

ROBLÊDO MAK'S MIRANDA SETTE

O PRINCÍPIO DE EKELAND E O TEOREMA DE NASH-MOSER

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

S495p
2013

Sette, Roblêdo Mak's Miranda, 1985-

O princípio de Ekeland e o teorema de Nash-Moser :
Roblêdo Mak's Miranda Sette. – Viçosa, MG, 2013.
iii, 78f. : il. ; 29cm.

Orientador: Sandro Vieira Romero.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 77-78.

1. Banach, Espaços de. 2. Espaços lineares normalizados.
3. Análise funcional. 4. Convergência. 5. Teoria das medidas.

I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

II. Título.

CDD 22. ed. 515.732

ROBLEDO MAK'S MIRANDA SETTE

O PRINCÍPIO DE EKELAND E O TEOREMA DE NASH-MOSER

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2013.

Olivaine Santana de Queiroz

Anderson Luis Albuquerque de Araújo

Sandro Vieira Romero
(Orientador)

Transportai um punhado de terra todos os dias e fareis uma montanha.

Confúcio

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Sandro Vieira Romero pela seriedade e constante disposição em me ajudar, pelas dicas de livros, pela compreensão em meus momentos de dificuldade e principalmente por todo o conhecimento que adquiri estudando com ele; agradeço aos meus outros mestres que participaram de toda a minha formação desde o ensino mais básico; agradeço à minha família, em especial à minha mãe Angélica e minha irmã Thaliane por todo o suporte ao longo desse tempo; agradeço, e muito, aos colegas do mestrado que foram grandes companheiros ao longo desse crescimento, em particular à amiga Anna Paula Machado que sempre estudou comigo e que acredito ser uma das mais brilhantes pessoas que conheço; agradeço imensamente ao meu “irmão” Paulo Zanchetta(Pulim) que sempre foi e sempre será meu porto seguro; agradeço à Capes pelo suporte financeiro que recebi ao longo de todo esse tempo em minha pesquisa; por último e não menos importante, agradeço aos amigos que de um modo ou de outro contribuíram para que eu tivesse êxito em tudo que almejei.

Sumário

Resumo	3
Abstract	4
Introdução	5
1 O Princípio de Ekeland	7
1.1 Introdução	7
1.2 Formas Fraca e Forte do Princípio de Ekeland	9
1.3 Consequências Imediatas do Princípio de Ekeland	12
1.4 Caracterização de um Espaço Métrico Completo	13
2 Elementos de Análise Convexa	15
2.1 Introdução	15
2.2 A Derivada de Gâteaux	15
2.3 Conjuntos Convexos	16
2.4 Funcionais Convexos	16
2.5 O Subdiferencial de um Funcional Convexo	19
2.6 A Derivada Direcional Lateral de um Funcional Convexo	20
2.7 O Subdiferencial da Norma de um Espaço de Banach	26
3 Espaços Polinormados	28
3.1 Introdução	28

3.2	Seminormas e Espaços Polinormados	28
3.3	Topologia de um Espaço Polinormado	30
3.4	Espaços Localmente Convexos	32
3.5	Continuidade de Transformações Lineares	35
3.6	Famílias de Seminormas Equivalentes	36
3.7	Pseudométricas e Métricas	37
4	O Teorema de Nash-Moser	41
4.1	Introdução	41
4.2	Considerações Iniciais	41
4.3	Um Teorema de Função Inversa para Espaços de Banach	44
4.4	Uma Generalização do Teorema de Nash-Moser	46
	Apêndice	66
4.5	Introdução	66
4.6	A Integral de Daniell	66
4.7	O Teorema de Beppo-Levi	71
4.8	O Teorema da Convergência Monótona	72
4.9	O Lema de Fatou	72
4.10	O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue	73
4.11	A Integral de Daniell para Séries de Números Reais	74
4.12	Alguns Resultados para Séries	75
	Referências Bibliográficas	77

Resumo

SETTE, Roblêdo Mak's Miranda, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2013. **O Princípio de Ekeland e o Teorema de Nash-Moser.** Orientador: Sandro Vieira Romero.

Neste trabalho estudamos os Espaços de Fréchet e um teorema de função implícita para alguns desses espaços, obtido por Ekeland em 2011, e que inclui como caso particular o teorema de Nash-Moser. No início desse estudo apresentamos o princípio de Ekeland, que será uma ferramenta essencial na demonstração do teorema. Estudamos conceitos elementares de Análise Convexa e caracterizamos o subdiferencial da norma de um espaço de Banach. Essa caracterização será usada várias vezes na prova do resultado principal. Além disso, são usados três resultados da Teoria da Medida: o Lema de Fatou, o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Estes três resultados são empregados em suas versões para séries de números reais.

Abstract

SETTE, Roblêdo Mak's Miranda, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February of 2013. **O Princípio de Ekeland e o Teorema de Nash-Moser.** Advisor: Sandro Vieira Romero.

In this text we study the Fréchet spaces and an implicit function theorem for some of these spaces, obtained by Ekeland in 2011, and which includes as a special case the Nash-Moser theorem. At the beginning of this study we present the Ekeland's principle, which will be an essential tool in the proof of the theorem. We study elementary concepts of Convex Analysis and characterize the subdifferential of the norm of a Banach space. This characterization will be used repeatedly in the proof of the main result. Also, three results of the Theory of Measure are used: Fatou's Lemma, the Monotone Convergence Theorem and the Lebesgue's Dominated Convergence Theorem. These three results are employed in their versions for series of real numbers.

Introdução

Existem problemas na Física-Matemática que são equivalentes a existência de funções inversas em espaços de Fréchet. Problemas como esses, também existem na Geometria Diferencial. Por exemplo, para provar a existência de mergulhos isométricos de variedades riemannianas, Nash [11] usou uma técnica inovadora que Moser [10] reformulou como um teorema abstrato de Análise Funcional Não Linear. Sergeraert [18] esclareceu o contexto do teorema ao formular suas hipóteses em uma categoria de aplicações entre espaços de Fréchet. Utilizando todo o conhecimento acumulado até o início da década de oitenta do século XX, Hamilton [4] escreveu um longo tratado sobre o Cálculo em espaços de Fréchet e o Teorema de Nash-Moser que é utilizado na prova do teorema KAM [21], na resolução de problemas gravitacionais [6], no estudo de problemas de fronteira do eletromagnetismo [17] e na resolução de equações de evolução da Física-Matemática [13] e [14].

A demonstração usual do teorema de Nash-Moser é bastante trabalhosa e envolve um processo iterativo para sua convergência, o método de Newton para aproximar raízes. Em [7], podemos ver o enunciado bem como uma demonstração do teorema de Nash-Moser. Um componente essencial da demonstração é o uso de *operadores de suavização* [9], que são objetos que nem todos os espaços de Fréchet possuem. Em 2011, Ivar Ekeland [1], demonstrou um teorema de função implícita para espaços de Fréchet que inclui como caso particular o teorema de Nash-Moser. Nesta demonstração, Ekeland usa um resultado da Análise Variacional conhecido como **Princípio de Ekeland**. São usados também três resultados conhecidos da Teoria da Medida: o lema de Fatou, o teorema da convergência monótona e o teorema da convergência dominada de Lebesgue. Comparada ao texto clássico de Hamilton [5], a abordagem de Ekeland é mais simples, com hipóteses mais fracas e tese mais forte. Nessa nova demonstração também são usados alguns conceitos relativamente simples de análise convexa, como por exemplo, o subdiferencial de uma aplicação convexa, e algumas noções à respeito dos espaços de Fréchet.

O principal objetivo desta dissertação é o estudo da versão de Ekeland do Teorema de Nash-Moser, usado para garantir a existência de funções inversas entre espaços de Fréchet e com várias aplicações na Física-Matemática.

Segue uma breve descrição de cada capítulo:

No primeiro capítulo, demonstramos o princípio de Ekeland e apresentamos alguns

resultados clássicos que surgem naturalmente como consequências de sua validade. Mostramos ainda, que esse princípio é uma condição necessária e suficiente para a completeza de um espaço métrico.

No segundo capítulo, introduzimos alguns conceitos de Análise Convexa seguindo essencialmente [12]. O capítulo é essencialmente dedicado a demonstrar um importante resultado sobre a caracterização do subdiferencial da norma de um espaço de Banach.

O terceiro capítulo trata de espaços polinormados. Nesse capítulo, apresentamos vários resultados e introduzimos o conceito de espaços de Fréchet. Estudamos os aspectos topológicos dessa estrutura e mostramos critérios que ligam a topologia desse espaço à maneira mais natural de definir a convergência nesses espaços. A exposição segue basicamente [5]. Apresentamos alguns exemplos interessantes dessas estruturas que as diferenciam dos espaços normados. Caracterizamos os espaços polinormados metrizáveis e definimos a classe dos espaços de Fréchet.

No quarto capítulo, definimos alguns espaços particulares de Fréchet. De posse dessa nova estrutura, apresentamos o teorema de função implícita que foi descoberto por Ekeland em 2011. Mostramos também um teorema de função implícita para espaços de Banach com hipóteses mais fracas do que as versões clássicas desse tipo de teorema. A demonstração do resultado em espaços de Banach se assemelha à demonstração para esse teorema em espaços de Fréchet. Em ambos, há tanto o emprego do Princípio de Ekeland quanto o uso da caracterização do subdiferencial da norma em espaços de Banach. Mostramos alguns corolários e algumas sintetizações do teorema de função implícita para espaços de Fréchet que o tornam mais compreensível e mais aplicável. A demonstração desse teorema será dividida em três passos. Mas embora seja um pouco longa, é muito mais compreensível que as versões clássicas do teorema de Nash-Moser.

No apêndice se encontra uma maneira de abordar a Teoria da Medida. Introduzimos o conceito de funcional de Daniell e extendemos esse funcional para um espaço mais amplo, preservando as propriedades de uma integral. Esta parte segue as linhas gerais de [8] e [15]. Apresentamos ainda uma formulação da Teoria da Medida para séries e provamos os três resultados da Teoria da Medida que são usados na demonstração do teorema de função implícita para espaços de Fréchet.

Capítulo 1

O Princípio de Ekeland

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o *Princípio de Ekeland*, um resultado muito usado em análise convexa. Mostraremos que de posse desse teorema, podemos provar muitos outros teoremas conhecidos, como por exemplo o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Mostraremos ainda que a validade desse princípio em um espaço métrico é equivalente à sua completeza [19]. A essência da demonstração deste princípio está no *Teorema da Intersecção de Cantor*. Algumas vezes usaremos uma linguagem abusiva que não diferencia funções de funcionais. Os casos onde de fato esses conceitos não coincidem serão destacados pelo contexto. Começamos então por alguns resultados e definições que nos serão úteis:

Definição 1.1. Seja X um espaço topológico que é Hausdorff. Um funcional $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é dito ser **semicontínuo inferiormente**, ou abreviadamente **sci** se para todo $a \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\{x \in X \mid \Phi(x) > a\}$$

é aberto.

Teorema 1.1. *Sejam X um espaço Hausdorff compacto e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ um funcional sci. Então:*

- i) Φ é limitado inferiormente;*
- ii) O ínfimo de $\Phi(X)$ é alcançado em algum ponto $x_0 \in X$.*

Dem.:

i) Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$A_n = \{x \in X \mid \Phi(x) > -n\}$$

é aberto. Note ainda que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Pela compacidade de X , segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i = X.$$

Logo, $\Phi(x) > -n_0, \forall x \in X$.

ii) Seja $l = \inf_X \Phi$. Então, temos $l > -\infty$. Se l não fosse atingido, teríamos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid \Phi(x) > l + \frac{1}{n}\} = X.$$

Pela compacidade de X , segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_1} \{x \in X \mid \Phi(x) > l + \frac{1}{n}\}.$$

Ou seja, para todo $x \in X$, temos $\Phi(x) > l + \frac{1}{n_1}$. Mas isto contraria o fato de l ser a maior das cotas inferiores de $\Phi(X)$. ■

Definição 1.2. Um funcional $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é dito **sequencialmente semicontínuo inferiormente** se para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim x_n = x_0$ temos $\Phi(x_0) \leq \liminf \Phi(x_n)$.

Teorema 1.2.

- i) *Todo funcional semicontínuo inferiormente $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é sequencialmente semicontínuo inferiormente;*
- ii) *Se X satisfaz o Primeiro Axioma da Enumerabilidade, então todo funcional sequencialmente semicontínuo inferiormente é semicontínuo inferiormente.*

Dem.:

- i) Sejam $x_0 \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tais que $x_n \rightarrow x_0$.
Primeiro, suponhamos que $\Phi(x_0) < \infty$. Para cada $\varepsilon > 0$, considere o conjunto aberto $A_\varepsilon = \{x \in X \mid \Phi(x) > \Phi(x_0) - \varepsilon\}$. Como $x_0 \in A_\varepsilon$ e A_ε é um conjunto aberto,

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A_\varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Para esses valores de $n \geq n_0$, teremos $\Phi(x_n) > \Phi(x_0) - \varepsilon$, ou seja

$$\Phi(x_n) - \Phi(x_0) > -\varepsilon.$$

Portanto,

$$\liminf \Phi(x_n) \geq \Phi(x_0) - \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de ε , segue que $\Phi(x_0) \leq \liminf \Phi(x_n)$. Tratemos agora do caso $\Phi(x_0) = \infty$. Seja $A = \{x \in X \mid \Phi(x) > M\}$, para algum $M > 0$ arbitrário. Procedendo de forma similar alcançamos a conclusão desejada.

ii) Queremos provar que o conjunto

$$F = \{x \in X \mid \Phi(x) \leq a\}$$

é fechado. Suponha que isto não ocorresse. Então existe $x_0 \in \overline{F} - F$, ou seja, $\Phi(x_0) > a$. Seja $\mathcal{O}_n$ uma base enumerável de vizinhanças abertas de x_0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F \cap \mathcal{O}_n$ e logo $x_n \rightarrow x_0$. Como Φ é sequencialmente semicontínua inferiormente

$$\Phi(x_n) \leq a.$$

Concluimos que $\Phi(x_0) \leq a$. ■

Corolário 1.1. *Se X é um espaço métrico, então as duas definições dadas para um funcional semicontínuo inferiormente e sequencialmente semicontínuo inferiormente coincidem.*

Definição 1.3. Sejam $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $x_0 \in X$. Dizemos que Φ é semicontínuo inferiormente em x_0 se para todo $a \in \mathbb{R}$ com $a < \Phi(x_0)$ existe uma vizinhança aberta V de x_0 tal que $a < \Phi(x)$ para todo $x \in V$.

