

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

LEANDRO PACHECO MACHADO

INVESTIGAÇÃO DE PRISMAS E PIRÂMIDES COM O GEOGEBRA NO CELULAR

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2024

LEANDRO PACHECO MACHADO

INVESTIGAÇÃO DE PRISMAS E PIRÂMIDES COM O GEOGEBRA NO CELULAR

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2024**


LEANDRO PACHECO MACHADO

INVESTIGAÇÃO DE PRISMAS E PIRÂMIDES COM O GEOGEBRA NO CELULAR


Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

APROVADO:

ASSENTIMENTO:

Documento assinado digitalmente
 **LEANDRO PACHECO MACHADO**
Data: 23/08/2024 17:06:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Leandro Pacheco Machado
Autor

Documento assinado digitalmente
 **REJANE WAIANDT SCHUWARTZ DE CARVALHO F**
Data: 23/08/2024 16:54:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria
Orientadora

LEANDRO PACHECO MACHADO

INVESTIGAÇÃO DE PRISMAS E PIRÂMIDES COM O GEOGEBRA NO CELULAR

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA AVALIADORA:



Documento assinado digitalmente
CAROLINE MENDES DOS PASSOS
Data: 23/08/2024 17:16:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Caroline Mendes dos Passos
(UFV)



Documento assinado digitalmente
MARLI DUFFLES DONATO MOREIRA
Data: 23/08/2024 21:24:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Marli Duffles Donato Moreira
(UFV)



Documento assinado digitalmente
REJANE WAIANDT SCHUWARTZ DE CARVALHO F
Data: 23/08/2024 16:55:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria
(Orientadora)

Com gratidão, agradeço a Jeová Deus, aos meus familiares, ao meu companheiro de luta e à minha orientadora pelo apoio e incentivo para a realização desta monografia.

AGRADECIMENTOS

A Jeová Deus, pela força e inspiração constantes.

Aos meus pais, Manoel Messias Machado e Lenira Pacheco Machado, que embora não estejam mais aqui, permanecem vivos no meu coração.

Ao meu irmão, por seu apoio fraternal e constante encorajamento.

Ao meu companheiro de luta, Marcinei José Felipe, por seu apoio inabalável e presença constante em todos os momentos.

À minha professora orientadora, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria, pela orientação, paciência e dedicação inestimáveis ao longo deste trabalho.

À professora da Escola Estadual Alice Loureiro, Catiane Aparecida Gomes de Oliveira, por apoiar a realização da pesquisa com entusiasmo e generosidade.

Às professoras da banca, Caroline Mendes dos Passos e Marli Duffles Donato Moreira, pela valiosa contribuição, disponibilidade e avaliação criteriosa.

A todos os professores, pelo conhecimento, sabedoria e ensinamentos compartilhados em toda esta jornada acadêmica.

“O pensamento não é apenas resolver problemas matemáticos, mas sim perceber relações e construir novas ferramentas para a compreensão”. (Poincaré, 1914, p. 17).

RESUMO

MACHADO, Leandro Pacheco, Universidade Federal de Viçosa, 2024. **INVESTIGAÇÃO DE PRISMAS E PIRÂMIDES COM O GEOGEBRA NO CELULAR.** Orientadora: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria.

Esta pesquisa objetiva investigar como a integração do GeoGebra no celular, aliado à Realidade Aumentada, pode contribuir para a aprendizagem de prismas e pirâmides no Ensino Médio. A pesquisa está estruturada de forma a abordar a integração das Tecnologias Digitais, incluindo celulares inteligentes, GeoGebra e Realidade Aumentada, na aprendizagem de Matemática, com foco em prismas e pirâmides. O trabalho é teoricamente embasado no conceito de coletivos seres-humanos-com-mídias, na busca de entender a produção de conhecimento em ambientes educacionais que utilizam tecnologias. Neste estudo, a metodologia de pesquisa qualitativa foi escolhida pois foca na coleta de dados de maneira pessoal e interpretativa. O público alvo foram os alunos do terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Alice Loureiro, localizada em Viçosa – MG. Para coletar os dados da pesquisa, utilizamos uma combinação de instrumentos: gravações de áudio e vídeo, fotografias, folhas das atividades respondidas pelos alunos e registros do pesquisador em um caderno de campo. As conclusões da pesquisa indicam que o GeoGebra 3D com Realidade Aumentada proporciona discussões matemáticas aprofundadas sobre a construção de formas geométricas tridimensionais, despertando a curiosidade dos alunos. Essa dinâmica interativa e colaborativa está alinhada com o coletivo seres-humanos-com-mídias, ressaltando a importância do uso de Tecnologias Digitais na aprendizagem dos alunos e na construção do conhecimento.

Palavras-chave: Geometria Tridimensional. Realidade Aumentada. GeoGebra. Educação Matemática. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

MACHADO, Leandro Pacheco, Federal University of Viçosa, 2024. **INVESTIGATION OF PRISMS AND PYRAMIDS WITH GEOGEBRA ON MOBILE PHONE.** Advisor: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria.

This research aims to investigate how the integration of GeoGebra on mobile phones, combined with Augmented Reality, can impact the learning of prisms and pyramids in High School. The research is structured to address the integration of Digital Technologies, including smartphones, GeoGebra, and Augmented Reality, in Mathematics learning, focusing on prisms and pyramids. The work is theoretically grounded in the concept of collectives of humans-with-media, seeking to understand the production of knowledge in educational environments that utilize technologies. In this study, a qualitative research methodology was chosen because it focuses on data collection in a personal and interpretative manner. The target audience was the third-year high school students of Escola Estadual Alice Loureiro, located in Viçosa – MG. To collect the research data, we used a combination of instruments: audio and video recordings, photographs, sheets of activities completed by the students, and the researcher's notes in a field journal. The research conclusions indicate that GeoGebra 3D with Augmented Reality fosters in-depth mathematical discussions about the construction of three-dimensional geometric shapes, sparking students' curiosity. This interactive and collaborative dynamic aligns with the theory of humans-with-media collectives, highlighting the importance of using Digital Technologies in students' learning and knowledge construction.

Keywords: Three-Dimensional Geometry. Augmented Reality. GeoGebra. Mathematics Education. Digital Technologies.

SUMÁRIO

1. Introdução	11
2. Tecnologias Digitais, Celular, GeoGebra e Realidade Aumentada no Ensino de Matemática	14
3. Coletivo Seres-Humanos-com-Mídias	18
4. Prismas e Pirâmides: Conceitos e Estruturas no Ensino Médio	21
5. Metodologia	24
6. Análise de dados	27
6.1. Investigação dos Prismas	29
6.2. Investigação das Pirâmides	35
7. Considerações Finais	43
Referências	45
Apêndice A	49
Apêndice B	53
Apêndice C	56

1. Introdução

A educação contemporânea está imersa em um cenário de transformações profundas, impulsionadas pela constante evolução das Tecnologias Digitais (TD) e sua crescente integração no contexto educacional. A transição do século XX para o século XXI impulsionou uma revolução tecnológica que não apenas trouxe novas ferramentas e abordagens, mas também redefiniu as expectativas e as possibilidades de ensino e de aprendizagem. Nesse contexto de mudança acelerada, a escolha do tema desta pesquisa emergiu como uma resposta à necessidade premente de explorar como as tecnologias digitais podem aprimorar o ensino da Matemática.

A justificativa para a escolha do tema se baseia na percepção de que a Matemática, frequentemente percebida como uma disciplina desafiadora e abstrata, pode ser mais acessível e atraente aos alunos do Ensino Médio por meio da exploração adequada das TD. Especialmente no decorrer da realização das disciplinas de Estágio Supervisionado e na participação do Programa de Residência Pedagógica, percebi a desconexão entre a abordagem tradicional da Matemática e as formas de aprendizagem que são mais familiares aos alunos nativos digitais¹.

Ao refletir sobre o impacto das TD na sociedade atual, tornou-se evidente para mim que o percurso da Matemática Escolar não deveria ser marcado por muitos obstáculos, mas sim por um caminho de aprendizagens com descobertas e explorações. No contexto escolar, uma alternativa para uso das tecnologias nas aulas de Matemática é o GeoGebra. Trata-se de um software dinâmico de Matemática, que oferece uma plataforma versátil que permite a exploração visual e interativa de conceitos matemáticos complexos, incluindo prismas e pirâmides. Sua versão para celulares inteligentes, combinada com a Realidade Aumentada (RA), promete uma experiência de aprendizagem envolvente que transcende a abordagem tradicional.

Nesse contexto, a pesquisa proposta está sendo norteada pela seguinte questão:

Como a integração do GeoGebra no celular², aliado à Realidade Aumentada, pode contribuir para a aprendizagem de prismas e pirâmides no Ensino Médio?

¹ O termo citado, nativos digitais, se refere às primeiras gerações a crescer cercados de tecnologias digitais, que incluem computadores, videogames, celulares inteligentes, dentre tantas outras (Prensky, 2001).

² Utilizaremos os termos celulares e celulares inteligentes como sinônimos, evitando assim possíveis repetições.

Orientado pela referida pergunta de pesquisa, foi definido o objetivo geral deste trabalho: *Investigar como a integração do GeoGebra no celular, aliado à Realidade Aumentada, pode contribuir para a aprendizagem de prismas e pirâmides no Ensino Médio.*

A pesquisa, portanto, busca compreender como essa abordagem dinâmica pode influenciar a percepção dos alunos sobre a matemática tridimensional e melhorar sua proficiência nesse campo. Para atingir o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Compreender as implicações do GeoGebra no celular como ferramenta de apoio ao estudo de prismas e pirâmides no Ensino Médio;
- Investigar como a Realidade Aumentada pode enriquecer a compreensão de conceitos geométricos tridimensionais;
- Criar um GeoGebra Book com o intuito de divulgar as atividades elaboradas.

Este estudo está estruturado de forma a abordar a integração das TD, incluindo celulares inteligentes, GeoGebra e RA, na aprendizagem de Matemática, com foco em prismas e pirâmides. Apresentamos uma revisão das TD no contexto educacional, destacando sua relevância e os impactos na aprendizagem matemática. Em seguida, o referencial teórico aborda o conceito do coletivo seres-humanos-com-mídias para entender a produção de conhecimento em ambientes educacionais que utilizam tecnologias. Este conceito é essencial para compreender as interações entre alunos e TD e como elas influenciam a construção do conhecimento matemático.

Assim como afirma Leontiev (1978), o conhecimento é construído ao longo da história pela humanidade e está incorporado nos objetos culturais, sejam eles materiais ou intelectuais. A humanização, como processo social, se realiza por meio da apropriação dos conhecimentos. Dessa maneira, a educação é o processo que garante a continuidade da história.

Após isso, discutimos a importância da geometria espacial no Ensino Médio, destacando os desafios enfrentados pelos alunos na transição dos estudos da geometria plana para a espacial e as oportunidades oferecidas pelas TD para superar os obstáculos. A seguir, a metodologia da pesquisa é detalhada, explicando a escolha da abordagem qualitativa e os métodos de coleta de dados utilizados. A análise dos dados revela informações sobre como o uso do GeoGebra 3D com RA contribuiu para a compreensão e a participação dos estudantes em relação aos objetos matemáticos abordados.

Por fim, são apresentadas as considerações finais da pesquisa, com uma discussão sobre os resultados obtidos e suas implicações para o ensino, além de propor recomendações para futuras investigações na área de Educação Matemática com o uso de TD.

2. Tecnologias Digitais, Celular, GeoGebra e Realidade Aumentada no Ensino de Matemática

No contexto atual da educação, a incorporação de TD, como celulares inteligentes e softwares educacionais, desempenha um papel crucial no processo de aprendizagem, principalmente na aprendizagem matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) - documento normativo que define os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os alunos devem adquirir ao longo da Educação Básica – destaca a importância do uso de tecnologias na aprendizagem ao reconhecer a necessidade de integrar as ferramentas digitais como parte fundamental do processo educativo. Dentre as dez competências gerais elencadas pelo documento, destaca-se:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2018, p. 9).

Sendo assim, a BNCC reconhece que as tecnologias digitais são parte integrante da sociedade contemporânea e que os estudantes devem desenvolver habilidades não apenas para usar essas tecnologias, mas também para compreendê-las criticamente e contribuir de maneira ética e construtiva para a sociedade como um todo. A importância das tecnologias na educação é evidenciada pela evolução constante de ferramentas digitais disponíveis para facilitar o aprendizado.

Conforme destacado por Faria, Romanello e Domingues (2018), a introdução de dispositivos digitais nas escolas representou uma mudança significativa na forma como o conhecimento é construído e compartilhado. Os autores apresentam as calculadoras gráficas como precursoras na incorporação de tecnologias nesse contexto. Esses dispositivos permitiram aos alunos visualizarem e explorarem conceitos matemáticos de maneira mais dinâmica. No entanto, à medida que a tecnologia avançou, os celulares inteligentes tornaram-se ferramentas ainda mais acessíveis e versáteis, oferecendo não apenas recursos de cálculo avançado, mas também a capacidade de executar aplicativos educacionais eficientes, capazes de tornar o aprendizado da Matemática mais interativo e envolvente. Assim, a transição das calculadoras gráficas para os celulares inteligentes representa uma evolução na forma como os alunos acessam e utilizam recursos tecnológicos em sala de aula.

O celular é um dispositivo que já faz parte do dia a dia dos estudantes. De acordo com a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua, realizada em 2021 pelo IBGE, a

Internet já é acessível em 90% dos domicílios brasileiros. Ela revela que o celular é o dispositivo mais utilizado para acessar a Internet em casa, representando 99,5%. A mesma pesquisa aponta que entre as pessoas com 10 anos ou mais de idade, os estudantes foram os que mais acessaram a Internet, com 90,3%, sendo o telefone celular o equipamento mais utilizado por esse público para acessar a Internet (97,9%). Assim, o celular inteligente se apresenta como um dispositivo viável e conveniente para ensinar Matemática além dos tradicionais métodos de ensino (IBGE, 2022).

