedicamos a apresentar ao leitor conceitos e resultados para o entendimento do trabalho, o qual está estruturado em quatro seções que, em linhas gerais, abordam os seguintes temas: noções de variedades diferenciáveis e conceitos de sistemas dinâmicos. As principais referências deste capítulo foram

[4], [5], [8], [9], [12], [13] e [14].

No segundo capítulo apresentamos os fluxos Anosov definidos em variedades fechadas. Tratamos das variedades estáveis e instáveis e enunciamos o teorema que justifica sua existência. Além disso, apresentamos algumas propriedades de fluxo Anosov para uso ao longo do próximo capítulo e a suspensão de um difeomorfismo no toro como exemplo de fluxo Anosov. Este capítulo teve como principais fontes as referências [7] e [8].

No terceiro capítulo apresentamos os principais lemas que serão úteis para a demonstração do teorema principal deste trabalho, baseado em [1].

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos e resultados necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. Além disso, fixaremos a notação que será utilizada ao longo do trabalho. Tem-se como principal objetivo ajudar o leitor a se familiarizar com conceitos e resultados básicos que são fundamentais para o nosso trabalho.

### 1.1 Nocões sobre Variedades Diferenciáveis

Variedade diferenciável é um conceito importantíssimo no estudo de sistemas dinâmicos diferenciáveis, geometria e topologia. Nesta seção vamos definir conceitos e apresentar alguns resultados básicos sobre variedades diferenciáveis (pois esses são os ambientes dos nossos sistemas dinâmicos), os quais podem ser encontrados em [5], [9] e [12].

**Definição 1.1.** *Uma topologia sobre um conjunto  $M$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $M$  satisfazendo às seguintes propriedades:*

1.  $\emptyset$  e  $M$  estão em  $\tau$ .
2. A união dos elementos de qualquer subcoleção de  $\tau$  está em  $\tau$ .
3. A interseção dos elementos de qualquer subcoleção finita de  $\tau$  está em  $\tau$ .

*Um conjunto  $M$  munido de uma topologia  $\tau$  (fixada) é chamado **espaço topológico**.*

*Um subconjunto  $A \subset M$  é um conjunto **aberto** do espaço topológico  $M$  se, e somente se,  $A \in \tau$ .*

**Exemplo 1.2.** *a) Seja  $X$  um conjunto qualquer. A coleção  $\tau = \mathcal{P}(X)$  de todos os subconjuntos de  $X$  é uma topologia sobre  $X$ , conhecida como Topologia Discreta.*

*Qualquer subconjunto de  $X$  é aberto na Topologia Discreta.*

b) Seja  $X$  um conjunto qualquer. A coleção  $\tau = \{\emptyset, X\}$  é uma topologia sobre  $X$ , conhecida como *Topologia Caótica*.  
Os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são os únicos abertos de  $X$  na *Topologia Caótica*.

c) Seja  $X = \{a, b, c, d\}$ .

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$  é uma topologia sobre  $X$ .

$\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$  é uma topologia sobre  $X$ .

$\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$  não é uma topologia sobre  $X$ .

$\tau_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$  é uma topologia sobre  $X$ .

A seguir, vamos lembrar rapidamente o que é uma métrica e um espaço métrico.

**Definição 1.3.** Uma **métrica** sobre um conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in X$  um número real  $d(x, y)$  chamado *distância de  $x$  a  $y$* , de modo que se tenha, para todos  $x, y, z \in X$ :

$$d.1) \quad d(x, x) = 0$$

$$d.2) \quad \text{Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0$$

$$d.3) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Simetria})$$

$$d.4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Desigualdade Triangular})$$

Um conjunto  $X$  munido de uma métrica  $d$  (fixada) é chamado **espaço métrico**.

**Exemplo 1.4.** a) *Métrica Discreta:*

Seja  $X$  um conjunto qualquer,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\begin{cases} d(x, x) = 0 \\ d(x, y) = 1 \text{ se } x \neq y \end{cases}$   
é uma métrica em  $X$ , conhecida como *Métrica Discreta*.

b) *Métrica da Soma em  $\mathbb{R}^n$ :*

O conjunto  $\mathbb{R}^n$  das  $n$ -uplas de números reais admite uma métrica dada por  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Vamos mostrar a condição (d.4). Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Temos

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + \dots + |x_n - z_n| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| + \dots + |x_n - y_n + y_n - z_n| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| + \dots + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|) + (|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| + \dots + |y_n - z_n|) \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Para o próximo resultado é necessário a seguinte definição:

**Definição 1.5.** Sejam  $(M, d_M)$  e  $(N, d_N)$  espaços métricos. Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uma **contração**, se existe  $0 < \lambda < 1$  tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq \lambda d_M(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

O seguinte teorema é bem conhecido e o enunciamos sem demonstração. A prova pode ser encontrada em [10].

**Teorema 1.6. (Ponto fixo para contrações)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $f : M \rightarrow M$  uma contração. Então existe um único ponto fixo de  $f$ , isto é, existe um único  $p \in M$  tal que  $f(p) = p$ .*

**Definição 1.7.** *Um espaço topológico  $M$  é dito ser um **espaço de Hausdorff** se, e somente se, para cada par de pontos distintos  $x, y \in M$  é possível obter abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $x \in U$  e  $y \in V$ .*

**Exemplo 1.8.** a) *Qualquer espaço topológico discreto é um espaço de Hausdorff.*

b) *O espaço  $X = \{0, 1, 2\}$  com a topologia  $\{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}, X\}$  não é Hausdorff: os pontos 0 e 2 podem ser separados um do outro mas não do ponto 1.*

**Definição 1.9.** *Um espaço topológico  $M$  possui **base enumerável de abertos** se existe uma coleção enumerável de abertos de  $M$  tal que todo aberto é a união de abertos dessa coleção.*

**Definição 1.10.** *Um subconjunto  $V$  de um espaço topológico  $M$  diz-se uma **vizinhança** do ponto  $x \in M$  se existe um aberto  $A$  tal que  $x \in A \subseteq V$ .*

**Definição 1.11.** *Um subconjunto  $F$  de um espaço topológico  $M$  é dito ser **fechado** se, e somente se, o conjunto  $A = M \setminus F$  é aberto.*

**Definição 1.12.** *Seja  $M$  um espaço topológico. Dado um subconjunto  $B \subset M$ , definimos o **fecho** de  $B$ , denotado por  $cl(B)$ , como a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm  $B$ .*

**Definição 1.13.** *Um subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $M$  é dito **denso** em  $M$  se o fecho de  $S$  é igual a  $M$ . Equivalentemente,  $S$  é denso em  $M$  se qualquer vizinhança de qualquer ponto de  $M$  contém um elemento de  $S$ .*

**Definição 1.14.** *Uma **variedade topológica** de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $M$  com as seguintes propriedades:*

1.  *$M$  é um espaço topológico de Hausdorff.*
2.  *$M$  tem uma base enumerável de abertos.*
3.  *$M$  é localmente euclidiano: para qualquer ponto  $p \in M$  existem abertos  $U \subset M$  contendo  $p$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow A$ , em outras palavras, cada ponto  $p \in M$  possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definição 1.15.** *Sejam  $M$  uma variedade topológica e  $U \subset M$  aberto tal que  $p \in U$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $\phi : U \rightarrow A$  um homeomorfismo. O par  $(U, \phi)$  é denominado **carta local** ou **sistema de coordenadas local** de  $M$  em  $p$  e  $U$  é denominado **vizinhança coordenada**.*

Às vezes, diremos que a aplicação  $\phi : U \rightarrow A$ , com  $U \subset M$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  abertos e  $p \in U$ , é uma carta local ou um sistema de coordenadas local ao invés de dizer que  $(U, \phi)$  é uma carta local ou um sistema de coordenadas local de  $M$  em  $p$ .

**Definição 1.16.** Um atlas de dimensão  $n$  de  $M$  é uma coleção  $\mathcal{U} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de homeomorfismos, onde  $U_\alpha \subset M$  aberto,  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$ .

Os homeomorfismos:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\beta$$

são chamados de **mudanças de coordenadas**.

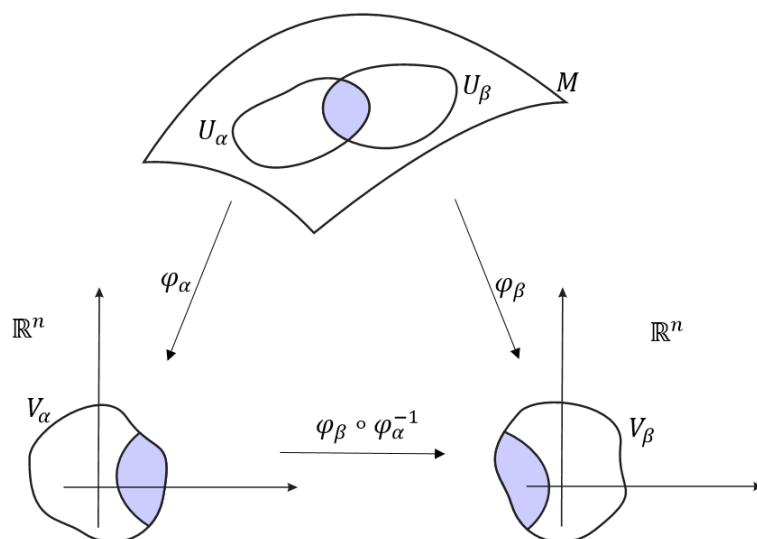


Figura 1.1: Cartas Locais e Mudanças de Coordenadas.

Um atlas  $\mathcal{U}$  é dito de classe  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , se todas as mudanças de coordenadas do atlas  $\mathcal{U}$  são de classe  $C^r$ .

Um sistema de coordenadas  $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $M$  diz-se **admissível** relativamente a um atlas  $\mathcal{U}$  de dimensão  $n$  e classe  $C^r$ ,  $r > 0$ , de  $M$  se para todo  $\phi \in \mathcal{U}$  com  $U \cap W \neq \emptyset$ , onde  $\phi : U \rightarrow A \subset \mathbb{R}^m$ , tem-se que as mudanças de coordenadas  $\phi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \phi^{-1}$  são de classe  $C^r$ . Ou seja,  $\mathcal{U} \cup \{\psi\}$  é também um atlas de classe  $C^r$ .

**Exemplo 1.17.** Seja  $\mathcal{U}$  o atlas de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$  que consiste de uma única carta local  $x = id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o sistema de coordenadas dado por  $z(t) = t^3$ . Então  $z$  não é admissível em relação a  $\mathcal{U}$  pois, embora  $(z \circ x^{-1})(t) = t^3$  seja de classe  $C^\infty$ ,  $(x \circ z^{-1})(t) = t^{\frac{1}{3}}$  não é diferenciável em  $t = 0$ .

Um atlas  $\mathcal{U}$  de dimensão  $n$  e classe  $C^r$ ,  $r > 0$ , de  $M$  é chamado **maximal** quando contém todos os sistemas de coordenadas que são admissíveis em relação a  $\mathcal{U}$ .

Todo atlas de dimensão  $n$  e de classe  $C^r$ ,  $r > 0$ , de  $M$ , pode ser ampliado até se tornar um atlas maximal de classe  $C^r$ , para isso basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

**Definição 1.18.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^r$ ,  $r > 0$ , é um par  $(M, \mathcal{U})$ , onde  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e  $\mathcal{U}$  é um atlas maximal de dimensão  $m$  e classe  $C^r$ .*

De agora em diante, a dimensão de uma variedade  $M$  será denotada por  $\dim(M)$ . Uma variedade unidimensional é chamada de curva e uma variedade bidimensional é chamada de superfície.

Às vezes, denotaremos por  $M^n$  uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$ , isto é, o atlas maximal tem dimensão  $n$ .

**Exemplo 1.19.** *Os espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$  são variedades de dimensão  $n$  e classe  $C^\infty$ , com atlas  $\mathcal{U}$  de classe  $C^\infty$  contendo o único sistema de coordenadas  $\phi = id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

**Exemplo 1.20.** *A esfera  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .*

*De fato, para cada  $i = 1, \dots, n+1$ , considere os semiespaços determinados pelo hiperplano  $x_i = 0$*

$$H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i > 0\} \quad e \quad H_i^- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i < 0\}$$

*e os conjuntos obtidos pela interseção destes hiperplanos com a esfera unitária*

$$U_i^+ = H_i^+ \cap S^n \quad e \quad U_i^- = H_i^- \cap S^n$$

*que são abertos de  $S^n$ .*

*Note que*

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-) = S^n$$

*isto é, estes  $2(n+1)$  abertos são suficientes para cobrir toda a esfera.*

*Desse modo, é suficiente mostrarmos que cada um destes abertos é difeomorfo a um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .*

*Considere então as aplicações,*

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : \quad U_i^\pm &\rightarrow B^n(0, 1) \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

*no qual o  $i$ -ésimo termo é omitido para cada  $i = 1, \dots, n+1$  fixado.*

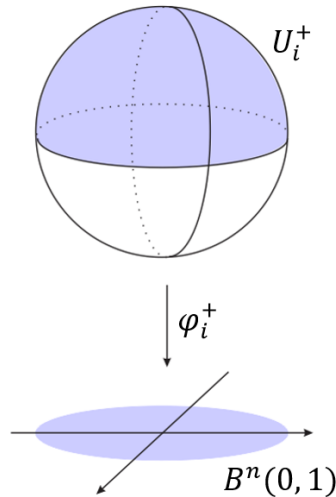
*Provemos apenas que a aplicação  $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow B^n(0, 1)$  é bijetiva. De forma análoga é possível mostrar a bijetividade da aplicação  $\varphi_i^-$ . Com efeito,*

$$\begin{aligned} \varphi_i^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi_i^+(y_1, \dots, y_{n+1}) &\Leftrightarrow \\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}). \end{aligned}$$

Como  $x, y \in S^n$  e  $x_i, y_i > 0$  segue que

$$x_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2)} = \sqrt{1 - (y_1^2 + \dots + y_{i-1}^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_{n+1}^2)} = y_i,$$

mostrando assim a injetividade da aplicação  $\varphi_i^+$ .



Seja  $y \in B^n(0,1)$  um ponto arbitrário da bola aberta e tomemos

$$x = (y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n) \in S^n.$$

Observe que  $x_i = \sqrt{1 - |y|^2} > 0$  e, conseqüentemente,  $x \in U_i^+$ . Logo

$$\varphi_i^+(y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n) = y$$

provando assim que a aplicação  $\varphi_i^+$  é sobrejetora e, portanto, uma bijeção.

Pela construção acima concluímos que

$$\psi_i^\pm(y_1, \dots, y_n) = (\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n).$$

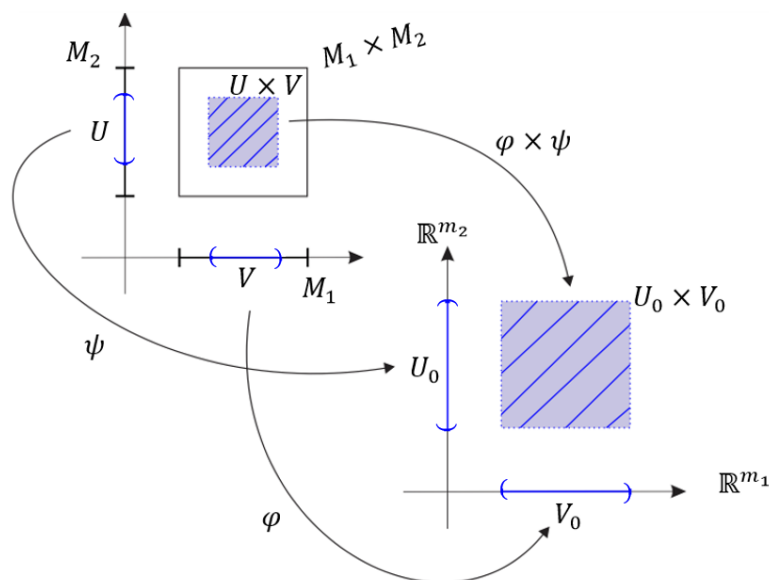
Note que  $\varphi_i^\pm$  e  $\psi_i^\pm$  são aplicações contínuas e diferenciáveis.

Sendo assim, a coleção  $\mathcal{U} = \{\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow B^n(0,1)\}$  é um atlas de dimensão  $n$  de  $M$ , pois  $\varphi_i^\pm$  são homeomorfismos, onde  $U_i^\pm$  são abertos contidos em  $S^n$ ,  $B^n(0,1)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-) = S^n$ .

Como  $S^n$  é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e  $\mathcal{U}$  é um atlas de dimensão  $n$ , então  $S^n$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .

**Exemplo 1.21.** Se  $U \subset M$  é um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$ , então  $U$  é uma variedade diferenciável. Para mostrar isso, é suficiente considerar a restrição dos sistemas de coordenadas locais ao subconjunto aberto  $U$ .

**Exemplo 1.22.** Sejam  $M_1$  uma variedade de dimensão  $m_1$  e  $M_2$  uma variedade de dimensão  $m_2$ . Então  $M_1 \times M_2$  é uma variedade de dimensão  $m_1 + m_2$ . De fato, se  $\varphi : V \rightarrow V_0$  e  $\psi : U \rightarrow U_0$  são cartas locais para  $M_1$  e  $M_2$  respectivamente, então  $V_0 \subset \mathbb{R}^{m_1}$  e  $U_0 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ . Assim a aplicação  $\varphi \times \psi : V \times U \rightarrow V_0 \times U_0$  dada por  $\varphi \times \psi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$  é uma carta local para  $M_1 \times M_2$  e como  $V_0 \times U_0$  é aberto de  $\mathbb{R}^{m_1 + m_2}$  implica que  $M_1 \times M_2$  é uma variedade  $(m_1 + m_2)$ -dimensional.



**Exemplo 1.23.** O toro  $T^2 = S^1 \times S^1$  é uma variedade de dimensão 2. De fato, uma vez que  $S^1$  tem dimensão 1, pelo Exemplo 1.22,  $\dim(T^2) = \dim(S^1) + \dim(S^1)$ , logo  $\dim(T^2) = 2$ .

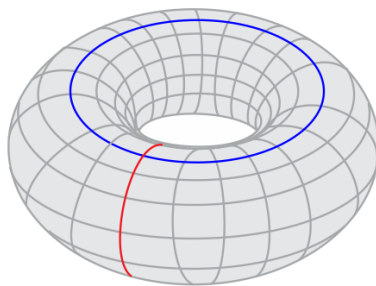


Figura 1.2:  $T^2 = S^1 \times S^1$

**Definição 1.24.** Sejam  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$  o semi-espaço superior e  $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ . Uma **variedade com bordo**, de classe  $C^k$ , é um espaço topológico  $M$ , Hausdorff, com base enumerável de abertos, munido de um atlas  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{H}^n\}$  cujas mudanças de coordenadas são de classe  $C^k$ .

O bordo de  $M$ , denotado por  $\partial M$ , é o conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que existe uma carta  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$  no atlas tal que  $\varphi_i(x) \in \partial\mathbb{H}^n$ . Observe que se  $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$  é uma outra carta, então  $\varphi_j(x)$  também pertence a  $\partial\mathbb{H}^n$ . Assim,  $\partial M$  está bem definido e é uma variedade (sem bordo) de dimensão  $n - 1$ . Quando  $M$  for uma variedade com bordo, escreveremos  $\partial M \neq \emptyset$ .

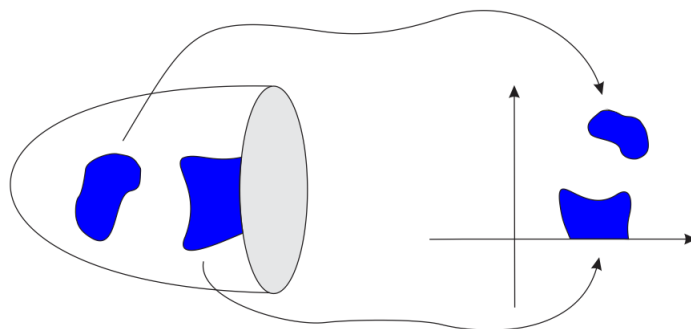


Figura 1.3: Variedade com Bordo

**Exemplo 1.25.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2$ . O conjunto  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) \leq c\}$  é um toro sólido, ou seja, uma variedade compacta tridimensional, cujo bordo é um toro bidimensional ( $\partial M = T^2 = S^1 \times S^1$ ).