É fácil ver que um funcional semicontínuo inferiormente é semicontínuo inferiormente em todos os pontos. Reciprocamente, um funcional que é semicontínuo inferiormente em todos os pontos é semicontínuo inferiormente. Definições e afirmações semelhantes podem ser feitas para a continuidade inferior sequencial. De modo análogo se define semicontinuidade superior (scs) e valem propriedades análogas.

Observação: Note que se V^+ denota todos os funcionais scs e V^- denota todos os funcionais sci ambos sobre o mesmo conjunto X , então tanto V^+ quanto V^- são espaços vetoriais com relação as operações canônicas e ainda o conjunto $V = \mathcal{C}(X)$ das funções contínuas de X em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é tal que $V = V^+ \cap V^-$.

1.2 Formas Fraca e Forte do Princípio de Ekeland

Teorema 1.3 (Princípio de Ekeland - Forma Fraca). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional sci, não identicamente infinito e limitado inferiormente. Então existe $\bar{x} \in X$ tal que $\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + d(x, \bar{x})$ para todo $x \in X - \{\bar{x}\}$.*

Observação.: A partir da forma fraca, podemos deduzir diversas variantes do **Princípio Variacional de Ekeland**. A primeira e talvez uma das mais usadas é a seguinte: Adiciona-se à forma fraca dada anteriormente a seguinte hipótese: $\forall \varepsilon > 0$, seja $x_0 \in X$ tal que $\Phi(x_0) < \inf_X \Phi + \varepsilon$. Neste caso, é possível se obter um elemento $\bar{x} \in X$ tal que: $\Phi(\bar{x}) \leq \Phi(x_0)$ e ainda $\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$, para qualquer $x \in X$.

A forma fraca deste teorema é suficiente para demonstrar a forma forte.

Teorema 1.4 (Princípio de Ekeland - Forma Forte). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional *sci*, limitado inferiormente e não identicamente infinito. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\bar{x} \in X$ tal que $\Phi(\bar{x}) \leq \inf_X \Phi + \varepsilon$. Então, para cada $\lambda > 0$, existe $x_\lambda \in X$ tal que :*

- i) $\Phi(x_\lambda) \leq \Phi(\bar{x})$;
- ii) $d(x_\lambda, \bar{x}) \leq \lambda$;
- iii) $\Phi(x_\lambda) < \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda)$ para todo $x \neq x_\lambda$

Dem.:

O conjunto $Y = \{y \in X \mid \Phi(y) + d(x_0, y) \leq \Phi(x_0)\}$ é fechado em X , pois $d(x_0, \cdot)$ é contínuo e por conseguinte, $X - Y = \{y \in X \mid \Phi(y) + d(x_0, y) > \Phi(x_0)\}$ é aberto em X . Logo, com a métrica induzida de X , Y também é um espaço métrico completo. Aplicando a forma fraca para este espaço, concluímos que existe $\bar{x} \in Y$ tal que $\Phi(\bar{x}) < \Phi(y) + d(y, \bar{x})$ qualquer que seja $y \in Y - \{x_0\}$ e ainda $\Phi(\bar{x}) + d(\bar{x}, x_0) \leq \Phi(x_0)$. Em particular temos: $|\Phi(\bar{x}) - \Phi(x_0)| \leq \varepsilon$, pois se não fosse assim, teríamos $\inf_X \Phi + \varepsilon > \Phi(x_0) > \varepsilon + \Phi(\bar{x})$ e por conseguinte $\Phi(\bar{x}) < \inf_X \Phi$. Esta contradição nos conduz à nossa tese. Note agora que $|\Phi(x_0) - \Phi(\bar{x})| = d(x_0, \bar{x}) \leq \varepsilon$. Aplicando o último resultado para a métrica $\gamma.d$, com $\gamma > 0$, obtemos a forma forte com x_0 tomado como $\bar{x}$ e $\bar{x}$ tomado como x_λ . ■

Provemos agora a **forma fraca do Princípio de Ekeland**

Como $\inf_X \Phi > -\infty$, existe $x_0 \in X$ tal que $\Phi(x_0) < \inf_X \Phi + 1$. Construiremos uma sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ e uma cadeia decrescente de subconjuntos fechados $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de X através do seguinte procedimento recursivo: suponha que x_j seja conhecido. Defina então $S_j := \{x \in X \mid \Phi(x_j) \geq \Phi(x) + d(x, x_j)\}$ e tome então x_{j+1} como sendo o elemento de S_j que satisfaz

$$\Phi(x_{j+1}) < \inf_{S_j} \Phi + \frac{1}{j+1}.$$

Obviamente, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $S_j \neq \emptyset$, pois $x_j \in S_j$. Como $\Phi(\cdot) + d(\cdot, x_j)$ é uma aplicação *sci*, então cada S_j é fechado. Mostremos agora que para cada $j = 0, 1, 2, \dots$ temos $S_{j+1} \subset S_j$. De fato, fixado $j \in \mathbb{N}$, seja $x \in S_{j+1}$. Usando a desigualdade triangular, $x \in S_{j+1}$ e que $x_{j+1} \in S_j$, obtemos

$$\Phi(x) + d(x, x_j) \leq \Phi(x) + d(x, x_{j+1}) + d(x_j, x_{j+1}) \leq \Phi(x_{j+1}) + d(x_{j+1}, x_j) \leq \Phi(x_j).$$

Isto mostra que $x \in S_j$. Portanto, $S_{j+1} \subset S_j$ como desejávamos mostrar. Além disso, $\text{diam}(S_j) \leq \frac{2}{j}$, para $j = 1, 2, 3, \dots$. Com efeito, escolhido $j \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, seja $x \in S_j$.

Sabemos que $x \in S_{j-1}$. Como $\Phi(x_j) < \inf_{S_j} \Phi + \frac{1}{j}$, então

$$d(x, x_j) \leq \Phi(x_j) - \Phi(x) \leq \Phi(x_j) - \inf_{S_{j-1}} \Phi < \frac{1}{j}.$$

Como $d(x, y) \leq d(x, x_j) + d(y, x_j) < \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$, então de fato temos $\text{diam}(S_j) \leq \frac{2}{j}$. Aplicando o *Teorema de Intersecção de Cantor*, concluímos que

$$\bigcap_{i \geq 1} S_i = \{\bar{x}\}$$

com $\bar{x} \in X$. Vamos agora provar que

$$\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + d(x, \bar{x})$$

para todo $x \neq \bar{x}$.

De fato, se isto não ocorresse teríamos, para algum $x \in X - \{\bar{x}\}$, $\Phi(\bar{x}) - d(x, \bar{x}) \geq \Phi(x)$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos:

$$\Phi(x) + d(x, \bar{x}) \leq \Phi(\bar{x}) \leq \Phi(x_j) - d(\bar{x}, x_j)$$

e portanto,

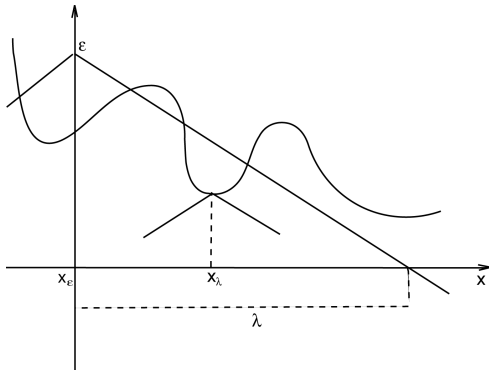
$$\Phi(x) \leq \Phi(x_j) - d(x, \bar{x}) - d(\bar{x}, x_j) \leq \Phi(x_j) - d(x, x_j)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$x \in \bigcup_{i \geq 0} S_i = \{\bar{x}\}.$$

No entanto, $x \neq \bar{x}$. Esta contradição conclui nossa afirmação. ■

O princípio de Ekeland possui interpretações geométricas interessantes. Vale destacar uma delas:



O cone superior que tem geratriz de inclinação $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ pode ser movido para uma posição tal que seu vértice seja o único ponto de intersecção com o gráfico da função. Este movimento é feito fazendo-se uma translação horizontal seguida de uma translação vertical até fazer com que o vértice coincida com o ponto formado por x_λ e sua imagem pela função. Isto nos diz que a região interna ao cone é uma região que fica “isolada” do gráfico da função.

1.3 Consequências Imediatas do Princípio de Ekeland

Teorema 1.5 (Teorema do Ponto Fixo de Caristi). *Seja ψ uma aplicação de um espaço métrico completo X em si mesmo. Se para todo $x \in X$ tem-se $d(x, \psi(x)) \leq \Phi(x) - \Phi(\psi(x))$, para algum funcional Φ sci e limitado inferiormente, então ψ tem um ponto fixo.*

Dem.:

Pela forma fraca do *Princípio de Ekeland*, existe $\bar{x} \in X$ tal que $\Phi(\bar{x}) < \Phi(x) + d(x, \bar{x})$, para todo $x \in X - \{\bar{x}\}$. Mas pela hipótese do teorema, $\Phi(\bar{x}) \geq \Phi(\psi(\bar{x})) + d(\bar{x}, \psi(\bar{x}))$. Portanto, $\psi(\bar{x})$ não pertence a $X - \{\bar{x}\}$, ou seja, $\psi(\bar{x}) = \bar{x}$. ■

Teorema 1.6 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja (X, d) um espaço métrico completo, e seja $\psi : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(\psi(x), \psi(y)) \leq kd(x, y)$ para todos $x, y \in X$ e $0 \leq k < 1$. Então ψ tem um ponto fixo.*

Dem.:

De fato, definindo $\Phi(x) = \frac{1}{1-k}d(x, \psi(x))$, as condições do teorema anterior são satisfeitas e portanto, ψ tem um ponto fixo. ■

Teorema 1.7 (Teorema da Existência de Takahashi). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sci, limitado inferiormente. Suponha que para todo $x \in X$ satisfazendo $\Phi(x) > \inf_X \Phi$, exista $y \in X - \{x\}$ tal que $\Phi(y) < \Phi(x) - d(x, y)$. Então Φ possui um mínimo.*

Dem.:

Vamos supor que a afirmação seja falsa, ou seja, que para todo $x \in X$, tivéssemos $\Phi(x) > \inf_X \Phi$. Então, para todo $x \in X$, existe $y_x \in X - \{x\}$ tal que $\Phi(y_x) < \Phi(x) - d(x, y_x)$. Pelo *Princípio Variacional de Ekeland*, existe $\bar{x} \in X$ tal que $\Phi(\bar{x}) < \Phi(z) + d(z, \bar{x})$, para todo $z \in X - \{\bar{x}\}$. Como $\bar{x} \neq y_{\bar{x}}$, então fazendo $y_{\bar{x}} = z$, temos $\Phi(\bar{x}) < \Phi(y_{\bar{x}}) + d(y_{\bar{x}}, \bar{x}) < \Phi(\bar{x}) - d(\bar{x}, y_{\bar{x}}) + d(y_{\bar{x}}, \bar{x}) = \Phi(\bar{x})$, ou seja, $\Phi(\bar{x}) < \Phi(x)$. ■

1.4 Caracterização de um Espaço Métrico Completo

Mostraremos agora, que a completeza do espaço métrico (X, d) é equivalente à validade do Princípio de Ekeland neste espaço como mostrado por *Sullivan* [19].

Teorema 1.8. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então X é completo se, e somente se todo funcional contínuo $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, não identicamente infinito, limitado inferiormente e para todo $\varepsilon > 0$, existe um ponto $v \in X$ satisfazendo:*

$$i) \quad F(v) \leq \inf_M F + \varepsilon;$$

$$ii) \quad F(w) + \varepsilon d(v, w) > F(v), \quad \forall w \neq v.$$

Dem.:

A direção “somente se” segue imediatamente do Princípio de Ekeland. Para a recíproca, assumamos que (X, d) é um espaço métrico arbitrário em que valem as hipóteses *i)* e *ii)* do teorema. Seja $(y_n) \subset X$ uma sequência de Cauchy. Devemos mostrar que (y_n) tem limite em X . Considere o funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x).$$

Mostremos que F é contínuo. De fato, seja $(x_m) \subset X$ tal que $x_m \rightarrow x \in X$. É suficiente mostrar que $F(x_m) \rightarrow F(x)$. Para cada par, $m, n \in \mathbb{N}$, valem:

$$0 \leq d(x_m, y_n) \leq d(x_m, x) + d(y_n, x) \tag{1.1}$$

e

$$0 \leq d(y_n, x) \leq d(y_n, x_m) + d(x_m, x) \tag{1.2}$$

Fixando m e tomando o limite com $n \rightarrow \infty$ em (1.1) e (1.2), temos:

$$|F(x_m) - F(x)| \leq d(x_m, x).$$

Consequentemente, $F(x_m) \rightarrow F(x)$, e portanto, F é contínuo.

Note que F é limitado inferiormente por 0. Mostremos que, com mais efeito, $\inf_X F = 0$.

De fato, suponhamos que $\inf_X F = c > 0$. Como (y_n) é de Cauchy, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N_0$, tem-se $d(y_m, y_n) < \frac{c}{2}$. Daí, $F(y_m) < \frac{c}{2}$. Mas isto contraria o fato de c ser uma cota inferior de F . Logo, tem-se $\inf_X F = 0$.