A influência das TD na aprendizagem de Matemática é inegável. Conforme destacado por Conceição *et al.* (2019), as tecnologias permitem a exploração visual e dinâmica de conceitos matemáticos complexos, tornando o aprendizado mais significativo e acessível, podendo simplificar e enriquecer a compreensão de conceitos matemáticos. Nesse contexto, a utilização do GeoGebra surge como uma ferramenta para a aprendizagem matemática.

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter, em 2001, na Universität Salzburg-Austria, destinado ao ensino e aprendizagem da Matemática nos diferentes níveis de ensino. O programa permite construções geométricas utilizando pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, círculos, dentre outros objetos matemáticos, além de oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função e apresentar dados em tabela e gráficos em um único ambiente (Pereira, 2017).

O Software educacional apresenta uma versão 3D, chamada *Calculadora gráfica GeoGebra 3D* (Figura 1), que pode ser facilmente acessada por meio de celulares inteligentes. Essa versão simplifica a exploração de conceitos matemáticos tridimensionais. A interface intuitiva do GeoGebra 3D capacita os alunos não apenas a visualizar, mas também a interagir de maneira prática e envolvente com prismas e pirâmides.

Figura 1: Logo e layout da Calculadora gráfica GeoGebra 3D



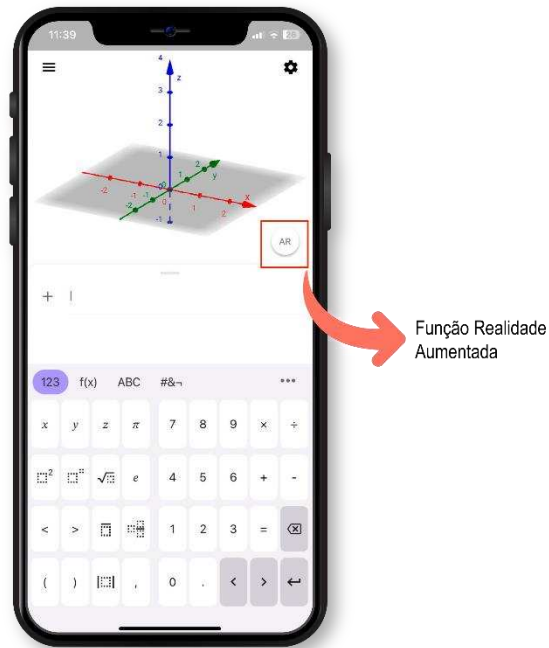
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Além disso, a integração da RA com o GeoGebra 3D amplia ainda mais as possibilidades educacionais. A RA é definida como:

Um sistema que suplementa o mundo real com objetos virtuais gerados por computador, parecendo coexistir no mesmo espaço e apresentando as seguintes propriedades: combina objetos reais e virtuais no ambiente real; executa interativamente em tempo real; alinha objetos reais e virtuais entre si. (Tori; Hounsell, 2018, p. 40).

Segundo Tori e Hounsell (2018, p. 65), “a RA ocorre quando objetos virtuais são colocados no mundo real”. Enquanto a Realidade Virtual (RV) transporta o usuário para um ambiente virtual, a RA traz elementos virtuais para o ambiente físico do usuário, criando uma experiência de aprendizagem imersiva. A RA permite que os alunos visualizem e manipulem sólidos geométricos diretamente em seu espaço real, tornando a aprendizagem mais natural, como pode ser visto na Figura 2.

Figura 2: Calculadora gráfica GeoGebra 3D com Realidade Aumentada



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Esses avanços tecnológicos estão alinhados com as mudanças fundamentais no ensino, conforme destacado por Cordeiro (2020). O ensino não é mais restrito às paredes da sala de aula, e as TD oferecem novas oportunidades de aprendizado. Os educadores devem explorar esses recursos, buscando novos conhecimentos como o GeoGebra 3D com RA, para enriquecer a experiência educacional de seus alunos.

Portanto, este estudo busca explorar como a combinação do GeoGebra 3D e da RA pode transformar a maneira como os alunos do Ensino Médio percebem e aprendem conceitos matemáticos, especificamente relacionados a prismas e pirâmides. Através de investigações matemáticas, buscamos avaliar o impacto dessas tecnologias na aprendizagem, levando em consideração a percepção dos alunos, seus níveis de engajamento e compreensão de conceitos geométricos tridimensionais.

3. Coletivo Seres-Humanos-com-Mídias

No cenário educacional atual, é inegável que a adaptação às TD se tornou imperativa, à medida que a tecnologia permeia cada aspecto de nossas vidas. Essa transformação não é mais uma opção, mas sim uma necessidade para educadores e alunos. Como destacado por Vidal e Miguel (2020), estamos imersos em uma era de informações em constante fluxo, onde as Tecnologias Digitais atuam como instrumentos culturais, moldando nossa sociedade e a maneira como construímos conhecimento.

A interação entre seres humanos e TD na produção de conhecimento matemático é um fenômeno complexo e multifacetado. Borba e Villarreal (2005) propõem a discussão do construto teórico seres-humanos-com-mídias.

Mais de duas décadas se passaram desde o desenvolvimento do construto teórico seres-humanos-com-mídias. Desde meados da década de 1990, essa ideia destacou, do ponto de vista epistemológico, o papel ativo tanto da mídia quanto dos humanos na produção de conhecimento. Do ponto de vista esse construto enfatiza como a tecnologia disponível influencia a compreensão do que é ser humano (Borba *et al.*, 2023).

Borba e Villarreal (2005) destacam que a colaboração entre alunos e TD, como celulares inteligentes e softwares educacionais, promove a construção coletiva do conhecimento matemático. Eles argumentam que as mídias digitais não são ferramentas passivas, mas meios para a expressão criativa e a resolução conjunta de problemas matemáticos. A exploração de prismas e pirâmides com o GeoGebra no celular, conforme proposto nesta pesquisa, reflete essa abordagem, incentivando a colaboração entre alunos e a produção de conhecimento matemático por meio da interação com a tecnologia.

Borba e Penteadó (2010, p.48), refletindo sobre o coletivo apresentado, afirmam que o, “[...] conhecimento só é produzido com uma determinada mídia, ou com uma tecnologia da inteligência”. Essa afirmação, polêmica e imponente, discute que as pessoas precisam interagir com um artefato ou uma tecnologia, digital ou não, para produzir conhecimento em uma moldagem recíproca. Nesse sentido, os autores embasam suas afirmações na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias.

[...] Em nossa perspectiva, os computadores não substituem ou apenas complementam os seres humanos [...]. Entendemos que não há apenas uma justaposição de técnica e seres humanos, como se a primeira apenas se juntasse aos últimos. Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra. (Borba; Penteadó, 2010, p.49).

Essa abordagem teórica representa uma resposta à dicotomia tradicional entre seres humanos e técnicas, argumentando que as tecnologias não são simplesmente instrumentos ou extensões, mas componentes ativos do processo de construção do conhecimento. A premissa fundamental dessa teoria é que a produção de conhecimento se dá em um contexto no qual seres humanos estão constantemente engajados em interações dinâmicas com diversas mídias. Isso inclui não apenas a relação entre seres humanos e tecnologias digitais, mas também outras formas de mídias, como lousa e giz, livros, dentre outros artefatos que acompanham a humanidade desde os primórdios. A teoria destaca que essas mídias são atores no processo de construção do conhecimento (Borba; Villarreal, 2005).

Ao adotar essa perspectiva, Borba e Penteadó (2010) argumentam que a compreensão do conhecimento deve levar em consideração a interação entre seres humanos e mídias, reconhecendo que as tecnologias não são neutras e têm o potencial de reorganizar o pensamento e influenciar a forma como os problemas são formulados e resolvidos. Essa visão integrada destaca a importância de examinar como as diferentes mídias afetam o coletivo seres-humanos-com-mídias em um determinado contexto educacional. Além disso, a teoria se alinha com a ideia de que mídias não se excluem mutuamente, mas coexistem e se complementam. Os autores rejeitam a noção de que a chegada de uma nova mídia extinguirá ou substituirá completamente as práticas associadas às mídias tradicionais. Em vez disso, defendem que a presença de diferentes mídias contribui para a diversidade e complexidade do espaço educacional (Borba; Villarreal, 2005).

Além de atuar como fundamento teórico, a ideia dos seres-humanos-com-mídias também orienta a metodologia de pesquisa, proporcionando uma abordagem integrada e coesa para investigar a influência das tecnologias na produção de conhecimento em contextos educacionais. De acordo com Borba e Penteadó (2010), ao respaldar pesquisas nesse construto teórico, a pergunta de pesquisa e a metodologia precisam estar articuladas, englobando procedimentos e visão do conhecimento pertinente à pesquisa. Os autores enfatizam a necessidade de uma análise integrada embasada na metodologia de pesquisa qualitativa, na qual a pergunta de pesquisa esteja alinhada com as práticas pedagógicas, refletindo a coerência entre visão de conhecimento e procedimentos de pesquisa.

Assim, a ideia expressa no coletivo seres-humanos-com-mídias reconhece a transformação significativa que as TD podem trazer para o ensino e para a aprendizagem da Matemática. Ela promove uma visão mais ampla das tecnologias como meios de expressão, colaboração e construção de conhecimento, ao mesmo tempo em que enfatiza a

responsabilidade na sua integração educacional. É uma abordagem que tem implicações profundas para a Educação Matemática contemporânea, especialmente em um mundo cada vez mais digital (Borba; Villarreal, 2005; Borba; Penteado, 2010; Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2014; Borba; Souto; Canedo-Junior, 2022).

Deste modo, o construto teórico seres-humanos-com-mídias fundamenta esta pesquisa, permeando todas as fases de estudo, desde a formulação da questão de pesquisa até a análise dos dados, como pode ser visto ao longo do trabalho.

4. Prismas e Pirâmides: Conceitos e Estruturas no Ensino Médio

A geometria desempenha um papel fundamental na formação educacional dos estudantes da Educação Básica, sendo uma ramificação da Matemática que vai além dos cálculos. Ela pode proporcionar aos alunos uma compreensão visual e prática dos conceitos matemáticos, promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de resolver problemas. Da Educação Infantil ao Ensino Fundamental, os alunos são introduzidos às formas geométricas, construindo a base para um entendimento aprofundado na geometria espacial durante os próximos anos de escolaridade.

No Ensino Médio, o foco na geometria espacial é crucial para a formação acadêmica do aluno. Após introduzir as noções primitivas de ponto, reta e plano, Dolce e Pompeo (2013) definem o *espaço* como o conjunto de todos os pontos e afirmam que a geometria euclidiana espacial é desenvolvida nesse conjunto. Sendo assim, a geometria espacial pode ser entendida como o campo matemático que estuda as propriedades, relações e medidas dos objetos tridimensionais no espaço. Ela se concentra na análise e compreensão das formas geométricas que ocupam o espaço tridimensional, indo além das figuras bidimensionais abordadas na geometria euclidiana plana.

A geometria espacial é de suma importância para o desenvolvimento do pensamento tridimensional e para a capacidade de representar, analisar e manipular objetos geométricos no espaço. Porém, a transição da geometria plana, estudada principalmente no Ensino Fundamental, para a geometria espacial, explorada sobretudo no Ensino Médio, muitas vezes apresenta desafios significativos para os estudantes. Ao comparar a relativa facilidade dos estudantes do Ensino Fundamental em compreender objetos matemáticos bidimensionais com os desafios enfrentados por alguns alunos do Ensino Médio ao analisar sólidos geométricos, Lima *et al* (1998) afirmam que:

O grande desafio em ensinar Geometria a alunos do 2º grau [atual Ensino Médio] é fazer a transição do plano para o espaço. Embora estejamos habituados a figuras geométricas tridimensionais (convivemos todo o tempo com planos, cubos, esferas, cones, cilindros, etc) é no 2º grau que tais figuras são estudadas, pela primeira vez, de forma sistemática. Esta ampliação de horizontes nem sempre é fácil para o aluno. O início do estudo sistemático de Geometria Plana vem depois de longos anos nos quais o aluno se prepara, de certo modo, para estudar figuras planas. Ele não as observa simplesmente no mundo real; ele está constantemente desenhando tais figuras, o que contribui para a criação de modelos mentais para elas. Embora o aluno possa ter dificuldades no aprendizado de Geometria, em geral ele não tem dificuldade de entender as propriedades essenciais das figuras geométricas simples. Conceitos básicos como paralelismo, perpendicularismo e congruência são bem entendidos pelo aluno. Além disso, em caso de dificuldades, é sempre

possível experimentar através de desenhos ou de modelos das figuras. Tais facilidades não ocorrem quando se começa a estudar Geometria Espacial. As relações entre as figuras geométricas fundamentais são bem mais complexas do que na Geometria Plana. (Lima *et al.*, 1998, p. 161-162. Interpolação dos autores).

No âmbito do Ensino Médio, a BNCC enfatiza a necessidade de aprimorar habilidades de visualização tridimensional, com o intuito de potencializar a capacidade dos alunos para a representação e análise de sólidos geométricos no espaço. Dentre as competências destacadas como essenciais para o desenvolvimento do estudante, incluem-se:

Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (Brasil, 2018, p. 541).

Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (Brasil, 2018, p. 545).