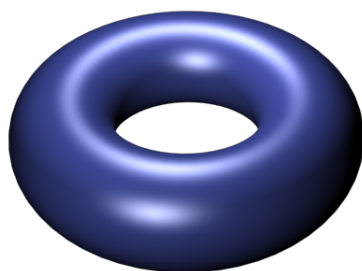
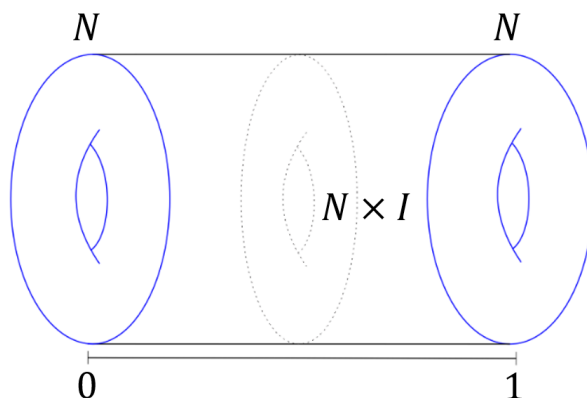


Figura 1.4: Toro Sólido

**Exemplo 1.26.** Considere  $N$  uma variedade sem bordo e  $I = [0, 1]$  então temos que  $N \times I$  é uma variedade com bordo e o bordo é  $\partial(N \times I) = (N \times \{0\}) \cup (N \times \{1\})$ .

A figura abaixo é uma ilustração do Exemplo 1.26 e  $N$  representa uma variedade sem bordo qualquer, não necessariamente um toro.



**Exemplo 1.27.**  $\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  é uma variedade com bordo  $\partial \overline{B^n} = S^{n-1}$ .

**Definição 1.28.** *Uma variedade compacta sem bordo é chamada variedade fechada. Uma variedade não-compacta sem bordo é chamada variedade aberta.*

### 1.1.1 Diferenciabilidade entre Variedades

**Definição 1.29. (Aplicação Diferenciável entre Variedades)** *Dada as variedades diferenciáveis  $M^m$  com atlas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  e  $N^n$  com atlas  $\{\mathcal{V}_\beta, \varphi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$  de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ), dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **diferenciável no ponto**  $p \in M$  se existem cartas locais  $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi_\beta : \mathcal{V}_\beta \rightarrow \psi_\beta(\mathcal{V}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in \mathcal{U}_\alpha \subset M$  e com  $f(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathcal{V}_\beta \subset N$  tais que*

$$f_{(\varphi_\alpha, \psi_\beta)} = \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(\mathcal{V}_\beta)$$

*é diferenciável no ponto  $\varphi_\alpha(p)$ .*

Geralmente, chamamos  $f_{(\varphi_\alpha, \psi_\beta)}$  como a expressão da aplicação  $f$  nas coordenadas ou cartas  $\varphi_\alpha$  e  $\psi_\beta$ .

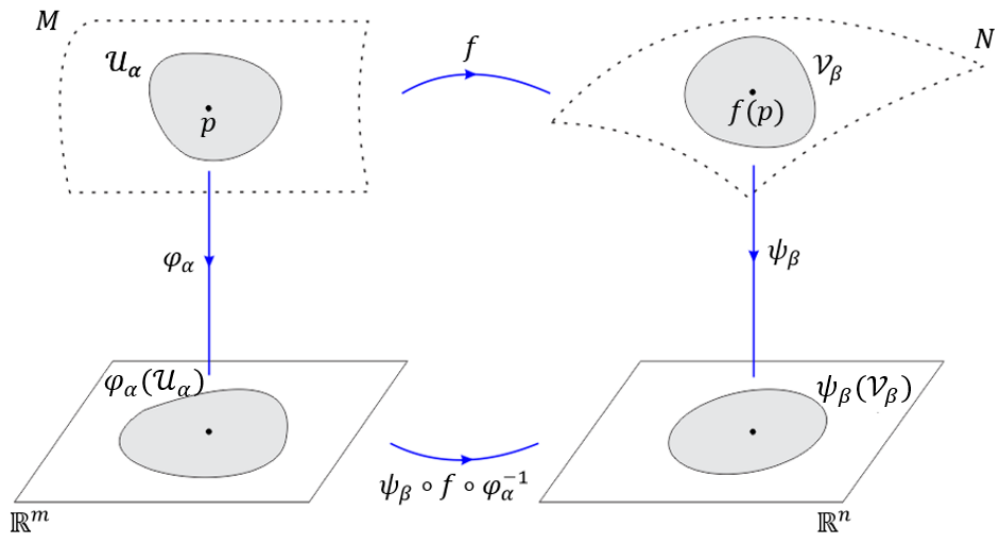


Figura 1.5: Aplicação Diferenciável  $f : M \rightarrow N$  entre  $M$  e  $N$ .

Vale ressaltar que a noção de diferenciabilidade entre variedades independe da escolha das cartas  $\varphi_\alpha$  e  $\psi_\beta$ . Considere as cartas  $\varphi'_\alpha : \mathcal{U}'_\alpha \rightarrow \varphi'_\alpha(\mathcal{U}'_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi'_\beta : \mathcal{V}'_\beta \rightarrow \psi'_\beta(\mathcal{V}'_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  em  $N$  tais que  $p \in \mathcal{U}'_\alpha$  e  $f(\mathcal{U}'_\alpha) \subset \mathcal{V}'_\beta$ . Então

$$\begin{aligned} \psi'_\beta \circ f \circ (\varphi'_\alpha)^{-1} &= \psi'_\beta \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ f \circ (\varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)^{-1} \\ &= \psi'_\beta \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ (\varphi'_\alpha)^{-1} \\ &= \psi'_\beta \circ \psi_\beta^{-1} \circ f_{(\varphi_\alpha, \psi_\beta)} \circ (\varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Como  $\psi'_\beta \circ \psi_\beta^{-1}$  e  $\varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$  são difeomorfismos e  $f_{(\varphi_\alpha, \psi_\beta)}$  é diferenciável em  $\varphi_\alpha(p)$  segue que  $f_{(\varphi_\alpha, \psi_\beta)} = \psi'_\beta \circ f \circ (\varphi'_\alpha)^{-1}$  é diferenciável em  $\varphi'_\alpha(p)$ . Isto significa que a noção de diferenciabilidade entre variedades diferenciáveis está bem definida.

**Definição 1.30.** Dizemos que a aplicação  $f : M \rightarrow N$  descrita como na definição acima é **diferenciável** se  $f$  é diferenciável em cada ponto de  $M$ .

**Definição 1.31.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de classe  $C^r$ ,  $r > 0$ . Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **diferenciável de classe  $C^k$**  ( $k \leq r$ ) para cada ponto  $p \in M$  se existem cartas  $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi_\beta : \mathcal{V}_\beta \rightarrow \psi_\beta(\mathcal{V}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in \mathcal{U}_\alpha \subset M$  e  $f(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathcal{V}_\beta \subset N$  tais que  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi_\beta(\mathcal{V}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^k$ .

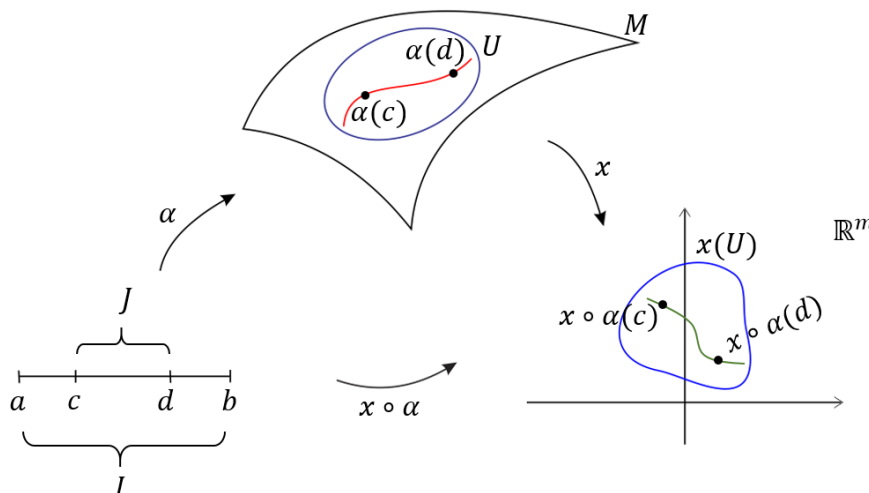
Como as mudanças de coordenadas em  $M$  e  $N$  são difeomorfismos de classe  $C^r$  tem-se que a definição acima não depende da escolha das cartas  $\varphi_\alpha$  e  $\psi_\beta$ .

**Definição 1.32. (Difeomorfismo)** Um **difeomorfismo**  $f : M \rightarrow N$  é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Um difeomorfismo em que ambas  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) é dito **difeomorfismo de classe  $C^k$**  (ou  $C^k$  difeomorfismo).

Se existe um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  dizemos que elas difeomorfam.

**Exemplo 1.33.** As funções reais diferenciáveis são as aplicações diferenciáveis  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Para todo sistema de coordenadas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , a função composta  $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  deve ser uma função diferenciável de  $m$  variáveis reais, definida num aberto  $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ .

**Exemplo 1.34.** Caminhos diferenciáveis em uma variedade  $M$  são aplicações diferenciáveis  $\alpha : I \rightarrow M$ , onde  $I$  é um intervalo aberto da reta real. A condição de diferenciabilidade de  $\alpha$  exige que  $\alpha$  seja contínua e que, dado um sistema de coordenadas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , para todo subintervalo  $J$  tal que  $\alpha(J) \subset U$ , a composta  $x \circ \alpha : J \rightarrow x(U)$  seja um caminho diferenciável em  $\mathbb{R}^m$ .



## 1.1.2 Espaço Tangente

Vamos começar definindo vetores tangentes em um espaço Euclidiano.

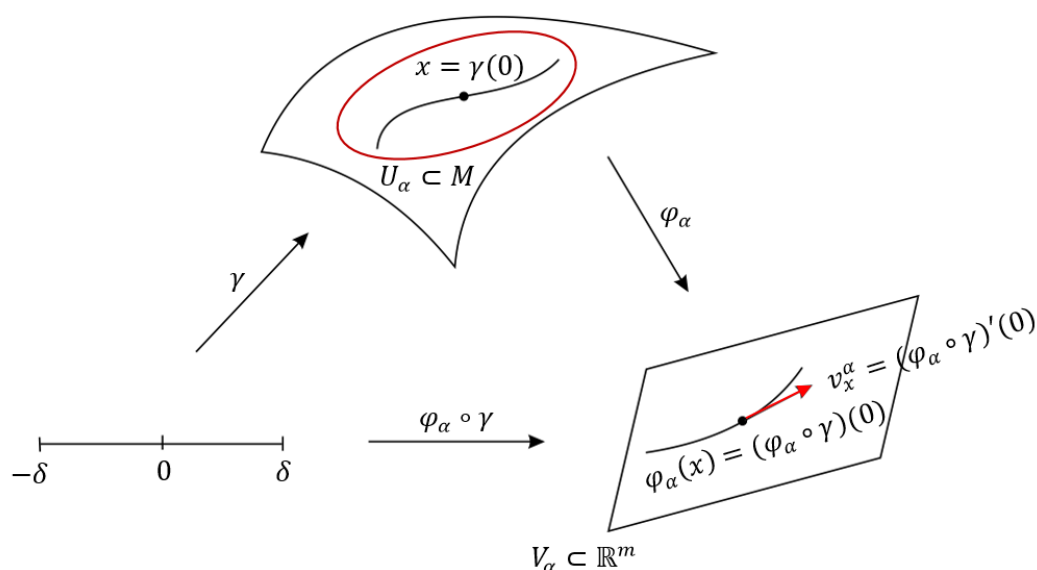
**Definição 1.35.** Fixe um ponto  $x \in \mathbb{R}^m$ . Um **vetor tangente** em  $x$  é um par  $(x, v)$ , onde  $v \in \mathbb{R}^m$ . O par  $(x, v)$  é também denotado por  $v_x$ . O conjunto de todos os vetores tangentes em  $x$  é denotado por  $T_x\mathbb{R}^m$  e é chamado de **espaço tangente** em  $x$ .

O espaço  $T_x\mathbb{R}^m$  é um espaço vetorial onde  $(x, v) + (x, w) = (x, v + w)$  e  $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$ . A união disjunta dos vetores tangentes nos diferentes pontos de  $\mathbb{R}^m$  é chamado **fibrado tangente** de  $\mathbb{R}^m$  e é denotado por  $T\mathbb{R}^m$ . Assim

$$T\mathbb{R}^m = \{(x, v) : x \in \mathbb{R}^m \text{ e } v \text{ é um vetor tangente em } x\} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Para uma variedade  $M$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , precisamos especificar o que significa um vetor ser tangente a um ponto de  $M$ .

Seja  $\gamma : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva  $C^1$  com  $\gamma(0) = x$ . Seja  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  um sistema de coordenadas em  $x$ . Pela definição de diferenciabilidade,  $\varphi_\alpha \circ \gamma(t)$  é  $C^1$ . No sistema de coordenadas o vetor tangente determinado por  $\gamma$  é dado por  $(\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = v_x^\alpha$ .



Se  $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$  é outro sistema de coordenadas em  $x$  então o vetor tangente determinado por  $\gamma$  nesse sistema de coordenadas é dado por  $(\varphi_\beta \circ \gamma)'(0) = v_x^\beta$ .

Note que

$$v_x^\beta = D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_{x^\alpha} v_x^\alpha$$

onde  $x^\alpha = \varphi_\alpha(x)$ . Esses vetores  $v_x^\alpha$  e  $v_x^\beta$  representam o mesmo vetor em diferentes sistemas de coordenadas pois eles representam a derivada das coordenadas representantes da mesma curva.

A derivada de uma curva em uma variedade, ou vetor tangente à curva, é a classe de equivalência de representantes de diferentes sistemas de coordenadas, onde  $v_x^\alpha \sim v_x^\beta$  se  $v_x^\beta = D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_{x^\alpha} v_x^\alpha$ .

Sendo assim, dizemos que um **vetor tangente** a  $M$  em  $x$  é a derivada de uma curva diferenciável em  $x$ . E o **espaço tangente** de  $M$  em  $x$  é o conjunto de todos os vetores tangentes em  $x$  e é denotado por  $T_x M$ . Assim:

$$T_x M = \{v_x : v_x \text{ é a derivada de uma curva diferenciável em } x\}.$$

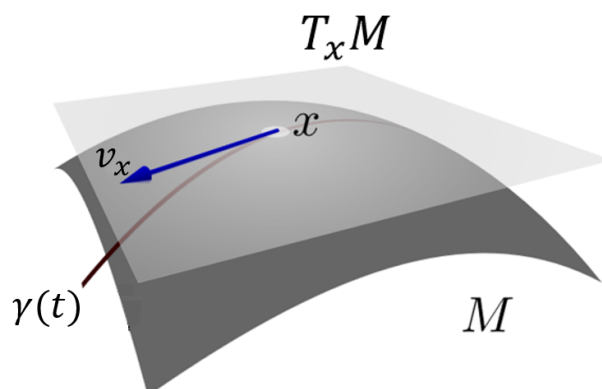


Figura 1.6: Espaço Tangente  $T_x M$ .

Fixado um ponto  $x$  em  $M$  temos que  $T_x M$  é um espaço vetorial (usando a adição em qualquer um dos sistemas de coordenadas em  $x$ ). A união disjunta dos vetores tangentes em todos os pontos de  $M$  dá o **fibrado tangente** da variedade  $M$  que é denotado por  $TM$ :

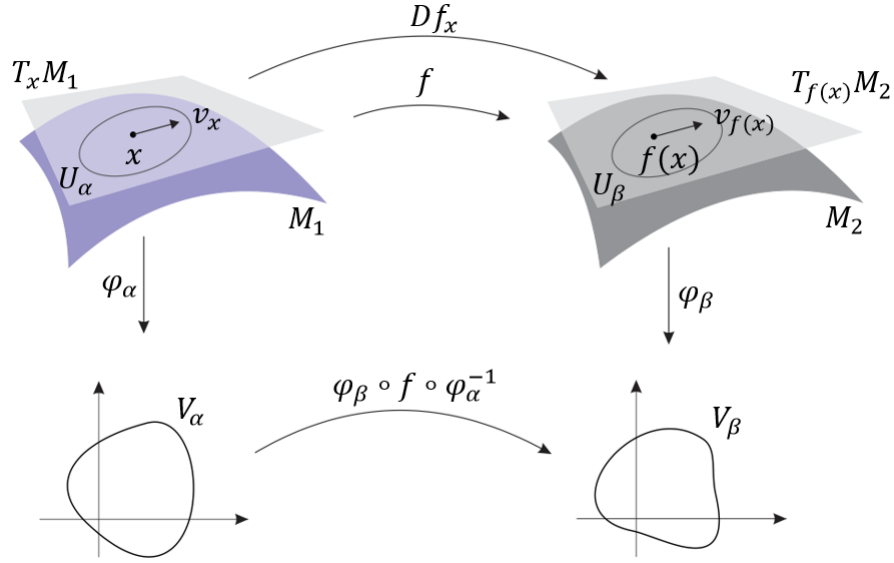
$$\begin{aligned} TM &= \{(x, v) : x \in M \text{ e } v \text{ é um vetor tangente em } x\} \\ &= \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M. \end{aligned}$$

**Definição 1.36.** *Seja  $f : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação  $C^1$  entre variedades. A derivada de  $f$  no ponto  $x$  é uma aplicação linear de  $T_x M_1$  em  $T_{f(x)} M_2$ ,  $Df_x : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$ . Se  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M_1 \rightarrow V_\alpha$  e  $\varphi_\beta : U_\beta \subset M_2 \rightarrow V_\beta$  são sistemas de coordenadas arbitrários em  $x$  e  $f(x)$ , respectivamente, então:*

$$D(\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_{x^\alpha} v_x^\alpha = w_{f(x)}^\beta$$

*leva o representante de um vetor em  $x$  no sistema de coordenadas  $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$  no representante de um vetor em  $f(x)$  no sistema de coordenadas  $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$ .*

A figura seguinte é uma ilustração da Definição 1.36.



**Definição 1.37.** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Um ponto  $c \in N$  diz-se um **valor regular** de  $f$  se, para cada  $p \in f^{-1}(c)$ , a derivada  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_c N$  é sobrejetiva.

Quando  $c \in N - f(M)$  então  $c$  é obviamente um valor regular de  $f$ . Se algum  $c \in f(M)$  é valor regular, então  $\dim(M) \geq \dim(N)$ .

**Exemplo 1.38.** Se  $U$  é um subconjunto aberto de uma superfície  $M$ , então  $T_p U = T_p M$  para todo  $p \in U$ . De fato, claramente temos  $T_p U \subset T_p M$ . Se  $v \in T_p M$ , existe uma curva  $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , diferenciável em  $t = 0$ , com  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda'(0) = v$ . Podemos restringir o intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$  de modo que  $\lambda(-\epsilon, \epsilon) \subset U$ , logo  $v \in T_p U$ . Em particular, se  $V$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , então  $T_p V = T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 1.39.** Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  uma aplicação diferenciável, definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $q \in \mathbb{R}^{n-m}$  um valor regular de  $f$ . Então, o espaço tangente a  $M = f^{-1}(q)$  num ponto  $p$  é dado por  $T_p M = \ker Df(p)$ . De fato, basta provar que  $T_p M \subset \ker Df(p)$ , já que ambos são subespaços vetoriais de dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então, dado um vetor  $v \in T_p M$ , seja  $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $t = 0$  tal que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda'(0) = v$ . A curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ , dada por  $\alpha(t) = f(\lambda(t))$ , é constante, igual a  $q$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Assim,

$$Df(p) \cdot v = Df(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \lambda)(0) = \alpha'(0) = 0,$$

ou seja,  $v \in \ker Df(p)$ .

**Definição 1.40.** Duas variedades  $V \subset M$  e  $W \subset M$  são **transversais** em  $M$  se para qualquer ponto  $q \in V \cap W$  temos que os espaços tangentes  $T_q V$  e  $T_q W$  são complementares e as respectivas bases geram  $T_q M$ . Notação:  $V \pitchfork W$ .

### 1.1.3 Variedade Riemanniana

**Definição 1.41.** *Seja  $M^m$  uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** em  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno no espaço tangente  $T_pM$ .*

Seja  $g$  uma métrica Riemanniana, denotaremos por  $g(p; u, v)$  ou  $\langle u, v \rangle_p$  o produto interno dos vetores  $u, v \in T_pM$ .