Para mostrar que X é completo, devemos mostrar que F tem um mínimo em algum $v \in X$, ou seja $F(v) = 0$.

Fixemos então um número $0 < \varepsilon < 1$.

De *i*) e *ii*), existe $v \in X$ com $F(v) \leq \varepsilon$ e $F(w) + \varepsilon d(v, w) > F(v)$, $\forall w \neq v$.

Fixando $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$d(v, w) \leq d(y_n, v) + d(y_n, w). \quad (1.3)$$

Tomando o limite com $n \rightarrow \infty$ em (1.3), temos:

$$d(v, w) \leq F(v) + F(w).$$

Dado $\eta > 0$ qualquer, é possível se escolher $w \in X$ tal que $F(w) \leq \eta$.

De fato, como (y_n) é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que se $m, n \geq N$, então $d(y_n, y_m) < \eta$.

Seja então, $w = y_{N+1}$. Então

$$F(w) = F(y_{N+1}) < \eta.$$

Portanto, tomando-se o limite com $n \rightarrow \infty$ em (1.3) temos:

$$d(v, w) \leq F(v) + F(w) \leq \varepsilon + \eta.$$

Da condição *ii*), para $w = y_{N+1}$, temos:

$$F(v) < F(w) + \varepsilon d(w, v) \leq \eta + \varepsilon(\varepsilon + \eta) = \eta + \varepsilon^2 + \varepsilon\eta.$$

Pela arbitrariedade de $\eta > 0$, segue que $F(v) \leq \varepsilon^2$.

Repetindo-se esse mesmo argumento com outro elemento w' conveniente, conclui-se que $F(v) \leq \varepsilon^3$.

Como o processo pode ser repetido indefinidamente, concluímos que ao final de k repetições temos $F(v) \leq \varepsilon^k$ e consequentemente, $F(v) = 0$, como queríamos. Tem-se deste modo que $y_n \rightarrow v$ e portanto, X é completo. ■

Capítulo 2

Elementos de Análise Convexa

2.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos conceitos e apresentaremos resultados que nos serão muito úteis. Faremos um tratamento sobre subdiferenciais de funções convexas e estaremos em condições de descrever os subgradientes de algumas dessas funções. Este capítulo segue basicamente [12].

2.2 A Derivada de Gâteaux

Definição 2.1. Sejam X um espaço vetorial normado, X^* o seu espaço dual topológico, $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in X^*$. Dizemos que p é a derivada de Gâteaux de Φ em x se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + hv) - \Phi(x) - \langle p, hv \rangle}{h} = 0,$$

qualquer que seja $v \in X$. Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle v, p \rangle = p(v)$.

A derivada p também é chamada de *gradiente* de Φ e é indicada por Φ' ou $\nabla \Phi$. Se Φ for diferenciável segundo *Fréchet* ela também será diferenciável segundo *Gâteaux* e as derivadas das duas definições coincidirão. Contudo, a existência da derivada de Gâteaux não garante sequer a continuidade de Φ .

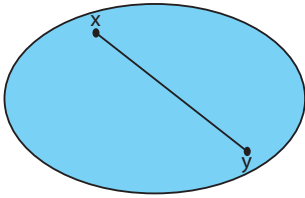
2.3 Conjuntos Convexos

Definição 2.2. Um subconjunto C de um espaço vetorial é dito **convexo** se, para quaisquer $x, y \in X$ o segmento de reta

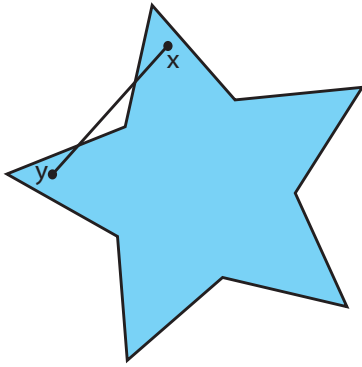
$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$$

está contido em C .

Exemplo de Conjunto Convexo:



Exemplo de Conjunto Não Convexo:



2.4 Funcionais Convexos

Definição 2.3. Seja X um espaço vetorial. Um funcional $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dito convexo se

$$\Phi((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)\Phi(x) + t\Phi(y)$$

para cada $t \in [0, 1]$.

O conjunto $\text{Dom}(\Phi) = \{x \in X \mid \Phi(x) \in \mathbb{R}\}$ é chamado de **Domínio Efetivo de Φ** . O funcional é dito *estritamente convexo* se a desigualdade da definição é estrita com

$x, y \in \text{Dom}(\Phi)$, $x \neq y$ e ainda $t \in (0, 1)$. É óbvio que as desigualdades acima só precisam ser verificadas quando $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$ são finitos. Também é óbvio que $\text{Dom}(\Phi)$ é um subconjunto convexo de X sempre que Φ for convexo.

Assim, dizemos que $\Phi : \text{Dom}(\Phi) \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo (ou estritamente convexo) se as desigualdades relevantes são satisfeitas para $x, y \in \text{Dom}(\Phi)$.

O **Epígrafo** do funcional Φ é o subconjunto de $X \times \mathbb{R}$ definido por

$$\text{Epi}(\Phi) = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} \mid \Phi(x) \leq a\}.$$

Teorema 2.1. *Seja, X um espaço vetorial e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. O funcional Φ é convexo se e somente se, $\text{Epi}(\Phi)$ é um conjunto convexo.*

Dem.:

Seja $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional convexo. Dados $(x_1, a_1), (x_2, a_2) \in \text{Epi}(\Phi)$ e $t \in [0, 1]$, temos:

$$\Phi(x_1) \leq a_1 \text{ e } \Phi(x_2) \leq a_2. \text{ Como } \Phi \text{ é convexo,}$$

$$\Phi((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)\Phi(x_1) + t\Phi(x_2) \leq (1-t)a_1 + ta_2.$$

Logo,

$$((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)a_1 + ta_2) = (1-t)(x_1, a_1) + t(x_2, a_2) \in \text{Epi}(\Phi).$$

Portanto, $\text{Epi}(\Phi)$ é convexo.

Reciprocamente, seja $\text{Epi}(\Phi)$ um conjunto convexo. Dados $x_1, x_2 \in X$ e $0 \leq t \leq 1$, temos: $(x_1, \Phi(x_1)), (x_2, \Phi(x_2)) \in \text{Epi}(\Phi)$. Desse modo,

$$(1-t)(x_1, \Phi(x_1)) + t(x_2, \Phi(x_2)) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)\Phi(x_1) + t\Phi(x_2)) \in \text{Epi}(\Phi),$$

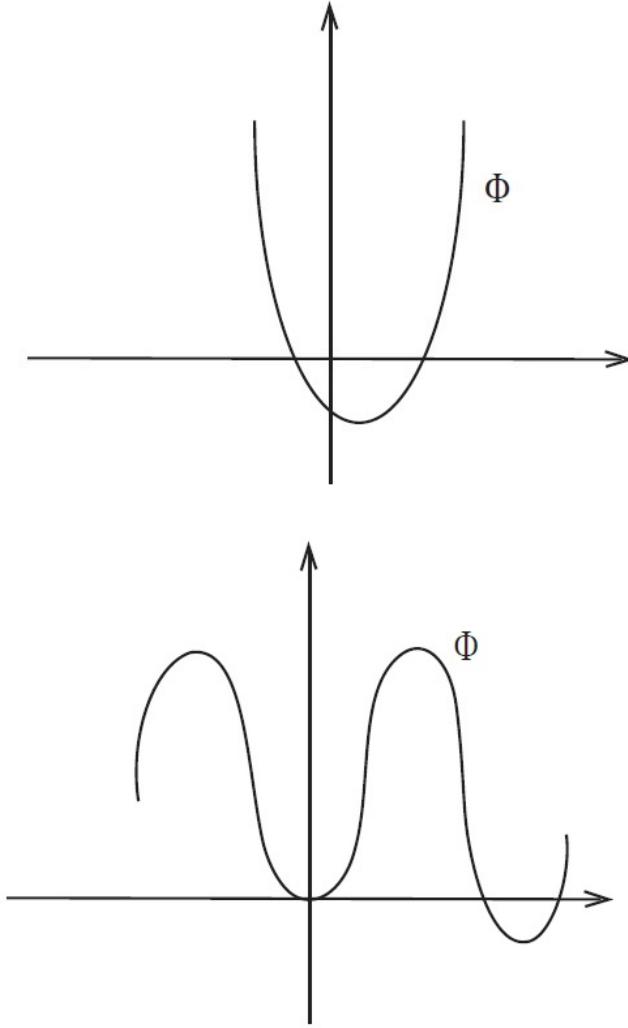
ou seja,

$$\Phi((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)\Phi(x_1) + t\Phi(x_2)$$

e portanto, Φ é convexo. ■

Exemplo de Funcional Convexo:

Exemplo de Funcional Não Convexo:



Proposição 2.1. *Seja $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexo. Se Φ é contínuo em $x_0 \in \text{Dom}(\Phi)$ então existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq M \cdot \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in B(x_0; \delta).$$

Dem.:

Como Φ é contínuo em x_0 , então ele é localmente limitado neste ponto; ou seja, existem $M_1 > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|\Phi| \leq M_1$ em $B(x_0, 2\delta)$. Dados $x, y \in B(x_0, \delta)$, sejam $\lambda = \|x - y\|$ e $z = y + \frac{\delta}{\lambda}(y - x)$. Como

$$\|z - x_0\| = \|y - x_0 + \frac{\delta}{\lambda}(y - x)\| \leq \|y - x_0\| + \frac{\delta}{\lambda} \|y - x\| \leq \delta + \delta = 2\delta.$$

Então $z \in B(x_0; 2\delta)$. Já que

$$y = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} z + \frac{\delta}{\lambda + \delta} x$$

é uma combinação convexa de z e x (contida em $B(x_0; 2\delta)$)
então, pela convexidade de Φ ,

$$\Phi(y) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \Phi(z) + \frac{\delta}{\lambda + \delta} \Phi(x)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \Phi(y) - \Phi(x) &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \Phi(z) + \left(\frac{\delta}{\lambda + \delta} - 1 \right) \Phi(x) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} (\Phi(z) - \Phi(x)) \leq \frac{\lambda}{\delta} \cdot 2M_1 = \frac{\|x - y\|}{\delta} \cdot 2M_1 \end{aligned}$$

Trocando x e y obtemos o resultado desejado, com $M = \frac{2M_1}{\delta}$. ■

2.5 O Subdiferencial de um Funcional Convexo

Definição 2.4. Sejam X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional convexo. O subdiferencial de Φ é a aplicação

$$\partial\Phi : X \rightarrow 2^{X^*} \text{ dada por}$$

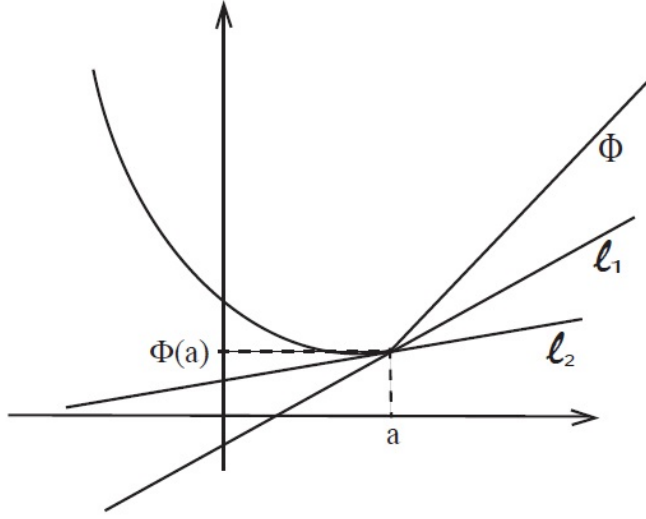
$$\partial\Phi(a) = \{\ell \in X^* \mid \Phi(y) \geq \Phi(a) + \langle \ell, y - a \rangle, \text{ para todo } y \in X\}.$$

Os elementos de $\partial\Phi(a)$ são chamados de subgradientes de Φ em X . Nada impede que, para algum $a \in X$, $\partial\Phi(a)$ seja vazio. Este caso se $a \notin \text{Dom}(\Phi)$ ou Φ não é própria.

$$\Phi(a) + \langle \ell_1, y - a \rangle$$

$$\Phi(a) + \langle \ell_2, y - a \rangle$$

ℓ_1 e ℓ_2 são subgradientes de Φ em a . Geometricamente, o subgradiente são os funcionais que dividem o plano em duas partes de modo que eles coincidem com a função em um único ponto e de um lado do plano determinado por este funcional está todo o gráfico da função e do outro, nenhuma parte deste.



2.6 A Derivada Direcional Lateral de um Funcional Convexo

Seja Φ um funcional convexo e $x_0 \in \text{Dom}(\Phi)$. Para cada $y \in X$, a derivada direcional à direita de Φ em x_0 é:

$$\Phi'_+(x_0; y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x_0 + ty) - \Phi(x_0)}{t}.$$

Seja $\varphi(t) := \Phi(x_0 + ty)$. É óbvio que

$$\varphi'_+(0) = \Phi'_+(x_0; y).$$

Logo para provar que existe a derivada direcional à direita de Φ em x_0 basta mostrar que existe

$$\varphi'_+(0).$$

É possível mostrar que φ é convexa, com $0 \in \text{Dom}(\varphi)$. Sejam $t_1 \geq t_2 > 0$. Logo, existe $\lambda \in (0, 1]$, tal que $t_2 = \lambda t_1 = (1 - \lambda)0 + \lambda t_1$. Pela convexidade de φ ,

$$\varphi(t_2) \leq (1 - \lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(t_1)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t_2) - \varphi(0)}{t_2} &\leq \frac{(1 - \lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(t_1) - \varphi(0)}{t_2} \\ &= \frac{\lambda(\varphi(t_1) - \varphi(0))}{t_2} = \frac{\lambda(\varphi(t_1) - \varphi(0))}{\lambda t_1} = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(0)}{t_1}. \end{aligned}$$

Assim a função $\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ é monótona quando $t \rightarrow 0^+$. Logo, se ela é limitada o resultado é um número real. Caso contrário é $\pm\infty$.