É notório que o documento normativo destaque a importância de investigar os processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, abrangendo, por exemplo, o princípio de Cavalieri e a obtenção de expressões para o cálculo dessas medidas. Esse enfoque proporciona uma base sólida para os alunos compreenderem não apenas as propriedades intrínsecas desses sólidos, mas também sua aplicação em situações cotidianas. Nesse contexto, ao direcionarmos nosso olhar especificamente para prismas e pirâmides, identificamos a relevância destes sólidos geométricos na construção do conhecimento tridimensional. Iezzi *et al.* (1997) atribuem ao prisma - considerando como referência um prisma pentagonal - a seguinte definição:

Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE de cinco lados num plano α e um segmento de reta PQ cuja reta-suporte intercepta α . Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a PQ, cada um deles com uma das extremidades num dos pontos de ABCDE e todos com a outra extremidade num mesmo semi-espaço dos determinados por α . A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado *prisma pentagonal*. (Iezzi *et al.*, 1997, p. 496).

Em termos simples, um prisma é um objeto matemático tridimensional que tem duas faces paralelas e congruentes chamadas bases, conectadas por faces retangulares ou paralelogramos, conhecidas como lados. Apresentamos também a definição de pirâmide – considerando como referência uma pirâmide de base pentagonal - segundo Iezzi *et al.* (1997):

Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE de cinco lados num plano α e um ponto V fora de α . Tomemos segmentos de reta, todos com uma extremidade em V e a outra extremidade nos pontos de ABCDE. A reunião

desses segmentos é um sólido chamado *pirâmide pentagonal*. (Iezzi *et al.*, 1997, p. 506).

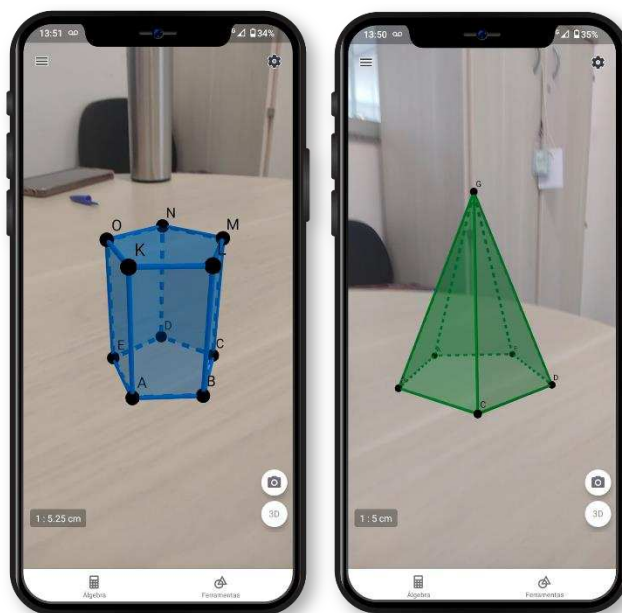
Os autores ainda esclarecem:

Se em lugar de um pentágono tivermos um triângulo, a pirâmide obtida será uma pirâmide triangular; se for um quadrilátero, teremos uma pirâmide quadrangular; e se for um polígono genérico (de n lados), teremos uma pirâmide genérica. (Iezzi *et al.*, 1997, p. 506).

Em outras palavras, pirâmides são sólidos geométricos com uma base e faces laterais que convergem para um ponto chamado vértice. A base pode ser qualquer polígono e as faces são triângulos que têm um vértice comum no topo da pirâmide.

As definições e entendimentos descritos fornecem uma base intuitiva para compreender e distinguir esses sólidos geométricos (Figura 3).

Figura 3: Prisma e Pirâmide pentagonais no app GeoGebra com RA



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse cenário, as TD, como o GeoGebra 3D em RA, emergem como aliadas valiosas, proporcionando aos estudantes uma abordagem prática e interativa para a compreensão dessas construções tridimensionais. A aplicação desses recursos digitais não apenas facilita a investigação matemática, mas também promove a visualização de propriedades, proporcionando uma aprendizagem significativa e contextualizada. Assim, a integração do GeoGebra 3D em RA contribui para superar os desafios identificados na transição da geometria plana para a espacial, e enriquece o processo educacional ao oferecer uma abordagem dinâmica e envolvente para o estudo de prismas e pirâmides.

5. Metodologia

Por buscar respostas a questão norteadora “Como a integração do GeoGebra no celular, aliado à Realidade Aumentada, pode contribuir para a aprendizagem de prismas e pirâmides no Ensino Médio?”, a pesquisa realizada está embasada na metodologia qualitativa. A preferência de pesquisadores em Educação Matemática por abordagens qualitativas tem crescido nas últimas décadas. Essa mudança reflete uma compreensão mais profunda da natureza complexa do ensino e da aprendizagem Matemática, reconhecendo que fenômenos educacionais muitas vezes não podem ser completamente entendidos apenas por meio de dados quantitativos. Conforme Denzin e Lincoln (2006),

A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que localiza o observador no mundo. Consiste em um conjunto de práticas materiais e interpretativas que dão visibilidade ao mundo. Essas práticas transformam o mundo em uma série de representações, incluindo as notas de campo, as entrevistas, as conversas, as fotografias, as gravações e os lembretes. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem naturalista, interpretativa, para mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem. (Denzin; Lincoln, 2006, p. 17).

Assim, essa abordagem de pesquisa é caracterizada pela participação direta do pesquisador no ambiente de estudo, pela coleta de dados por meio de práticas variadas e pela interpretação desses dados para compreender os fenômenos em termos dos significados atribuídos pelas pessoas envolvidas. Nesse sentido, Borba (2004) argumenta que a pesquisa qualitativa não deve ser concebida como um algoritmo, uma sequência inflexível de passos a serem rigorosamente seguidos.

Ademais, adotamos uma abordagem de pesquisa qualitativa neste estudo, uma vez que o objetivo principal é compreender profundamente as percepções, experiências e impactos da utilização do GeoGebra na aprendizagem de matemática tridimensional por alunos do Ensino Médio. Sendo assim, a abordagem qualitativa possibilitou explorar de maneira aprofundada as nuances desse processo educacional, capturando os aspectos qualitativos e subjetivos da experiência dos alunos.

Nessa pesquisa, a produção de dados foi realizada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Alice Loureiro, localizada em Viçosa – MG. A escolha desta escola se justifica por já ter contato inicial, pois no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática, atuei no decorrer do Estágio Supervisionado de Matemática no Ensino Fundamental II (disciplina MAT 394) e no Programa de Residência Pedagógica.

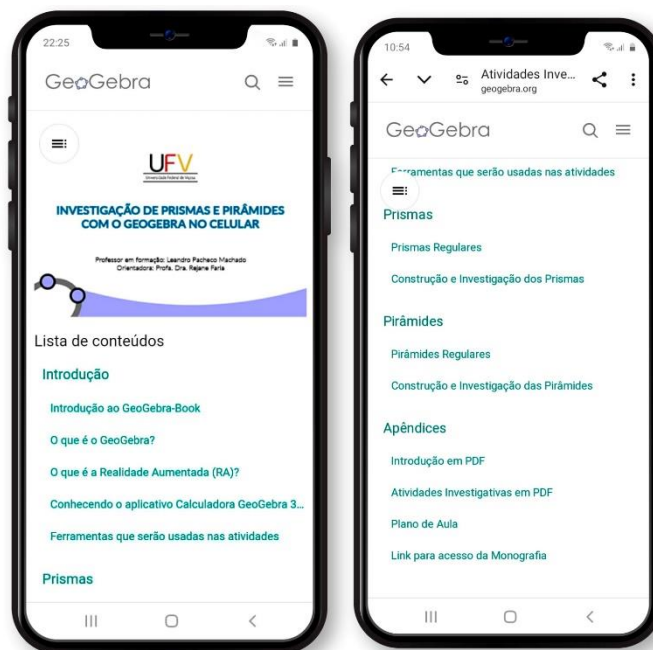
A pesquisa qualitativa permitiu uma análise detalhada e contextualizada da realização de atividades matemáticas investigativas em um ambiente educacional real, considerando as interações entre alunos e a tecnologia, bem como as particularidades do contexto escolar. Ao adotar essa metodologia, almejávamos obter uma compreensão aprofundada dos impactos dessa inovação tecnológica no contexto educacional escolhido, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias de ensino mais eficazes e alinhadas com as necessidades dos alunos. Para coletar os dados da pesquisa, utilizamos uma combinação de instrumentos: gravações de áudio e vídeo, fotografias, folhas das atividades respondidas pelos alunos e registros do pesquisador em um caderno de campo.

A análise dos dados coletados seguiu uma abordagem qualitativa, envolvendo a categorização e interpretação dos dados para identificar e discutir os temas emergentes. Com o intuito de tornar acessível as atividades elaboradas (Apêndice A) para professores, alunos e interessados no assunto, as disponibilizamos em um GeoGebra Book.

O GeoGebra Book é um livro online, que conta com uma estrutura disponibilizada pelo próprio site do software. Consiste em um repositório online para reunir vários recursos de diferentes tipos. Por ser intuitivo, fácil de usar, possível de ser colocado no modo público e com ferramentas que permitem seu compartilhamento, consideramos um importante meio de divulgação de pesquisas com tecnologias digitais voltadas para a sala de aula de matemática (Roque, 2023, p. 9).

O GeoGebra Book está organizado em três capítulos principais: Introdução; Prismas; e Pirâmides. Em Introdução, os usuários encontram seções que explicam o que é o GeoGebra, como funciona a Realidade Aumentada, uma introdução ao aplicativo *Calculadora GeoGebra 3D* e as ferramentas necessárias para a realização das atividades. O capítulo Prismas oferece uma definição de prismas regulares, orientações para a construção desses prismas e atividades investigativas para explorar suas propriedades. De forma similar, o capítulo Pirâmides abrange a definição de pirâmides regulares, instruções para a construção de pirâmides e atividades investigativas relacionadas. Complementando esses conteúdos, o GeoGebra Book inclui apêndices, mais precisamente a introdução, as atividades investigativas e o plano de aula utilizado na pesquisa em PDF, facilitando o acesso e uso das atividades por professores, alunos e outros. Além disso, nesse capítulo consta o link de acesso a esta monografia. Este livro virtual do GeoGebra está disponível [aqui](#) (Figura 4).

Figura 4: Sumário do GeoGebra Book



Fonte: Elaborada pelo autor.

A divulgação do material didático produzido tem como intuito oferecer uma alternativa de trabalhar com prismas e pirâmides, com ênfase na utilização do GeoGebra e da RA, mediada pelo celular, de forma investigativa.

Esclarecemos que precedente à produção de dados, esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa³. O Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) foi entregue, lido e aceito por todos participantes com idade inferior a 18 anos. Do mesmo modo, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) foi entregue e devidamente assinado pelos responsáveis pelos alunos menores de 18 anos e pelos próprios alunos com idade igual a 18 anos (Apêndice C). Assim, foi autorizada a divulgação científica dos dados produzidos junto aos estudantes.

³ Pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa (CAAE: 75809723.7.0000.5153).

6. Análise de dados

No contexto do ensino de Matemática, é essencial desenvolver abordagens que estimulem a compreensão conceitual dos alunos, tornando o aprendizado mais dinâmico e significativo. Por outro lado, o Ensino Regular, embasado em práticas tradicionais, muitas vezes limita-se à exposição teórica dos conceitos, negligenciando a experiência prática e a aplicação de TD (Faria; Maltempi, 2020). No entanto, defendemos a importância da integração de recursos midiáticos contemporâneos, em especial as TD, ao processo de ensino, a fim de potencializar a aprendizagem dos estudantes.

Em vista disso, nesta pesquisa a atenção foi voltada para uma turma do 3º ano da Escola Estadual Alice Loureiro, onde foram realizadas atividades investigativas sobre prismas e pirâmides utilizando o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D* em celulares inteligentes. A turma era composta por um grupo diversificado em termos de habilidades e interesses. Eram jovens curiosos e motivados, com idades entre 17 e 18 anos, que demonstraram interesse em explorar e investigar novas abordagens no aprendizado da Matemática.

Durante as atividades, registramos no caderno de campo que, dentre os 25 alunos presentes na sala de aula, 24 deles possuíam celulares inteligentes. Isso evidenciou a ampla presença desse dispositivo no dia a dia dos estudantes. Essa informação nos permite afirmar que o celular se apresenta como uma alternativa viável e conveniente para ensinar Matemática, indo além dos métodos tradicionais de ensino, mesmo em escolas públicas periféricas.

Pedimos que os alunos se organizassem em duplas ou trios. Solicitamos que, ao menos um aluno por dupla ou trio, baixasse o aplicativo. Dentre os 24 alunos presentes, 15 instalaram o GeoGebra. Registramos que, dentre esses aparelhos com GeoGebra instalado, 10 estavam equipados com a função de RA. Segundo Oliveira (2021, p.104), “A incompatibilidade dos aparelhos com a RA está diretamente ligada com o aparato de hardware de cada dispositivo”, de modo que aparelhos mais simples não possuem capacidade de processamento compatível com a tecnologia de realidade aumentada. O mesmo fato ocorreu e foi relatado em outras pesquisas que utilizaram a *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D* com RA, situações que também foram resolvidas agrupando os alunos (Ancochea; Cárdenas, 2020; Budinski; Lavicza, 2019; Oliveira, 2021).

As atividades foram divididas em dois encontros, com duração de 1h 40min cada (2 horas/aula), nos quais buscamos investigar como a integração do GeoGebra no celular, aliado à Realidade Aumentada, pode contribuir para a aprendizagem de prismas e pirâmides no Ensino

Médio. Em ambos os encontros, o pesquisador foi apresentado aos estudantes como professor em formação, aluno do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa. O plano de aula referente aos dois encontros está no Apêndice B.