**Definição 1.42.** *O **comprimento** ou **norma** de um vetor  $v \in T_pM$  é dado por:*

$$|v|_p = \sqrt{g(p; v, v)}.$$

*Esta norma recebe o nome de **norma Riemanniana**.*

Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica Riemanniana é denominada **variedade Riemanniana**. Em termos mais precisos, trata-se de um par  $(M, g)$ , onde  $g$  é uma métrica Riemanniana na variedade  $M$ .

Para variedades Riemannianas, denotaremos por  $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  o sistema de coordenadas em  $M$ . Assim, para cada sistema de coordenadas  $x$  associamos a função

$$g^x : x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$g^x(x(p); a, b) = \langle x'(p)^{-1} \cdot a, x'(p)^{-1} \cdot b \rangle_p.$$

Note que, para cada  $p \in U$ , tem-se um produto interno em  $\mathbb{R}^m$ , dado por

$$(a, b) \mapsto g^x(x(p); a, b).$$

Consideremos também as funções

$$g_{ij}^x : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

definidas por  $g_{ij}^x(p) = g^x(x(p); e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right\rangle_p$ .

Se  $a = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  e  $b = (\beta^1, \dots, \beta^m)$  são vetores em  $\mathbb{R}^m$ , então

$$u = x'(p)^{-1} \cdot a = \sum_i \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad e \quad v = x'(p)^{-1} \cdot b = \sum_j \beta^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p),$$

logo  $g^x(x(p); a, b) = g(p; u, v) = \sum_{i,j} g_{ij}^x(p) \alpha^i \beta^j$ .

**Exemplo 1.43.** O espaço euclidiano bidimensional  $M = \mathbb{R}^2$  com o produto interno usual é uma variedade Riemanniana de dimensão 2.

**Exemplo 1.44.** Seja  $M = \mathbb{R}^2$  o plano de coordenadas  $(u, v)$  e defina o produto interno em cada ponto  $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$  colocando

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = e^{2u}.$$

$M$  munida desse produto interno é uma variedade Riemanniana de dimensão 2, chamada de Plano Hiperbólico.

**Definição 1.45.** Diz-se que a métrica Riemanniana  $g$  em  $M$  é de classe  $C^k$  se, para cada sistema de coordenadas  $x$  em  $M$ , a função  $g^x : x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k$  ou, equivalentemente, se as funções  $g_{ij}^x : U \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^k$ .

**Proposição 1.46.** Toda variedade diferenciável  $M$  de classe  $C^k$ ,  $k > 0$ , admite uma métrica Riemanniana de classe  $C^{k-1}$ .

*Demonstração.* Ver [9], página 210. □

### 1.1.4 Imersão e Submersão

**Definição 1.47.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma **submersão** se  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é sobrejetora para todo  $p \in M$ , isto é, o posto da matriz jacobiana  $(Jf_p)$  é igual a  $n$  para todo  $p \in M$ .

Vale ressaltar que se  $f : M \rightarrow N$  é uma submersão então  $m \geq n$ .

**Exemplo 1.48.** Uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma submersão se, e somente se,  $Df(p) \neq 0$  para todo  $p \in M$ . Isso decorre do fato de que um funcional linear é sobrejetor ou nulo.

**Exemplo 1.49.** Dada uma decomposição em soma direta da forma  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ , seja  $\pi$  a projeção sobre o primeiro fator,  $\pi(x, y) = x$ . Como  $\pi$  é linear, segue que  $D\pi(x, y) = \pi$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ , logo  $\pi$  é uma submersão. A matriz jacobiana de  $\pi$  tem como linhas os  $m$  primeiros vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Da mesma forma podemos concluir que a projeção sobre o segundo fator também é uma submersão.

**Teorema 1.50. (Forma Local das Submersões para variedades)** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , que é uma submersão num ponto  $p \in M$ . Então existem cartas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $p \in U$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $q = f(p) \in V$  e uma decomposição  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  tal que  $f(U) \subset V$  e  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x$ . Em outras palavras,  $f$  é localmente equivalente a projeção  $(x, y) \mapsto x$ .

*Demonstração.* A prova deste teorema pode ser encontrada em [9].  $\square$

**Definição 1.51.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma **imersão** se  $Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é injetora para todo  $p \in M$ . Se além disso,  $f$  for um homeomorfismo sobre sua imagem  $f(M) \subset N$  com a topologia induzida por  $N$ , dizemos que  $f$  é um **mergulho**. Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \rightarrow N$  é um mergulho, então  $M$  é chamada **subvariedade** de  $N$ .*

Note que para  $f : M \rightarrow N$  ser uma imersão é necessário que  $m \leq n$ , a diferença  $(n - m)$  é chamada de **codimensão** da imersão  $f$ .

**Exemplo 1.52.** *Considere a aplicação inclusão  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , dada por  $f(p) = (p, 0)$ . Como  $f$  é linear, segue que  $df(p) = f$  para todo  $p \in \mathbb{R}^m$ . Assim,  $f$  é uma imersão de classe  $C^\infty$ .*

**Exemplo 1.53.** *Uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , é uma imersão se, e somente se,  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Isso significa que em cada ponto  $\alpha(t)$  da imagem está bem definida uma reta tangente.*

**Exemplo 1.54.** *Uma imersão pode não ser injetora, um exemplo simples é a curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3 - t, t^2)$ . Um cálculo simples mostra que  $\alpha'(t) = (3t - 1, 2t) \neq (0, 0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e, além disso,  $\alpha(1) = (0, 1) = \alpha(-1)$ .*

**Definição 1.55.** *Seja  $M$  uma variedade compacta. Uma **subvariedade fechada**  $N$  em  $M$  é uma subvariedade compacta, conexa, sem bordo de  $M$ . Se  $\dim(N) = 2$  dizemos que  $N$  é uma **superfície fechada** em  $M$ .*

**Exemplo 1.56.** *A esfera de raio  $r$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$$

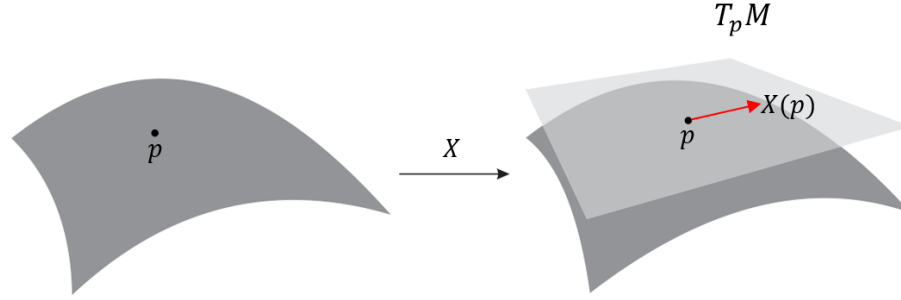
*é uma subvariedade fechada do  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimensão  $n$ . Em particular,  $S_1^2$  é uma superfície fechada de  $\mathbb{R}^3$ .*

**Exemplo 1.57.** *O toro  $T^2 = S^1 \times S^1$  é uma subvariedade fechada do  $\mathbb{R}^3$  de dimensão 2, portanto  $T^2$  é uma superfície fechada de  $\mathbb{R}^3$ .*

## 1.2 Noções de Sistemas Dinâmicos

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados básicos de sistemas dinâmicos, como campos de vetores, fluxos associados a campos de vetores numa variedade e suas principais propriedades. Além disso, apresentamos os difeomorfismos Anosov e construímos o exemplo clássico de um difeomorfismo Anosov induzido por um automorfismo do toro. As principais referências para esta seção foram [3], [8], [13] e [14].

**Definição 1.58.** *Um **campo de vetores** de classe  $C^r$ ,  $r > 0$ , em uma variedade  $M$  é uma aplicação de classe  $C^r$   $X : M \rightarrow TM$ , tal que a cada ponto  $p \in M$  associa o vetor  $X(p) \in T_pM$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^r(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^r$  em  $M$ .*



**Exemplo 1.59.** A aplicação  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $X(x, y) = (y, -x)$  é um campo vetorial de classe  $C^\infty$ , uma vez que para cada  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  temos que  $X(p) = (y, -x) \in T_p \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.60.** Um **fluxo** (ou um sistema dinâmico contínuo) é uma aplicação  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  que satisfaz:

1.  $\varphi(0, p) = p, \forall p \in M,$
2.  $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall p \in M.$

Dizemos que o fluxo é de classe  $C^k$  se a aplicação  $\varphi$  é de classe  $C^k$ .

Escrevemos  $\phi_t(p) = \varphi(t, p)$ , onde  $\phi_t : M \rightarrow M$ .

**Definição 1.61.** Seja  $\phi_t : M \rightarrow M$  um fluxo sobre uma variedade compacta  $M$  e seja  $p \in M$ , dizemos que

1. a **órbita** de  $p$  é o conjunto  $\mathcal{O}(p) = \{\phi_t(p); t \in \mathbb{R}\};$
2. a **órbita positiva** de  $p$  é o conjunto  $\mathcal{O}^+(p) = \{\phi_t(p); t \geq 0\};$
3. a **órbita negativa** de  $p$  é o conjunto  $\mathcal{O}^-(p) = \{\phi_t(p); t \leq 0\}.$

A um fluxo de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) podemos associar um campo vetorial  $X : M \rightarrow TM$ , de classe  $C^{k-1}$  pela seguinte fórmula:

$$X(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, x) \right|_{t=0}$$

O campo  $X$  assim definido é tal que  $t \mapsto \varphi(t, x)$  é a órbita de  $X$  que passa por  $x$ . De fato, da definição

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi(t, x) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi(s + t, x) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi(s, \varphi(t, x)) \right|_{s=0} = X(\varphi(t, x)).$$

Reciprocamente, se  $X$  é um campo de vetores de classe  $C^k$  em  $M$ , cujas órbitas estão definidas em  $\mathbb{R}$ , então existe um único fluxo de classe  $C^k$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , tal que  $t \mapsto \varphi(t, x)$  é a órbita de  $X$  com condição inicial  $\varphi(0, x) = x$ .

Denotamos por  $\varphi_t$  o fluxo associado ao campo  $X$ .

**Definição 1.62.** Seja  $\phi_t : M \rightarrow M$  um fluxo sobre uma variedade compacta  $M$  e seja  $p \in M$ , dizemos que  $p$  é um **ponto fixo** se  $\phi_t(p) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  (equivalentemente,  $\mathcal{O}(p) = \{p\}$ ).

O ponto  $p \in M$  é chamado **singularidade** para o campo  $X$  se  $X(p) = 0$ , ou seja, se  $p$  é ponto fixo para o fluxo  $\phi_t$ .

**Definição 1.63.** Seja  $\phi_t : M \rightarrow M$  um fluxo sobre uma variedade compacta  $M$  e seja  $p \in M$ , dizemos que

1. um **ponto periódico** de  $\phi$  é um ponto  $p$  tal que  $\phi_T(p) = p$  para algum minimal  $T > 0$  e  $\phi_t(p) \neq p$  para  $0 < t < T$ . O tempo  $T > 0$  é chamado **período da órbita** e a órbita de um ponto periódico é chamada de **órbita periódica**. Denotamos por  $Per_{\phi_t}(H)$  o conjunto dos pontos periódicos do fluxo  $\phi_t$  contidos no conjunto  $H \subset M$ ;
2. uma **órbita fechada** é uma órbita que é um conjunto fechado. Sendo assim, as órbitas fechadas em conjuntos compactos são as singularidades e as órbitas periódicas.
3. as órbitas que não são singularidades são ditas **órbitas regulares**. Os pontos regulares são os pontos para os quais o campo não se anula.
4.  $\phi_t$  é **não singular** se não possui singularidades;
5.  $\phi_t$  é **transitivo** se possui uma órbita densa, isto é, existe  $x_0 \in M$  tal que  $\overline{\{\phi_t(x_0); t \in \mathbb{R}\}} = M$ .
6.  $\Lambda \subset M$  é **invariante** com respeito ao fluxo  $\phi_t$  (ou  **$\phi$ -invariante**) se  $\phi_t(\Lambda) = \Lambda$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $\Lambda \subset M$  é dito **invariante positivamente (negativamente)** para um fluxo  $\phi_t$  se  $\phi_t(\Lambda) \subset \Lambda$ ,  $\forall t \geq 0$  ( $\forall t \leq 0$ ).

**Exemplo 1.64.** Seja  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  a esfera unitária. Considere o fluxo definido pela rotação de cada ponto da esfera em torno do eixo  $NS$ , como na figura abaixo. Temos que o polo norte e o polo sul tem como órbita o próprio ponto. E, as demais órbitas são os paralelos da esfera  $S^2$ . Então, as singularidades são os polos norte e sul e as outras órbitas são órbitas regulares e periódicas.

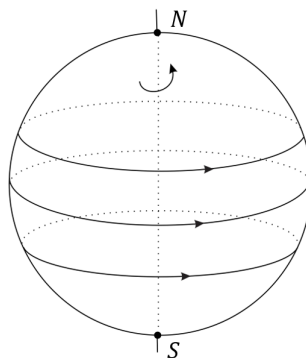


Figura 1.7: Fluxo em  $S^2$ .

**Definição 1.65.** O conjunto **ômega-limite** de um ponto  $x$  (com respeito à  $\phi$ ) é o conjunto

$$\omega_\phi(x) = \left\{ y \in M; y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) \text{ para alguma sequência } t_n \rightarrow +\infty \right\}.$$

Assim,  $\omega(x)_\phi$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de  $x$ .

O conjunto **alfa-limite** de um ponto  $x$  (com respeito à  $\phi$ ) é o conjunto  $\alpha_\phi(x) = \omega_{-\phi}(x)$ , onde  $-\phi$  é o fluxo reverso  $\phi_{-t}$ , isto é,

$$\alpha_\phi(x) = \left\{ y \in M; y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) \text{ para alguma sequência } t_n \rightarrow -\infty \right\}.$$

Assim, o conjunto  $\alpha_\phi(x)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de  $x$ .

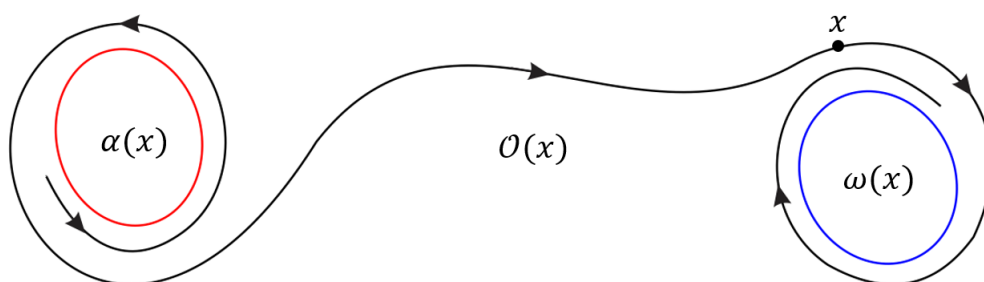


Figura 1.8: Conjuntos ômega-limite e alfa-limite de  $x$ .

Intuitivamente, o conjunto alfa-limite de um ponto  $x$  é onde a órbita de  $x$  "nasce" e o conjunto ômega-limite de um ponto  $x$  é onde ela "morre".

Note que, se  $p$  é uma singularidade do campo  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  então  $\omega(p) = \alpha(p) = \{p\}$ .

De fato,

$$X(p) = 0 \Leftrightarrow \phi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall t_n \rightarrow +\infty \text{ (ou } t_n \rightarrow -\infty) \phi_{t_n}(p) \rightarrow p.$$

Portanto,  $\omega(p) = \alpha(p) = \{p\}$ .

**Teorema 1.66.** Seja  $\phi_t$  um fluxo em uma variedade  $M$ .

1. O conjunto ômega-limite pode ser representado em termos da órbita positiva:

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} cl \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right).$$

*E o conjunto alfa-limite pode ser representado em termos da órbita negativa:*

$$\alpha(x) = \bigcap_{T \leq 0} \text{cl} \left( \bigcup_{t \leq T} \phi_t(x) \right).$$

2. Se  $\phi_t(x) = y$  para um número real  $t$ , então  $\omega(x) = \omega(y)$  e  $\alpha(x) = \alpha(y)$ .
3. Os conjuntos  $\omega(x)$  e  $\alpha(x)$  são fechados e invariantes positivamente e negativamente (contém órbitas completas).
4. Se  $\mathcal{O}^+(x)$  está contida em algum subconjunto compacto de  $M$ , então  $\omega(x)$  é não-vazio, compacto e conexo. Além disso,  $d(\phi_t(x), \omega(x))$  vai para zero quando  $t$  vai para infinito. Analogamente, se  $\mathcal{O}^-(x)$  está contida em um subconjunto compacto de  $M$ , então  $\alpha(x)$  é não-vazio, compacto, conexo e  $d(\phi_t(x), \alpha(x))$  vai para zero quando  $t$  vai para menos infinito.
5. Se  $D \subset M$  é fechado e invariante positivamente e  $x \in D$ , então  $\omega(x) \subset D$ .
6. Se  $y \in \omega(x)$ , então  $\omega(y) \subset \omega(x)$  e  $\alpha(x) \subset \alpha(y)$ .

*Demonstração.* 1. Seja  $y \in \omega(x)$ . Então  $y \in \text{cl} \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right)$  pela definição de conjunto ômega-limite. Sendo assim,  $y \in \bigcap_{T \geq 0} \text{cl} \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right)$ . Isto prova  $\omega(x) \subset \bigcap_{T \geq 0} \text{cl} \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right)$ . Agora, suponha  $y \in \bigcap_{T \geq 0} \text{cl} \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right)$ . Então, para qualquer  $T$ ,  $y \in \text{cl} \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right)$ . Para cada  $T$ , tome  $k_T > k_{T-1}$  com  $k_T \geq T$  e  $d(\phi_{k_T}(x), y) < \frac{1}{T}$ . Então  $d(\phi_{k_T}(x), y)$  vai para zero quando  $T$  vai para infinito e  $y \in \omega(x)$ . Isto prova a outra inclusão  $\bigcap_{T \geq 0} \text{cl} \left( \bigcup_{t \geq T} \phi_t(x) \right) \subset \omega(x)$ . Portanto, os conjuntos são iguais. Analogamente, provamos para o conjunto alfa-limite.

2. Primeiramente, vamos mostrar que  $\omega(x) \subset \omega(y)$ . Seja  $z \in \omega(x)$ , então existe uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\phi_{t_n}(x) \rightarrow z$ . Pela continuidade do fluxo  $\phi_t$  tem-se que:

$$\begin{aligned} \phi_t(\phi_{t_n}(x)) &\rightarrow \phi_t(z) \Rightarrow \phi_{t+t_n}(x) \rightarrow \phi_t(z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_{t_n}(\phi_t(x)) \rightarrow \phi_t(z) \Rightarrow \phi_{t_n}(y) \rightarrow \phi_t(z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_{-t}(\phi_{t_n}(y)) \rightarrow \phi_{-t}(\phi_t(z)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_{t_n-t}(y) \rightarrow z \end{aligned}$$

Fazendo  $s_n = t_n - t$  segue que  $s_n \rightarrow +\infty$  pois  $t_n \rightarrow +\infty$ . Assim,

$$\phi_{s_n}(y) \rightarrow z$$

Portanto,  $z \in \omega(y)$  e  $\omega(x) \subset \omega(y)$ .

Agora, vamos mostrar que  $\omega(y) \subset \omega(x)$ . Seja  $z \in \omega(y)$ , então existe uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\phi_{t_n}(y) \rightarrow z$ . Pela continuidade do fluxo  $\phi_t$  tem-se que:

$$\phi_{-t}(\phi_{t_n}(y)) \rightarrow \phi_{-t}(z) \Rightarrow \phi_{t_n-t}(y) \rightarrow \phi_{-t}(z) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \phi_{t_n}(\phi_{-t}(y)) \rightarrow \phi_{-t}(z) \Rightarrow \phi_{t_n}(x) \rightarrow \phi_{-t}(z) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \phi_t(\phi_{t_n}(x)) \rightarrow \phi_t(\phi_{-t}(z)) \Rightarrow \\
&\quad \quad \Rightarrow \phi_{t_n+t}(x) \rightarrow z
\end{aligned}$$

Fazendo  $k_n = t_n + t$  segue que  $k_n \rightarrow +\infty$  pois  $t_n \rightarrow +\infty$ . Assim,

$$\phi_{k_n}(x) \rightarrow z$$

Portanto,  $z \in \omega(x)$  e  $\omega(y) \subset \omega(x)$ . Assim,  $\omega(x) = \omega(y)$ , como queríamos.

Analogamente se verifica para o conjunto alfa-limite.