Observação.: O argumento acima também mostra que

$$\Phi'_+(x_0; y) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(x_0 + ty) - \Phi(x_0)}{t}$$

Proposição 2.2. *Se $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}\Phi)$ então para cada $y \in X$ a derivada direcional à direita $\Phi'_+(x_0; y)$ é um número real e*

$$\Phi'_+(x_0)(y) = \Phi'_+(x_0; y)$$

define um funcional sublinear de X .

Dem.:

Seja $\psi(t) = \Phi(x_0 - ty)$. Se $t_1 \geq t_2 > 0$ então

$$\frac{\psi(t_2) - \psi(0)}{t_2} \leq \frac{\psi(t_1) - \psi(0)}{t_1},$$

ou seja,

$$-\frac{\psi(t_2) - \psi(0)}{t_2} \geq -\frac{\psi(t_1) - \psi(0)}{t_1}.$$

Logo,

$$-\left[\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \right]$$

é não crescente conforme $t \rightarrow 0^+$, enquanto que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

é não decrescente.

Devido à convexidade de Φ , temos:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - 2ty) + \frac{1}{2}(x_0 + 2ty)$$

$$\Phi(x_0) \leq \frac{1}{2}\Phi(x_0 - 2ty) + \frac{1}{2}\Phi(x_0 + 2ty).$$

Daí,

$$2\Phi(x_0) \leq \Phi(x_0 - 2ty) + \Phi(x_0 + 2ty) - \Phi(x_0 - 2ty) + \Phi(x_0)$$

$$\leq \Phi(x_0 + 2ty) - \Phi(x_0) - \frac{[\psi(2t) - \psi(0)]}{2t} \leq \frac{[\varphi(2t) - \varphi(0)]}{2t}.$$

Como $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}\Phi)$ então para todo $0 \neq t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ os valores envolvidos na

desigualdade acima são números reais. Assim, se $t_1 \geq t_2 > 0$, então

$$-\frac{[\psi(2t_1) - \psi(0)]}{2t_1} \leq -\frac{[\psi(2t_2) - \psi(0)]}{2t_2} \leq \frac{\psi(2t_2) - \psi(0)}{2t_2} \leq \frac{\psi(2t_1) - \psi(0)}{2t_1}$$

Logo o limite de

$$-\frac{[\psi(t) - \psi(0)]}{t},$$

para $t \rightarrow 0^+$, é um número real, o mesmo ocorrendo com o limite de

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}$$

para $t \rightarrow 0^+$.

Como o primeiro limite é $-\Phi'_+(x_0; -y)$ então:

$$-\Phi'_+(x_0; -y) \leq \Phi'_+(x_0; y).$$

$\Phi'_+(x_0)(y)$ é positivamente homogêneo pois; para $s > 0$:

$$\begin{aligned} \Phi'_+(x_0)(sy) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x_0 + t(sy)) - \Phi(x_0)}{t} = s \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x_0 + (ts)y) - \Phi(x_0)}{st} \\ &= s \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x_0 + ry) - \Phi(x_0)}{r} = s \cdot \Phi'_+(x_0)(y), \end{aligned}$$

onde $r = st$.

Para mostrar a subaditividade usamos novamente que Φ é convexo como segue:

$$\Phi(x_0 + t(y + z)) = \Phi\left(\frac{1}{2}(x_0 + 2ty) + \frac{1}{2}(x_0 + 2tz)\right) \leq \frac{1}{2}\Phi(x_0 + 2ty) + \frac{1}{2}\Phi(x_0 + 2tz),$$

ou seja,

$$\Phi(x_0 + t(y + z)) - \Phi(x_0) \leq \frac{1}{2}\left[\Phi(x_0 + 2ty) - \Phi(x_0)\right] + \frac{1}{2}\left[\Phi(x_0 + 2tz) - \Phi(x_0)\right].$$

Se $t > 0$:

$$\frac{\Phi(x_0 + t(y + z)) - \Phi(x_0)}{t} \leq \left[\frac{\Phi(x_0 + 2ty) - \Phi(x_0)}{2t}\right] + \left[\frac{\Phi(x_0 + 2tz) - \Phi(x_0)}{2t}\right].$$

Tomando o limite para $t \rightarrow 0^+$, temos:

$$\Phi'_+(x_0)(y + z) \leq \Phi'_+(x_0)(y) + \Phi'_+(x_0)(z).$$

É óbvio que Φ é diferenciável no sentido de Gâteaux em x_0 se, e somente se,

$$\Phi'_-(x_0; y) = -\Phi'_+(x_0; -y) = \Phi'_+(x_0; y)$$

para cada $y \in X$. Como um funcional sublinear p é linear se, e somente se,

$$p(-x) = -p(x)$$

para todo $x \in X$, então Φ é diferenciável no sentido de Gâteaux em x_0 , se, e somente se

$$y \rightarrow \Phi'_+(x_0)(y)$$

é linear em y . ■

Proposição 2.3. *Se Φ é um funcional convexo e contínuo em $x_0 \in \text{Dom}(\Phi)$, então $\partial\Phi(x_0)$ é um fraco-* compacto.*

Dem.:

Sabemos que $\partial\Phi(x_0)$ é fraco-* fechado. Pelo *Teorema de Banach-Alaoglu*, basta provar que ele é limitado para obter a conclusão desejada. Como Φ é contínua em x_0 , ela é localmente lipschitziana em x_0 , ou seja, existem $M > 0$ e U vizinhança de x_0 , de modo que

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq M \|x - y\|; \forall x, y \in U.$$

Se $x \in U$ e $\ell \in \partial\Phi(x)$, então para todo $y \in U$, temos:

$$\langle \ell, y - x \rangle \leq \Phi(y) - \Phi(x) \leq M \|y - x\|,$$

o que implica que

$$\left\langle \ell, \frac{y - x}{\|y - x\|} \right\rangle \leq M$$

e por conseguinte, $\|\ell\| \leq M$. ■

Proposição 2.4. *Seja $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional convexo. Se Φ é contínuo em $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(\Phi))$ então $\Phi'_+(x_0)$ é um funcional sublinear contínuo em X , e portanto $\Phi'(x_0)$ (quando existe) é um funcional linear contínuo.*

Dem.:

Dado $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}\Phi)$, como Φ é contínuo em x_0 , existem uma vizinhança B de x_0 e $M > 0$ de modo que

$$\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) \leq M.t \|x\|,$$

desde que $t > 0$ seja pequeno o bastante para que $x_0 + tx \in B$. Logo, para todo $x \in X$,

$$\Phi'_+(x_0)(x) \leq M \|x\|,$$

o que mostra que

$$\Phi'_+(x_0)$$

é contínuo. Note que dados $x^* \in X^*$ e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexo e $x_0 \in \text{Dom}\Phi$, a condição:

(i) $\langle x^*, x - x_0 \rangle \leq \Phi(x) - \Phi(x_0), x \in X$ é equivalente a

(ii) $\langle x^*, y \rangle \leq \Phi'_+(x_0; y), y \in X$, pois dado (i) temos:

$$\langle x^*, (x_0 + ty) - x_0 \rangle = t\langle x^*, y \rangle \leq \Phi(x_0 + ty) - \Phi(x_0),$$

para $t > 0$, o que implica (ii).

Por outro lado, assumindo que x^* satisfaça (ii), definimos $y = x - x_0$ de modo que

$$(1) \quad \begin{aligned} \langle x^*, x - x_0 \rangle &\leq \Phi'_+(x_0; x - x_0) \\ &\leq \frac{\Phi(x_0 + t(x - x_0)) - \Phi(x_0)}{t}, \text{ para todo } t > 0. \end{aligned}$$

Para $t = 1$, temos (i). ■

Proposição 2.5. *Seja $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ contínuo em $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}\Phi)$. Então Φ é derivável no sentido de Gâteaux se e somente se $\partial\Phi(x_0)$ é um conjunto unitário.*

Dem.:

($\Rightarrow$) Seja Φ diferenciável no sentido de Gâteaux. Como $\Phi'(x_0; y) = \Phi'_+(x_0; y)$, então pela inequação (1) da observação anterior, temos para $t = 1$.

$$\Phi'(x_0)(x - x_0) \leq \Phi(x) - \Phi(x_0),$$

ou seja,

$$\Phi'(x_0) \in \partial\Phi(x_0).$$

Além disso, se

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \leq \Phi(x) - \Phi(x_0), x \in X,$$

então

$$\langle x^*, y \rangle \leq \Phi'_+(x_0)(y)$$

mas

$$\Phi'_+(x_0)(y) = \Phi'(x_0)(y), \forall y \in X.$$

Logo:

$$\langle x^* - \Phi'(x_0), y \rangle \leq 0; y \in X.$$

Mas a desigualdade estrita acima é impossível pois teríamos para algum y :

$$\langle x^* - \Phi'(x_0), y \rangle < 0$$

e portanto:

$$-\langle x^* - \Phi'(x_0), y \rangle > 0$$

ou ainda

$$\langle x^* - \Phi'(x_0), -y \rangle > 0.$$

Logo, pela condição de dualidade,

$$x^* = \Phi'(x_0).$$

($\Leftarrow$) Seja agora x^* o único elemento de $\partial\Phi(x_0)$, ou seja, x^* é o único elemento de X^* que satisfaz

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \leq \Phi(x) - \Phi(x_0)$$

o que equivale a dizer que x^* é o único elemento de X^* tal que

$$\langle x^*, y \rangle \leq \Phi'_+(x_0)(y); \forall y \in X.$$

Basta usar o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam X um espaço normado e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear contínuo de modo que Φ domina um único funcional linear f . Nessas condições, Φ é linear e ainda, $\Phi = f$.*

Dem.: Sejam Φ e f nas condições do enunciado. Suponha que f não coincida com Φ , ou seja, existe $a \in X$ tal que $f(a) < \Phi(a)$. Nestas condições, $a \neq 0$ pois em 0 f coincide com Φ . Assim, seja $M = \langle a \rangle$. Seja ainda $b = \frac{\Phi(a) + f(a)}{2}$. Note que $f(a) < b < \Phi(a)$.

Defina agora o funcional linear g sobre M dado por $g(\lambda a) = \lambda b$. Como $\Phi(a) > g(a) > f(a)$, segue que $g \neq f|_M$.

Observe agora que se $\lambda \geq 0$ então $\Phi(\lambda a) > g(\lambda a) > f(\lambda a)$. Ou seja, se $\lambda \geq 0$ então g é dominado por Φ . Se $\lambda < 0$, como $g(a) > f(a)$, temos $\lambda g(a) < \lambda f(a)$ o que equivale a $g(\lambda a) < f(\lambda a)$. No entanto, f é dominada por Φ em X . Então, podemos escrever $g(\lambda a) < \Phi(\lambda a)$. Isto mostra que o funcional linear g sobre M é dominado pela restrição de Φ ao subespaço M . Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos estender g a um funcional G , de modo que $\|G\| = \|g\|$ e que ainda é dominado por Φ em X . Já que $g(a) > f(a)$, segue que $G \neq f$. Portanto, conseguimos obter um funcional linear G , distinto de f , que ainda é dominado por Φ . Mas isto contradiz a propriedade de Φ de dominar apenas f . Logo, temos $\Phi = f$. ■

2.7 O Subdiferencial da Norma de um Espaço de Banach

Proposição 2.6. *Seja X um espaço de Banach. O subdiferencial da norma deste espaço na origem coincide com a bola unitária fechada de X^* .*

Se $x \neq 0$ então

$$\partial \| \cdot \| (x) = \partial \| x \| = \{x^* \in X^* \mid \| x^* \|_{X^*} = 1, \langle x^*, x \rangle = \| x \| \}$$

Dem.:

Temos que $\| 0 \| = 0$, de modo que

$$\| y \| \geq \| 0 \| + \langle x^*, y - 0 \rangle$$

é equivalente a

$$\| x^* \|_{X^*} \leq 1,$$

pois

$$\langle x^*, y \rangle = x^*(y) < |x^*(y)| \leq \| x^* \|_{X^*} \| y \| \quad e \quad \sup_{\| y \| = 1} |x^*(y)| = \| x^* \|_{X^*}$$

Seja agora $x \neq 0$. Se $\| x^* \|_{X^*} = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = \| x \|$, então para qualquer $y \in X$:

$$\| y \| \geq \langle x^*, y \rangle$$

e portanto

$$\| y - x \| \geq \| y \| - \| x \| \geq \langle x^*, y - x \rangle;$$

ou seja,

$$x^* \in \partial \| \cdot \| (x).$$

Por outro lado, se $x^* \in \partial \| \cdot \| (x)$ então

$$\begin{cases} -\| x \| = \| 0 \| - \| x \| & \geq \langle x^*, 0 - x \rangle = -\langle x^*, x \rangle \\ \| x \| = \| 2x \| - \| x \| & \geq \langle x^*, 2x - x \rangle = \langle x^*, x \rangle \end{cases}$$

Assim, $\| x \| = \langle x^*, x \rangle$.