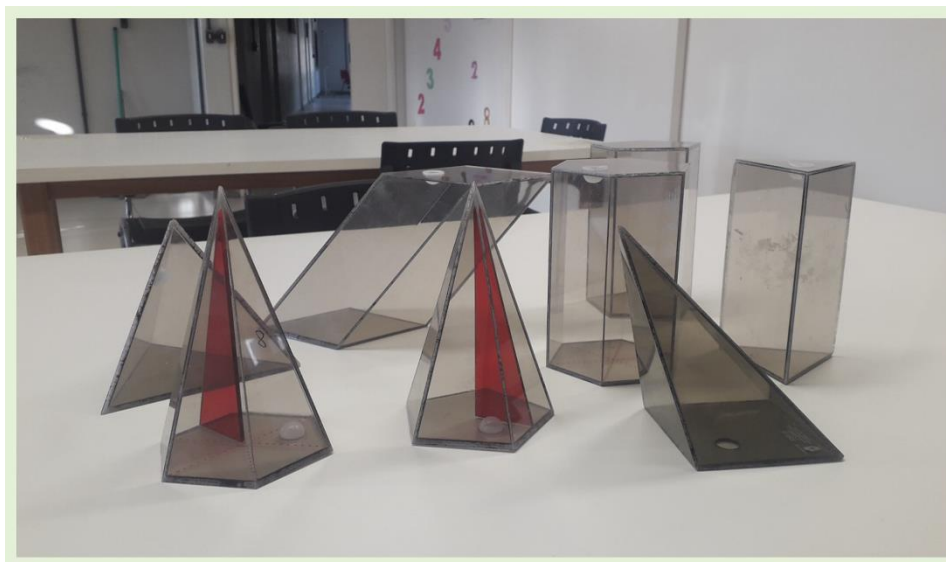
O primeiro encontro foi iniciado revisando alguns conceitos que seriam fundamentais para as atividades investigativas. Foi realizada uma apresentação diferenciando objetos matemáticos bidimensionais e tridimensionais, usando slides que continham figuras e definições claras (Apresentação em slides disponível [aqui](#)).

Primeiramente, foram explicadas as formas geométricas bidimensionais, que possuem apenas duas dimensões: comprimento e largura. Elas são representadas em um plano, como uma folha de papel. Para ilustrar, foram mostrados exemplos comuns de objetos bidimensionais, como triângulos, quadrados e círculos, desenhados em planos cartesianos⁴ nos slides. Em seguida, foi apresentada a definição de polígonos, explicando que são figuras geométricas planas formadas por um número finito de segmentos de reta chamados de lados. A seguir, introduzimos a definição de polígono regular, destacando sua importância para a compreensão dos sólidos que os estudantes investigariam. Depois, introduzimos as formas geométricas tridimensionais, explicando que essas possuem três dimensões: comprimento, largura e altura, ocupando espaço no mundo real. Citamos exemplos de objetos tridimensionais, como cubos, esferas e cilindros, além de prismas e pirâmides que seriam o foco das nossas atividades investigativas.

Para facilitar a compreensão dos alunos, destacamos a diferença entre área e volume. Explicamos que a área mede a quantidade de superfície coberta por uma figura plana, enquanto o volume mede a quantidade de espaço ocupado por um objeto tridimensional. Essa diferenciação foi crucial para as atividades investigativas relacionadas à área total e ao volume de prismas e pirâmides. Durante a apresentação, foram utilizados objetos tridimensionais de acrílico para que os alunos pudessem observá-los e manuseá-los (Figura 5).

⁴ Os alunos estavam estudando Geometria Analítica com a professora regular e, portanto, estavam familiarizados com algumas representações no plano cartesiano.

Figura 5: Prismas e Pirâmides de acrílico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa abordagem prática ajudou a tornar os conceitos mais concretos e acessíveis, preparando os estudantes para a próxima etapa da aula, onde começaríamos a atividade investigativa sobre a construção de prismas utilizando o software GeoGebra 3D em celulares inteligentes.

6.1. Investigação dos Prismas

Para iniciar a atividade investigativa sobre prismas regulares⁵, apresentamos a definição de prismas que constava nas folhas de atividades. Foi explicado que um prisma regular é um sólido geométrico que possui duas faces paralelas, com mesmas medidas, chamadas bases, conectadas por faces laterais que são retângulos. Em seguida, distribuímos prismas de acrílico para que os estudantes pudessem ter uma experiência visual e tátil, observando e manuseando esses sólidos geométricos.

Com os alunos organizados em duplas ou trios, iniciamos a construção dos prismas utilizando o aplicativo GeoGebra 3D. Primeiro, orientamos os alunos a posicionarem os eixos e o plano em duas dimensões (x e y) no aplicativo. Em seguida, eles deveriam acessar as configurações e selecionar a opção Exibir Malha, desmarcando Exibir Plano para obter uma visualização mais clara. Com a ferramenta Ponto, os alunos marcaram os pontos A e B como referências iniciais. Em seguida, utilizaram a ferramenta Polígono Regular para desenhar um

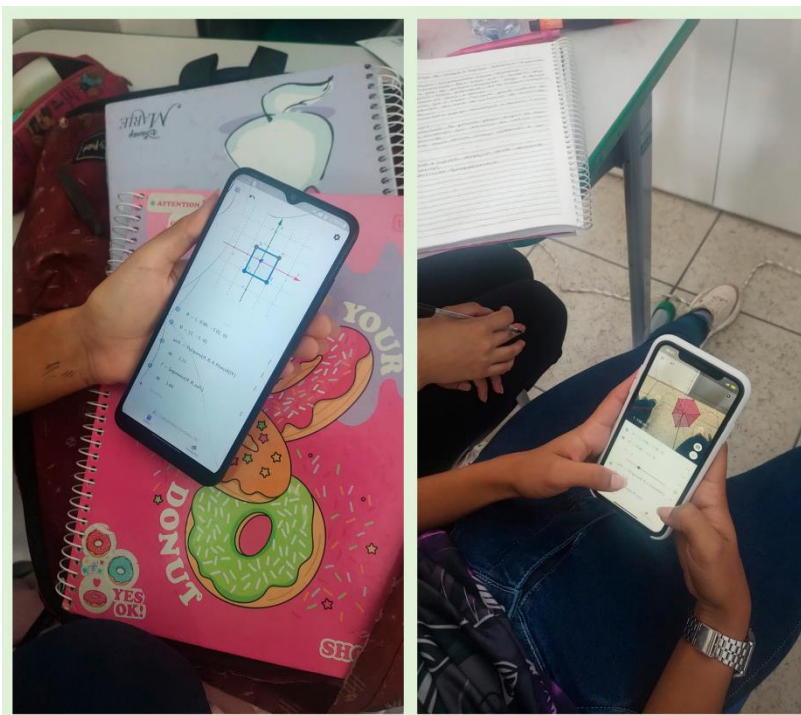
⁵ Embora os alunos tivessem acesso a prismas e, posteriormente, a pirâmides oblíquos de acrílico, o foco das atividades investigativas eram prismas e pirâmides regulares.

polígono com número de lados genérico (n) na Janela de Álgebra com um mínimo de 3, máximo de 6 e incremento de 1, permitindo a criação de quatro tipos de prismas regulares. Após configurar o polígono, os estudantes reposicionaram os eixos e o plano em três dimensões (x , y e z).

Usando o ícone Extrusão para Prisma, os alunos clicaram no polígono construído e inseriram a altura desejada, completando assim a construção dos prismas. Para finalizar, os estudantes utilizaram a ferramenta de RA do GeoGebra 3D para projetar os prismas construídos, proporcionando uma visualização interativa dos sólidos geométricos.

Os alunos seguiram esses passos para construir os quatro prismas, explorando diferentes valores para n e alturas (Figura 6). A divisão em grupos foi de suma importância, pois permitiu a colaboração entre os estudantes e assegurou que pelo menos um celular tivesse a tecnologia de RA para visualizar os prismas construídos. Essa abordagem prática e colaborativa facilitou o entendimento dos conceitos geométricos e permitiu aos alunos aplicarem a teoria de maneira interativa e dinâmica, alinhando-se à ideia de “explorar novas oportunidades de aprendizagem, bem mais centradas na atividade dos alunos, flexíveis, motivadoras e capazes de sustentar processos de autoria e autonomia” (Demo, 2011).

Figura 6: Alunos construindo prismas no GeoGebra e usando a RA



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a construção dos prismas regulares, os estudantes foram incentivados a participar da atividade investigativa dos prismas construídos. A atividade foi dividida nos seguintes itens (Quadro 1):

Quadro 1: Investigação dos Prismas construídos no aplicativo GeoGebra 3D.

- a) Junto ao seu grupo, identifique os elementos do prisma: Vértices, Faces e Arestas.
- b) Volte a janela para 3D (sair da realidade aumentada). Aperte o play do controle deslizante n, e observe diferentes prismas formados com bases de polígonos regulares.
- c) De acordo com o número de lados do polígono regular da base, quais tipos de prismas regulares vocês conseguem identificar?
- d) Escolha um dos prismas criados e, junto ao seu grupo, investigue a área total da superfície e o volume do prisma.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na análise das respostas dos alunos para o item a), ficou evidente que eles não encontraram dificuldades. A utilização dos prismas construídos no aplicativo GeoGebra 3D, junto com os prismas de acrílico, facilitou a observação e identificação dos elementos dos prismas. Como podemos perceber, os alunos mostraram uma compreensão sólida dos conceitos investigados ao analisar os prismas construídos (Quadro 2). Eles contaram cada um desses elementos utilizando tanto os prismas no GeoGebra 3D quanto os prismas de acrílico, sem recorrer à relação de Euler⁶. Sendo assim, essa abordagem prática e visual facilitou o entendimento dos conceitos geométricos, evidenciando a eficácia dessa combinação de recursos midiáticos na aprendizagem da geometria. Como Borba e Souto (2016) afirmam,

A cultura da sociedade atual protagoniza configurações e reconfigurações de diversas perspectivas teóricas, as quais sugerem que o ator humano não deve ser visto como o único, nem o principal responsável pelo conhecimento produzido, há uma ênfase na coletividade com a coparticipação de não humanos nesse processo. [...] as mídias também são necessárias no processo de produção de conhecimento Matemático. (Borba; Souto, 2016, p. 219).

⁶ Relação de Euler: “Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação $V - A + F = 2$ em que v é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro”. (Dolce, Pompeo, 2013, p. 121).

Quadro 2: Respostas dos alunos – Item a da atividade Investigação dos Prismas.

a) Prisma - 6 vértices Triangular 5 faces 3 arestas	Prisma - 12 vértices Hexagonal 8 faces 18 arestas.
Prisma Quadrangular - 8 vértices 6 faces 12 arestas	Prisma pentagonal - 10 vértices 7 faces 15 arestas.

Fonte: Dados da pesquisa.

No item b), os estudantes foram orientados a voltar para a janela 3D do GeoGebra e usar o Controle Deslizante para observar os diferentes prismas formados por bases de polígonos regulares. Essa etapa da atividade permitiu que os alunos visualizassem a transição e a formação de prismas em diversas bases, enriquecendo sua percepção espacial e compreensão da estrutura dos prismas.

Já no item c), foi solicitado que as duplas identificassem os tipos de prismas regulares formados de acordo com o número de lados das bases poligonais. A dupla 1, usando o Controle Deslizante para realizar os itens a) e c), demonstrou capacidade de correlacionar o número de lados das bases com a nomenclatura dos prismas (Quadro 3), reforçando a aplicação prática dos conceitos teóricos de geometria abordados⁷. Porém, a dupla 2 cometeu um erro conceitual na denominação “prisma quadricular” – o correto é “prisma quadrangular”. Esse deslize pode ser uma confusão terminológica, sendo importante corrigi-lo para garantir precisão na linguagem matemática. Apesar disso, a dupla demonstrou entendimento da relação entre o número de lados do polígono da base e a nomenclatura dos prismas.

⁷ O termo ‘quadragular’, utilizado pela dupla 1, pode ser um erro ortográfico. O termo correto é ‘quadrangular’.

Quadro 3: Respostas dos alunos – Item c da atividade Investigação dos Prismas.