3. Para qualquer  $x$ ,  $\omega(x)$  é fechado pois é a interseção de conjuntos fechados pelo item (1). Para ver que  $\omega(x)$  é invariante positivamente e negativamente, tome  $y \in \omega(x)$ . Então, existe uma subsequência  $t_k \rightarrow +\infty$  tal que  $d(\phi_{t_k}(x), y)$  vai para zero. Para qualquer  $j \in \mathbb{R}$  fixado,  $d(\phi_{t_k+j}(x), \phi_j(y))$  vai para zero pela continuidade de  $\phi$ . Portanto,  $\phi_j(y) \in \omega(x)$ . Isto prova que  $\omega(x)$  é invariante. De maneira análoga se verifica para o conjunto alfa-limite.
4. Se  $\mathcal{O}^+$  está contida em algum subconjunto compacto de  $M$ , então  $cl(\bigcup_{t \geq T} \phi_t(x))$  é compacto, logo  $\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} cl(\bigcup_{t \geq T} \phi_t(x))$  é compacto. Além disso,  $\omega(x)$  é a interseção de conjuntos não-vazios encaixados, portanto é não-vazio.

Agora, suponha  $d(\phi_t(x), \omega(x))$  não vai para zero. Então, existe algum  $\delta > 0$  e uma subsequência  $t_k$  com  $t_k$  indo pra infinito tal que  $d(\phi_{t_k}, \omega(x)) \geq \delta$ . Os pontos  $\phi_{t_k}$  são limitados, portanto existe um ponto limite  $z$  fora de  $\omega(x)$  contradizendo a definição de  $\omega(x)$ . Logo, a distância deve ir para zero quando  $n$  vai para infinito.

Finalmente, para um fluxo, os conjuntos  $\bigcup_{t \geq T} \phi_t(x)$  são conexos, logo  $cl(\bigcup_{t \geq T} \phi_t(x))$  é uma coleção de conjuntos compactos e conexos encaixados. Portanto  $\bigcap_{T \geq 0} cl(\bigcup_{t \geq T} \phi_t(x))$  é conexo.

A prova é similar para o conjunto alfa-limite.

5. Tome  $x \in D$ . Pela invariância de  $D$ ,  $\phi_t(x) \in D$ . Como  $D$  é fechado, todos os pontos limites de  $\phi_t(x)$  devem pertencer a  $D$ , provando que  $\omega(x) \subset D$ .
6. Seja  $y \in \omega(x)$ . O conjunto  $\omega(x)$  é invariante, portanto, pelo item (5),  $\omega(y) \subset \omega(x)$ . Um argumento similar se aplica ao conjunto alfa-limite.

□

Os seguintes exemplos mostram campos de vetores com singularidades e os conjuntos ômega-limite e alfa-limite.

**Exemplo 1.67.** *Este exemplo mostra um fluxo no plano para o qual a órbita não é limitada e o conjunto limite não é conexo (a condição de que a órbita é limitada é necessária para provar que o conjunto limite é conexo).*

Seja  $y_1 < 0 < y_2$  dois valores fixos de  $y$  e  $L_j$  a linha horizontal  $\{(x, y_j)\}$  para  $j = 1, 2$ .

Seja  $\varphi_t$  o fluxo definido por

$$\begin{aligned}\varphi_t(x, y_1) &= (x - t, y_1), \\ \varphi_t(x, y_2) &= (x + t, y_2),\end{aligned}$$

para o qual a origem é um ponto fixo e as órbitas dos pontos  $q$  entre as linhas  $y = y_1$  e  $y = y_2$  têm comportamento de uma espiral limitada por  $L_1$  e  $L_2$ .

Para  $q = (x, y) \neq (0, 0)$  e  $y_1 < y < y_2$ , temos  $\omega(q) = \{(x, y) : y = y_1 \text{ ou } y = y_2\}$  que não é conexo e  $\alpha(q) = 0$ . Para  $q = (x, y_j)$ ,  $j = 1$  ou  $j = 2$ , temos  $\omega(q) = \alpha(q) = \emptyset$ .

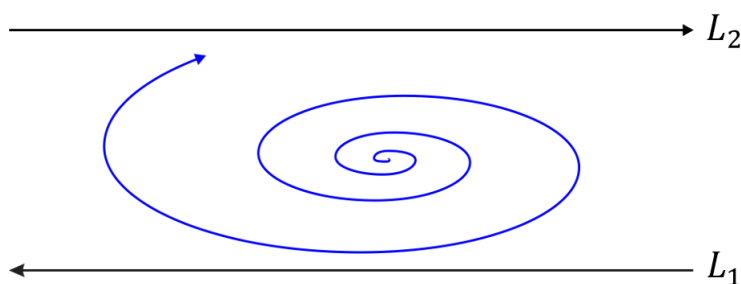


Figura 1.9: Conjunto Limite Desconexo.

**Exemplo 1.68.** Considere a esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  centrada na origem e sejam  $(x, y, z)$  as coordenadas canônicas em  $\mathbb{R}^3$ . Chamamos  $p_N = (0, 0, 1)$  de polo norte e  $p_S = (0, 0, -1)$  de polo sul de  $S^2$ . Definimos o campo de vetores  $X$  de classe  $C^\infty$  em  $S^2$  por:

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

As singularidades do campo  $X$  são os pontos  $(x, y, z) \in S^2$  tais que:

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2) = (0, 0, 0).$$

Então,

$$x = y = 0.$$

Como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1,$$

temos que as singularidades são  $p_N = (0, 0, 1)$  e  $p_S = (0, 0, -1)$ .

Uma parametrização da esfera  $S^2$  é dada por:

$$Y(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

Para cada  $\varphi$  fixado, temos a parametrização de um meridiano de  $S^2$ . Temos, então, que o campo  $X$  é tangente aos meridianos de  $S^2$ .

De fato, considere uma parametrização de um meridiano dado por:

$$\alpha(\theta) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta).$$

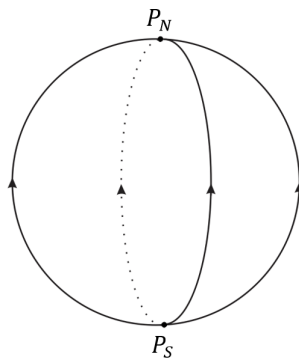
Assim,

$$\alpha'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\varphi, \operatorname{cos}\theta).$$

E,

$$\begin{aligned} X(\alpha(\theta)) &= \operatorname{cos}\theta(-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\varphi, \operatorname{cos}\theta) \\ &= \operatorname{cos}\theta \alpha'(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, o campo de vetores  $X$  é tangente aos meridianos de  $S^2$  apontando pra cima. Segue que  $\omega(p) = p_N$  e  $\alpha(p) = p_S$ , para todo  $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$ . E,  $\omega(p_N) = \alpha(p_N) = \{p_N\}$ ,  $\omega(p_S) = \alpha(p_S) = \{p_S\}$ .



**Definição 1.69.** Um ponto  $x \in M$  é **recorrente** (para  $\phi$ ) sempre que  $x \in \omega_\phi(x)$ .

**Obsevação 1.70.** Quando  $M$  é uma variedade compacta, sabemos que o conjunto ômega-limite é não-vazio, compacto e conexo. Mais ainda, pelo Lema de Zorn mostra-se que o conjunto dos pontos recorrentes  $\{x \in M; x \in \omega(x)\}$  é não-vazio, em outras palavras, todo conjunto ômega-limite em uma variedade compacta possui ao menos um ponto recorrente.

**Definição 1.71.** Um ponto  $p \in M$  é dito um ponto **não errante** para o fluxo  $\phi_t$ , se para qualquer vizinhança  $U$  de  $p$  e para qualquer número real  $T > 0$ , existir  $t > T$  tal que  $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ . Se um ponto  $p \in M$  não é não errante, então ele é dito um ponto **errante**.

Denotamos por  $\Omega(\phi_t)$  o conjunto dos pontos não errantes para o fluxo  $\phi_t$ .

**Exemplo 1.72.** Se  $x \in M$  é um ponto fixo de um fluxo  $\phi_t$ , então  $x$  é um ponto não errante para  $\phi_t$ , pois para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$  e qualquer tempo  $T > 0$ , existe  $t$  com  $t > T$  de modo que  $x \in \phi_t(U) \cap U$ .

**Exemplo 1.73.** Se  $\phi_t$  é um fluxo sobre  $M$ , então  $\emptyset$  e  $M$  são invariantes com respeito a  $\phi_t$ .

**Exemplo 1.74.** O conjunto  $\Omega(\phi_t) \subset M$  é invariante, fechado e contém os pontos periódicos de  $\phi_t$ .

De fato, primeiro vamos provar que  $\Omega(\phi_t)$  é invariante com respeito ao fluxo  $\phi_t$ , isto é,  $\phi_t(\Omega(\phi_t)) = \Omega(\phi_t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

i) Vamos mostrar que  $\phi_t(\Omega(\phi_t)) \subset \Omega(\phi_t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $y \in \phi_t(\Omega(\phi_t))$  com  $t \in \mathbb{R}$ , assim existe  $x \in \Omega(\phi_t)$  tal que  $y = \phi_t(x)$ . Agora, como  $x \in \Omega(\phi_t)$  temos que para qualquer vizinhança  $V$  de  $x$  e qualquer número real  $T > 0$ , existe  $t_0 > T$  tal que:

$$\phi_{t_0}(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Por outro lado, seja  $U$  uma vizinhança de  $y = \phi_t(x)$ , daí segue que  $x = \phi_{-t}(y) \in \phi_{-t}(U)$ . Logo,  $\phi_{-t}(U)$  é uma vizinhança de  $x$ , então:

$$\phi_{t_0}(\phi_{-t}(U)) \cap \phi_{-t}(U) \neq \emptyset.$$

Assim,

$$\phi_t(\phi_{t_0}(\phi_{-t}(U)) \cap \phi_{-t}(U)) = \phi_t(\phi_{t_0}(\phi_{-t}(U))) \cap \phi_t(\phi_{-t}(U)) \neq \emptyset.$$

De onde,

$$\phi_{t_0}(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Portanto,  $y \in \Omega(\phi_t)$  e, assim,  $\phi_t(\Omega(\phi_t)) \subset \Omega(\phi_t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

ii) Agora, vamos provar que  $\Omega(\phi_t) \subset \phi_t(\Omega(\phi_t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $x \in \Omega(\phi_t)$ , logo  $\phi_{-t}(x) \in \phi_{-t}(\Omega(\phi_t))$ . Agora, como  $\phi_t(\Omega(\phi_t)) \subset \Omega(\phi_t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , segue que  $\phi_{-t}(x) \in \Omega(\phi_t)$ , de onde  $x \in \phi_t(\Omega(\phi_t))$ .

Isto é,  $\Omega(\phi_t) \subset \phi_t(\Omega(\phi_t))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Assim,  $\Omega(\phi_t) \subset M$  é invariante com respeito ao fluxo  $\phi_t$ .

A seguir, vamos mostrar que  $\Omega(\phi_t)$  é fechado.

Seja  $p \in \overline{\Omega(\phi_t)}$ , então para toda vizinhança  $U$  de  $p$  temos

$$U \cap \Omega(\phi_t) \neq \emptyset.$$

Assim, existe  $x \in U$  tal que  $x \in \Omega(\phi_t)$ . Como  $x \in \Omega(\phi_t)$  segue que para qualquer vizinhança  $V$  de  $x$  e qualquer número real  $T > 0$ , existe  $|t| > T$  tal que  $\phi_t(V) \cap V \neq \emptyset$ . Como  $U$  é vizinhança de  $x$ , então:

$$U \cap \phi_t(U) \neq \emptyset.$$

Logo,  $p \in \Omega(\phi_t)$  e, portanto,  $\Omega(\phi_t)$  é fechado.

Finalmente, vamos mostrar que  $\Omega(\phi_t)$  contém o conjunto dos pontos periódicos de  $\phi_t$ .

De fato, se  $p$  é um ponto periódico então existe  $t_0 > 0$  tal que  $\phi_{t_0}(p) = p$ . Assim, para qualquer vizinhança  $V$  de  $p$  e qualquer número real  $T > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $nt_0 > T$  e  $\phi_{nt_0}(p) = p$ , então

$$\phi_{nt_0}(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Logo,  $p \in \Omega(\phi_t)$ .

**Obsevação 1.75.** Por argumento que não desenvolvemos aqui, pela invariância do domínio, o bordo  $\partial M$  é uma subvariedade invariante de codimensão um de  $\phi$ .

**Definição 1.76.** Um conjunto compacto  $\phi$ -invariante  $\Lambda$  é dito **transitivo** se  $\Lambda = \omega(x)$  para algum  $x \in \Lambda$ .

**Obsevação 1.77.** Conjuntos transitivos em variedades compactas são conexos.

De fato, se  $\Lambda \subset M$  é um conjunto transitivo em uma variedade compacta  $M$ , então existe  $x \in \Lambda$  tal que  $\Lambda = \omega(x)$ . Pelo Teorema 1.66 (item 4),  $\omega(x)$  é conexo, portanto  $\Lambda$  é conexo.

**Definição 1.78.** Dizemos que um conjunto  $C$  é **isolado** se existe uma vizinhança  $U$  de  $C$  de modo que  $C = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(U)$ .

**Definição 1.79.** Um **atrator** para um fluxo  $\varphi_t : M \rightarrow M$  é um conjunto  $\Lambda \subset M$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existe  $U$  vizinhança (compacta) de  $\Lambda$  tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U).$$

$U$  é dito bloco isolante ou região de atração.

2. Para todo  $t \geq 0$ ,  $\varphi_t(U) \subset U$ .
3. Existe uma órbita densa em  $\Lambda$ .

Um **repulsor** ou uma **fonte** para o fluxo  $\varphi_t$  é um conjunto  $\Lambda$ , o qual é um conjunto atrator para o fluxo reverso ( $\varphi_{-t}$ ).

### 1.2.1 Difeomorfismo Anosov

**Definição 1.80.** Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é dito Anosov se existe uma decomposição contínua  $TM = E^u \oplus E^s$  tal que:

1. Ambos  $E^u$  e  $E^s$  são invariantes por  $Df$ , ou seja,

$$Df(x)(E_x^\sigma) = E_{f(x)}^\sigma, \quad (\sigma = u, s) \quad \forall x \in M.$$

2. Existem constantes  $C > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tais que para todo  $x \in M$

$$\| Df^n(x)(v) \| \leq C\lambda^n \| v \|, \quad v \in E_x^s, n > 0$$

$$\| Df^{-n}(x)(v) \| \leq C\lambda^n \| v \|, \quad v \in E_x^u, n > 0.$$

**Exemplo 1.81. (Difeomorfismo Anosov)** Consideremos a aplicação  $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada pela matriz

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O determinante desta matriz é igual a 1 e  $\hat{A}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ . A expressão em coordenadas dessa aplicação é  $\hat{A}(x, y) = (2x + y, x + y)$ . Definimos a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ :

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ se } (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2.$$

Assim,  $\hat{A}(x, y) \sim \hat{A}(x', y')$ . Isto define uma aplicação  $A : \mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por  $A(x, y) = (2x + y, x + y)(\text{mod } 1)$  e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{A}} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Neste caso,  $A$  é um difeomorfismo Anosov. De fato, como  $\pi$  é um difeomorfismo local (pois  $\pi$  é a aplicação projeção), basta então mostrar que  $\hat{A}$  satisfaz a condição Anosov, uma vez que as derivadas de  $\hat{A}$  e de  $A$  diferem apenas por isomorfismos.

Os autovalores de  $\hat{A}$  são

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

ou seja,  $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$ .

Seja  $E_0^\sigma$  o autoespaço associado a  $\lambda_\sigma$  ( $\sigma = s, u$ ). Para todo  $z \in \mathbb{R}^2$  definimos  $E_z^\sigma = z + E_0^\sigma$ . Uma vez que  $\mathbb{R}^2 = E_0^s \oplus E_0^u$ , temos

$$T_z \mathbb{R}^2 = E_z^s \oplus E_z^u, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Agora,

$$D\hat{A}(z)(E_z^\sigma) = \hat{A}(z + E_0^\sigma) - \hat{A}(z) = \hat{A}(z) + \hat{A}(E_0^\sigma) - \hat{A}(z) = \hat{A}(E_0^\sigma) = E_{\hat{A}(z)}^\sigma.$$

Assim, conseguimos uma decomposição  $T\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$  invariante pela derivada de  $\hat{A}$ .

Para finalizar, fixemos  $v_z^\sigma \in E_z^\sigma$  de forma que  $v_z^\sigma = z + v_0^\sigma$  para algum  $v_0^\sigma \in E_0^\sigma$  e tal que  $|v_z^\sigma|_z = |v_0^\sigma|$ . Aqui,  $|\cdot|_z$  é a norma em  $T_z\mathbb{R}^2$  com a métrica usual. Daí

$$D\hat{A}(z)(v_z^\sigma) = \hat{A}(z + v_0^\sigma) = \hat{A}(z) + \hat{A}(v_0^\sigma) = \hat{A}(z) + \lambda_\sigma \cdot v_0^\sigma,$$

e então  $|D\hat{A}(z)(v_z^\sigma)|_{\hat{A}(z)} = \lambda_\sigma |v_0^\sigma| = \lambda_\sigma |v_z^\sigma|_z$ . Portanto

$$|D\hat{A}(z)(v_z^s)|_{\hat{A}(z)} = \lambda_s |v_z^s|_z,$$

$$|D\hat{A}(z)(v_z^u)|_{\hat{A}(z)} = \lambda_u |v_z^u|_z.$$

### 1.3 Folheações

Apresentamos nesta seção, de forma breve e de acordo com nosso propósito, a noção de folheação e as propriedades mais elementares que serão utilizadas no restante do trabalho, bem como alguns exemplos.

A decomposição de uma variedade  $M$  em subvariedades imersas, todas de mesma dimensão, dá origem a uma folheação da variedade  $M$ . Uma folheação de uma variedade  $M$ , a grosso modo, é a decomposição de  $M$  numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro. A principal referência desta seção foi [4].

**Definição 1.82. (Folheação)** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ . Uma **folheação** de classe  $C^r$  e dimensão  $n$  de  $M$ , é um atlas maximal  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  em  $M$ , satisfazendo:*

1. Se  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  então

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são discos abertos de  $\mathbb{R}^n$  e de  $\mathbb{R}^{m-n}$ , respectivamente.

2. Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  são tais que

$$U \cap V \neq \emptyset$$

então a mudança de coordenadas

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é dada por

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

Dizemos que  $M$  é **folheada** por  $\mathcal{F}$ , ou ainda que  $\mathcal{F}$  é uma **estrutura folheada** de dimensão  $n$  de classe  $C^r$  sobre  $M$ .

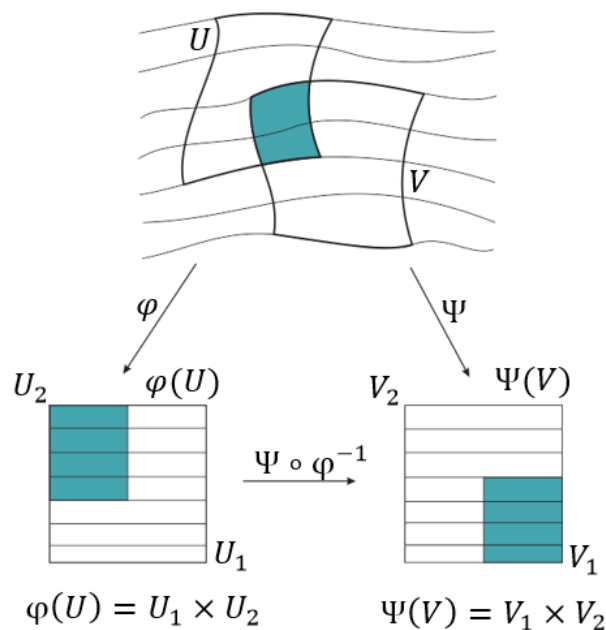


Figura 1.10: Folheação de uma Variedade  $n$ -dimensional.

As cartas de  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  são chamadas **cartas folheadas**.

**Definição 1.83.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação de classe  $C^r$  em  $M^m$  de dimensão  $n$ , com  $0 < n < m$  e  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $\mathcal{F}$  tal que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Os conjuntos da forma  $\varphi^{-1}(U_1 \times c)$ ,  $c \in U_2$  são chamados **placas** de  $U$ , ou ainda **placas** de  $\mathcal{F}$ .*

Fixando  $c \in U_2$ , a aplicação  $g = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}}: U_1 \times \{c\} \rightarrow U$  é um mergulho de classe  $C^r$ , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão  $n$  de classe  $C^r$  de  $M$ . Além disso, se  $\alpha$  e  $\beta$  são placas de  $U$ , então  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$  ou  $\alpha = \beta$ .