Além disso, para todo $y \in X$ e $\lambda > 0$

$$\| \lambda y + x \| - \| x \| \geq \langle x^*, \lambda y \rangle,$$

ou seja,

$$\left\| y + \frac{1}{\lambda} x \right\| - \frac{\| x \|}{\lambda} \geq \langle x^*, y \rangle.$$

Para $\lambda \rightarrow \infty$, obteremos

$$\|y\| \geq \langle x^*, y \rangle$$

e portanto

$$\|x^*\|_{X^*} \leq 1.$$

Como

$$\langle x^*, x \rangle = \|x\| \quad e$$

$$x^* \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = 1,$$

então

$$\|x^*\|_{X^*} = 1.$$

■

Proposição 2.7. $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo e contínuo em x_0 então, para todo $y \in X$,

$$\Phi'_+(x_0; y) = \sup\{\langle x^*, y \rangle \mid x^* \in \partial\Phi(x_0)\}$$

e o supremo é atingido em algum ponto $x^* \in \partial\Phi(x_0)$.

Dem.:

Sabemos que, se $x^* \in \partial\Phi(x_0)$, então

$$\langle x^*, y \rangle \leq \Phi'_+(x_0; y),$$

para todo $y \in X$.

Também vimos que

$$\Phi'_+(x_0)(y) = \Phi'_+(x_0; y)$$

é um funcional sublinear contínuo, de modo que, para qualquer $y \neq 0$ podemos usar o teorema de Hahn-Banach para encontrar $x^* \in X^*$ tal que $\langle x^*, z \rangle \leq \Phi'_+(x_0)(z)$ para todo $z \in X$ (de maneira que $x^* \in \partial\Phi(x_0)$) e

$$\langle x^*, y \rangle = \Phi'_+(x_0)(y),$$

o que conclui a demonstração. ■

Capítulo 3

Espaços Polinormados

3.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de uma classe especial de espaços vetoriais topológicos chamados de *Espaços Polinormados*, que são uma generalização natural dos espaços normados. Os exemplos mais importantes de espaços polinormados são os espaços de Fréchet. Estes espaços têm inúmeras aplicações e generalizam de maneira natural, os espaços de Banach. Por exemplo, na análise, eles são usados para provar a existência e unicidade de equações diferenciais parciais [13]. Na geometria, são usados na demonstração do *Teorema do Mergulho Isométrico de Nash* [11]. Este capítulo segue basicamente as linhas gerais de [5].

3.2 Seminormas e Espaços Polinormados

A topologia dos espaços polinormados depende da noção de seminorma.

Definição 3.1. Uma seminorma em um $\mathbb{K}$ -Espaço Vetorial X é uma função $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) $\| x \| \geq 0$, para todo $x \in X$;
- ii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, $\forall x, y \in X$;
- iii) $\| kx \| = |k| \cdot \| x \|$, $\forall k \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$.

Um espaço vetorial X equipado com uma família de seminormas $\| \cdot \|_{\lambda}, \lambda \in \Lambda$, é chamado de ***Espaço Polinormado***. Existem espaços que são polinormados e que não admitem uma norma compatível com seu critério de convergência.

Exemplo 3.1. O espaço das seqüências de números reais $a = (a^n)$, $n \in \mathbb{N}$, denotado por $\mathbb{R}^\infty$, com a convergência simples (a_k tende para a se para cada $k \in \mathbb{N}$, a seqüência a_k^n tende a a_k) é polinormado com a família de seminormas $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por $\|a\|_n = |a_n|$. Além disso, não existe uma norma que preserve a convergência neste espaço.

De fato, suponha que exista uma norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^\infty$ que definisse sua convergência. Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ a seqüência $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ que tem o número 1 na n -ésima coordenada e 0 nas demais. Note que (e_n) converge para a seqüência nula em $\mathbb{R}^\infty$. Mais ainda, qualquer seqüência de números reais que tomarmos, digamos (λ_n) , tem a seguinte propriedade:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n e_n = (0, 0, \dots).$$

Em particular, se tomarmos $\lambda_n = \frac{1}{\|e_n\|}$, temos pela norma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n e_n\| = 1.$$

Mas isto contradiz a convergência de $\mathbb{R}^\infty$. Portanto, não existe uma norma sobre $\mathbb{R}^\infty$ que seja compatível com sua convergência usual.

Exemplo 3.2. O espaço das funções infinitamente diferenciáveis num intervalo $[a, b]$, $C^\infty([a, b])$ com a convergência clássica (uma seqüência (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, tende a x se para todo $k = 0, 1, \dots$ a seqüência das derivadas de ordem k , $x_n^{(k)}$, converge uniformemente para $x^{(k)}$ em $[a, b]$) não admite uma norma que preserve tal convergência. Contudo, $C^\infty([a, b])$ é polinormado quando equipado com a família de seminormas $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por:

$$\|x\|_n = \max\{|x^{(k)}(t)| \mid k = 0, \dots, n \text{ e } t \in [a, b]\}.$$

O conjunto $C^\infty := C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ não admite nenhuma norma compatível com sua convergência. Mostraremos que se existe uma norma $\|\cdot\|$ sobre C^∞ , então existe uma seqüência (x_n) que converge a 0 no critério de convergência original de C^∞ mas que não converge a zero no critério da norma. De fato, suponha que $\|\cdot\|$ seja uma norma sobre C^∞ . Considere a seqüência: $\{f_n\}$ tal que

$$f_n(t) := \frac{e^{nt}}{n \|e^{nt}\|}.$$

Note que como f_n é de classe C^∞ então f'_n também o é. No entanto, $f'_n(t) = \frac{e^{nt}}{\|e^{nt}\|}$, pois $\|f_n\|$ não varia com t . Temos ainda que f'_n não converge a zero na norma $\|\cdot\|$. Isto contradiz a condição de convergência dada pelas seminormas deste espaço. Portanto, C^∞ não admite uma norma que gere sua convergência usual.

Exemplo 3.3. O espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$, $C([a, b])$, com a convergência pontual, não é metrizável e portanto não é normado. Mas este tipo de convergência

pode ser descrita em termos de uma família de seminormas: $\|\cdot\|_t$, $t \in [a, b]$, com

$$\|x\|_t = |x(t)|$$

3.3 Topologia de um Espaço Polinormado

Se $(X, \|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ é um espaço polinormado, então qualquer seminorma de X da forma $\max\{\|\cdot\|_{\lambda_1}, \dots, \|\cdot\|_{\lambda_n}\}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ é um conjunto finito de elementos de Λ , será chamada de *Seminorma Companheira*. Cada espaço $(X, \|\cdot\|)$, onde $\|\cdot\|$ é uma seminorma companheira é chamado de *Espaço Seminormado Companheiro*. Se X possui uma família de seminormas, então a restrição dessas seminormas para um subespaço Y de X dota Y de uma estrutura de espaço polinormado. Neste caso, Y é chamado *Subespaço Polinormado* de X .

O método usado para tornar um espaço polinormado em um espaço topológico é semelhante ao usado para definir a topologia de um espaço métrico a partir de suas bolas abertas: seja $(X, \|\cdot\|_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ um espaço polinormado. Dados $r > 0$ e $x \in X$, escolhemos um número finito de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e construímos o conjunto:

$$U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} = \{y \in X \mid \|x - y\|_{\lambda_i} < r; i = 1, \dots, n\}.$$

Chamado de **Bola Aberta Padrão** de X . Ela é a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $x \in X$ no espaço seminormado companheiro.

$$(X, \max\{\|\cdot\|_{\lambda_1}, \dots, \|\cdot\|_{\lambda_n}\}).$$

Note que $U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} = \bigcap_{i=1}^n U_{x, \lambda_i, r}$. Se Y é um subconjunto de X chamamos um ponto $x \in Y$ de ponto interior de Y se $U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} \subset Y$ para algum conjunto de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e para algum $r > 0$. Finalmente, um conjunto U de X é aberto se todos os seus pontos são interiores.

Proposição 3.1. *A classe dos subconjuntos abertos de X define uma topologia sobre X .*

Dem.:

Temos:

- i) $\emptyset$ é aberto por vacuidade. X é aberto pois, para qualquer $x \in X$ temos $U_{x, \lambda, r} \subset X$, para qualquer $\lambda \in \Lambda$ e $r > 0$.
- ii) A partir da inclusão $\left(U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r}\right) \cap \left(U_{x, \mu_1, \dots, \mu_n, s}\right) \supset U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n, t}$, onde $t = \min\{r, s\}$ vemos que a intersecção de dois (e portanto de um número finito) de subconjuntos abertos é aberta.

iii) Seja $V = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, com $\alpha \in A$ e cada U_{α} aberto.

Para cada $x \in V$ existe $\alpha \in A$ tal que $x \in V_{\alpha}$.

Logo existe $U_{x,\lambda_1,\dots,\lambda_n,r} \subset V_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_{\alpha} = V$. ■

Observação: A topologia descrita é a mais fraca tal que todas as seminormas $\|\cdot\|_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$ são aplicações contínuas.

Proposição 3.2. *Em um espaço polinormado X , temos:*

i) a adição

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua;

ii) a multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X, (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \\ (k, x) &\longmapsto kx \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua;

iii) se U é um conjunto aberto de X , então para todo $M \subset X$ a soma algébrica $U + M$ é um conjunto aberto de X . Em particular para todo $x \in X$, o deslocamento $U + x$ é aberto em X ;

iv) se U é um aberto de X então para cada $k \in \mathbb{K} - \{0\}$ a dilatação kU é um aberto de X .

Dem.:

Seja X um espaço polinormado. Temos:

i) A adição é contínua em $(0, 0)$: Dada uma vizinhança V de 0 em X , então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ e algum $r > 0$ tais que $U_{0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,r} \subset V$. Como, para cada $\lambda \in \Lambda$ temos:

$$\|x + y\|_{\lambda} \leq \|x\|_{\lambda} + \|y\|_{\lambda}, \text{ com } x, y \in X,$$

então $U_{0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\frac{r}{2}} + U_{0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\frac{r}{2}} \subset U_{0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,r}$. Como $U_{0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,r} \subset V$, segue a conclusão desejada. A continuidade em (x_0, y_0) segue de

$$\|(x + y) - (x_0, y_0)\|_{\lambda} \leq \|x - x_0\|_{\lambda} + \|y - y_0\|_{\lambda},$$

para quaisquer $\lambda \in \Lambda$, $x, y \in X$.

- ii) A multiplicação por escalar é contínua em $(0, 0) \in \mathbb{R} \times X$: para cada vizinhança V de $0 \in X$ existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ e $r > 0$ tais que $U_{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} \subset V$.

Como, para $\lambda \in \Lambda$

$$\|kx\|_\lambda = |k| \cdot \|x\|_\lambda,$$

com $x \in X$, então para todo $|k| \leq 1$, $kU_{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} \subset U_{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r}$. Como $U_{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} \subset V$, segue a conclusão. A continuidade em (x_0, y_0) é provada usando: seja V uma vizinhança de k_0x_0 , ou seja, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ e $r > 0$ tais que $U_{k_0x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r} \subset V$. Queremos encontrar vizinhanças I e W de k_0 e x_0 respectivamente, tais que $kx \in V$, sempre que $k \in I$ e $x \in W$. Escolhendo

$$I =]r' - k_0, r' + k_0[\text{ e}$$

$W = U_{x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r'}$, então se $k \in I$ e $x \in W$, temos:

$$\|kx - k_0x_0\|_{\lambda_i} \leq \|kx - kx_0\|_{\lambda_i} + |k - k_0| \|x_0\|_{\lambda_i} \leq |k|r' + Lr' \leq (|k_0| + r')r' + Lr',$$

onde $L = \max\{\|x_0\|_{\lambda_1}, \dots, \|x_0\|_{\lambda_n}\}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Tomando $r' < 1$ e

$$(|k_0| + 1 + L)r' < r$$

obtemos o resultado desejado.

(iii) e (iv) seguem de (i) e (ii). ■

Observação: Um espaço vetorial equipado com uma estrutura topológica que satisfaz às condições (i) e (ii) acima é chamado de **Espaço Vetorial Topológico**.

Definição 3.2. Um subconjunto E de um espaço vetorial X é **equilibrado** se para quaisquer $x \in E$ e $|\kappa| \leq 1$ tem-se $\kappa x \in E$.

Definição 3.3. Um subconjunto A de um espaço vetorial X é **absorvente** se dado qualquer $x \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que $tx \in A$ para todo $|t| \leq \delta$.

A intersecção de dois conjuntos equilibrados ainda é um conjunto equilibrado e a intersecção de dois conjuntos absorventes ainda é um conjunto absorvente.

3.4 Espaços Localmente Convexos

Proposição 3.3. Uma topologia definida num espaço vetorial X é gerada por uma família de seminormas se, e somente se, existe uma família de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes condições:

- i) Todo conjunto U desta família é convexo, equilibrado e contém um vetor não nulo de cada subespaço unidimensional de X ;

ii) O sistema $U_{x,t} = \{x + ty \mid y \in U\}$ (com $x \in X$, $t > 0$ e U na família citada) é uma base para a nossa topologia.