Deixando o n no 3 6 vértices Prisma 9 Arestas Triângular 5 faces Deixando o n no 4 8 vértices Prisma 12 Arestas Quadrangular 6 faces	Deixando o n no 5 10 vértices Prisma 15 Arestas Pentagonal 7 faces Deixando o n no 6 12 vértices Prisma 18 Arestas Hexagonal 8 faces
c1- Prisma com 3 lados = prisma triangular Prisma com 4 lados = prisma quadrangular	

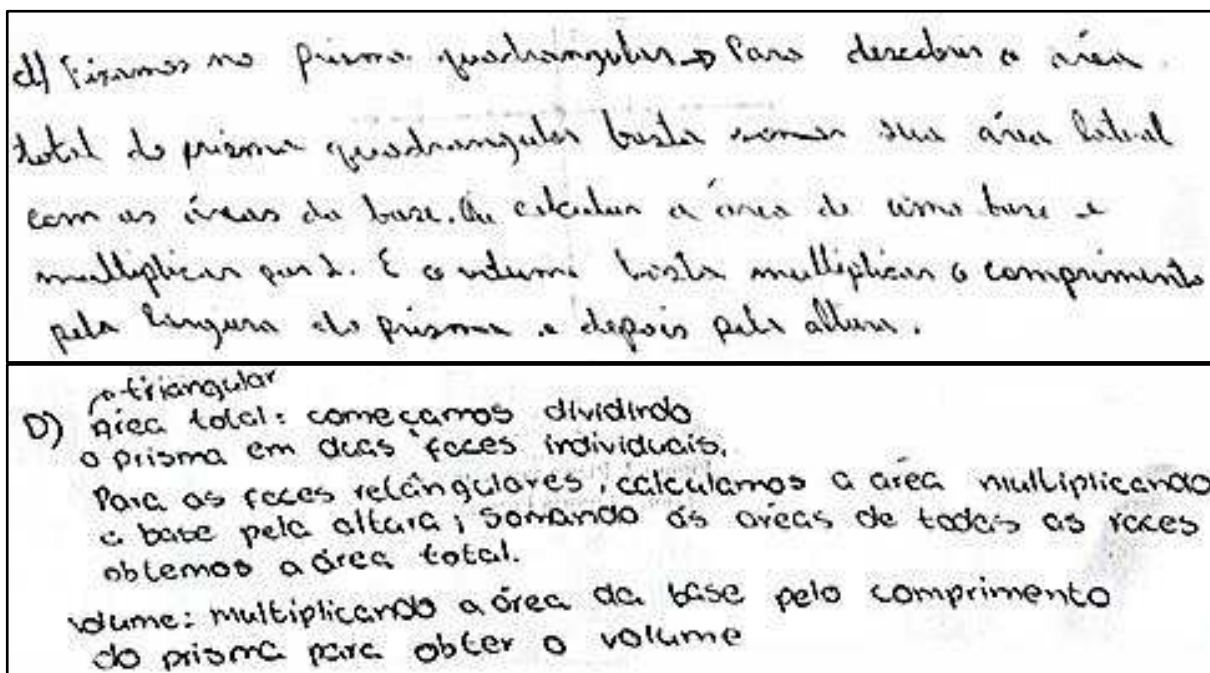
Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, no item d) da atividade investigativa, as duplas foram desafiadas a escolher um dos prismas criados durante a exploração no GeoGebra 3D e a investigar tanto a área total da superfície quanto o volume desse prisma. Essa etapa da atividade visava não apenas consolidar o entendimento dos conceitos geométricos estudados, mas também estimular a aplicação prática dos conhecimentos construídos. A análise dessas medidas permitiu aos alunos compreender a relação entre a estrutura do prisma e suas propriedades geométricas, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

A resposta fornecida pela dupla 1 (Quadro 4) indica uma compreensão básica dos conceitos de área total da superfície e volume de um prisma quadrangular. Os estudantes reconheceram corretamente que a área total da superfície de um prisma é a soma das áreas de suas faces laterais e das bases. Além disso, descreveram corretamente o cálculo do volume, demonstrando compreensão da fórmula matemática.

Por outro lado, a resposta apresentada pela dupla 2 demonstra uma compreensão fundamental dos conceitos de área total e volume de um prisma triangular. Ao dividir o prisma em duas faces individuais, os alunos reconheceram as faces laterais e as bases. Ao calcular a área das faces retangulares, a dupla multiplicou corretamente a base pela altura. Em seguida, somou as áreas de todas as faces para obter a área total do prisma. Quanto ao volume, percebemos novamente o uso correto da fórmula matemática.

Quadro 4: Respostas dos alunos – Item d da atividade Investigação dos Prismas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Embora as duplas tenham demonstrado familiaridade com as fórmulas tradicionais para calcular a área total e o volume dos prismas, entendemos que uma abordagem mais crítica teria enriquecido suas respostas. No entanto, é possível que eles tenham usado um tipo de raciocínio ao decidir como abordar o problema, mesmo que tenham optado por seguir as fórmulas convencionais. Já a dupla 2 investigou a relação entre as diferentes partes do prisma e desenvolveu suas próprias estratégias de cálculo da área total do prisma, como é possível observar no quadro anterior. Essa atitude é coerente com a visão de Braumann (2002), que afirma:

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. (Braumann, 2002, p. 5).

O autor enfatiza que aprender Matemática não se resume a entender o conhecimento matemático já estabelecido. Em vez disso, é crucial desenvolver a capacidade de conduzir investigações matemáticas, apropriadas ao nível de ensino de cada estudante. Esta abordagem é essencial para uma compreensão abrangente da Matemática, sua utilidade na interpretação do mundo e na capacidade de agir sobre ele. Assim, o verdadeiro domínio do conhecimento matemático só é alcançado com o aprimoramento da prática investigativa.

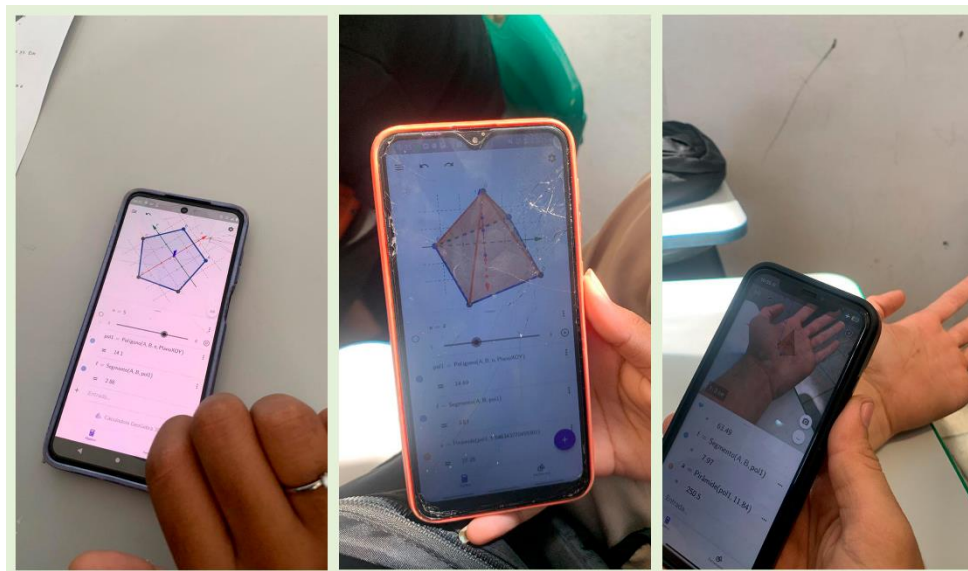
6.2. Investigação das Pirâmides

No segundo encontro, o foco foi a investigação de pirâmides. Para iniciar a aula, foi perguntado aos alunos o que vinha à mente deles quando ouviam falar de pirâmides. Muitos mencionaram as pirâmides egípcias, destacando suas impressionantes arquiteturas. No entanto, um aluno mencionou as pirâmides financeiras, o que nos proporcionou uma oportunidade para discutir brevemente esse assunto e esclarecer as similaridades e diferenças entre essas estruturas abstratas e as pirâmides geométricas.

Em seguida, foi apresentada uma definição de pirâmides que estava nas folhas de atividades. Para que os estudantes pudessem compreender essa definição formal de pirâmides, foram utilizados prismas e pirâmides de acrílico e os incentivamos a apontar as semelhanças e diferenças entre os dois objetos tridimensionais. Através da observação e manuseio dos sólidos de acrílico, os alunos puderam notar que tanto os prismas quanto as pirâmides podem possuir uma base poligonal. No entanto, enquanto os prismas têm faces retangulares - ou paralelogramos, dependendo do prisma -, as pirâmides têm faces laterais triangulares que convergem para um único vértice. Além disso, os alunos perceberam que os prismas têm duas bases com mesmas medidas, enquanto as pirâmides têm apenas uma base. Essas comparações ajudaram a destacar as principais características distintas e comuns desses sólidos geométricos.

Após essa análise inicial, os alunos, novamente divididos em duplas, seguiram o passo a passo disponível nos slides para construírem as pirâmides no aplicativo GeoGebra 3D. Posicionaram os eixos e o plano em duas dimensões, selecionaram a opção Exibir Malha e desmarcaram Exibir Plano. Utilizaram a ferramenta Ponto para marcar os pontos A e B e, em seguida, a ferramenta Polígono Regular para desenhar um polígono com o número de lados n , configurando-o com um mínimo de 3, máximo de 6 e incremento de 1. Reposicionaram os eixos e o plano em três dimensões, usaram o ícone Fazer Extrusão para Pirâmide para construir as pirâmides, e finalmente projetaram os sólidos em RA para uma visualização imersiva e interativa (Figura 7).

Figura 7: Alunos construindo Pirâmides no GeoGebra e usando a RA.



Fonte: Dados da pesquisa.

Depois de concluírem a construção das pirâmides regulares, os estudantes foram incentivados a participar da atividade investigativa dos objetos matemáticos que haviam criado. A investigação foi organizada nos itens descritos no quadro 5:

Quadro 5: Investigação das Pirâmides construídas no aplicativo GeoGebra 3D.

- e) Junto ao seu grupo, identifique os elementos da pirâmide: Vértice, Faces e Arestas.
- f) Volte a janela para 3D (sair da realidade aumentada). Aperte o play do controle deslizante n , e observe diferentes pirâmides formadas com bases de polígonos regulares.
- g) De acordo com o número de lados do polígono regular da base, quais tipos de pirâmides regulares vocês conseguem identificar?
- h) Escolha uma das pirâmides criadas e, junto ao seu grupo, investigue a área total da superfície e o volume da pirâmide.

Fonte: Dados da pesquisa.

A análise das respostas dos alunos no item e) da atividade investigativa sobre pirâmides revela que eles compreenderam bem os elementos constituintes dessas formas geométricas. Ao compararem as pirâmides com os prismas utilizando objetos de acrílico, os alunos puderam visualizar as semelhanças e diferenças entre os dois sólidos. Essa atividade preliminar de comparação facilitou a identificação dos vértices, faces e arestas nas pirâmides. Além disso, o uso do GeoGebra 3D permitiu que eles manipulassem os modelos virtuais, reforçando a compreensão visual e prática dos conceitos considerados.

Uma das duplas, ao identificar e listar os vértices, faces e arestas de cada tipo de pirâmide – triangular (P3), quadrangular (P4), pentagonal (P5) e hexagonal (P6) -, mostrou as habilidades de observar e generalizar as características estruturais das pirâmides conforme a

base poligonal aumenta em número de lados (Quadro 6). A precisão das respostas indica um entendimento correto das relações geométricas e confirma que o uso dos modelos no GeoGebra 3D e de acrílico foi essencial para a visualização e contagem desses elementos. Os alunos foram capazes de aplicar o conhecimento construído nas comparações entre prismas e pirâmides para realizar a tarefa de maneira eficiente. Isso reflete a ideia de Borba e Penteadó (2010) de que os seres humanos, ao interagirem com novas tecnologias, não só ampliam suas formas de pensamento, mas também transformam essas tecnologias, criando um conhecimento integrado que combina pessoas e mídias.

Quadro 6: Respostas dos alunos – Item e da atividade Investigação das Pirâmides.

e)	P _n	Vértices	Faixas	Arestas
	P ₃	4	4	6
	P ₄	5	5	8
	P ₅	6	6	10
	P ₆	7	7	12

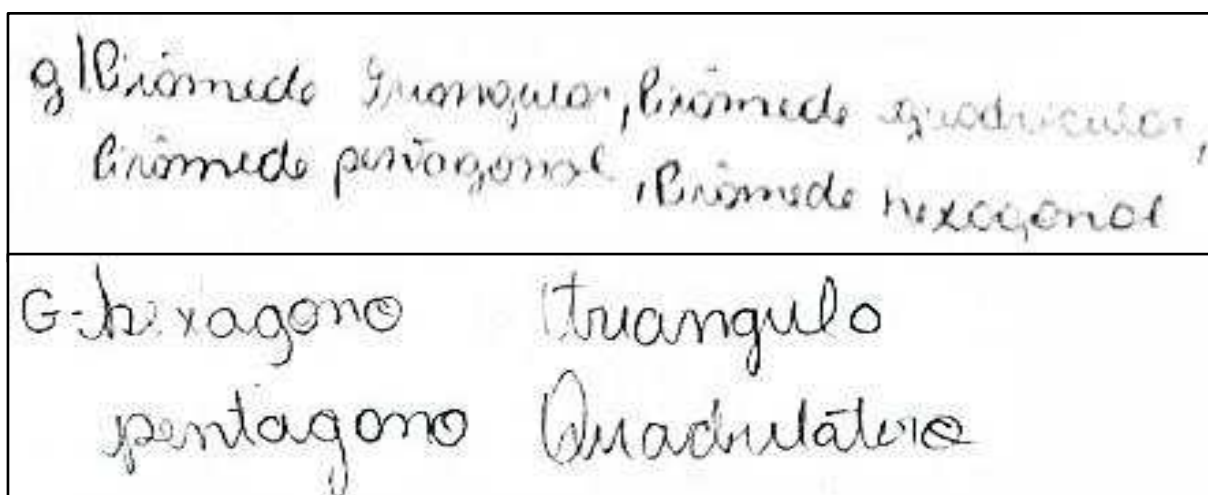
Fonte: Dados da pesquisa.

No item f), os estudantes foram orientados a voltar à visualização 3D no GeoGebra e observar diferentes pirâmides formadas por bases de polígonos regulares. Essa atividade proporcionou uma oportunidade valiosa para que os alunos visualizassem a transformação dinâmica das pirâmides e compreendessem melhor como a base poligonal influencia a estrutura da pirâmide. Ao manipular o Controle Deslizante, os alunos puderam ver como pirâmides com diferentes bases poligonais se formam e observar a variação por número de faces, arestas e vértices. Essa experiência interativa não apenas facilitou a identificação correta dos elementos geométricos, mas também reforçou a compreensão das propriedades geométricas das pirâmides em um ambiente tridimensional, promovendo um aprendizado mais intuitivo e visualmente estimulante.