**Definição 1.84.** *Um caminho de placas de  $\mathcal{F}$  é uma sequência  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas tal que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ , para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .*

Como  $M$  é recoberta pelas placas de  $\mathcal{F}$ , definimos em  $M$  a relação de equivalência: " $pRq$  se existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  com  $p \in \alpha_1$  e  $q \in \alpha_k$ ". As classes de equivalência da relação  $R$  são chamadas **folhas** de  $\mathcal{F}$ . Segue da definição que uma folha de  $\mathcal{F}$  é um subconjunto de  $M$  conexo por caminhos.

**Definição 1.85.** *Seja  $M^m$  uma variedade folheada por uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $n < m$ . O espaço de folhas de  $\mathcal{F}$ ,  $M/\mathcal{F}$ , é o espaço quociente de  $M$  pela relação de equivalência  $R$  que identifica dois pontos de  $M$  se eles estão na mesma folha de  $\mathcal{F}$ .*

**Exemplo 1.86.** *Seja  $f: M^m \rightarrow N^n$  uma submersão de classe  $C^r$ . Então as curvas de nível  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in N$ , são folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  de  $M$ .*

De fato, utilizando o Teorema da Forma Local das Submersões temos que dados  $x \in M$  e  $q = f(x) \in N$  existem cartas locais  $(U, \varphi)$  em  $M$ ,  $(V, \psi)$  em  $N$  tais que  $x \in U$ ,  $q \in V$  tem-se que:

- 1)  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ ;
- 2)  $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ ;
- 3)  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi_2$ , onde  $\pi_2$  é a projeção tal que  $(x, y) \mapsto y$ .

As cartas dadas pelo Teorema da Forma Local das Submersões de  $M$  definem uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$ . Com efeito, o item (1) da Definição 1.82, é satisfeito como podemos ver acima. Para mostrar o item (2) da Definição 1.82 basta mostrar que a composição do item (2) independe de  $x$ . Sejam  $(U, \varphi)$  e  $(\bar{U}, \bar{\varphi})$  cartas de  $M$  fornecidos pelo Teorema da Forma Local das Submersões. Mostraremos que,  $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$  independe de  $x \in U_1$ .

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} &= \bar{\psi} \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2 \end{aligned}$$

Então

$$\pi_2 \circ (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = (\bar{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \pi_2.$$

Daí, a composição do item (2) da Definição 1.82 não depende de  $x \in U_1$ . Isto prova que  $\mathcal{F}$  é uma folheação de classe  $C^r$  de  $M$ . Por definição, as placas de  $\mathcal{F}$  estão contidas nas curvas de nível de  $f$ . Isto prova que as folhas de  $\mathcal{F}$  são os conjuntos de nível de  $f$  e segue o resultado.

Um exemplo mais específico é o seguinte.

**Exemplo 1.87.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação definida por

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z,$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2$ , e

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação  $C^\infty$  tal que  $\alpha(0) = 1$ ,  $\alpha(1) = 0$  e  $\alpha'(t) < 0$ , para todo  $t > 0$ . Então,  $f$  é uma submersão, onde as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível  $f^{-1}(c)$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .

De fato, suponhamos, por absurdo, que  $f$  não seja uma submersão. Então, existe um ponto  $(x, y, z)$  tal que

$$\nabla f(x, y, z) = 0,$$

ou seja,

$$(2\alpha'(r^2)xe^z, 2\alpha'(r^2)ye^z, \alpha(r^2)e^z) = (0, 0, 0).$$

Daí,  $x = y = 0$  e  $\alpha(r^2) = 0$ .

De  $\alpha(r^2) = 0$  temos que  $x^2 + y^2 = 1$ . Portanto,  $x = y = 0$  com  $x^2 + y^2 = 1$ , o que é uma contradição.

Logo,  $f$  é uma submersão e como visto no exemplo anterior, as curvas de nível são folhas de uma folheação de codimensão um e de classe  $C^\infty$  de  $M$ .

As folhas desta folheação são descritas por

$$f(x, y, z) = c,$$

ou seja,

$$\alpha(r^2)e^z = c.$$

i) Se  $c = 0$ , então  $\alpha(r^2) = 0$  e, portanto,  $x^2 + y^2 = 1$ . Aqui as curvas de nível correspondem ao cilindro de raio 1 que é representado por  $f^{-1}(0)$ .

ii) Se  $c > 0$ , então  $\alpha(r^2)e^z = c > 0$ . Assim,  $\alpha(r^2) > 0$ . Mais precisamente,

$$z = \ln(c) - \ln(\alpha(r^2)).$$

Quando  $c = 1$ , temos

$$z = -\ln(\alpha(r^2)).$$

O gráfico da curva acima no plano  $y = 0$  é dado por

$$z = -\ln(\alpha(r^2)).$$

Daí,

$$z' = -\frac{2\alpha(x^2)}{\alpha(x^2)} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então  $x = 0$  é o único ponto crítico de  $z$ . Temos  $z \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow 1^+$  ou  $1^-$ . O gráfico de  $z$  é uma parábola.

No caso  $c < 0$ , a análise é análoga. O gráfico das folhas de  $\mathcal{F}$  está representado na figura abaixo.

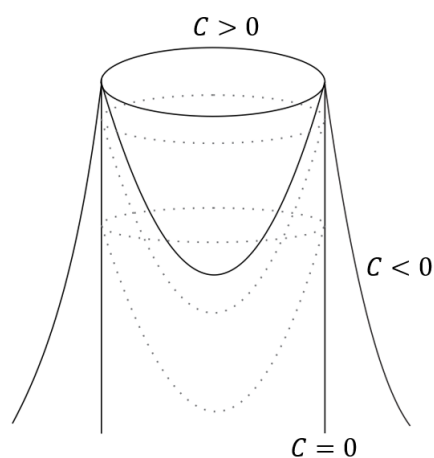


Figura 1.11: Exemplo de Folheação.

**Exemplo 1.88.** Um exemplo de uma folheação de dimensão 1 é a folheação de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{2-1}$ , onde as folhas são retas da forma  $\mathbb{R} \times c$ , com  $c \in \mathbb{R}^{2-1}$ .

**Definição 1.89.** Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de uma variedade  $M$ , então um subconjunto  $S \subset M$  é dito ser  $\mathcal{F}$ -saturado ou simplesmente saturado se é uma união de folhas de  $\mathcal{F}$ .

## 1.4 Sombreamento

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes de sombreamento, como o Lema do Sombreamento e o Lema do Fecho de Anosov para fluxos. As demonstrações dos resultados desta seção e maiores detalhes podem ser encontrados em [8].

**Definição 1.90.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  um fluxo diferenciável. Uma curva diferenciável  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  diz-se uma  $\epsilon$ -órbita para  $\varphi_t$  se  $\|c(t) - \varphi_t(c(t))\| < \epsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se  $c$  é periódica então diz-se uma  $\epsilon$ -órbita fechada. Uma curva diferenciável  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  é  $\delta$ -sombreada pela órbita de  $x \in M$  se existe uma função  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\left| \frac{d}{dt}s - 1 \right| < \delta$  tal que  $d(c(s(t)), \varphi_t(x)) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

A escolha da função  $s$  não é única embora a órbita seja única.

**Teorema 1.91. (Lema do Sombreamento para Fluxos)** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $\varphi_t$  um fluxo diferenciável e  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $\varphi_t$ . Então existe uma vizinhança  $U(\Lambda) \supset \Lambda$  de  $\Lambda$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que toda  $\epsilon$ -órbita é  $\delta$ -sombreada por uma órbita de  $\varphi_t$ .

**Teorema 1.92. (Teorema do Sombreamento para Fluxos)** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $d$  a distância natural,  $\varphi_t$  um fluxo diferenciável e  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico compacto para  $\varphi_t$ . Então existem uma vizinhança  $U(\Lambda) \supset \Lambda$  de  $\Lambda$  e  $\epsilon_0, \delta_0 > 0$  tais que para todo  $\delta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade:

Se  $\psi_t : U(\Lambda) \rightarrow M$  é um fluxo  $\epsilon$ -próximo de  $\varphi_t$  na topologia  $C^1$ ,  $Y$  é um espaço topológico,  $\gamma_t : Y \rightarrow Y$  é um fluxo contínuo,  $\alpha \in C^0(Y, U(\Lambda))$  tal que  $\alpha(\gamma_t(y))$  é uma curva  $C^1$  para cada  $y \in Y$ , cujo vetor tangente  $(\alpha\gamma_t)'|_0(y)$  em  $\alpha(y)$  depende continuamente de  $y$ , e

$$\sup_{y \in Y} ((\alpha\gamma_t)'|_0(y), (\psi\alpha)'|_0(y)) < \epsilon$$

então existem uma transformação  $s : Y \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\left| \frac{d}{dt}s_y - 1 \right| < \delta$  e  $\beta \in C^0(Y, U(\Lambda))$  tais que

$$\beta\gamma_{s(t)} = \psi_t\beta$$

e  $\sup_{y \in Y} d(\alpha, \beta) < \delta$ .

Além disso,  $\beta$  é único a menos de uma mudança temporal: se  $\bar{\beta}\gamma_{\sigma_y(t)} = \psi_t\bar{\beta}$  para algum  $\sigma_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\left| \frac{d}{dt}\sigma_y - 1 \right| < \delta$  e  $\sup_{y \in Y} d(\alpha, \bar{\beta}) < \delta_0$  então  $\bar{\beta}(y) = \beta\gamma_{s_y(t+\tau_y)-\sigma_y(t)}(y)$  para algum  $\tau_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pequeno.

**Corolário 1.93. (Lema do Fecho de Anosov para fluxos)** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $\varphi_t$  um fluxo diferenciável e  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico compacto para  $\varphi_t$ . Então existem uma vizinhança  $U(\Lambda) \supset \Lambda$  de  $\Lambda$  e  $\epsilon_0, \delta_0 > 0$  tais que para todo  $\delta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que toda  $\epsilon$ -órbita é  $\delta$ -sombreada por uma órbita periódica.*

# Capítulo 2

## Fluxos Anosov

Neste capítulo apresentamos o objeto a ser estudado, fluxo Anosov. Definimos variedade estável e instável, apresentamos o Teorema da Variedade Estável e enunciamos as principais propriedades de fluxo Anosov, como a existência das folheações forte estável, forte instável, fraca estável e fraca instável. Construimos um exemplo de fluxo Anosov dado por suspensões de um difeomorfismo Anosov e em seguida mostramos diferentes equivalências de transitividade para fluxos Anosov. As principais referências para este capítulo foram [1], [2], [7] e [8].

### 2.1 Teorema da Variedade Estável

Para o propósito deste trabalho, consideramos o fluxo como sendo sempre transversal (apontando para dentro) ou tangente ao bordo  $\partial M$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $\phi$  um fluxo  $C^1$  em uma variedade  $M$  possivelmente com bordo. Um conjunto compacto  $\phi$ -invariante  $\Lambda \subset M$  é **hiperbólico** se existem uma decomposição contínua e invariante do fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^o \oplus E_\Lambda^u$  sobre  $\Lambda$  e constantes  $C, \lambda > 0$  tais que:*

1.  $E_\Lambda^s$  é contrativo, isto é

$$\| D\phi_t(x)v_x^s \| \leq C e^{-\lambda t} \| v_x^s \| \quad \text{para } v_x^s \in E_x^s, x \in \Lambda \text{ e } \forall t \geq 0.$$

2.  $E_\Lambda^u$  é expansivo, isto é

$$\| D\phi_t(x)v_x^u \| \geq C^{-1} e^{\lambda t} \| v_x^u \| \quad \text{para } v_x^u \in E_x^u, x \in \Lambda \text{ e } \forall t \geq 0.$$

3.  $E_\Lambda^o$  é a direção do fluxo, isto é,  $E_x^o$  é tangente a curva  $\{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$  para todo  $x \in \Lambda$ .

A decomposição  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^o \oplus E_\Lambda^u$  é chamada de **decomposição hiperbólica** de  $\Lambda$ .

**Obsevação 2.2.** 1. Dizer que a decomposição do fibrado tangente é contínua e invariante sobre um conjunto compacto  $\phi$ -invariante  $\Lambda$  significa:

i)  $D(\phi_t)_p E_p^\sigma = E_{\phi_t(p)}^\sigma$ ,  $\sigma = s, u, o$  e  $\forall p \in \Lambda$ .

ii)  $E_p^s$  e  $E_p^u$  variam continuamente com  $p$ , para todo  $p \in \Lambda$ . Isto significa que se  $p$  e  $x_n$  pertencem a  $\Lambda$  tal que  $x_n \rightarrow p$ , então  $E_{x_n}^s \rightarrow E_p^s$ . De fato, podemos extrair uma subsequência  $x_{n_k}$  tal que  $\dim(E_{x_{n_k}}^s) = j$  para algum  $j$ . Seja  $\{v_k^1, \dots, v_k^j\}$  uma base ortonormal de  $E_{x_{n_k}}^s$  e  $\{v_k^{j+1}, \dots, v_k^n\}$  uma base ortonormal de  $E_{x_{n_k}}^u$ . Podemos supor (tomando uma subsequência, se for necessário) que  $v_k^i \rightarrow v^i$  e, portanto,  $\{v^1, \dots, v^j\}$  e  $\{v^{j+1}, \dots, v^n\}$  são conjuntos ortonormais de  $T_p M$ . Seja  $E = \langle v^1, \dots, v^j \rangle$  e  $F = \langle v^{j+1}, \dots, v^n \rangle$ . Agora, se  $v \in E$ ,  $\|v\| = 1$ , então  $\|D\phi_t(p)v\| \leq Ce^{-\lambda t}$  para  $t \geq 0$ . De fato, podemos escolher  $v_k \in E_{x_{n_k}}^s$ ,  $\|v_k\| = 1$  tal que  $v_k \rightarrow v$ . Logo, fixado  $t \geq 0$  tem-se que

$$\|D\phi_t(p)v\| = \lim_k \|D\phi_t(x_{n_k})v_k\| \leq Ce^{-\lambda t}.$$

Isto mostra que  $E \subset E^s(p)$ . Analogamente,  $F \subset E^u(p)$ . Em particular,  $E \cap F = \{0\}$  e, portanto,  $E = E^s(p)$  e  $F = E^u(p)$ . Dessa forma, provamos que qualquer subespaço limite de  $E^s(x_n)$  e  $E^u(x_n)$  é necessariamente  $E^s(p)$  e  $E^u(p)$ .

2. Para fluxos associados a campos vetoriais sem singularidades temos que  $\dim(E_x^o) = 1$ , para todo  $x \in \Lambda$ .

**Definição 2.3.** Um conjunto hiperbólico  $H$  de um fluxo  $\phi$   $C^1$  é **expansivo** se sua decomposição hiperbólica  $T_H M = E_H^s \oplus E_H^o \oplus E_H^u$  satisfaz  $E_x^s = 0$  e  $E_x^u \neq 0$  para todo  $x \in H$ .

**Definição 2.4.** Os conjuntos

$$W^{ss}(x) = \{y \in M : d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

$$W^{uu}(x) = \{y \in M : d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados, respectivamente, **variedade estável forte** e **variedade instável forte** de  $x$ , onde  $d$  denota a métrica Riemanniana da variedade  $M$ .

**Definição 2.5.** Dado  $\epsilon > 0$ , a **variedade estável local de tamanho  $\epsilon$**  do ponto  $x \in M$  é o conjunto denotado por  $W_\epsilon^{ss}(x)$  dos pontos  $y \in M$  tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0$$

e

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Analogamente, a **variedade instável local de tamanho  $\epsilon$**  do ponto  $x \in M$  é o conjunto denotado por  $W_\epsilon^{uu}(x)$  dos pontos  $y \in M$  tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0$$

e

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \epsilon, \quad \forall t \leq 0.$$

Assim, as variedades estável e instável forte de um ponto  $x \in M$  para um fluxo  $\phi_t$  também podem ser obtidas da seguinte forma:

$$W^{ss}(x) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_{-t}(W_\epsilon^{ss}(\phi_t(x)))$$

$$W^{uu}(x) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_\epsilon^{uu}(\phi_{-t}(x)))$$

**Teorema 2.6. (Teorema da Variedade Estável para fluxos)** *Seja  $H \subset M$  um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo  $\phi_t : M \rightarrow M$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada ponto  $x \in H$  existem dois discos mergulhados  $W_\epsilon^{ss}(x)$  e  $W_\epsilon^{uu}(x)$  em  $M$  os quais são tangentes a  $E_x^s$  e  $E_x^u$ , respectivamente.*

A demonstração deste resultado é bem extensa para ser inclusa neste trabalho, no entanto, para o leitor interessado, a demonstração com detalhes pode ser encontrada em [7], [8], [14].

Se  $H$  é um conjunto hiperbólico de um fluxo  $\phi$   $C^r$  em uma variedade compacta  $M$ , no caso sem bordo ( $\partial M = \emptyset$ ), o Teorema da Variedade Estável diz que para todo  $x \in H$  os conjuntos  $W^{ss}(x)$  e  $W^{uu}(x)$  são subvariedades  $C^r$  sem bordo imersas em  $M$ .

Além disso,  $W^{ss}(x)$  e  $W^{uu}(x)$  são tangentes aos subespaços  $E_x^s$  e  $E_x^u$  da decomposição hiperbólica de  $H$  em  $x$  e as aplicações de valor fixo  $x \in H \rightarrow W^\sigma(x)$ , para  $\sigma = ss, uu$ , são contínuas em compactos.

Consequentemente, os conjuntos

$$W^s(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\phi_t(x))$$

$$W^u(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(\phi_t(x))$$

denominados, respectivamente, **variedade estável e instável** do ponto  $x \in M$  para um fluxo  $\phi_t$  são também subvariedades  $C^r$  imersas em  $M$ .

O Teorema da Variedade Estável assegura que em um conjunto hiperbólico, o sistema não linear possui variedades estáveis e instáveis,  $W^s$  e  $W^u$ , que são tangentes, respectivamente, aos subespaços  $E^s$  e  $E^u$ , do sistema linearizado. Além disso,  $W^s$  e  $W^u$  têm as mesmas dimensões de  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente.

**Obsevação 2.7.** *O Teorema da Variedade Estável também é válido para o caso com bordo. De fato, seja  $H$  um conjunto hiperbólico de um fluxo  $C^1$  em uma variedade compacta com bordo  $M$ . Podemos assumir que  $\phi$  é definido em uma variedade fechada  $M'$  e que  $M$  é uma subvariedade de codimensão 0 de  $M'$ . Aplicando o Teorema da Variedade Estável no caso sem bordo, temos que para todo  $x \in H$ , os conjuntos  $W^{ss}(x)$  e  $W^{uu}(x)$  são também subvariedades  $C^r$  de  $M'$ .*

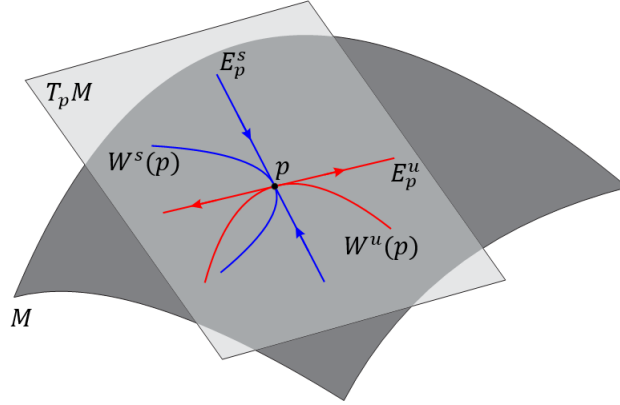


Figura 2.1: Teorema da Variedade Estável.

**Obsevação 2.8.** Lembre-se que uma **fonte** de  $\phi$ , por definição, é um conjunto  $\Lambda$  isolado e transitivo de  $\phi$  satisfazendo  $\Lambda = \bigcap_{t \leq 0} \phi_t(U)$  para alguma vizinhança  $U$ .

**Teorema 2.9.** Seja  $\Lambda$  um conjunto atrator para  $\phi_t$ . Suponha que uma das seguintes hipóteses ocorre

- i)  $p \in \Lambda$  é um ponto hiperbólico periódico
- ii)  $\Lambda$  tem uma estrutura hiperbólica e  $p \in \Lambda$ .

Então,  $W^{uu}(p) \subset \Lambda$ .