Dem.:

($\Rightarrow$) Sejam $\{\|\cdot\|_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ a família de seminormas sobre X que define sua topologia e $r > 0$. Então, para cada $\lambda \in \Lambda$ seja

$$U_\lambda = \{x \in X \mid \|x\|_\lambda < r\}.$$

Mostremos que U_λ satisfaz i) e ii): Mostremos primeiramente a sua convexidade: sejam $x, y \in U_\lambda$ e $z = (1-t)x + ty$ com $t \in [0, 1]$. Devemos mostrar que $z \in U_\lambda$. Temos:

$$\|z\|_\lambda = \|(1-t)x + ty\|_\lambda \leq (1-t)\|x\|_\lambda + t\|y\|_\lambda < r.$$

Logo, $z \in U_\lambda$. Agora mostremos que U_λ é equilibrado:

De fato, sejam $|k| \leq 1$ e $x \in U_\lambda$. Devemos mostrar que $kx \in U_\lambda$. Temos que:

$$\|kx\|_\lambda = |k| \cdot \|x\|_\lambda \leq \|x\|_\lambda < r.$$

Logo, $kU_\lambda \subset U_\lambda$. E por último, mostremos que dado qualquer vetor $0 \neq x \in X$, existe $c > 0$ tal que $cx \in U_\lambda$. De fato, seja $0 \neq x \in X$ um vetor qualquer. Escolhendo qualquer $0 < c < \frac{r}{\|x\|_\lambda + 1}$, temos:

$$\|cx\|_\lambda = c\|x\|_\lambda < c\|x\|_\lambda + c < r.$$

Consequentemente, $cx \in U_\lambda$. Mostremos agora que $\{U_{\lambda,t}\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma base de vizinhanças para o 0. Isto será suficiente uma vez que a translação e a homotetia são homeomorfismos num espaço vetorial topológico. Seja V uma vizinhança qualquer da origem. Devemos mostrar que existe $t > 0$ tal que $U_{\lambda,t} \subset V$. Note que para cada $t \neq 0$ o conjunto $U_{\lambda,t}$ é aberto em X porque é uma homotetia de um aberto U_λ . Pela continuidade da multiplicação por escalar, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U_{\lambda,t} = \{0\}.$$

Daí, existe $\delta > 0$ tal que para o aberto V da origem, tem-se: $\{0\} \subset U_{\lambda,t} \subset V$ sempre que $0 < t < \delta$. Portanto, a classe $\{U_{\lambda,t}\}$ é uma base de vizinhanças de 0 e como já observado, uma base para a topologia de X .

($\Leftarrow$)

Reciprocamente, seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ a família de subconjuntos de X que satisfazem i) e ii). Então, para cada $\lambda \in \Lambda$ seja

$$p_\lambda(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tU_\lambda\}.$$

Este funcional é chamado de **Funcional de Minkowski** e para U_λ nas condições *i)* e *ii)*, p_λ é uma seminorma sobre X (ver [16]). Logo, $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de seminormas definidas sobre X . Sabemos ainda que $U_\lambda = \{x \in X \mid p_\lambda(x) < 1\}$, pois U_λ é aberto em X . Portanto, essas seminormas definem a topologia de X . ■

Observação: Um espaço vetorial equipado com uma topologia que satisfaz a estas duas condições é chamado de **Localmente Convexo**.

Proposição 3.4. *Uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ tende a x num espaço polinormado $(X, \|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ se, e só se,*

$$\|x - x_\alpha\|_\lambda \rightarrow 0$$

qualquer que seja $\lambda \in \Lambda$.

Dem.:

Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ uma rede em X que tende para x . Para quaisquer $\lambda \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$ temos que existe $\beta \in \Gamma$ tal que $x_\alpha \in U_{x, \lambda, \varepsilon}$ sempre que $\alpha \geq \beta$. Pela arbitrariedade de $\lambda \in \Lambda$, $\|x_\alpha - x\|_\lambda < \varepsilon$ quais que sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Suponha agora que $\|x_\alpha - x\|_\lambda < \varepsilon$ qualquer que seja $\lambda \in \Lambda$. Seja $U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \varepsilon}$ uma vizinhança de x em X . Então, para cada $i = 1, \dots, n$ existem $\beta_i \in \Gamma$ tais que $\|x_\alpha - x\|_{\lambda_i} < \varepsilon$ sempre que $\alpha \geq \beta_i$. Como Γ é um conjunto direcionado, existe $\beta \geq \max\{\beta_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Assim, se $\alpha \geq \beta$, temos $x_\alpha \in U_{x, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \varepsilon}$. ■

Corolário 3.1. *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um ponto x se, e somente se $\|x_n - x\|_\lambda \rightarrow 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Definição 3.4. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy num espaço polinormado $(X, \|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ se dada qualquer vizinhança da origem, existe um número natural N tal que se $m, n \geq N$ então $x_n - x_m \in U$.

Proposição 3.5. *Um espaço polinormado $(X, \|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ é Hausdorff se, e somente se, para todo $x \in X, x \neq 0$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\|x\|_\lambda > 0$.*

Dem.:

Seja X Hausdorff. Tomando $x \neq 0$ sabemos que existe uma vizinhança de 0 que não contém x . Logo x não está contido em alguma bola aberta padrão, digamos, $U_{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, r}$. Mas então para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, teremos

$$\|x\|_{\lambda_i} \geq r > 0.$$

Vamos supor agora que X é um espaço polinormado tal que, se $x \neq 0$, então

$$\|x\|_\lambda > 0$$

para algum $\lambda \in \Lambda$. Se y e z são elementos distintos em X , então $x = y - z \neq 0$ e portanto, existe $\lambda \in \Lambda$ com a propriedade referida. Então as vizinhanças $U_{y, \lambda, r}$ e $U_{z, \lambda, r}$ de y e z , respectivamente, são disjuntas sempre que $r < \frac{\|x\|_\lambda}{2}$. ■

3.5 Continuidade de Transformações Lineares

Teorema 3.1. *As seguintes propriedades de um operador T entre os espaços polinormados $(X, \|\cdot\|_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ e $(Y, \|\cdot\|_\mu; \mu \in M)$ são equivalentes:*

i) *Para cada $\mu \in M$ existem uma seminorma companheira $\|\cdot\|'$ em X e uma constante $c > 0$ tais que para todo $x \in X$*

$$\|T(x)\|_\mu \leq c \|x\|';$$

ii) *Para cada seminorma companheira $\|\cdot\|$ de Y existem uma seminorma companheira $\|\cdot\|'$ em X e uma constante $c > 0$ tais que para todo $x \in X$,*

$$\|T(x)\| \leq c \|x\|';$$

iii) *T é contínuo em 0;*

iv) *T é contínuo.*

Dem.:

i) $\Rightarrow$ ii) Em Y , considere

$$\|\cdot\| = \max\{\|\cdot\|_{\mu_k} \mid k = 1, \dots, n\}.$$

Então para cada k , existem $C_k > 0$ uma seminorma companheira $\|\cdot\|_k$ em X , tais que, para todo $x \in X$,

$$\|T(x)\|_{\mu_k} \leq C_k \|x\|'_k.$$

Em X , a seminorma companheira $\|\cdot\|' = \max\{\|\cdot\|'_k \mid k = 1, \dots, n\}$ satisfaz

$$\|T(x)\| \leq C \|x\|'$$

onde $C = \max\{C_k \mid k = 1, \dots, n\}$.

ii) $\Rightarrow$ iv)

Seja $X \ni x$. Vamos provar que T é contínuo em X . Considere U uma vizinhança de $T(x)$. Ela contém uma bola aberta padrão $U_{T_x, r} = \{y \in Y \mid \|y - T_x\| < r\}$ para alguma seminorma companheira $\|\cdot\|$ em Y e algum $r > 0$. Por hipótese, existe uma seminorma companheira $\|\cdot\|'$ em X , tal que T é limitado como operador entre $(X, \|\cdot\|')$ e $(Y, \|\cdot\|)$. Logo T é contínuo. Assim, existe uma vizinhança V de x no espaço $(X, \|\cdot\|')$ tal que $T(V)$ está contido em $U_{T_x, r}$ e portanto em U . Como V também é uma vizinhança de x no espaço $(X, \|\cdot\|_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ segue a conclusão.

iv) $\Rightarrow$ iii) Óbvio.

iii) $\Rightarrow$ i) Considere $\mu \in M$ e $U_{0,\mu,1}$ uma vizinhança do zero em Y . Por hipótese, há W , vizinhança de zero em X tal que $T(W) \subset U_{0,\mu,1}$. Sabemos que W contém uma bola aberta padrão

$$W_{0,\delta} = \{x \in X \mid \|x\|' < \delta\}$$

onde $\|\cdot\|'$ é uma seminorma companheira em X .

Logo T , considerado como operador entre os espaços seminormados $(X, \|\cdot\|')$ e $(Y, \|\cdot\|_\mu)$, leva a uma dilatação da bola aberta unitária num conjunto limitado. Consequentemente, T é limitado. ■

3.6 Famílias de Seminormas Equivalentes

Definição 3.5. Uma família de seminormas $\|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda$ num espaço vetorial X majora a seminorma $\|\cdot\|$ de X se existe um número finito de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que a seminorma companheira $\max\{\|\cdot\|_{\lambda_1}, \dots, \|\cdot\|_{\lambda_n}\}$ majora $\|\cdot\|$, isto é, para cada $x \in X$,

$$\|x\| \leq c \max\{\|x\|_{\lambda_1}, \dots, \|x\|_{\lambda_n}\},$$

com $c = c(n) > 0$. Dizemos que uma família de seminormas majora outra família de seminormas quando a primeira família majora toda seminorma da segunda família. Finalmente, dizemos que duas famílias de seminormas são equivalentes quando uma majora a outra e vice-versa.

Proposição 3.6. *Suponha que existam duas famílias de seminormas num espaço vetorial. Então a topologia gerada pela primeira família não é mais fraca do que a topologia gerada pela segunda família se, e somente se, a primeira família majora a segunda. Em particular, duas famílias de seminormas geram a mesma topologia se, e só se, elas são equivalentes.*

Dem.:

Sejam $(X, \|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ e $(X, \|\cdot\|_\mu; \mu \in M)$ as duas estruturas de espaços polinormados em X . Como a aplicação identidade

$$I : (X, \|\cdot\|_\lambda; \lambda \in \Lambda) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_\mu; \mu \in M)$$

é linear, ela será contínua se, e só se, a primeira família majora a segunda. ■

Teorema 3.2. *Seja $(X, \|\cdot\|_n; n \in \mathbb{N})$ um espaço polinormado. Então, existe uma família crescente de seminormas que é equivalente à primeira família.*

Dem.:

Existência: defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, a seminorma:

$$\|\cdot\|'_n = \sum_{i=1}^n \|\cdot\|_i.$$

Seja $x \in X$.

$$\|x\|'_{n+1} = \|x\|_1 + \dots + \|x\|_{n+1} \geq \|x\|_1 + \dots + \|x\|_n = \|x\|'_n.$$

Portanto, a família gerada é crescente.

Equivalência: Sejam $X_1 = (X, \mathcal{F}_1)$ e $X_2 = (X, \mathcal{F}_2)$, onde $\mathcal{F}_1$ é a família original de seminormas em X e $\mathcal{F}_2$ é a família crescente de seminormas cuja existência já foi garantida acima.

$\mathcal{F}_1$ *majora* $\mathcal{F}_2$: Seja $\|\cdot\|'_n \in \mathcal{F}_2$, para algum natural n . Então pela definição de $\|\cdot\|'_n$, temos:

$$\|\cdot\|'_n = \|\cdot\|_1 + \dots + \|\cdot\|_n \leq n \max\{\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n\}.$$

$\mathcal{F}_2$ *majora* $\mathcal{F}_1$: Seja $\|\cdot\|_n \in \mathcal{F}_1$. Então, pela definição de $\|\cdot\|'_n$, temos:

$$\|\cdot\|_n \leq 1 \cdot \max\{\|\cdot\|'_n\}.$$

O resultado segue do **teorema 3.6**. ■

3.7 Pseudométricas e Métricas

Definição 3.6. Uma *pseudométrica* é uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que; para quaisquer $x, y, z \in X$:

- i) $d(x, x) = 0$;
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Note que adicionando-se a condição $d(x, y) = 0$ se, e somente $x = y$, então a pseudométrica se torna uma *métrica*. Dizemos que uma topologia em X é definida pela métrica d quando, para todo $x \in X$ os conjuntos

$$B_{x,r} = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, r > 0$$

formam uma base de vizinhanças de x . A métrica d é dita invariante por translação se

$$(*) \quad d(x, y) = d(x + z, y + z),$$

para todos $x, y, z \in X$. A propriedade $(*)$ é equivalente a

$$B_{x,r} = B_{0,r} + x$$

para todo $x \in X$ e $r > 0$, ou também a

$$d(x, y) = d(x - y, 0)$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Lema 3.1. *Se $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}_+$, então*

$$\min\{\lambda + \mu, \nu\} \leq \min\{\lambda, \nu\} + \min\{\mu, \nu\}.$$

Dem.:

Se $\nu \geq \lambda$ e $\nu \geq \mu$, então $\min\{\lambda, \nu\} + \min\{\mu, \nu\} = \lambda + \mu \geq \min\{\lambda + \mu, \nu\}$.

Se $\nu < \lambda$, então $\min\{\lambda, \nu\} + \min\{\mu, \nu\} \geq \min\{\lambda, \nu\} = \nu = \min\{\lambda + \mu, \nu\}$.

Se $\nu < \mu$ a demonstração é análoga. ■

Teorema 3.3. *Um espaço polinormado X é pseudometrizável se, e só se, a família Λ formada pelas suas seminormas é enumerável.*

Dem.:

Seja (X, d) o espaço pseudometrizável mencionado. Como X é pseudometrizável, então a topologia gerada pela pseudométrica d é equivalente à topologia original gerada pelas seminormas.

É suficiente mostrar então que a topologia pseudométrica é equivalente à topologia gerada por alguma família enumerável de seminormas.

A família $\mathcal{F} = \left\{ B_n = \left\{ x \in X \mid d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de vizinhanças da origem em X . Para cada número natural n , seja U_n a bola aberta padrão contida em B_n . Considere a subfamília Λ que é formada por todas as seminormas que compoem cada U_n . Assim, Λ é enumerável.

Sejam $X_1 = (X, \Lambda)$ e $X_2 = (X, d)$. É suficiente mostrar agora que $Id : X_1 \rightarrow X_2$ é um homeomorfismo. Como Id é linear, sua continuidade, bem como a de sua inversa, se resumem à continuidade na origem de X .

Continuidade de Id : Seja $V \subset X_2$ uma vizinhança aberta da origem. Então existem $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k \subset V$ e U_k tal que $U_k \subset B_k \subset V$. Logo, Id é contínua.