As respostas dos alunos para o item g) revelam variações na precisão da nomenclatura das pirâmides (Quadro 7). A dupla 1 utilizou terminologia quase correta, embora “quadricular” devesse ser corrigido para “quadrangular”. Por outro lado, a dupla 2 forneceu nomes de

polígonos em vez de identificar as pirâmides formadas por esses polígonos. Essa variação indica uma compreensão geral dos tipos de bases poligonais, mas uma inconsistência na aplicação correta da nomenclatura das pirâmides, evidenciando a necessidade de reforçar a terminologia geométrica específica para evitar confusões entre os alunos.

Quadro 7: Respostas dos alunos – Item g da atividade Investigação das Pirâmides.



Fonte: Dados da pesquisa.

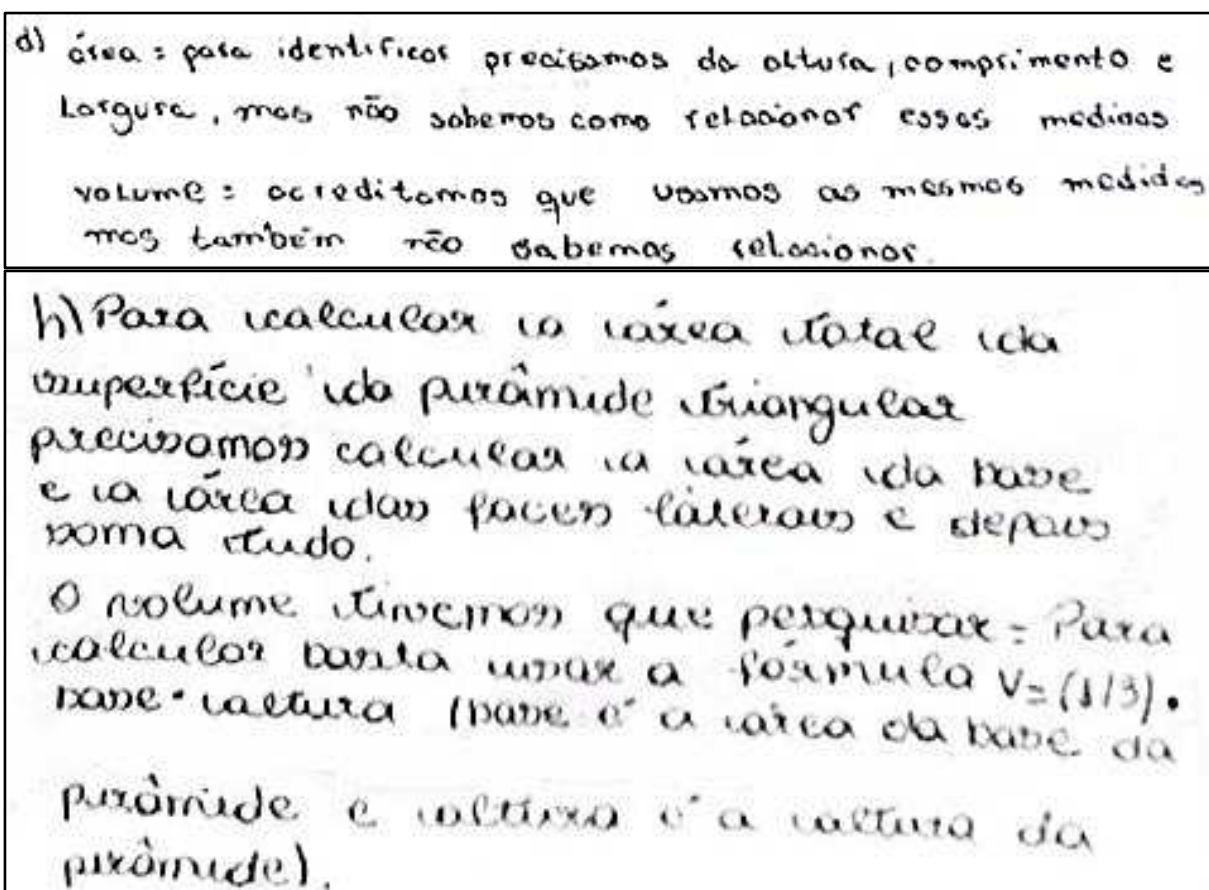
No item h) os alunos foram estimulados a investigar a área total da superfície e o volume de uma pirâmide escolhida por eles. As respostas fornecidas revelam diferentes níveis de compreensão e abordagem para resolver o problema proposto. A dupla 1 mostrou dificuldades em relacionar as medidas necessárias para calcular a área e o volume da pirâmide. Eles identificaram a necessidade das dimensões da pirâmide – altura, comprimento e largura -, mas não conseguiram associar esses elementos com as expressões matemáticas apropriadas, indicando uma lacuna na compreensão das propriedades geométricas e na aplicação de fórmulas matemáticas específicas para pirâmides (Quadro 8).

Por outro lado, a dupla 2 apresentou uma compreensão mais sólida. Eles corretamente identificaram a necessidade de calcular separadamente a área da base e as áreas das faces laterais para obter a área total da superfície da pirâmide. Além disso, demonstraram iniciativa ao pesquisar a fórmula correta para calcular o volume da pirâmide, mostrando que entenderam a aplicação da fórmula (Quadro 8). Como Demo (2011) ressalta,

Cabe ao professor orientar e avaliar, enquanto os alunos partem para a luta a seu modo. Usam o conhecimento que já possuem, dividem as tarefas entre eles, aproveitam as habilidades mais marcantes de cada um. Antes, precisam entender o problema (teorizar o problema, levantar hipóteses de trabalho, divisar saídas e becos sem saída, imaginar onde buscar soluções, etc.); depois, tentam dar conta do problema, agregando, aos poucos e sistematicamente, as partes componentes do quebra-cabeça. (Demo, 2011, p. 23).

A diferença nas respostas destaca a importância de assegurar que todos os alunos compreendam plenamente as expressões matemáticas e conceitos geométricos fundamentais. Incentivar a pesquisa e a autoaprendizagem, como fez a dupla 2, é essencial para desenvolver uma compreensão mais profunda e autônoma dos conceitos matemáticos.

Quadro 8: Respostas dos alunos – Item h da atividade Investigação das Pirâmides

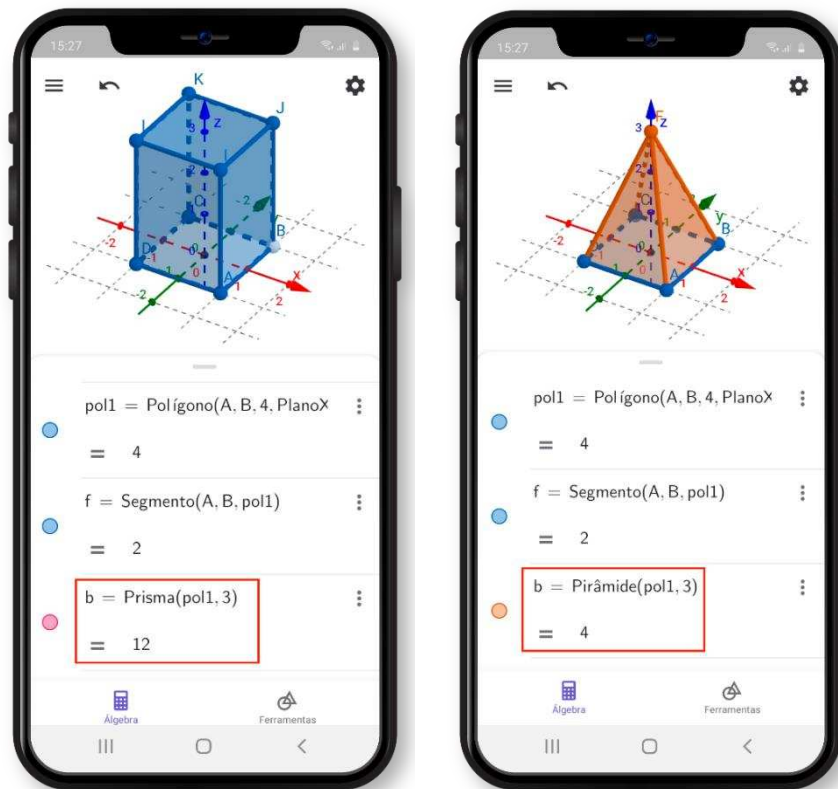


Fonte: Dados da pesquisa.

Deduzir que o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma com a mesma base e altura pode ser desafiador para os alunos, pois essa relação não é intuitivamente óbvia e requer um entendimento mais profundo de geometria espacial. Porém, usando o GeoGebra 3D, os estudantes poderiam construir um prisma e uma pirâmide com a mesma base e altura e observar diretamente a diferença em seus volumes, percebendo que o volume da pirâmide é menor que o volume do prisma. Além disso, os estudantes podem observar diretamente os volumes dos objetos tridimensionais construídos calculados pelo próprio aplicativo, apresentados na Janela de Álgebra. Por exemplo, se um prisma possui um volume exibido como 12 e uma pirâmide com a mesma base e altura exibe um volume 4, os alunos podem calcular a razão entre esses volumes, que é $4/12$ ou $1/3$ (Figura 8). A visualização dos valores dos volumes, juntamente com a observação das construções, ajuda os alunos a concluir

que o volume da pirâmide é sempre um terço do volume do prisma correspondente (embora não tenhamos realizado uma demonstração matemática). Essa experiência prática ilustra como as mídias digitais podem transformar a aprendizagem, facilitando a compreensão de conceitos complexos. Como Borba e Souto (2016) destacam, “os seres humanos, ao interagirem com as mídias, reorganizam o pensamento de acordo com múltiplas possibilidades e restrições que elas oferecem”.

Figura 8: Prisma e Pirâmide de mesma base e altura.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse contexto, coletivo seres-humanos-com-mídias propõe que essa relação é de impregnação mútua, onde tanto os seres humanos quanto as mídias se moldam reciprocamente (Borba; Souto, 2016). Ao utilizarem o GeoGebra 3D com RA, não apenas os alunos reorganizaram seu pensamento geométrico, mas também a forma como a tecnologia foi empregada nas atividades investigativas foi transformada pelas interações humanas. Os alunos não utilizaram o software para realizar cálculos de volumes, mas o exploraram de maneiras que podem não ter sido inicialmente previstas pelos desenvolvedores do aplicativo. (Borba; Villarreal, 2005; Borba; Souto, 2016).

Após a atividade “Investigação das Pirâmides”, os alunos tiveram a oportunidade de revisar e consolidar o que aprenderam nos dois encontros. Eles participaram ativamente de uma

roda de conversas, respondendo a algumas perguntas que ajudaram a esclarecer suas compreensões e dificuldades sobre os prismas e as pirâmides. Perguntados sobre as semelhanças entre prismas e pirâmides, Euclides⁸ deu a seguinte resposta:

Euclides: *A base, os vértices, as faces, as arestas, [isto é], são tridimensionais.* (Interpolação do autor).

Essa observação mostra que o aluno entende a natureza tridimensional desses objetos geométricos e a presença de elementos estruturais comuns. No entanto, quando questionados sobre como encontrar a área do prisma e da pirâmide, as respostas mostraram algumas confusões. Um aluno respondeu:

Pitágoras: *[A área do prisma é calculada pela multiplicação do] comprimento vezes largura vezes altura.* (Interpolação do autor).

Na verdade, o aluno se referiu ao cálculo do volume de um prisma, e não da área. Confusão semelhante ocorreu quando outro aluno afirmou que, ao calcular a área da pirâmide, é preciso multiplicar a:

Eratóstenes: *[área da] base vezes altura.* (Interpolação do autor).

É evidente que, embora tenham compreendido aspectos fundamentais de prismas e pirâmides, como suas características estruturais, há uma dificuldade em aplicar corretamente as relações matemáticas para calcular áreas e volumes desses objetos. Compreender conceitos geométricos espaciais pode ser desafiador para os alunos, pois esses conceitos exigem habilidades de visualização tridimensional, que nem todos desenvolvem naturalmente. Muitos estudantes estão mais acostumados a trabalhar com figuras bidimensionais em papel, e a transição para a compreensão de formas tridimensionais pode ser difícil sem apoio visual adequado. É como afirma Carvalho (2005):

Como habitantes de um mundo tridimensional, temos grande facilidade para lidar com o mundo bidimensional da Geometria Plana [...]. Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversa ordem. (Carvalho, 2005, p. 1).

Essa situação destaca a importância de utilizar métodos de ensino que permitam uma prática mais aplicada e concreta e o uso de TD que ajudem os alunos a visualizar e manipular formas. Quando questionados se a utilização do celular e do GeoGebra 3D com RA facilitou a visualização e a realização das atividades investigativas, uma aluna respondeu:

⁸ Para preservar a identidade dos alunos, seus nomes verídicos foram substituídos por nomes de matemáticos destacados no campo da Geometria, como pseudônimos.

Hipátia: *Eu acho que para visualizar ficaria mais difícil [sem o uso do aplicativo]. Pelo aplicativo a gente pode ver diferentes formas, mover elas, ver altura, as faces; e pela imagem [em papel] você vai ver uma imagem plana tentando representar o que o aplicativo mostrar. (Interpolações do autor).*

A resposta positiva da aluna sugere que o uso de mídias, especialmente as TD, pode ajudar a superar obstáculos na compreensão de conceitos geométricos espaciais, proporcionando uma aprendizagem interativa e eficaz.

7. Considerações Finais

Nesta pesquisa, o software *Calculadora gráfica GeoGebra 3D* com RA foi utilizado para transformar e enriquecer a aprendizagem de conceitos geométricos relacionados a prismas e pirâmides. Através desse aplicativo, os alunos puderam explorar visualmente e interativamente os elementos geométricos, promovendo uma melhor compreensão e aplicação dos conceitos teóricos. As atividades investigativas desenvolvidas mostraram que a utilização de TD desempenhou um papel importante como meio de comunicação e interação no processo de aprendizagem.