*Demonstração.* O conjunto  $\Lambda$ , por ser atrator, está contido no interior de uma região de atração  $U$ , então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $W_\varepsilon^{uu}(\phi_t(p)) \subset U$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Portanto, para qualquer  $t \geq 0$

$$W^{uu}(\phi_{-t}(p)) = \bigcup_{k \geq 0} \phi_k(W_\varepsilon^{uu}(\phi_{-k-t}(p))) \subset U \quad e$$

$$W^{uu}(p) = \phi_t(W^{uu}(\phi_{-t}(p))) \subset \phi_t(U).$$

Tomando a interseção para  $t \geq 0$  de  $\phi_t(U)$  temos

$$\bigcap_{t \geq 0} W^{uu}(p) \subset \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U) = \Lambda.$$

Logo,  $W^{uu}(p) \subset \Lambda$ . □

**Obsevação 2.10.** É importante observar que se  $\Lambda$  é uma fonte para o fluxo  $\phi_t$  então  $\Lambda$  é um atrator para o fluxo reverso  $\phi_{-t}$ . Sendo assim, se  $\Lambda$  é uma fonte para  $\phi_t$  e  $p \in \Lambda$  é um ponto hiperbólico periódico de  $\phi_t$ , então  $W^{ss}(p) \subset \Lambda$  uma vez que  $W^{uu}(p)$  com respeito ao fluxo  $\phi_t$  é igual a  $W^{ss}(p)$  com respeito ao fluxo reverso  $\phi_{-t}$ .

## 2.2 Fluxo Anosov: Propriedades e Exemplos

**Definição 2.11.** Um fluxo  $\phi$   $C^1$  em uma variedade  $M$  é **Anosov** se  $M$  é um conjunto hiperbólico para  $\phi$ .

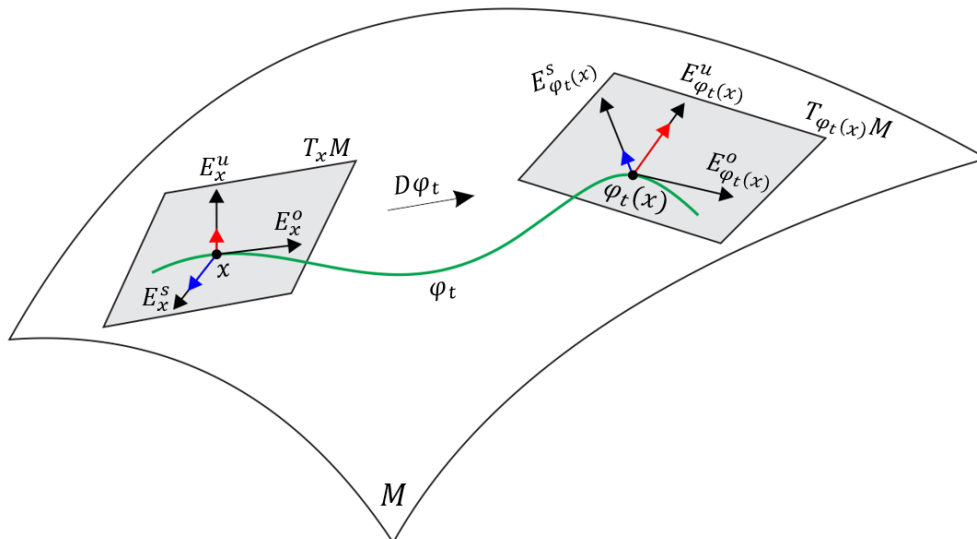


Figura 2.2: Fluxo Anosov:  $E^s$  contrai e  $E^u$  expande.

**Definição 2.12.** Um fluxo Anosov é de **codimensão um** se a decomposição hiperbólica  $TM = E_M^s \oplus E_M^o \oplus E_M^u$  satisfaz  $\dim(E_x^s) = 1$  para todo  $x \in M$  ou  $\dim(E_x^u) = 1$  para todo  $x \in M$ .

Destas definições, observamos que um fluxo é Anosov se exhibe direções de contração e expansão formando com o fluxo uma decomposição contínua do fibrado tangente e um fluxo Anosov é de codimensão um se sua direção de contração ou expansão for unidimensional.

**Definição 2.13.** Um fluxo  $\varphi_t$  é Axioma A se:

1.  $\Omega(\varphi_t)$  é hiperbólico;
2.  $\Omega(\varphi_t)$  é o fecho das órbitas fechadas de  $\varphi_t$ .

**Exemplo 2.14.** Um fluxo Anosov é Axioma A.

De fato, seja  $\phi_t$  um fluxo Anosov em uma variedade  $M$ . Uma vez que  $M$  é hiperbólico e  $\Omega(\phi_t) \subset M$  então  $\Omega(\phi_t)$  é também hiperbólico. Agora, usando a estrutura hiperbólica em  $M$ , podemos ver que todo  $p \in \Omega(\phi_t)$  pode ser aproximado por órbitas fechadas, pelo Lema do Fecho de Anosov 1.93. Logo, as órbitas fechadas são densas em  $\Omega(\phi_t)$ . Portanto  $\Omega(\phi_t)$  é o fecho de órbitas fechadas.

**Exemplo 2.15.** Todo fluxo  $\varphi_t : M \rightarrow M$  Axioma A transitivo é Anosov.

De fato, como o fluxo  $\varphi_t$  é transitivo, então existe um ponto  $x \in M$  tal que sua órbita,  $\mathcal{O}(x)$ , é densa em  $M$ . Logo

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = M \text{ e } \mathcal{O}(x) \subset \Omega(\varphi_t).$$

Assim,

$$M = \overline{\mathcal{O}(x)} \subset \overline{\Omega(\varphi_t)} = \Omega(\varphi_t),$$

ou seja,

$$M \subset \Omega(\varphi_t).$$

Como  $\Omega(\varphi_t) \subset M$  segue que

$$\Omega(\varphi_t) = M.$$

Como o fluxo é Axioma A temos que  $\Omega(\varphi_t) = M$  é hiperbólico. Logo, o fluxo  $\varphi_t$  é Anosov.

**Teorema 2.16. (Teorema da Decomposição Espectral para Fluxos)** *Se o fluxo  $\varphi_t : M \rightarrow M$  é Axioma A, então o conjunto não errante  $\Omega(\varphi_t)$  se decompõe de maneira única e finita*

$$\Omega(\varphi_t) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k,$$

como uma união disjunta de conjuntos fechados, invariantes e  $\varphi_t|_{\Omega_i}$  é transitivo. Estes  $\Omega_i$ 's são chamados de conjuntos básicos de  $\Omega(\varphi_t)$ .

*Demonstração.* Ver [3], [14]. □

**Definição 2.17.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $E \subset TM$  um subfibrado contínuo do fibrado tangente.  $E$  é chamado **integrável** se é o fibrado tangente de uma folheação  $C^1$  (ou seja, uma folheação determinada por uma carta coordenada de classe  $C^1$ ).*

Considerando  $E^u \oplus E^o \oplus E^s$  a decomposição do fibrado tangente  $TM$ , é conhecido que:

- i)  $E^u$  e  $E^s$  são chamados de subfibrados de expansão e contração de  $TM$ , respectivamente.
- ii) Os subfibrados  $E^u \oplus E^o$ ,  $E^s \oplus E^o$ ,  $E^u$ ,  $E^s$  são unicamente integráveis e que as variedades integráveis são de classe  $C^r$ . As variedades integráveis determinam folheações de  $M$ , as quais são denotadas por  $\mathcal{F}^u$  (folheação fraca instável),  $\mathcal{F}^s$  (folheação fraca estável),  $\mathcal{F}^{uu}$  (folheação forte instável),  $\mathcal{F}^{ss}$  (folheação forte estável), respectivamente. Se  $x \in M$  então as respectivas folhas dessa folheação contendo  $x$  são  $W^u(x)$ ,  $W^s(x)$ ,  $W^{uu}(x)$  e  $W^{ss}(x)$ .
- iii) O subespaço  $E^u \oplus E^s$  não é necessariamente integrável. Se  $E^u \oplus E^s$  for integrável, então existe uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^1$  tal que o subespaço  $E^u \oplus E^s$  é tangente a  $\mathcal{F}$ . Se  $L$  é uma folha de  $\mathcal{F}$  então  $L$  é tangente a  $E^u \oplus E^s$ , além disso  $L$  é  $\mathcal{F}^{uu}$ -saturado e  $\mathcal{F}^{ss}$ -saturado.

Sobre 3-variedades os fluxos Anosov são de codimensão 1, neste caso ambas as folheações  $\mathcal{F}^s$  e  $\mathcal{F}^u$  são de codimensão 1. Em geral, para  $n$ -variedades, se  $\mathcal{F}^u$  (respectivamente  $\mathcal{F}^s$ ) é de codimensão 1, então  $\mathcal{F}^{ss}$  (respectivamente  $\mathcal{F}^{uu}$ ) é de dimensão igual a 1.

**Teorema 2.18.** *Seja  $\phi_t$  um fluxo Anosov de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ). As folheações  $\mathcal{F}^{ss}$  e  $\mathcal{F}^{uu}$  são contínuas e possuem folhas de classe  $C^r$ . Cada folha de ambas as folheações são difeomorfas a  $\mathbb{R}^d$ , onde  $d = \dim(\mathcal{F}^\sigma)$  ( $\sigma = ss, uu$ ). Além disso*

1. Dois pontos  $x$  e  $y$  pertencem a mesma folha de  $\mathcal{F}^{ss}$  se, e somente se,

$$d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

1. Dois pontos  $x$  e  $y$  pertencem a mesma folha de  $\mathcal{F}^{uu}$  se, e somente se,

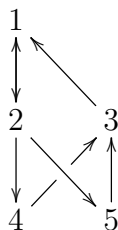
$$d(\phi_{-t}(x), \phi_{-t}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

*Demonstração.* Ver [14], [8]. □

**Teorema 2.19. (Equivalências de Transitividade)** *Seja  $\phi$  um fluxo Anosov em  $M$ . Então, as seguintes sentenças são equivalentes.*

1. O conjunto de pontos não errantes  $\Omega(\phi) = M$ .
2. Os pontos periódicos são densos em  $M$ .
3. Existe um ponto  $x_0 \in M$  tal que a órbita  $\{\phi_t(x_0); t \in \mathbb{R}\}$  é densa em  $M$ .
4. Todas as folhas de  $\mathcal{F}^u$  são densas em  $M$ .
5. Todas as folhas de  $\mathcal{F}^s$  são densas em  $M$ .

*Demonstração.* A demonstração deste teorema seguirá o diagrama de implicações abaixo



(1  $\Rightarrow$  2) Decorre do Lema do Fecho de Anosov 1.93. O que esse resultado nos permite concluir é que os pontos periódicos são densos nos pontos não errantes. Isso mostra a implicação desejada.

(2  $\Rightarrow$  1) Todo ponto periódico é também não errante. Por hipótese todo ponto de  $M$  é ponto de acumulação do conjunto de pontos não errantes. Uma vez que  $\Omega(\phi)$  é fechado e invariante, temos  $\Omega(\phi) = M$ .

(2  $\Rightarrow$  4) Seja  $x$  um elemento qualquer de  $M$  e considere  $W^u(x)$  uma folha instável de  $\mathcal{F}^u$  passando por  $x$ . Como estamos supondo  $M$  conexa, basta mostrarmos que  $\overline{W^u(x)}$  é também aberto em  $M$ . É uma propriedade de folheações (ver por exemplo [4]) que  $\overline{W^u(x)}$  é uma união de folhas de  $\mathcal{F}^u$  (conjunto saturado por  $\mathcal{F}^u$ ). Seja  $z \in \overline{W^u(x)}$ ,  $U$  uma vizinhança pequena de  $z$  e  $p \in U$  um ponto periódico (isso é possível, pois estamos assumindo (2)).

Se  $U$  for suficientemente pequena, por produto local vale que  $W^s(p) \cap W^u(z) \neq \emptyset$ . Se tomarmos um ponto  $y$  nessa interseção, temos que a órbita  $\{\phi_t(y) : t \in \mathbb{R}\}$  está contida em  $W^u(z)$ , logo está contida em  $\overline{W^u(x)}$ . Mas, como  $y$  também está contido em  $\overline{W^s(p)}$ , no futuro  $\{\phi_t(y) : t \in \mathbb{R}\}$  acumula na órbita  $\{\phi_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ , ou seja,  $p \in \overline{W^u(x)}$ . Isso finaliza a demonstração, pois como os pontos periódicos são densos em  $U$ , obtemos  $U \in \overline{W^u(x)}$  de modo que  $\overline{W^u(x)}$  é não-vazio, aberto e fechado numa variedade conexa o que implica  $\overline{W^u(x)} = M$ .

(2  $\Rightarrow$  5) Olhamos para o campo negativo (o que é instável vira estável) e adaptamos o feito na demonstração anterior.

(3  $\Rightarrow$  1) Os pontos da órbita  $\{\phi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$  são não errantes. O conjunto dos pontos não errantes é fechado e invariante. Isso implica que  $\overline{\{\phi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}} = M \subset \Omega(\phi) \subset M$ , ou seja,  $\Omega(\phi) = M$ .

(4  $\Rightarrow$  3) Em [3] (Corolário 4.5) temos que qualquer fluxo Anosov possui um atrator. Atratores são invariantes por folheação fraca instável. De fato, suponha que  $A$  seja um atrator de  $\phi_t$ , fixando  $x \in A$  e  $y \in W^u(x) \setminus A$ , no passado a órbita  $\{\phi_t(y) : t \in \mathbb{R}\}$  se afasta de  $A$  (definição de atrator), mas por outro lado, como  $x$  e  $y$  estão na mesma folha fraca instável, no passado suas órbitas ficam arbitrariamente próximas, uma contradição, já que a órbita de  $\phi_t(x)$  está contida em  $A$ . Desse modo,  $W^u(x) \subset A \subset M$ , o que nos dá  $M = \overline{W^u(x)} \subset \overline{A} \subset M$ . Ou seja,  $A$  é denso em  $M$ . Mas  $A$ , contém uma órbita densa, digamos  $\{\phi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ , o que implica  $\{\phi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$  também é densa em  $M$ .

(5  $\Rightarrow$  3) A demonstração é similar a do item anterior, basta apenas fazer uma adaptação trocando atrator por repulsor e usar o fato que um repulsor  $R$  é invariante pela folheação  $\mathcal{F}^s$ .  $\square$

O seguinte teorema é célebre pela sua abrangência e repercussão no ambiente científico matemático. O enunciamos sem demonstração. Sua prova pode ser encontrada em [11].

**Teorema 2.20. (Teorema de Verjovsky)** *Seja  $\phi_t$  um fluxo Anosov de codimensão um definido numa  $n$ -variedade fechada  $M$  ( $n \geq 4$ ). Então  $\phi_t$  é transitivo.*

A definição e o teorema a seguir aparecem na tese de doutorado de T. Barbot [2]. Eles são úteis para a demonstração do resultado principal deste trabalho. Pela sua extensão, o teorema é enunciado sem demonstração.

**Definição 2.21.** *Um fluxo Anosov de codimensão um é dito **produto** se, e somente se, um dos espaços de folhas de codimensão um é difeomorfa a  $\mathbb{R}$ .*

**Teorema 2.22.** *Todo fluxo Anosov produto é transitivo.*

*Demonstração.* A prova deste teorema pode ser encontrada em [2], página 35.  $\square$

## 2.2.1 Aplicação de Poincaré

Seja  $\delta$  uma órbita periódica de um campo. Por um ponto  $x_0 \in \delta$  considere uma transversal ou seção transversal  $\Sigma$  ao campo  $X$ .

A órbita passando por  $x_0$  volta a intersectar  $\Sigma$  no tempo  $\tau$ , onde  $\tau$  é o período de  $\delta$ . Pela continuidade do campo, a órbita por um ponto em  $\Sigma$  suficientemente próximo a  $x_0$  também volta a intersectar  $\Sigma$  em um tempo próximo a  $\tau$ .

Seja  $V \subset \Sigma$  uma vizinhança suficientemente pequena de  $x_0$ , podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto P(x) \end{aligned}$$

que a cada ponto  $x \in V$  associa  $P(x) \in \Sigma$ , onde  $P(x)$  é o primeiro ponto onde a órbita de  $x$  volta a intersectar  $\Sigma$ . Esta aplicação é denominada **Transformação de Poincaré** ou **Função de Primeiro Retorno de Poincaré** associado a órbita  $\delta$  e a seção transversal  $\Sigma$ .

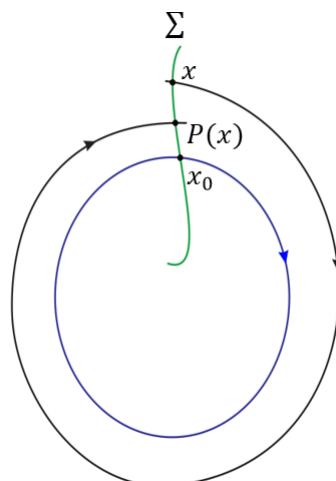


Figura 2.3: Transformação de Poincaré

Os exemplos mais simples de fluxos Anosov são dados pelas suspensões de difeomorfismos Anosov. O fluxo **suspensão** dado pelo difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é construído, considerando o produto  $M \times \mathbb{R}$  com a seguinte relação de equivalência

$$(x, s + 1) \sim (f(x), s).$$

Denotamos o quociente por essa relação por  $M_f = M \times \mathbb{R} / \sim$ . Assim, para obter todos os pontos de  $M_f$  basta tomar  $0 \leq s \leq 1$ .

**Proposição 2.23.** *Se  $f$  é de classe  $C^k$ , o quociente  $M_f$  é uma variedade que tem estrutura  $C^k$ . Considere a seguinte equação diferencial em  $M \times \mathbb{R}$ :*

$$\begin{cases} x' = 0, \\ s' = 1. \end{cases}$$

Esta equação induz um fluxo  $\phi_t$  em  $M \times \mathbb{R}$  que por sua vez induz um fluxo  $\phi_t^f$  em  $M_f$  (com campo associado  $X_f$ ). O fluxo  $\phi_t$  satisfaz

$$\phi_1(x, 0) = (x, 1) \sim (f(x), 0),$$

logo  $f$  é uma aplicação de Poincaré sobre a transversal global  $M \times \{0\} \subset M_f$  para o fluxo  $\phi_t^f$ .

*Demonstração.* Ver [12] para detalhes sobre suspensão de um difeomorfismo e para a prova de que  $M_f$  é uma variedade com estrutura diferenciável.  $\square$

**Proposição 2.24.** *Dado um difeomorfismo Anosov  $f : M \rightarrow M$ , a suspensão  $\phi_t^f$  de  $f$  é um fluxo Anosov em  $M_f$ .*

*Demonstração.* Denotemos por  $TM = \hat{E}^s \oplus \hat{E}^u$  a decomposição contínua associada a  $f$ . Queremos contruir uma decomposição

$$TM_f = E^s \oplus E^o \oplus E^u.$$

Para conseguir isso, definimos para  $(x, 0) \in M \times 0$

$$E_{(x,0)}^s = \hat{E}_x^s,$$

$$E_{(x,0)}^u = \hat{E}_x^u.$$

Quando  $(x, t) \in M \times [0, 1]$  definimos

$$E_{(x,t)}^s = D\phi_t^f(x, 0)(\hat{E}_x^s),$$

$$E_{(x,t)}^u = D\phi_t^f(x, 0)(\hat{E}_x^u).$$

Dessa maneira, temos a decomposição desejada  $TM_f = E^s \oplus E^o \oplus E^u$ . Mostraremos agora que essa decomposição satisfaz as condições Anosov para  $\phi_t^f$ . Vamos analisar  $E_{(x,t_0)}^s, t_0 \in \mathbb{R}$ . Por definição temos que  $E_{(x,t_0)}^s = D\phi_{t_0}^f(x, 0)(\hat{E}_x^s)$ , assim  $D\phi_{-t_0}^f(x, t_0)(E_{(x,t_0)}^s) = \hat{E}_x^s$ . Fixando  $t > 0$

$$D\phi_t^f(x, t_0) = D\phi_{t+t_0-t_0}^f(x, t_0) = D\phi_{t+t_0}^f(x, 0) \cdot D\phi_{-t_0}^f(x, t_0)$$

Logo,

$$D\phi_t^f(x, t_0) \Big|_{E_{(x,t_0)}^s} = D\phi_{t+t_0}^f(x, 0) \Big|_{\hat{E}_x^s}$$

Como esta última expressão vale para qualquer  $t > 0$ , podemos fazer a análise da condição de ser Anosov em  $M \times 0$ , ou seja, num ponto da forma  $(x, 0)$ . Tomemos  $t = [t] + r$ , onde  $r \in [0, 1)$  e  $[\cdot]$  significa a parte inteira.