Continuidade de Id^{-1} : Seja $W \subset X_1$ uma vizinhança da origem. Então existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$ tais que $0 \in U = U_{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \varepsilon} \subset W$. U é um conjunto

convexo e 0 pertence ao interior de U , $\text{int}(U)$. Como $\text{int}(U)$ é aberto e contém 0, temos $0 \in \text{int}(U) \subset U \subset W$. Logo, id^{-1} é contínua.

Portanto, se um espaço polinormado é metrizável, então a topologia gerada pelas suas seminormas, é equivalente à topologia gerada por alguma família enumerável de seminormas.

Reciprocamente, seja $(X, \|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N})$ um espaço polinormado com uma família enumerável de seminormas. Sem perda de generalidade, podemos tomar essa família como crescente. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de termos positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Definimos

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \min\{\|x\|_n, 1\}$$

de modo que

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y); \\ p(-x) &= p(x) \end{aligned}$$

para todos $x, y \in X$. A partir de p , definimos uma pseudométrica em X :

$$d(x, y) = p(x - y).$$

De fato:

- i) $d(x, y) = p(x - y) = p(-(x - y)) = p(y - x) = d(y, x)$.
- ii) $d(x, z) = p(x - z) = p(x - y + y - z) \leq p(x - y) + p(y - z) = d(x, y) + d(y, z)$, para quaisquer $x, y, z \in X$.

Obviamente d é invariante por translações. Resta verificar que a topologia induzida pela pseudométrica é idêntica à topologia determinada pelas seminormas. $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ são os abertos básicos da topologia pseudométrica. Como d é invariante por translações, podemos assumir que $x = 0$.

Uma vez que a série de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, dado $r > 0$ existe $n(r) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n(r)}^{\infty} a_n < \frac{r}{2}. \quad (1)$$

Como a sequência $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \dots$ é crescente, temos, para todo $x \in X$:

$$\sum_{n=1}^{n(r)} a_n \min\{\|x\|_n, 1\} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \|x\|_{n(r)}. \quad (2)$$

Seja $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se o ponto x pertence ao conjunto

$$U = \{x \in X \mid \|x\|_{n(r)} < \frac{r}{2A}\} = U_{0,1,2,\dots,n(r),\frac{r}{2A}},$$

$$\text{então } d(x, 0) = \sum_{n=1}^{n(r)} a_n \min\{\|x\|_n, 1\} + \sum_{n=n(r)+1}^{\infty} a_n \min\{\|x\|_n, 1\} < r, \text{ por (1) e (2).}$$

Isto mostra que $U \subset B_r(0)$.

Seja agora $x \in U_{0,1,2,\dots,n,r}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $r < 1$. Como $\|x\|_n \leq a_n^{-1}d(x, 0)$, então se $d(x, 0) < ra_n$, temos $\|x\|_n < r$. Logo, $B_{ra_n}(0) \subset U_{0,1,2,\dots,n,r}$. Portanto, as topologias são idênticas. ■

Corolário 3.2. *Um espaço polinormado X que é Hausdorff, é metrizável se, e somente se sua família de seminormas é equivalente a uma família enumerável.*

Dem.:

O resultado segue do fato que a pseudométrica definida no teorema anterior se torna uma métrica se, e somente se o espaço X é Hausdorff. ■

Proposição 3.7. *Sejam X um espaço polinormado metrizável e (x_n) uma sequência em X . Se d é a métrica invariante por traslações definida como na proposição anterior, então (x_n) é de Cauchy com respeito a estrutura topológica gerada pelas seminormas se, e somente se (x_n) é uma sequência de Cauchy com respeito à métrica d .*

Dem.:

De fato, para cada $\varepsilon > 0$, os conjuntos $V_\varepsilon = \{x \in X \mid d(x, 0) < \varepsilon\}$ formam uma base de vizinhanças de 0 em X e a condição $x_n - x_m \in V_\varepsilon$ é equivalente a $d(x_n - x_m, 0) = d(x_n, x_m) < \varepsilon$. ■

Vamos definir agora uma família de espaços polinormados que são completos e generalizam a noção de espaço de Banach.

Definição 3.7. Um **Espaço de Fréchet** é um espaço polinormado, Hausdorff, metrizável e completo.

Neste caso, a convergência por redes pode ser substituída pela convergência por sequências.

Capítulo 4

O Teorema de Nash-Moser

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um resultado provado pelo matemático *Ivar Ekeland* [1] em 2011, que tem como caso particular o famoso *Teorema de Nash-Moser*. Diferentemente das demonstrações clássicas desse teorema, a prova depende de três resultados clássicos da *Teoria da Medida*: Lema de Fatou, Teorema da Convergência Monótona e Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Estes teoremas são usados nas suas versões para séries. As demonstrações destes teoremas se encontram no Apêndice. Outro resultado empregado é a caracterização do subgradiente da norma de um espaço de Banach. Por fim, vale destacar o uso essencial do Princípio de Ekeland [2].

4.2 Considerações Iniciais

Seja X um espaço de Fréchet cuja topologia é gerada por uma sequência crescente de normas $\|\cdot\|_n$. Tal sequência é chamada de *gradação* e o espaço $(X, \{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ é chamado de *espaço de Fréchet graduado*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja X_n o espaço de Banach que é o completamento de X pela norma $\|\cdot\|_n$. Se o espaço de Fréchet graduado satisfaz a condição de que para todo $n \in \mathbb{N}$, a aplicação identidade $i_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ é injetora, então X é chamado de *espaço de Fréchet enumeravelmente normado*.

Pode-se mostrar que, nessas condições, $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.

É possível ainda mostrar, como feito por *Moscatelli e Simões* [9], que um espaço de Fréchet que admite uma família de *operadores de suavização* é enumeravelmente normado.

Definição 4.1. Seja X um espaço de Fréchet enumeravelmente normado. Um ponto

$x \in X$ é dito *controlado* se existe um número $c_0(x) > 0$ tal que:

$$\|x\|_k \leq [c_0(x)]^k.$$

Esta definição separa os pontos do espaço que têm um crescimento sobre cada norma, limitado por uma função exponencial.

Definição 4.2. Um Espaço de Fréchet Enumeravelmente Normado X é chamado de *Espaço de Fréchet Padrão* se, para cada $x \in X$, existem uma constante $c_3(x) > 0$ e uma sequência (x_n) de pontos controlados, tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_k = 0, \quad \forall k,$$

$$\|x_n\|_k \leq c_3(x) \|x\|_k, \quad \forall n.$$

Proposição 4.1. *Sejam Y um espaço de Banach e sejam $y, z \in Y$. Então existe algum $y^* \in \partial \|y\|$ (possivelmente dependendo de z) tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|y + tz\| - \|y\|}{t} = \langle y^*, z \rangle.$$

Dem.:

A demonstração segue diretamente das proposições 2.6 e 2.7. ■

Lema 4.1. *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $F : X \rightarrow Y$ uma função Gateaux-diferenciável. Tome $x, y \in X$ e defina uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$f(t) := \|F(x + ty)\|.$$

Então, f tem uma derivada a direita em qualquer ponto, e existe algum

$$y^* \in \partial \|F(x + ty)\|$$

tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \langle y^*, DF(x + ty)y \rangle.$$

Dem.:

Temos:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\|F(x + (t+h)y)\| - \|F(x + ty)\|}{h} =$$

$$= \frac{\| F(x + ty) + hz(h) \| - \| F(x + ty) \|}{h}, \quad (4.1)$$

com

$$z(h) = \frac{F(x + (t + h)y) - F(x + ty)}{h}.$$

Como F é Gâteaux-diferenciável, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} z(h) = DF(x + ty)y := z(0).$$

Pela desigualdade triangular:

$$| \| F(x + ty) + hz(h) \| - \| F(x + ty) + hz(0) \| | \leq h \| z(h) - z(0) \|.$$

Substituindo esta desigualdade em (4.1) e usando a **proposição** 4.1, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\| F(x + ty) + hz(0) \| - \| F(x + ty) \|}{h} = \langle y^*, DF(x + ty)y \rangle,$$

para algum $y^* \in \partial \| F(x + ty) \|$. Este é o resultado desejado. ■

Lema 4.2. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$. Se $0 \in X'$, então $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$ se, e somente se para toda sequência decrescente $(x_n) \subset X - \{0\}$ com $x_n \rightarrow 0$, tem-se $f(x_n) \rightarrow L$.*

Dem.:

($\Rightarrow$) Seja (x_n) uma sequência nas condições do enunciado. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que se $0 < x < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $x_n \rightarrow 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ tem-se $0 < x_n < \delta$ e consequentemente, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Sendo assim, $f(x_n) \rightarrow L$.

($\Leftarrow$) Suponha que não se tenha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, exista $0 < x_\delta < \delta$ com $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. Seja então, $0 < x_1 < 1$ tal que $|f(x_1) - L| \geq \varepsilon_0$. Agora, para cada $n \geq 2$, escolha $x_n \in X - \{0\}$ tal que $0 < x_n < \min\{\frac{1}{n}, x_{n-1}\}$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Então temos $x_n \rightarrow 0$ e $(x_n) \subset X - \{0\}$ é decrescente. No entanto, não se tem $f(x_n) \rightarrow L$ como esperado. Esta contradição mostra que de fato, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$. ■

4.3 Um Teorema de Função Inversa para Espaços de Banach

Apresentaremos uma demonstração para o teorema da função inversa em espaços de Banach que requer hipóteses sensivelmente mais fracas que as das versões mais conhecidas. Nesta demonstração, não requeremos que a função seja diferenciável segundo Fréchet. O que precisamos para concluir a tese é que a função seja diferenciável segundo Gâteaux e que seja contínua. Além disso, pedimos apenas que ela possua uma inversa à direita que é mais simples de se obter do que um isomorfismo. Esta demonstração será importante, pois ela nos dará um roteiro para a demonstração do mesmo resultado para espaços de Fréchet, bastando que adequemos as respectivas hipóteses ao espaço em questão.

Teorema 4.1. *Sejam X e Y espaços de Banach e $F : X \rightarrow Y$ uma função contínua, Gâteaux-Diferenciável e com $F(0) = 0$. Suponha que a derivada $DF(x)$ possua uma inversa à direita $L(x)$, uniformemente limitada em alguma vizinhança de 0, isto é:*

$$\begin{aligned} \forall v \in Y, \quad DF(x)L(x).v &= v, \\ \|x\| \leq R \Rightarrow \|L(x)v\| &\leq m \|v\|, \quad R > 0. \end{aligned}$$

Então, para cada $\bar{y} \in Y$ tal que:

$$\|\bar{y}\| < \frac{R}{m}$$

e para todo $\mu > m$, existe $\bar{x} \in X$ tal que:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\| &< R, \\ \|\bar{x}\| &\leq \mu \|\bar{y}\| \end{aligned}$$

e ainda,

$$F(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Dem.:

Considere o funcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \|F(x) - \bar{y}\|$. Como a norma e F são contínuas, segue que f é contínuo. Obviamente f é limitado inferiormente por 0. Podemos supor $\bar{y} \neq 0$, pois já que $F(0) = 0$, este caso é trivial. Assim, $f(0) = \|\bar{y}\| > 0$. Vamos então aplicar o *Princípio de Ekeland*, na sua forma forte, com $\varepsilon = f(0) > 0$ e $\lambda = r > 0$ qualquer. Note que $\inf_X f \geq 0$, daí:

$$\inf_X f \leq f(0) \leq \inf_X f + f(0).$$

Isto nos diz que o elemento x_ε requerido pelo Princípio de Ekeland pode ser tomado $x_\varepsilon = 0$. Então, tal Princípio nos fornece um elemento $x_\lambda = \bar{x}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq f(0), \\ \|\bar{x}\| &\leq r, \end{aligned}$$

e ainda,

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - \bar{x}\|, \quad \forall x \in X.$$

Escolhendo então $r = \mu \|\bar{y}\|$, onde $\mu > m$, temos:

$$f(\bar{x}) \leq f(0);$$

$$\|\bar{x}\| \leq \mu \|\bar{y}\|;$$

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \frac{1}{\mu} \|x - \bar{x}\|, \quad \forall x \in X. \quad (4.2)$$

Como $\|\bar{y}\| < \frac{R}{m}$, segue que $m < \frac{R}{\|\bar{y}\|}$.

Escolhendo $\mu \in \left(m, \frac{R}{\|\bar{y}\|}\right)$, temos:

$$\|\bar{x}\| \leq \mu \|\bar{y}\| < R.$$

Resta então mostrar que se tem $F(\bar{x}) = \bar{y}$. De fato, suponha que fosse $F(\bar{x}) \neq \bar{y}$. Dado qualquer $x \in X$, existem $t > 0$ e $u \in X$ tais que $x = \bar{x} + tu$. Esta relação é biunívoca. Assim, podemos escrever (4.2) como:

$$\frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} \geq -\frac{1}{\mu} \|u\|, \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in X. \quad (4.3)$$

Pelo **lema 4.1**, a função $t \rightarrow \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|$ tem uma derivada a direita em todo $t > 0$, dada por:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} = \langle y^*, DF(\bar{x})u \rangle,$$

para algum $y^* \in Y^*$ com $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ e $\langle y^*, F(\bar{x}) - \bar{y} \rangle = \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|$. Fazendo $t \rightarrow 0^+$ em (4.3), temos:

$$\langle y^*, DF(\bar{x})u \rangle \geq -\frac{1}{\mu} \|u\|, \quad \forall u \in X.$$

Escolhendo-se então $u = -L(\bar{x})(F(\bar{x}) - \bar{y})$ na desigualdade acima temos:

$$\|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \leq \frac{1}{\mu} \|u\| \leq \frac{m}{\mu} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|.$$

Mas esta desigualdade acarreta em $m \geq \mu$, pois $\|F(\bar{x}) - \bar{y}\| > 0$. Esta contradição mostra que de fato, deve-se ter $F(\bar{x}) = \bar{y}$. ■

4.4 Uma Generalização do Teorema de Nash-Moser

O próximo teorema generaliza o teorema de Nash-Moser. Sua demonstração será dividida em três passos e seguirá a mesma ordem lógica de idéias do que o teorema anterior. O que faremos aqui é determinar quais são as condições que devemos impor à função para que ela admita uma inversa local levando em conta que os espaços ambiente agora são os espaços de Fréchet.