Os alunos do Ensino Médio, que desde cedo estão familiarizados com a tecnologia, mostraram-se receptivos e motivados ao utilizar o GeoGebra 3D com RA. Nesse contexto, a tecnologia aproximou os estudantes da Matemática de maneira dinâmica, incentivando uma atitude positiva em relação ao aprendizado geométrico. As atividades realizadas demonstraram que o uso de mídias digitais pode enriquecer significativamente o processo de aprendizagem, contribuindo para a construção de conhecimentos sólidos.

A análise evidenciou que o GeoGebra 3D com RA proporciona discussões matemáticas aprofundadas sobre a construção de formas geométricas tridimensionais, despertando a curiosidade dos estudantes e promovendo a interação entre alunos e professores. Essa dinâmica interativa e colaborativa está alinhada com o coletivo seres-humanos-com-mídias, ressaltando a importância do uso de TD na aprendizagem dos alunos e na construção do conhecimento.

Sendo assim, este estudo, que foi norteado pela pergunta “*Como a integração do GeoGebra no celular, aliado à Realidade Aumentada, pode contribuir para a aprendizagem de prismas e pirâmides no Ensino Médio?*”, demonstrou que o uso do GeoGebra 3D com RA contribuiu significativamente para o aprendizado dos conceitos geométricos abordados ao proporcionar uma experiência interativa e visualmente rica. A capacidade de manipular os sólidos geométricos permitiu que os alunos explorassem as propriedades das figuras de maneira mais concreta e dinâmica, o que foi crucial para a construção do conhecimento geométrico.

É fundamental refletir sobre o potencial das descobertas desta pesquisa e sugerir direções futuras para aprimorar o uso do GeoGebra 3D com RA em dispositivos móveis no ensino de geometria. Inicialmente, destacamos a importância de investir em programas de capacitação e desenvolvimento profissional para os educadores, visando fortalecer suas competências no uso dessas TD em sala de aula. Essa iniciativa pode ser realizada em parceria com instituições de Ensino Superior ou órgãos governamentais responsáveis pela educação,

contribuindo para conscientizar os educadores sobre a integração eficaz dessa tecnologia em suas práticas pedagógicas. De acordo com o construto seres-humanos-com-mídias, “o conhecimento é produzido por coletivos pensantes de atores humanos e não humanos, em que todos desempenham um papel central” (Borba; Souto, 2016). Assim, a interação entre educadores e tecnologias não apenas facilita a reorganização do pensamento, mas também molda e é moldada pelas práticas pedagógicas, resultando em um processo de produção de conhecimento distinto e enriquecedor (Borba; Souto, 2016).

Além disso, propomos a realização de estudos de avaliação do impacto do GeoGebra 3D com RA no aprendizado dos alunos em geometria. Essas pesquisas podem incluir análises quantitativas e qualitativas para entender melhor como essas tecnologias influenciam o desempenho acadêmico e a participação dos estudantes em sala de aula. Adicionalmente, é importante explorar formas de integrar o GeoGebra 3D com RA nos currículos escolares, garantindo sua utilização efetiva e sustentável ao longo do tempo.

Por último, recomendamos prosseguir com a realização de pesquisas qualitativas para explorar a percepção dos alunos sobre o uso do GeoGebra 3D com RA no celular, considerando suas experiências com as TD. Esses estudos podem fornecer informações valiosas para aprimorar as práticas pedagógicas e tornar a aprendizagem de geometria mais envolvente e relevante para os estudantes. Portanto, é de suma importância continuar explorando o uso dessa abordagem no âmbito educacional e aprofundar a investigação sobre o impacto do GeoGebra 3D com RA no ensino de geometria.

Esta pesquisa desempenhou um papel fundamental em minha formação como professor de Matemática em formação, pois me proporcionou uma oportunidade única de explorar novas abordagens no ensino dessa área do saber humano. Ao investigar o uso do GeoGebra 3D com RA no contexto do ensino de geometria, pude ampliar meu conhecimento sobre as possibilidades oferecidas pelas TD na Educação Matemática. Além disso, ao conduzir este estudo, desenvolvi habilidades essenciais de pesquisa, análise de dados e comunicação acadêmica, que são fundamentais para minha futura carreira como educador. Este estudo não apenas enriqueceu minha compreensão teórica da geometria e seu ensino, mas também me capacitou a integrar de forma eficaz as TD em minha prática pedagógica, tornando minhas aulas mais dinâmicas, interativas e envolventes para os alunos.

Referências

- ANCOCHEA, B.; CÁRDENAS, M. I. Exploring Real World Environments using Potential of GeoGebra AR. In: **Roseta Online Conference**, 2020, Borsdorf. Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age [...] Borsdorf: Münster, 11 jun. 2020, v. 6, p.41-46. Disponível em: <https://www.wtmverlag.de/DOI-Deposit/978-3-95987-144-0/978-3-95987-144-0-05.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2024.
- BORBA, M. C. **A pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer, 2005.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.
- BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CUNHA, J. F. T.; DOMINGUES, N. S. Humans-with-Media: Twenty-Five Years of a Theoretical Construct in Mathematics Education. In: Pepin, B. (org.). **Handbook of Digital Resources in Mathematics Education**, New York: Springer, 2023.
- BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P. **Seres humanos-com-internet ou internet-com-seres humanos: Uma troca de papéis?** Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa (Relime), Vol. 19 (2), jul. 2016, p. 216 – 242.
- BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO JUNIOR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5 - 24.
- BUDINSKI, N.; LAVICZA, Z. Teaching Advanced Mathematical Concepts with Origami and GeoGebra Augmented Reality. In: BRIDGES 2019 CONFERENCE, 2019, Linz. Bridges Linz 2019 [...] Linz: Tessellations Publishing, jul. 2019, p. 387-390. Disponível em: <https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-387.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2024.
- CARVALHO, P. C. P. **Introdução à geometria espacial**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CONCEIÇÃO, T. M. G.; MARTIN, E. M.; FERREIRA, W. M.; TORISU, E. M. **Coletivo pensante seres-humanos-com-geogebra-e-smartphone: demonstrando a fórmula de Bhaskara**. Polyphonia, v. 30/2, jul.-dez. 2019.

CORDEIRO, K. M. A. **O impacto da pandemia na educação: a utilização da tecnologia como ferramenta de ensino**, 2020, p. 1-15.

DEMO, Pedro. **Aprendizagens e novas tecnologias**. Roteiro, Joaçaba, v. 36, n. 1, p. 9 - 32, jan./jun. 2011.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. **Planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2006.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**, 10: geometria espacial, posição e métrica – 7. ed. – São Paulo: Atual, 2013.

FARIA, R. W. S. C.; ROMANELLO, L. A.; DOMINGUES, N. S. Fases das tecnologias digitais na exploração matemática em sala de aula: das calculadoras gráficas aos celulares inteligentes. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v.14, n. 30, p. 105-122, out. 2018. ISSN 2317-5125.

IBGE. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua. **Acesso à internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2021** / IBGE, Coordenação de Trabalho e Rendimento. Rio de Janeiro: IBGE, 2022.

IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D. M.; PÉRIGO, R. **Matemática – Volume único**. São Paulo: Atual, 1997.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo, Brasil: Editora Moraes. 1978.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

OLIVEIRA, O. G. **O uso do GeoGebra 3D com realidade aumentada no ensino de Geometria Espacial**. Dissertação. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2021. Disponível em: <https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/3581/1/Odailson%20Gon%C3%A7alves%20de%20Oliveira.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2024.

PEREIRA, F. S. **Estudo do volume de sólidos geométricos com a utilização do software Geogebra**. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Universidade Federal do Amazonas, 2017.

POINCARÉ, H. *Science and Method*. London: Thomas Nelson and Sons, 1914.

PRENSKY, M. **Digital Natives, Digital Immigrants**. *On the Horizon*, v. 9, n. 5, 2001.

ROQUE, R. D. Padrões Fractais, Tecnologias Digitais e Interdisciplinaridade. **Relatório de Iniciação Científica**. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. 2023.

TORI, R.; HOUNSELL, M. S. **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: Editora SBC, 2018.

VIDAL, A. S.; MIGUEL, J. R. As Tecnologias Digitais na Educação Contemporânea. **Id on Line: Revista Multidisciplinar e de Psicologia**. V. 14, N. 50 p. 366-379, Maio/2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Atividades de Prismas e Pirâmides

Professor em Formação: Leandro Pacheco Machado

Coordenação: Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria

Aluno(a): _____

Atividade 1: Prismas Regulares

Vamos estudar prismas regulares. “Prisma Regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares”. (IEZZI *et al.*, 1997, p. 497). Mas o que são prismas? Vamos ver uma definição? (Figura 1).

Consideremos um polígono (ou região poligonal) $ABCDE$ de cinco lados num plano α e um segmento de reta \overline{PQ} cuja reta-suporte intercepta α . Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a \overline{PQ} , cada um deles com uma das extremidades num dos pontos de $ABCDE$ e todos com a outra extremidade num mesmo semi-espaco dos determinados por α . A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado *prisma pentagonal*.

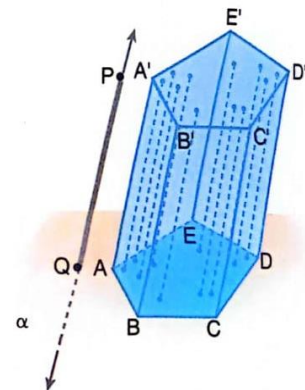


Figura 1: Conceito de Prisma
Fonte: IEZZI *et al.*, 1997, p. 496

1. Construção dos Prismas

- (i) No app GeoGebra 3D, posicione os eixos em duas dimensões (x e y). Em configurações, selecione Exibir Malha e desmarque Exibir Plano (Figura 2).

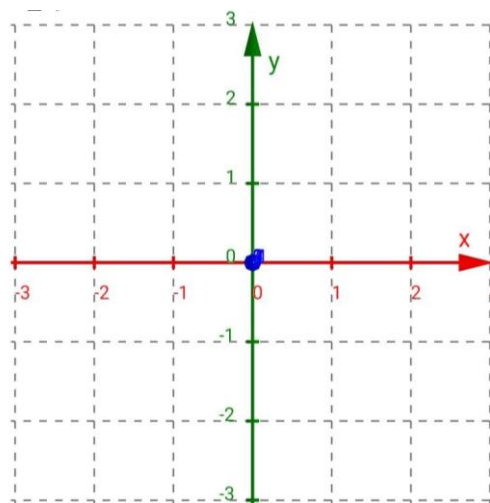


Figura 2: Eixos em duas dimensões
Fonte: Autoria Própria

- (ii) Selecione a ferramenta Ponto e marque os pontos A e B.

- (iii) Com a ferramenta polígono regular, faça um polígono de lado n .
- (iv) Na janela de álgebra, configure n , com min 3, max 6 e incremento 1.
- (v) Posicione os eixos em três dimensões (x , y e z) como na Figura 3.

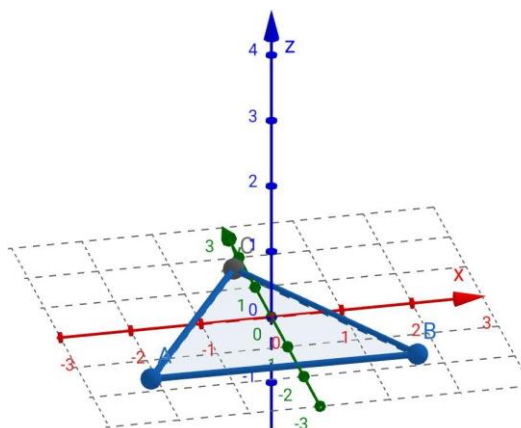


Figura 3: Eixos em três dimensões
Fonte: Autoria Própria

- (vi) Selecione o ícone Extrusão para Prisma, clique no polígono construído, e insira a altura que desejar.
- (vii) Selecione a ferramenta AR (realidade aumentada) e projete o prisma construído.

2. Investigação dos Prismas

- a) Junto ao seu grupo, identifique os elementos do prisma: Vértices, Faces e Arestas.
- b) Volte a janela para 3D (sair da realidade aumentada). Aperte o play do controle deslizante n , e observe diferentes prismas formados com bases de polígonos regulares.
- c) De acordo com o número de lados do polígono regular da base, quais tipos de prismas regulares vocês conseguem identificar?
- d) Escolha um dos prismas criados e, junto ao seu grupo, investigue a área total da superfície e o volume do prisma.

Atividade 2: Pirâmides Regulares

Como são definidas as pirâmides regulares? “Pirâmide Regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular”. (IEZZI *et al.*, 1997, p. 507). Vamos recordar o conceito de uma pirâmide qualquer? (Figura 4).

Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE de cinco lados num plano α e um ponto V fora de α . Tomemos segmentos de reta, todos com uma extremidade em V e a outra extremidade nos pontos de ABCDE. A reunião desses segmentos é um sólido chamado *pirâmide pentagonal*.

Se em lugar de um pentágono tivermos um triângulo, a pirâmide obtida será uma pirâmide triangular; se for um quadrilátero, teremos uma pirâmide quadrangular; e se for um polígono genérico (de n lados), teremos uma pirâmide genérica.