Em  $M \times 0$ , por construção de  $\phi_t^f$  temos que  $\phi_{[t]}^f = f^{[t]}$ . Então, como  $\phi_t^f(x, 0) = \phi_{[t]+r}^f(x, 0) = \phi_{r+[t]}^f(x, 0) = \phi_r^f(\phi_{[t]}^f(x, 0))$  (pela definição de fluxo), temos

$$D\phi_t^f(x, 0) = D\phi_r^f(f^{[t]}(x)) \cdot Df^{[t]}(x).$$

Portanto,

$$|D\phi_t^f(x, 0)(v)| \leq |D\phi_r^f(f^{[t]}(x))| \cdot |Df^{[t]}(x)(v)| \leq K \cdot C \cdot \lambda^{[t]}|v|, \quad v \in \hat{E}_x^s, \quad \forall x \in M.$$

Um raciocínio análogo vale para  $E^u$ . Concluimos assim que  $\phi_t^f$  é de fato um fluxo Anosov em  $M_f$ .  $\square$

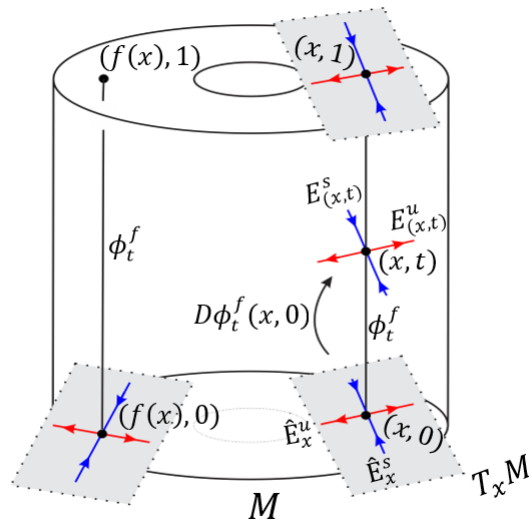


Figura 2.4: Suspensão de um Difeomorfismo Anosov.

# Capítulo 3

## Teorema Principal

Neste capítulo apresentaremos a prova do teorema que motivou este estudo. Para isto, utilizaremos os resultados e conceitos apresentados nos capítulos anteriores, bem como os resultados apresentados na primeira seção deste capítulo. A principal referência para este capítulo foi [1].

### 3.1 Resultados Auxiliares

No que segue  $M$  é uma variedade compacta com bordo ( $\partial M \neq \emptyset$ ) e consideramos um fluxo definido em  $M$ .

**Lema 3.1.** *Seja  $H$  um conjunto hiperbólico de um fluxo  $\phi$   $C^1$  definido em uma variedade compacta com bordo  $M$ . Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Se  $x \in H$  está suficientemente próximo de  $\partial M$ , então  $\omega_\phi(x) \subset \partial M$  ou  $\alpha_\phi(x) \subset \partial M$ .*
2.  *$cl(Per_\phi(H)) \setminus \partial M$  é fechado em  $M$ .*
3. *Se  $H$  é transitivo, isolado e  $H \cap \partial M \neq \emptyset$ , então  $H \subset \partial M$ .*

*Demonstração.* Para provar (1) suponha por contradição que existe uma sequência  $x_n \in H$  convergindo para algum  $z \in \partial M$  tal que  $\omega_\phi(x_n) \not\subset \partial M$  e  $\alpha_\phi(x_n) \not\subset \partial M$ . Como  $H$  é hiperbólico, pela Definição 2.1  $H$  é compacto e, portanto, fechado. Sendo assim,  $z \in H$ . Seja  $T_H M = E_H^s \oplus E_H^u \oplus E_H^o$  a decomposição hiperbólica de  $H$ .

**Afirmção 3.2.**  $E_z^s \oplus E_z^u \subset T_z(\partial M)$ .

De fato, suponha que  $E_z^s \not\subset T_z(\partial M)$ . Então  $E_z^s \pitchfork T_z(\partial M)$  em  $z$ . Portanto,  $W^{ss}(z) \pitchfork \partial M$  em  $z$ . Pela continuidade das variedades estáveis de  $\phi$  concluímos que, para  $n$  grande,  $W^{ss}(x_n) \pitchfork \partial M$  em algum ponto  $w$ . Como  $w \in W^{ss}(x_n)$

temos que  $w$  e  $x_n$  têm os mesmos conjuntos ômega-limite. Mas o conjunto ômega-limite de  $w$  está contido em  $\partial M$  uma vez que  $\partial M$  é fechado e invariante para  $\phi$ . Portanto,  $\omega_\phi(x_n) \subset \partial M$ , contrariando a suposição. Isto prova  $E_z^s \subset T_z(\partial M)$ .

De maneira análoga provamos  $E_z^u \subset T_z(\partial M)$ . Suponha  $E_z^u \not\subset T_z(\partial M)$ . Então  $E_z^u \cap T_z(\partial M)$  em  $z$ . Portanto,  $W^{uu}(z) \cap \partial M$  em  $z$ . Pela continuidade das variedades instáveis de  $\phi$  concluímos que, para  $n$  grande,  $W^{uu}(x_n) \cap \partial M$  em algum ponto  $q$ . Como  $q \in W^{uu}(x_n)$  temos que  $q$  e  $x_n$  têm os mesmos conjuntos alfa-limite. Mas o conjunto alfa-limite de  $q$  está contido em  $\partial M$  uma vez que  $\partial M$  é fechado e invariante para  $\phi$ . Portanto,  $\alpha_\phi(x_n) \subset \partial M$ , contrariando a suposição. Isto prova  $E_z^u \subset T_z(\partial M)$  e a afirmação segue.

Como o fluxo é tangente a  $\partial M$  temos  $E_z^o \subset T_z(\partial M)$ , logo  $T_z M = E_z^s \oplus E_z^u \oplus E_z^o \subset T_z(\partial M)$ , o que é absurdo, pois  $\dim(T_z M) > \dim(T_z \partial M)$ . Isto prova (1).

Para provar (2) suponha por contradição que  $cl(Per_\phi(H)) \setminus \partial M$  não é fechado em  $M$ . Então, qualquer vizinhança de qualquer ponto de  $\partial M$  contém um ponto periódico  $p \in H \setminus \partial M$ . Como  $p$  é periódico temos  $p \in \omega_\phi(p) = \alpha_\phi(p)$ . Logo,  $\omega_\phi(p) \not\subset \partial M$  e  $\alpha_\phi(p) \not\subset \partial M$ . Segue de (1) que  $p \in \partial M$ , o que é absurdo.

Para provar (3) suponha por contradição que  $H$  é transitivo, isolado,  $H \cap \partial M \neq \emptyset$  e  $H \not\subset \partial M$ . Uma vez que conjuntos transitivos para fluxos definidos em variedades compactas são conexos (Observação 1.77) podemos obter pelo Lema do Fecho de Anosov para fluxos 1.93 uma sequência de pontos periódicos em  $Per_\phi(H) \setminus \partial M$  convergindo para algum ponto em  $\partial M$ . Isto contradiz (2) e a prova segue.  $\square$

**Corolário 3.3.** *Não existem fluxos Anosov transitivos em variedades compactas com bordo.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que exista um fluxo Anosov transitivo  $\phi$  em uma variedade compacta com bordo  $M$ . Então, por definição de fluxo Anosov,  $M$  é um conjunto hiperbólico de  $\phi$ .

Além disso,  $M$  é um conjunto transitivo e isolado de  $\phi$ . De fato, se  $\phi$  é transitivo então  $\phi$  possui uma órbita densa, ou seja, existe  $x_0 \in M$  tal que  $\mathcal{O}(x_0) = M$ , onde  $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi_t(x_0); t \in \mathbb{R}\}$ . Sendo assim, dado  $\epsilon > 0$ ,  $B(x, \epsilon) \cap \mathcal{O}(x_0) \neq \emptyset \forall x \in M$ .

Tomando  $\epsilon = 1$ , existe  $t_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_{t_1}(x_0) \in B(x, 1)$

$\epsilon = \frac{1}{2}$ , existe  $t_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_{t_2}(x_0) \in B(x, \frac{1}{2})$

$\epsilon = \frac{1}{3}$ , existe  $t_3 \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_{t_3}(x_0) \in B(x, \frac{1}{3})$

$\vdots$   $\vdots$

$\epsilon = \frac{1}{n}$ , existe  $t_n \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_{t_n}(x_0) \in B(x, \frac{1}{n})$

Dessa forma, construímos uma sequência  $\{\phi_{t_n}(x_0)\}_{n \geq 1}$  tal que  $B(x, \frac{1}{n}) \cap \{\phi_{t_n}(x_0)\} \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  temos  $\phi_{t_n}(x_0) \rightarrow x$ . Portanto,  $x \in \omega(x_0) \forall x \in M$ . Logo,  $M = \omega(x_0)$  para algum  $x_0 \in M$ . Concluímos assim que  $M$  é transitivo.

Agora, uma vez que  $M$  é um conjunto hiperbólico de  $\phi$ , então  $M$  é  $\phi$ -invariante. Logo  $\phi_t(M) = M \forall t \in \mathbb{R}$ . Daí,  $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(M) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} M = M$ , concluindo que  $M$  é isolado.

Portanto,  $M$  é um conjunto hiperbólico, transitivo, isolado que intersecta  $\partial M$ . Pelo Lema 3.1 (item 3), temos  $M \subset \partial M$ , o que é absurdo.  $\square$

**Lema 3.4.** *Seja  $\phi$  um fluxo  $C^1$  não singular em uma variedade compacta  $N$  com  $\dim(N) \geq 2$ . Se  $x \in N$  tem conjunto  $\omega$ -limite hiperbólico expansivo, então  $x$  é um ponto periódico de  $\phi$ .*

*Demonstração.* Como  $\omega_\phi(x)$  é hiperbólico expansivo segue que todo ponto  $y \in \omega_\phi(x)$  existe uma variedade instável forte,  $W_\phi^{uu}(y)$ , em  $N$ . Uma vez que  $\phi$  é não singular e  $\omega_\phi(x)$  é hiperbólico expansivo, então  $\dim(E_y^o) = 1 \forall y \in N$  e  $\dim(E_y^s) = 0 \forall y \in \omega_\phi(x)$ . Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \dim(N) &= \dim(T_y N) = \dim(E_y^o \oplus E_y^u) \quad \forall y \in \omega_\phi(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim(N) &= \dim(E_y^o) + \dim(E_y^u) \quad \forall y \in \omega_\phi(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim(N) &= 1 + \dim(E_y^u) \quad \forall y \in \omega_\phi(x). \end{aligned}$$

Logo,  $\dim(E_y^u) = \dim(N) - 1 \forall y \in \omega_\phi(x)$ . Portanto,  $\dim(W_\phi^{uu}(y)) = \dim(E_y^u) = \dim(N) - 1 \neq 0 \forall y \in \omega_\phi(x)$ , pois  $\dim(N) \geq 2$ .

Pela Observação 1.70, tome um ponto recorrente  $y \in \omega_\phi(x)$  e considere um pequeno disco fechado  $D \subset W_\phi^{uu}(y)$  de dimensão  $\dim(N) - 1$  centrado em  $y$ . Denote por  $\Pi$  a aplicação retorno induzida pelo fluxo reverso  $\phi_{-t}$  em  $D$ , ou seja,  $\Pi : D \rightarrow D$  definida por  $\Pi(x) = \phi_{-t}(x)$ .

**Afirmção 3.5.**  $\Pi$  é uma contração.

De fato, pela desigualdade do valor médio

$$\| \Pi(x) - \Pi(y) \| = \| \phi_{-t}(x) - \phi_{-t}(y) \| \leq \| D\phi_{-t}(z) \| \cdot \| x - y \|$$

para algum  $z$  pertencente ao segmento  $[x, y] = \{x + \mu(y - x) : \mu \in [0, 1]\}$ .

Sabemos que

$$\| D\phi_{-t}(z) \| = \sup_{\|v\|=1} \{ \| D\phi_{-t}(z) v \|; v \in E_{\omega_\phi(x)}^u (v \in E_{\omega_{-\phi}(x)}^s) \} e$$

$$\| D\phi_{-t}(z) v \| \leq C e^{-\lambda t} \| v \| \quad \forall v \in E_{\omega_{-\phi}(x)}^s.$$

Portanto, por definição de supremo

$$\| D\phi_{-t}(z) \| \leq C e^{-\lambda t}.$$

Logo,

$$\| \Pi(x) - \Pi(y) \| = \| \phi_{-t}(x) - \phi_{-t}(y) \| \leq \| D\phi_{-t}(z) \| \cdot \| x - y \| \leq Ce^{-\lambda t} \| x - y \| .$$

Tomando  $C < e^{\lambda t}$ , temos  $\| \Pi(x) - \Pi(y) \| \leq Ce^{-\lambda t} \| x - y \|$ , onde  $Ce^{-\lambda t} < 1$ . Sendo assim,  $\Pi$  é uma contração e isto prova a afirmação.

Como  $D$  é fechado,  $D \subset W_\phi^{uu}(y) \subset N$  e  $N$  é compacto, então  $D$  é compacto e, portanto, completo. Pelo Teorema 1.6 (Teorema do ponto fixo para contrações),  $\Pi$  tem um único ponto fixo que é atrator, o qual vamos denotar por  $p$ . Uma vez que  $p$  é ponto fixo atrator para o fluxo reverso  $\phi_{-t}$  então a órbita de  $p$  é o próprio ponto  $p$  e além disso  $p$  é repulsor para o fluxo  $\phi_t$ . Sendo assim  $p$  produz uma órbita periódica repulsora para  $\phi$  contida em  $\omega_\phi(x)$ .

Agora, seja  $V_p$  uma vizinhança de  $p$ . Suponha que  $x \in V_p$  e que  $x$  não seja ponto periódico de  $\phi$ . Então  $x \notin \mathcal{O}(p)$ . Se  $x \in V_p$  e  $x \notin \mathcal{O}(p)$  então a órbita de  $x$  se afasta da órbita de  $p$ , uma vez que  $\mathcal{O}(p)$  é repulsora. No entanto, isto contradiz o fato de que  $p \in \omega_\phi(x)$ . Logo,  $x \in \mathcal{O}(p)$  e, portanto,  $x$  é ponto periódico de  $\phi$ .  $\square$

**Lema 3.6.** *Seja  $\phi$  um fluxo  $C^1$  em uma variedade compacta  $M$ . Seja  $N$  uma subvariedade fechada em  $M$  que também é um conjunto hiperbólico de  $\phi$  com decomposição hiperbólica  $T_N M = E_N^s \oplus E_N^o \oplus E_N^u$ . Suponha que  $\dim(N) \geq 2$ . Se  $E^s$  é unidimensional (ou seja,  $\dim(E_x^s) = 1$  para todo  $x \in N$ ), então  $E_x^s \subset T_x N$  para todo  $x \in N$ .*

*Demonstração.* Denote por  $Y_t$  o fluxo  $\phi_t$  restrito a  $N$ . A prova do Lema será dada via as seguintes afirmações.

**Afirmação 3.7.** *O fluxo  $Y_t$  é não singular.*

De fato,  $N$  (como todo conjunto hiperbólico de  $\phi$ ) tem um número finito de singularidades de  $\phi$ . Portanto, o conjunto de pontos regulares (ou seja, o conjunto de pontos não singulares) é denso em  $N$ . Uma vez que  $N$  é uma subvariedade conexa e a decomposição  $T_N M = E_N^s \oplus E_N^o \oplus E_N^u$  é contínua, concluímos que  $Y_t$  é não singular.

**Afirmação 3.8.** *Se  $E_x^s \not\subset T_x N$ , então  $T_y N = (E_y^u \cap T_y N) \oplus E_y^o$  para todo  $y \in \omega_Y(x)$ .*

De fato, é suficiente mostrar que  $T_y N \subset E_y^u \oplus E_y^o$  para todo  $y \in \omega_Y(x)$ .

Para provar isto, introduzimos algumas notações úteis. Para todo vetor tangente  $Z \in T_N M$  escrevemos

$$Z = Z^s + Z^o + Z^u$$

para indicar as componentes de  $Z$  na decomposição  $T_N M = E_N^s \oplus E_N^o \oplus E_N^u$ . Defina o subfibrado  $E^{ou} = E^o \oplus E^u$  com decomposição correspondente  $Z = Z^s + Z^{ou}$ . Claramente,  $Z^{ou} = Z^o + Z^u$ .

Sejam  $C, \lambda$  as constantes da definição de hiperbolicidade (Definição 2.1). Uma vez que  $\phi_t|_N$  é não singular (e  $N$  é compacta) temos que existe uma constante positiva  $K$  tal que

$$\| D\phi_t(x)Z_x^o \| \geq K \| Z_x^o \| \quad \forall Z_x^o \in E_x^o.$$

Como  $\lambda > 0$  existe uma constante positiva  $K'$  tal que

$$\min\{K, C^{-1}e^{\lambda t}\} \geq K' \quad \forall t > 0.$$

Portanto, para todo  $x \in N$ ,  $Z^{ou} = Z_x^{ou} \in E_x^{ou}$  e  $t > 0$  temos

$$\begin{aligned} \| D\phi_t(x)Z_x^{ou} \| &= \| D\phi_t(x)Z_x^o \| + \| D\phi_t(x)Z_x^u \| \\ &\geq K \| Z_x^o \| + C^{-1}e^{\lambda t} \| Z_x^u \| \\ &\geq \min\{K, C^{-1}e^{\lambda t}\}(\| Z_x^o \| + \| Z_x^u \|) \\ &\geq K' \| Z_x^{ou} \|. \end{aligned}$$

Em conclusão, temos

$$\| D\phi_t(x)Z_x^{ou} \| \geq K' \| Z_x^{ou} \|, \tag{3.1}$$

para todo  $x \in N, Z_x^{ou} \in E_x^{ou}$  e  $t > 0$ .

Agora, escolha  $v_y \in T_yN - 0$  e uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $y_n := Y_{t_n}(x) \rightarrow y$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Uma vez que  $y_n \rightarrow y$ , existe outra sequência  $v_{y_n} \in T_{y_n}N$  tal que  $v_{y_n} \rightarrow v_y$  em  $T_yN$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Defina

$$w_n = D\phi_{-t_n}(y_n)v_{y_n}.$$

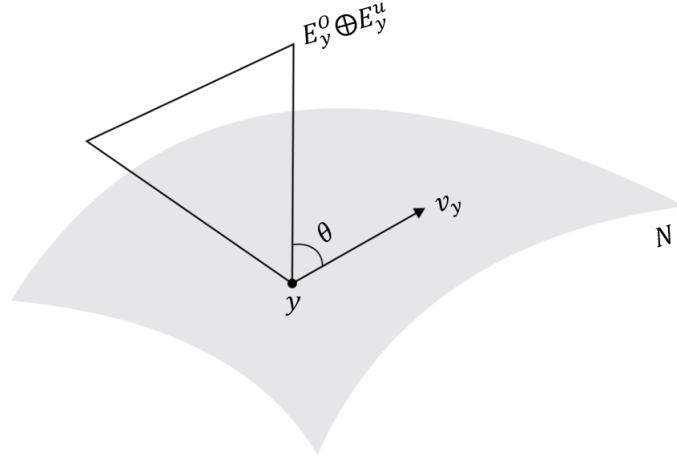
Então  $w_n \in T_xN - 0$ . Normalizando  $w_n$ , se necessário, assumimos que  $\| w_n \| = 1$  para todo  $n$ .

Agora, vamos provar que existe uma constante positiva  $K''$  tal que

$$\| w_n^{ou} \| \geq K'' \quad \forall n. \tag{3.2}$$

De fato, suponha que não exista tal  $K''$ . Então podemos assumir que  $w_n^{ou} \rightarrow 0$ , passando a uma subsequência se necessário. Novamente, passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que  $w_n \rightarrow w_x$  para algum vetor  $w_x$ . Claramente,  $\| w_x \| = 1$ . Como  $w_n^{ou} \rightarrow 0$  temos  $w_x \in E_x^s \cap T_xN$ . Mas  $E^s$  é unidimensional e  $E_x^s \not\subset T_xN$  por hipótese. Então  $E_x^s \cap T_xN = 0$ , a partir do qual obtemos  $w_x = 0$ , o que é uma contradição pois  $\| w_x \| = 1$ . Concluímos assim que existe  $K''$  satisfazendo 3.2.