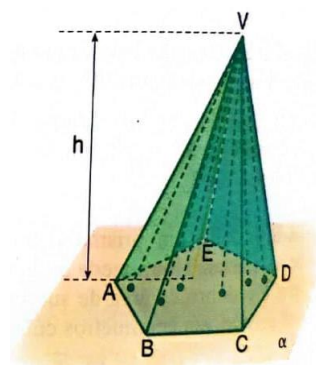


Figura 4: Conceito de Pirâmide
Fonte: IEZZI *et al.*, 1997, p. 506

1. Construção das Pirâmides

- (i) No app GeoGebra 3D, posicione os eixos em duas dimensões (x e y). Em configurações, selecione Exibir Malha e desmarque Exibir Plano.
- (ii) Selecione a ferramenta Ponto e marque os pontos A e B.
- (iii) Com a ferramenta polígono regular, faça um polígono de lado n .
- (iv) Na janela de álgebra, configure n , com min 3, max 6 e incremento 1.
- (v) Posicione os eixos em três dimensões (x , y e z).
- (vi) Selecione o ícone fazer extrusão para pirâmide, clique no polígono construído, e insira a altura que desejar.
- (vii) Selecione a ferramenta AR (realidade aumentada) e projete a pirâmide construída.

2. Investigação das Pirâmides

- e) Junto ao seu grupo, identifique os elementos da pirâmide: Vértice, Faces e Arestas.
- f) Volte a janela para 3D (sair da realidade aumentada). Aperte o play do controle deslizante n , e observe diferentes pirâmides formadas com bases de polígonos regulares.
- g) De acordo com o número de lados do polígono regular da base, quais tipos de pirâmides regulares vocês conseguem identificar?
- h) Escolha uma das pirâmides criadas e, junto ao seu grupo, investigue a área total da superfície e o volume da pirâmide.

Referência

IEZZI G.; DOLCE O.; DEGENSZAJN D.; PÉRIGO R. Matemática - Volume Único. São Paulo: Atual, 1997.

APÊNDICE B



Plano de aula
Investigação de Prismas e Pirâmides com o GeoGebra no Celular

Professor em Formação: Leandro Pacheco Machado

Coordenação: Profa. Dra. Rejane Waiandt Schwartz de Carvalho Faria

Público Alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Alice Loureiro

Duração: 4 horas/aula divididas em 2 encontros.

OBJETIVOS:

- Estudar prismas e pirâmides por meio de atividades investigativas com o App Calculadora GeoGebra 3D;
- Construir prismas e pirâmides no App GeoGebra para celular;
- Identificar os elementos de prismas e pirâmides, classificar esses sólidos geométricos de acordo com o polígono regular da base, investigar a área e o volume dos objetos tridimensionais construídos.

RECURSOS: Celulares inteligentes, App Calculadora GeoGebra 3D, slides, projetor multimídia, objetos matemáticos tridimensionais de acrílico.

DESCRIÇÃO: As atividades serão divididas em dois encontros. No primeiro encontro, será introduzida uma diferenciação entre objetos matemáticos bidimensionais e tridimensionais. Uma definição de polígono regular será apresentada para que os alunos compreendam, posteriormente, que prismas e pirâmides recebem nomes especiais de acordo com o polígono que compõem as suas bases. Em seguida, serão revisadas as ideias de área e volume. Esses conceitos serão importantes para que os alunos associem área a figuras planas e volume a sólidos geométricos. Depois disso, será apresentada uma definição de prisma regular. Nesse momento, os alunos poderão visualizar e manusear objetos geométricos de acrílico. Na sequência, uma atividade de construção de prismas no App Calculadora GeoGebra 3D será descrita. Os alunos deverão construir os prismas seguindo o passo a passo exposto nos slides. Por fim, será aplicada uma atividade de investigação dos prismas construídos pelos alunos. Já no segundo encontro, será explicada a definição de pirâmide regular. Os alunos poderão visualizar e tatear pirâmides de acrílico, seguida de uma atividade passo a passo da construção

de pirâmides no App Calculadora GeoGebra 3D. A seguir, será aplicada uma atividade investigativa das pirâmides construídas.

Enquanto professor em formação, minha atuação será a de mediador entre os recursos e os alunos, além de orientá-los no decorrer das atividades propostas.

PROCEDIMENTOS:

1° ENCONTRO:

- Diferenciação de objetos matemáticos bidimensionais e tridimensionais;
- Definição de polígonos regulares;
- Áreas e volumes;
- Definição de prisma regular;
- Construção de prismas regulares no App Calculadora GeoGebra 3D;
- Atividades investigativas: Investigação dos Prismas.

2° ENCONTRO:

- Definição de pirâmide regular;
- Construção de pirâmides regulares no App Calculadora GeoGebra 3D;
- Atividades investigativas: Investigação das Pirâmides.

APÊNDICE C

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado a participar da pesquisa Investigação de Prismas e Pirâmides com o GeoGebra no Celular, coordenada pela pesquisadora Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria. Seus pais ou responsáveis permitiram que você participe.

Queremos saber as possibilidades do uso do celular no estudo de Prismas e Pirâmides no Ensino Médio. Você só precisa participar da pesquisa se quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. Os adolescentes que irão participar desta pesquisa têm de 13 a 18 anos de idade.

A pesquisa será feita na sua Escola (Escola Estadual Alice Loureiro), durante as aulas de matemática dos dias 24 e 15 de abril de 2024, com a presença dos pesquisadores (licenciando e orientadora) e do seu professor(a). Ao todo serão dois encontros. O primeiro com atividades de exploração do aplicativo GeoGebra para celulares inteligentes, e os demais com atividades investigativas de geometria espacial, especificamente prismas e pirâmides. Tais encontros serão filmados com a única finalidade de otimizar a análise dos dados produzidos para relato e registro na monografia.

O registro dos dados é considerado seguro, mas existe o risco de constrangimento do aluno por se sentir exposto, ou ainda sentir sua escola exposta em algumas situações. Poderão ocorrer também desconforto e inibição em discutir as respostas durante a discussão das atividades. Para minimizar os riscos, informamos que para evitar tais desconfortos e também a inibição, durante a discussão das atividades as perguntas serão feitas para toda a turma, e não direcionadas a algum aluno especificamente. Além disso, os nomes dos participantes serão omitidos e substituídos por nomes fictícios para evitar eventuais constrangimentos. Assim, sua privacidade será preservada.

Esclarecemos que as gravações ocorrerão somente para fins de otimizar a análise dos dados produzidos. As imagens dos alunos não serão divulgadas na monografia ou em trabalhos científicos com o intuito de preservar suas identidades. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelos telefones que tem no final do texto. Mas há coisas boas que podem acontecer como colaborar na compreensão da matemática, em uma perspectiva que envolve a aprendizagem tecnológica de forma contextualizada por meio dos celulares inteligentes, realidade aumentada e o aplicativo GeoGebra.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados na monografia ou em trabalhos científicos, mas sem identificar os participantes.

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Eu _____ aceito participar da pesquisa Investigação de Prismas e Pirâmides com o GeoGebra no Celular.

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e que ninguém vai ficar com raiva de mim.

Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma via deste termo de assentimento. A outra via ficará com o pesquisador responsável Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria. Li o documento e concordo em participar da pesquisa.

Nome do Pesquisador Responsável: Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria

Endereço: Prédio das Licenciaturas, sala 301. Av. PH Rolfs, s/n – Campus Universitário Cep: 36570-900 Viçosa/MG.

Telefone: (31) 999048710

Email: rejane.faria@ufv.br

Nome do Pesquisador/Licenciando: Leandro Pacheco Machado

Telefone: (32)984253322

Email: leandro.pacheco@ufv.br

CEP/UFV que fica localizado no Edifício Arthur Bernardes, subsolo, Av. PH Rolfs, s/n – Campus Universitário, Viçosa/MG, CEP: 36570-900. Horário de Funcionamento: 08h às 12h e das 14h às 17h. Contatos: (31) 3612- 2316; cep@ufv.br e www.cep.ufv.br.

Viçosa - MG, ____/____/2024

Assinatura do aluno Participante da
Pesquisa

Leandro Pacheco Machado
Licenciando em Matemática UFV

Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz
de Carvalho de Faria
Pesquisadora Responsável

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Prezado(a) responsável pelo aluno participante da pesquisa,

Tendo por base as Diretrizes e Normas Regulamentadas de Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, em atenção à Resolução nº 466/2012, do Conselho Nacional de Saúde do Ministério de Saúde, o(a) aluno(a) _____ está sendo convidado(a) para participar da pesquisa “Investigação de Prismas e Pirâmides com o GeoGebra no Celular”, desenvolvido pelo pesquisador/licenciando Leandro Pacheco Machado, orientado pela Prof.^a Dr.^a Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria -DMA/UFV. Todas as informações necessárias sobre a pesquisa encontram-se relacionadas abaixo e, caso haja dúvidas, favor esclarecê-las antes de assinar o presente Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE. O objetivo do estudo, estritamente acadêmico, é analisar prismas e pirâmides no software GeoGebra, por meio do desenvolvimento e da realização de atividades investigativas.

Para alcançar o objetivo da pesquisa, serão realizadas atividades investigativas na turma do referido aluno do segundo ano do Ensino Médio da Escola Estadual Alice Loureiro, nos dias 24 e 25 de abril de 2024, durante as aulas de matemática com a presença dos pesquisadores (licenciando e orientadora) e do professor(a) dele. Serão realizados dois encontros. O primeiro com atividades de exploração do aplicativo GeoGebra para celulares inteligentes, e o outro com atividades investigativas de geometria espacial, especificamente prismas e pirâmides. Tais encontros serão filmados com a única finalidade de otimizar a análise dos dados produzidos para relato e registro na monografia.

Os dados produzidos serão arquivados sob a responsabilidade da pesquisadora principal (orientadora da pesquisa) de forma permanente, não havendo previsão para que os mesmos sejam descartados, e serão divulgados apenas em trabalhos científicos.

A participação do aluno não implicará em **nenhum custo**, bem como em nenhum benefício financeiro, ou seja, a sua participação dele é voluntária. Apesar disso, diante de eventuais danos ou despesas, identificados e comprovados, decorrentes da pesquisa, ele tem assegurado o direito à **indenização**. Além disso, embora não haja custos, caso surja algum custo não previsto identificado e comprovado, decorrente da pesquisa, você tem assegurado o direito à **ressarcimento**.

Esclarecemos que os possíveis **riscos** que ele se submete ao participar da pesquisa são de constrangimento por se sentir exposto, ou ainda sentir sua escola exposta em algumas situações. Poderá ocorrer também desconforto e inibição em discutir as respostas durante a discussão das atividades.

Para **minimizar os riscos**, informamos que os nomes dos participantes serão omitidos e substituídos por nomes fictícios para evitar eventuais constrangimentos. Assim, a privacidade dele será preservada. Esclarecemos que as gravações ocorrerão somente para fins de otimizar a análise dos dados produzidos. As imagens dos alunos não serão divulgadas na dissertação ou em trabalhos científicos com o intuito de preservar suas identidades.

As perguntas do questionário serão de cunho acadêmico, não será, portanto, realizadas indagações de caráter pessoal. Em caso de desconforto ele poderá se negar a dar qualquer tipo de informação ou mesmo desistir da pesquisa a qualquer momento, sem a necessidade de explicar o motivo. Por fim, esclarecemos que durante a pesquisa ele terá a liberdade de fazer qualquer pergunta ou questionamento relacionado ao estudo.

Acreditamos que a pesquisa trará **benefícios** especificamente para o aluno, por colaborar na compreensão do tema prismas e pirâmides, em uma perspectiva que envolve a aprendizagem tecnológica de forma contextualizada. Além disso, o conhecimento produzido pela pesquisa pode contribuir para o avanço de estudos voltados à utilização do celular no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Esclarecemos ainda que você poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa - CEP/UFV em caso de discordância ou irregularidades sob o aspecto ético.

Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo e confidencialidade, atendendo à legislação brasileira, em especial, à Resolução 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde, e utilizarão as informações somente para fins acadêmicos e científicos.

Neste termo consta o telefone e o endereço da pesquisadora principal e do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa - CEP/UFV, para contatos que se façam necessários. Ao assinar este termo, declaro concordância que o aluno descrito neste termo, sob minha responsabilidade, participe da pesquisa “Investigação de Prismas e Pirâmides com o GeoGebra no Celular” e que fui informado(a) do objetivo da mesma de maneira clara e detalhada. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participar se assim o desejar. Foi-me dada a oportunidade de ler e esclarecer minhas dúvidas. Além disso, recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido.

Nome do Pesquisador Responsável: Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria Endereço: Prédio das Licenciaturas, sala 301. Av. PH Rolfs, s/n – Campus Universitário Cep: 36570-900 Viçosa/MG

Telefone:(31)99904870

Email:

rejane.faria@ufv.br

Nome do Pesquisador/Licenciando: Leandro Pacheco Machado

Telefone: (32)984253322

Email: leandro.pacheco@ufv.br

Este projeto foi aprovado e autorizado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP/UFV) - CAAE: 75809723.7.0000.5153 - Número do Parecer: 6.574.880. Em caso de discordância ou irregularidades sob o aspecto ético desta pesquisa, o(a) senhor(a) poderá consultar o CEP/UFV que fica localizado no Edifício Arthur Bernardes, subsolo, Av. PH Rolfs, s/n – Campus Universitário, Viçosa/MG, CEP: 36570-900. Horário de Funcionamento: 08h às 12h e das 14h às 17h. Contatos: (31) 3612- 2316; cep@ufv.br e www.cep.ufv.br.

Viçosa - MG, ____/____/2024

Assinatura do responsável pelo aluno
Participante da Pesquisa

Leandro Pacheco Machado
Licenciando em Matemática UFV

Profa. Dra. Rejane Waiandt Schuwartz
de Carvalho de Faria
Pesquisadora Responsável