Agora, vamos mostrar que  $\theta = \angle(v_y, E_y^o \oplus E_y^u)$  é igual a zero.



Seja  $\angle(v_{y_n}, E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u)$  o ângulo entre  $v_{y_n}$  e  $E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u$ . Então temos

$$\angle(v_{y_n}, E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u) = \frac{\|v_{y_n}^s\|}{\|v_{y_n}^{ou}\|}.$$

Pela invariância da decomposição hiperbólica, temos

$$v_{y_n}^s = D\phi_{t_n}(x)w_n^s \quad e \quad v_{y_n}^{ou} = D\phi_{t_n}(x)w_n^{ou}.$$

Logo,

$$\angle(v_{y_n}, E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u) = \frac{\|D\phi_{t_n}(x)w_n^s\|}{\|D\phi_{t_n}(x)w_n^{ou}\|}.$$

De 3.1 e 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} \angle(v_{y_n}, E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u) &\leq (K')^{-1}C e^{-\lambda t_n} \frac{\|w_n^s\|}{\|w_n^{ou}\|} \\ &\leq (K')^{-1}(K'')^{-1}C e^{-\lambda t_n} \|w_n^s\| \leq (K')^{-1}(K'')^{-1}C e^{-\lambda t_n} \end{aligned}$$

pois  $\|w_n^s\| \leq 1$  para todo  $n$  (lembre-se que  $\|w_n\| = 1$ ). Uma vez que  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \angle(v_{y_n}, E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u) = 0.$$

Mas a continuidade da decomposição hiperbólica também implica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \angle(v_{y_n}, E_{y_n}^o \oplus E_{y_n}^u) = \angle(v_y, E_y^o \oplus E_y^u).$$

Portanto,

$$\angle(v_y, E_y^o \oplus E_y^u) = 0$$

o qual é equivalente a  $v_y \in E_y^o \oplus E_y^u$ . Isto prova  $T_y N \subset E_y^o \oplus E_y^u$  e o resultado segue.

**Afirmção 3.9.** *Se  $x \in N$  então  $E_x^s \subset T_x N$  ou  $T_x N = (E_x^u \cap T_x N) \oplus E_x^o$ .*

De fato, suponha que  $E_x^s \not\subset T_x N$ . Então,  $T_y N = (E_y^u \cap T_y N) \oplus E_y^o$  para todo  $y \in \omega_Y(x)$  pela Afirmção 3.8. Isto implica que  $\omega_Y(x)$  é um conjunto hiperbólico expansivo de  $Y$ . Uma vez que  $Y$  é não singular,  $\dim(N) \geq 2$  e  $\omega_Y(x)$  é hiperbólico expansivo, o Lema 3.4 implica que  $x$  é periódico e, portanto,  $x \in \omega_Y(x)$ . Substituindo  $y = x$  acima, temos  $T_x N = (E_x^u \cap T_x N) \oplus E_x^o$ , provando a afirmação.

Agora, para concluirmos a prova do lema, defina os conjuntos

- $B = \{x \in N : T_x N = (E_x^u \cap T_x N) \oplus E_x^o\}$ ;
- $C = \{x \in N : E_x^s \subset T_x N\}$ .

**Afirmção 3.10.**  *$B$  e  $C$  constituem um cisão de  $N$ .*

De fato, pela Afirmção 3.9, temos  $N = B \cup C$ . Além disso,  $B \cap C = \emptyset$ , uma vez que se existir  $x \in N$  tal que  $x \in B \cap C$ , então  $E_x^s \subset T_x N \subset (E_x^u \cap T_x N) \oplus E_x^o \subset E_x^u \oplus E_x^o$ , o que é absurdo, pois  $E_x^s \not\subset E_x^u \oplus E_x^o$ .

Vamos provar que  $B$  e  $C$  são ambos fechados em  $N$ .

Seja  $x_n \in B$  uma sequência convergindo para  $x \in N$ . Como  $x_n \in B$  temos  $T_{x_n} N = (E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N) \oplus E_{x_n}^o \forall n$  ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dim((E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N) \oplus E_{x_n}^o) &= \dim(T_{x_n} N) \Rightarrow \dim(E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N) + \dim(E_{x_n}^o) = \dim(T_{x_n} N) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim(E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N) + 1 &= \dim(T_{x_n} N) \Rightarrow \dim(E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N) = \dim(T_{x_n} N) - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dim(E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N) = \dim(N) - 1 \forall n. \end{aligned}$$

Pela compacidade de  $N$ , podemos assumir que a sequência  $E_{x_n}^u \cap T_{x_n} N$  converge para um subespaço de dimensão  $(\dim(N) - 1)$  de  $T_x N$ . Este subespaço está necessariamente contido em  $E_x^u \cap T_x N$  pela continuidade de  $E^u$ . Então  $\dim(E_x^u \cap T_x N) = \dim(N) - 1$  e, portanto,  $x \in B$ . Isto prova que  $B$  é fechado.

Agora, seja  $y_n \in C$  uma sequência convergindo para  $y \in N$ . Como  $y_n \in C$  temos  $E_{y_n}^s \subset T_{y_n} N \forall n$ . Pela continuidade de  $E^s$  e da decomposição hiperbólica de  $N$ , temos  $E_y^s \subset T_y N$ , logo  $y \in C$  e, portanto,  $C$  é também fechado.

Como  $B \cap C = \emptyset$  e  $N = B \cup C$  concluimos que  $B$  e  $C$  são ambos abertos em  $N$ . De fato, se  $B$  é fechado e  $C$  é o complementar de  $B$  em  $N$ , então  $C$  é aberto. Analogamente, se  $C$  é fechado e  $B$  é o complementar de  $C$  em  $N$ , então  $B$  é aberto.

Uma vez que  $N \neq \emptyset$  temos que ou  $B \neq \emptyset$  ou  $C \neq \emptyset$  e então  $N = B$  ou  $N = C$ , pois  $N$  é conexo.

No caso  $N = B$ , temos que a aplicação  $Y_t$  expande volume, o que é uma contradição pois  $N$  é um conjunto hiperbólico de  $\phi$ . Concluímos assim que  $N = C$ , ou seja,  $E_x^s \subset T_x N$  para todo  $x \in N$  e o resultado segue.  $\square$

**Proposição 3.11.** *Seja  $\phi$  um fluxo  $C^1$  em uma variedade compacta  $M$  e  $N$  uma subvariedade fechada em  $M$  com  $\dim(N) \geq 2$ . Se  $N$  é um conjunto hiperbólico de  $\phi$  com  $\dim(E_x^s) = 1$  para todo  $x \in N$ , então  $\phi_t|_N$  é Anosov.*

*Demonstração.* Sejam  $\phi$  um fluxo  $C^1$  em uma variedade compacta  $M$  e  $N$  uma subvariedade fechada em  $M$ , a qual é também um conjunto hiperbólico de  $\phi$  com  $\dim(N) \geq 2$ .

Seja  $T_N M = E_N^s \oplus E_N^o \oplus E_N^u$  a decomposição hiperbólica de  $N$ . Suponha que  $\dim(E_x^s) = 1$  para todo  $x \in N$ .

Pelo Lema 3.6, temos  $E_x^s \subset T_x N \forall x \in N$ . Para provar que  $\phi_t|_N$  é Anosov, é suficiente provar que

$$TN = E_N^s \oplus E_N^o \oplus (E_N^u \cap TN).$$

Note que,  $E_N^s \oplus E_N^o \subset TN$ , logo  $E^s \oplus E_N^o \oplus (E_N^u \cap TN) \subset TN$ .

A inclusão  $\subset$  segue observando que se  $v \in TN$  então, como na prova da Afirmação 3.8, podemos escrever  $v = v^s + v^o + v^u$ , onde  $v^\sigma \in E^\sigma$  ( $\sigma = s, u, o$ ). Portanto,  $v^u = v - v^o - v^s \in E^u \cap TN$  já que  $v^u \in E^u$  e  $v, v^o, v^s \in TN$ . Isto finaliza a prova.  $\square$

**Corolário 3.12.** *Não existem fluxos  $C^1$  em 3-variedades compactas exibindo uma superfície fechada como um conjunto hiperbólico. Em particular, fluxos Anosov em 3-variedades compactas não possuem superfícies fechadas invariantes.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que existe um fluxo  $\phi$   $C^1$  em uma 3-variedade compacta  $M$  exibindo uma superfície fechada  $N$  como conjunto hiperbólico.

Note que  $N$  é conexa por definição. Como na prova da Afirmação 3.7, podemos ver que  $Y_t = \phi_t|_N$  é não singular. Segue disto que  $\dim(E_x^o) = 1 \forall x \in N$ .

Definimos o conjunto  $B = \{x \in N : \dim(E_x^s) = 2\}$  e afirmamos que  $B$  é aberto e fechado em  $N$ . De fato, seja  $x_n \in B$  uma sequência convergindo para  $x \in N$ . Como  $x_n \in B$  então  $\dim(E_{x_n}^s) = 2 \forall n$ . Pela compacidade de  $N$ , podemos assumir que a sequência  $E_{x_n}^s$  converge para um subespaço de dimensão 2 de  $T_x N$ . Este subespaço está necessariamente contido em  $E_x^s$  pela continuidade de  $E^s$ . Segue disto que  $\dim(E_x^s) = 2$  e, portanto,  $x \in B$ . Logo,  $B$  é fechado. Agora, seja  $y \in B$ . Então  $\dim(E_y^s) = 2$ . Dado  $\epsilon > 0$ , tome  $B(y, \epsilon)$  a bola aberta de centro  $y$  e raio  $\epsilon$ . Pela continuidade de  $E^s$ ,  $\dim(E_x^s) = 2 \forall x \in B(y, \epsilon)$ . Logo,  $B(y, \epsilon) \subset B$ . Portanto,  $B$  é aberto.

Analogamente, provamos que o conjunto  $C = \{x \in N : \dim(E_x^u) = 2\}$  é também aberto e fechado em  $N$  usando a continuidade de  $E^u$ .

Além disso,  $B \cap C = \emptyset$ , pois se  $x \in B$  então  $\dim(E_x^s) = 2$ , logo  $\dim(E_x^u) = 0$ , portanto  $x \notin C$ .

Pela conexidade de  $N$ , concluímos que  $N = B$  ou  $N = C$ .

No caso em que  $N = B$  temos que a aplicação  $\phi_t|_N$  contrai volume (para  $t$  grande) e no caso em que  $N = C$  temos que  $\phi_t|_N$  expande volume (para  $t$  grande). Em ambos os caso temos uma contradição, pois  $N$  é um conjunto hiperbólico. Logo,  $\dim(E_x^s) < 2 \forall x \in N$ . No entanto, por  $N$  ser um conjunto hiperbólico, devemos ter  $\dim(E_x^s) \geq 1 \forall x \in N$ . Sendo assim,  $\dim(E_x^s) = 1 \forall x \in N$ .

Pela Proposição 3.11, como  $N$  é um conjunto hiperbólico de  $\phi$  com  $\dim(E_x^s) = 1 \forall x \in N$ , então  $\phi_t|_N$  é Anosov. No entanto, superfícies fechadas não suportam fluxos Anosov. De fato, se  $\phi_t|_N : N \rightarrow N$  é Anosov,  $T_x N = E_x^s \oplus E_x^o \oplus E_x^u \forall x \in N$ , logo  $\dim(T_x N) \geq 3 \forall x \in N$ , contudo  $2 = \dim(N) = \dim(T_x N) \geq 3 \forall x \in N$ , o que não pode acontecer. Isto gera uma contradição, concluindo assim que não existem fluxos  $C^1$  em 3-variedades compactas exibindo uma superfície fechada como um conjunto hiperbólico.

Em particular, suponha por contradição  $\varphi$  um fluxo Anosov em uma 3-variedade compacta  $M$  e  $S$  uma superfície fechada invariante em  $M$ , isto é,  $\varphi(S) = S$  e  $\dim(S) = 2$ . Como  $\varphi$  é Anosov,  $M$  é um conjunto hiperbólico, então  $\varphi(M) = M$  e  $T_x M = E_x^s \oplus E_x^o \oplus E_x^u \forall x \in M$ . Uma vez que  $S \subset M$ ,  $T_y M = E_y^s \oplus E_y^o \oplus E_y^u \forall y \in S$ , ou seja,  $T_S M = E_S^s \oplus E_S^o \oplus E_S^u$ . Logo,  $S$  é compacto, invariante e vale  $T_S M = E_S^s \oplus E_S^o \oplus E_S^u$ , portanto  $S$  é também hiperbólico, o que é uma contradição pois  $S$  tem dimensão 2. Logo, fluxos Anosov em 3-variedades compactas não possuem superfícies fechadas invariantes.  $\square$

**Obsevação 3.13.** Dizer que a aplicação  $\phi_t|_N$  contrai volume significa que, dados  $u, v \in E_x^s$  com  $x \in N$ , a área do paralelogramo definido por  $u$  e  $v$  é maior do que a área do paralelogramo definido por  $D\phi_t(x)u$  e  $D\phi_t(x)v$ . Analogamente, dizer que a aplicação  $\phi_t|_N$  expande volume significa que, dados  $w, z \in E_x^u$  com  $x \in N$ , a área do paralelogramo definido por  $w$  e  $z$  é menor do que a área do paralelogramo definido por  $D\phi_t(x)w$  e  $D\phi_t(x)z$ .

O seguinte resultado é uma extensão do Teorema de Verjovsky para variedades compactas com bordo.

**Teorema 3.14.** *Seja  $\phi$  um fluxo Anosov de codimensão um em uma variedade compacta com bordo  $M$ . Se  $\dim(M) \geq 4$ , então  $\phi$  é transitivo.*

*Demonstração.* Seja  $\phi$  um fluxo Anosov de codimensão um em uma variedade compacta com bordo  $M$ , então  $\dim(E_x^s) = 1$  ou  $\dim(E_x^u) = 1$  para todo  $x \in M$ . Sendo assim, revertendo o fluxo, se necessário, podemos assumir  $\dim(E_x^u) = 1$  para todo  $x \in M$ .

Vamos verificar a seguinte propriedade: Existe uma folheação contínua tangente ao subfibrado  $E^u$  cujas folhas são difeomorfas a  $\mathbb{R}$  em  $M$ .

Aplicando a Observação 2.7 temos que o subfibrado  $E^u$  é tangente a folheação contínua  $\mathcal{F}^{uu}$  em  $M$ . Por outro lado, seja  $N \subset M$  tal que  $N$  é uma componente conexa de  $\partial M$ . Como  $\partial M$  é uma subvariedade fechada invariante então  $N$  é também uma subvariedade fechada invariante de dimensão maior ou igual a 3, pois  $\dim(M) \geq 4$ . Uma vez que  $\phi$  é um fluxo Anosov em  $M$  então  $M$  é um conjunto hiperbólico. Como  $N \subset M$ , vale  $T_N M = E_N^s \oplus E_N^o \oplus E_N^s$ . Sendo  $N$  compacto, invariante e  $T_N M = E_N^s \oplus E_N^o \oplus E_N^s$ , temos que  $N$  é hiperbólico. Então, pelo Lema 3.6 (aplicado ao fluxo reverso e nas componentes conexas  $N$  de  $\partial M$ ) temos  $E_x^u \subset T_x N$  para todo  $x \in N$ . Portanto,  $E_x^u \subset T_x \partial M$  para todo  $x \in N$ . Logo,  $E^u$  é tangente a  $\partial M$ . Segue disto que todas as folhas da folheação  $\mathcal{F}^{uu}$  são unidimensionais e, pelo Teorema 2.18,  $W^{uu}(x)$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}$  para todo  $x \in M$ .

Pela Definição 2.21 temos que o fluxo Anosov  $\phi$  é produto e pelo Teorema 2.22  $\phi$  é transitivo, como queríamos.  $\square$

## 3.2 Prova do Teorema Principal

Agora, com os resultados apresentados na seção 3.1, conseguiremos demonstrar o teorema que motivou esse estudo.

**Teorema 3.15.** *Não existem fluxos Anosov de codimensão um em variedades compactas com bordo.*

*Demonstração.* Seja  $M$  uma variedade compacta com bordo. Suponha que  $M$  suporta um fluxo Anosov  $\phi$  de codimensão um.

Vamos dividir a demonstração em dois casos:

- CASO 1:  $\dim(M) = 3$

Se  $\dim(M) = 3$  temos uma contradição pelo Corolário 3.12, pois qualquer componente conexa de  $\partial M$  é uma superfície fechada invariante de  $\phi$ .

- CASO 2:  $\dim(M) \geq 4$

Se  $\dim(M) \geq 4$  temos uma contradição pelo Corolário 3.3 e Teorema 3.14. De fato, o Teorema 3.14 garante que se  $\phi$  é um fluxo Anosov de codimensão um em uma variedade compacta com bordo de dimensão maior ou igual a 4, então este fluxo  $\phi$  é transitivo. No entanto, pelo Corolário 3.3, não existem fluxos Anosov transitivos em variedades compactas com bordo.

Estas contradições provam o resultado.  $\square$

# Considerações Finais

A referência [1], usada como base para o nosso trabalho, tem como objetivo principal dar resposta a seguinte pergunta: Se  $M$  é uma variedade compacta com bordo, então  $M$  suporta fluxos Anosov de codimensão um?

A resposta para esta questão é negativa, conforme foi apresentado no Teorema 3.15. Neste trabalho mostramos que:

1. Não existem fluxos Anosov transitivos em variedades compactas com bordo (Corolário 3.3).
2. Se  $\phi$  é um fluxo  $C^1$  em uma variedade compacta  $M$ ,  $N$  é uma subvariedade fechada em  $M$  com  $\dim(N) \geq 2$  e  $N$  é um conjunto hiperbólico de  $\phi$  com  $\dim(E_x^s) = 1$  para todo  $x \in N$ , então  $\phi_t|_N$  é Anosov. (Proposição 3.11)
3. Não existem fluxos  $C^1$  em variedades compactas exibindo uma superfície fechada como um conjunto hiperbólico (Corolário 3.12).
4. O Teorema de Verjovsky também é válido para o caso de variedades compactas com bordo. (Teorema 3.14)
5. A prova do Teorema 3.15 em dimensão igual a 3 segue do Corolário 3.12.
6. A prova do Teorema 3.15 em dimensão maior ou igual a 4 segue do Corolário 3.3 e Teorema 3.14.

Ressaltamos que o estudo realizado neste trabalho foi para fluxos sem singularidades. As referências usadas nos permitiram saber que é possível definir fluxos Anosov para o caso com singularidades. Uma extensão natural são os fluxos seccionalmente Anosov em variedades compactas com bordo. A partir disso, uma pergunta razoável é: Quais propriedades de fluxos Anosov em variedades compactas com bordo podem ser estendidas para fluxos seccionalmente Anosov? Como linha de pesquisa recente, isto pode constituir uma motivação para estudos posteriores.

# Referências Bibliográficas

- [1] AGUILAR, I.W.; APAZA, E.H.; MORALES, C.A. *Nonexistence of codimension one Anosov flows on compact manifolds with boundary*. Journal of Differential Equations, 2005.
- [2] BARBOT, T. *Géométrie transverse des flots d'Anosov*. Université Claude Bernard Lyon I, These de doctorat em Mathématiques, 1992.
- [3] BAUTISTA, S.; MORALES, C. *Lectures on Sectional-Anosov Flows*. Monograph, 2010.
- [4] CAMACHO, C.; NETO, A. *Teoria Geométrica das Folheações*. Primeira Edição. Publicação IMPA, 1979.
- [5] DO CARMO, M. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2012.
- [6] DURÃO, E. *O Teorema de Sard e suas Aplicações*. Publicações Matemáticas IMPA, 2012.
- [7] HIRSCH, M.W; PUGH, C.C; SUHB, M. *Invariant Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [8] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *A moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos*, Coordenação e revisão da tradução por Luis Barreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.
- [9] LIMA, E.L. *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [10] LIMA, E.L. *Curso de Análise, v. 2, 11. ed.*, Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [11] MATSUMOTO, S. *Codimension One Anosov Flows*. Lecture Notes Series, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center. Seoul, 1995.
- [12] MELO, W. *Topologia das Variedades*. Disponível em: [w3.impa.br/~demelo/topologiadiferencial2011](http://w3.impa.br/~demelo/topologiadiferencial2011). Último acesso em: 30 de dezembro de 2018.
- [13] PALIS, J.; MELO, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Rio de Janeiro: IMPA, 1978.

- [14] ROBINSON, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press Inc, 1995.