Teorema 4.2. *Suponha que X e Y sejam espaços de Fréchet enumeravelmente normados, com Y padrão. Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ e (m_k) e (m'_k) duas sequências de números positivos não-decrescentes. Admita ainda que em $B_X(k_0, R)$, a aplicação F satisfaça as seguintes condições:*

1. $F(0) = 0$;
2. F é contínua e Gâteaux-Diferenciável;
3. Para cada $u \in X$, existe um número $c_1(u) > 0$ para o qual vale:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|DF(x)u\|_k \leq c_1(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k).$$

4. Existe uma aplicação linear $L(x) : Y \rightarrow X$ tal que $DF(x)L(x)v = v$, $\forall v \in Y$;
5. Para cada $v \in Y$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|L(x)v\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2}.$$

Seja (β_k) uma sequência de termos não negativos com suporte ilimitado que satisfaz:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k \geq 0} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k < +\infty. \quad (4.4)$$

Então, para cada $\bar{y} \in Y$ tal que:

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R, \quad (4.5)$$

existe um ponto $\bar{x}$ de modo que:

$$F(\bar{x}) = \bar{y}; \quad (4.6)$$

$$\|\bar{x}\|_{k_0} < R. \quad (4.7)$$

Dem.:

A demonstração será feita em três passos.

Passo 1:

Para (β_k) e (m'_k) como no enunciado, seja $(\alpha_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k})$. Seja $R \in (0, \infty)$ dado na hipótese. Considere sobre X a métrica

$$d(x, y) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \min\{R, \|x - y\|_k\}. \quad (4.8)$$

Já sabemos que (X, d) é um espaço métrico completo. Seja $\bar{y} \in Y$ nas condições do enunciado. Sem perda de generalidade, podemos supor $\bar{y} \neq 0$ pois, para $y = 0$ já temos $F(0) = 0$.

Considere agora $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ dada por

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_k \|F(x) - \bar{y}\|_k. \quad (4.9)$$

- Obviamente $f(x) \geq 0$ qualquer que seja $x \in X$. Consequentemente, f é limitada inferiormente;
- Temos:

$$f(0) = \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} < \infty;$$

Por hipótese sobre $\bar{y}$. Isto garante que f não é identicamente infinita;

- Agora mostraremos que f é semi-contínua inferiormente.

De fato, seja $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x \in X$. Devemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f(x_n) \geq f(x).$$

Considere a sequência dupla:

$$(a_n^k = \beta_k \| F(x_n) - \bar{y} \|_k).$$

Como $\| F(\cdot) - \bar{y} \|_k$ é contínua qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_k \| F(x_n) - \bar{y} \|_k = \beta_k \| F(x) - \bar{y} \|_k = b_k.$$

Sendo assim, temos:

- i) (a_n^k) uma sequência dupla de termos não-negativos;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Pelo **Lema de Fatou** para séries de números reais, temos:

$$\sum_{k \geq 0} b_k = \sum_{k \geq 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{k \geq 0} a_n^k,$$

ou seja,

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k \| F(x) - \bar{y} \|_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{k \geq 0} \beta_k \| F(x_n) - \bar{y} \|_k.$$

Ou ainda,

$$f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f(x_n).$$

Portanto, f é de fato *sci*.

Por hipótese,

$$0 \leq f(0) = \sum_{k \geq 0} \beta_k \| \bar{y} \|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R,$$

ou seja,

$$0 \leq f(0) < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R,$$

com $(\beta_{k_0+d_2} \neq 0)$.

Nessas condições, tome

$$R' \in \left(\frac{f(0)m'_{k_0}}{\beta_{k_0+d_2}}, R \right).$$

Note que $f(0) > 0$ pois,

$$f(0) = \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k \geq \beta_j \|\bar{y}\|_j > 0.$$

Onde $\beta_j > 0$ que tem existência garantida pelo fato de (β_k) ter suporte ilimitado e $\|\bar{y}\|_j > 0$ pois $\bar{y} \neq 0$.

Sendo assim, f e X satisfazem as condições do **Princípio de Ekeland** (Forma Forte), com $\varepsilon = f(0) > 0$ e $\lambda = R'\alpha_{k_0}$ (que pode ser tomado já que $\beta_{k_0+d_2} \neq 0$).

Como $\inf_X f \geq 0$, segue que

$$0 \leq \inf_X f \leq f(0) \leq \inf_X f + f(0),$$

ou seja,

$$\inf_X f \leq f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon.$$

Isto mostra que $x_\varepsilon = 0$ satisfaz as condições requeridas para o elemento que determina $\bar{x} = x_\lambda \in X$. Assim, pelo Princípio de Ekeland, existe $\bar{x} \in X$ que satisfaz:

$$0 \leq f(\bar{x}) \leq f(x_\varepsilon = 0); \tag{4.10}$$

$$d(\bar{x}, x_\varepsilon) = d(\bar{x}, 0) \leq \lambda = R'\alpha_{k_0}; \tag{4.11}$$

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x}), \quad \forall x \in X. \tag{4.12}$$

Note que podemos reescrever (4.10) como segue:

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2}}{m'_{k_0}} R' < \infty. \quad (4.13)$$

Vamos agora mostrar que $\|\bar{x}\|_{k_0} \leq R' < R$. De fato, suponha $\|\bar{x}\|_{k_0} > R'$. Então,

$$d(\bar{x}, 0) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \min\{R, \|\bar{x}\|_k\} \geq \alpha_{k_0} \min\{R, \|\bar{x}\|_{k_0}\} > \alpha_{k_0} R',$$

e portanto, $d(\bar{x}, 0) > \alpha_{k_0} R'$ que contradiz (4.11). Logo, $\|\bar{x}\|_{k_0} \leq R' < R$, o que prova (4.7).

Seja

$$A := \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{R' \alpha_{k_0}} \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k \quad (4.14)$$

em (4.12).

Para cada $x \in X$, sejam $t > 0$ e $u \in X$ tais que $x = \bar{x} + tu$. Esta é uma permutação de X para cada $t > 0$ fixado. Substituindo $x = \bar{x} + tu$ e (4.14) em (4.12), temos:

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + tu) + Ad(\bar{x} + tu, \bar{x}), \quad \forall u \in X, \quad \forall t > 0.$$

Podemos reescrever acima usando a definição de f e de $d(\bar{x} + tu, \bar{x})$ e encontramos, dividindo ambos os membros por $t > 0$ a seguinte expressão:

$$-\frac{1}{t} \left[\sum_{k \geq 0} \beta_k \left(\|\bar{y} - F(\bar{x} + tu)\|_k - \|\bar{y} - F(\bar{x})\|_k \right) \right] \leq \frac{A}{t} \sum_{k \geq 0} \alpha_k \min\{R, t \|u\|_k\}. \quad (4.15)$$

Passo 2:

Se $\bar{y} = F(\bar{x})$ nada há a fazer. Suponhamos então que $\bar{y} \neq F(\bar{x})$. Sejam $v = F(\bar{x}) - \bar{y}$ e $u = -L(\bar{x})v$. Então, $DF(\bar{x})u = DF(\bar{x})(-L(\bar{x})v) = -v = -(F(\bar{x}) - \bar{y})$. Como Y é padrão, existe uma sequência (v_n) de modo que:

$$\|v_n - v\|_k \rightarrow 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (4.16)$$

$$\|v_n\|_k \leq c_3(v_n) \|v\|_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (4.17)$$

$$\| u_n \|_k \leq [c_0(v_n)]^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $u_n = -L(\bar{x})v_n$. Daí, temos:

$$0 \leq \| u_n - u \|_k = \| L(\bar{x})(v_n - v) \|_k \leq m'_k \| v_n - v \|_{k+d_2}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| v_n - v \|_k \rightarrow 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| u_n - u \|_k \rightarrow 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Temos ainda,

$$\| u_n \|_k = \| -L(\bar{x})v_n \|_k \leq m'_k \| v_n \|_{k+d_2} \leq m'_k [c_0(v_n)]^{k+d_2} \quad (4.19)$$

(foi usada a condição (5)).

Como (4.15) vale para todo $u \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, substituímos u por u_n em (4.15) e fazemos t tender a zero pela direita. Daí:

$$-\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[\sum_{k \geq 0} \beta_k \| \bar{y} - F(\bar{x} + tu_n) \|_k - \sum_{k \geq 0} \beta_k \| \bar{y} - F(\bar{x}) \|_k \right] \leq A \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{t} \min\{R, t \| u_n \|_k\}. \quad (4.20)$$

Fixando $n \in \mathbb{N}$, analisemos o segundo membro de (4.20): seja $\gamma_k(t) = \alpha_k \min\{R, t \| u_n \|_k\}$ para $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Seja $\gamma_k(0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma_k(t) = \alpha_k \| u_n \|_k$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, γ_k é contínuo em $t = 0$. Mostremos agora que γ_k decresce com $t > 0$: de fato, sejam $0 < t_1 < t_2$.

- Suponha $\gamma_k(t_1) = \alpha_k \min\{\frac{R}{t_1}, \| u_n \|_k\} = \frac{\alpha_k R}{t_1}$.

$$\text{Então } \gamma_k(t_1) = \frac{\alpha_k R}{t_1} > \frac{\alpha_k R}{t_2} \geq \alpha_k \min\{\frac{R}{t_2}, \| u_n \|_k\} = \gamma_k(t_2).$$

Daí,

$$\gamma_k(t_1) > \gamma_k(t_2).$$

- Suponha agora $\gamma_k(t_1) = \alpha_k \| u_n \|_k$.

Então, $\gamma_k(t_1) = \alpha_k \|u_n\|_k \geq \alpha_k \min\{\frac{R}{t_2}, \|u_n\|_k\} = \gamma_k(t_2)$.

Em qualquer caso, tem-se $\gamma_k(t_1) > \gamma_k(t_2)$.

Assim, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, γ_k é decrescente com $t > 0$.

Seja então $(e_s) \subset \mathbb{R}$ uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\lim_{s \rightarrow +\infty} e_s = 0$. Considere agora $\delta_k(s) := \gamma_k(e_s)$.

Assim, para $(\delta_k(s))$, temos:

- $\delta_k(s) \geq 0, \quad \forall s, k \in \mathbb{N}$;
- Fixado $k \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{s \rightarrow +\infty} \delta_k(s) = \gamma_k(0)$;
- Se $s > r$, então $\delta_k(s) \leq \delta_k(r)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pelo **Teorema da Convergência Monótona** para séries de números reais, temos:

$$\sum_{k \geq 0} \gamma_k(0) = \sum_{k \geq 0} \lim_{s \rightarrow +\infty} \delta_k(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \delta_k(s).$$

Pelo **Lema 4.2**, temos:

$$\sum_{k \geq 0} \gamma_k(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \delta_k(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} \gamma_k(t).$$

Mas podemos ainda reescrever, usando a definição de $\gamma_k(t)$, o que segue:

$$\sum_{k \geq 0} \alpha_k \|u_n\|_k = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{t} \alpha_k \min\{R, t \|u_n\|_k\}. \quad (4.21)$$

Voltemos agora a nossa atenção ao primeiro membro de (4.20). Seja $g_k(t) := \|\bar{y} - F(\bar{x} + tu_n)\|_k$. Então o primeiro membro pode ser reescrito como:

$$- \sum_{k \geq 0} \beta_k \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t - 0}. \quad (4.22)$$

Notemos que qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\|\bar{x} + tu_n\|_k \leq \|\bar{x}\|_k + t \|u_n\|_k.$$

Como $\|\bar{x}\|_{k_0} < R$, segue que existe $0 < \bar{t}$ tal que

$$\|\bar{x} + tu_n\|_{k_0} < R, \quad \forall t \in [0, \bar{t}].$$

Sem perda de generalidade, consideraremos $0 < \bar{t} \leq 1$.

Como F é *Gâteaux-Diferenciável*, pelo **Lema 4.1**, para cada $k \in \mathbb{N}$, g_k tem uma derivada à direita em qualquer $0 \leq t \leq 1$ e vale:

$$|g'_{k+}(t)| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{g_k(t+h) - g_k(t)}{h} \right| = |\langle y_k^*, DF(\bar{x} + tu_n)u_n \rangle| \leq \|DF(\bar{x} + tu_n)u_n\|_k, \quad (4.23)$$

onde $y_k^* \in \partial \|F(\bar{x} + tu_n)\|_k$ e $\|y_k^*\|_k^* = 1$.

Consideremos agora, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(t) := \|F(\bar{x} + tu_n)\|_k, \quad t \in [0, 1].$$

f_k tem uma derivada à direita em qualquer ponto $t \in [0, 1]$, e $f'_{k+}(t) \leq |f'_{k+}(t)| \leq \|DF(\bar{x} + tu_n)u_n\|_k$, ainda pelo **Lema 4.1**. A partir daqui, escreveremos apenas $f'_k(t)$ no lugar de $f'_{k+}(t)$ e $g'_k(t)$ no lugar de $g'_{k+}(t)$, já que essas derivadas existem.

Pela condição 3, temos:

$$f'_k(t) \leq \|DF(\bar{x} + tu_n)u_n\|_k \leq c_1(u_n)[m_k \|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x} + tu_n)\|_k].$$

Daí, pela definição de $f_k(t)$, temos:

$$f'_k(t) - c_1(u_n)f_k(t) \leq c_1(u_n)m_k \|u_n\|_{k+d_1}.$$

Integrando de 0 até t esta expressão:

$$f_k(t) + m_k \|u_n\|_{k+d_1} \leq e^{c_1(u_n)t} [m_k \|u_n\|_{k+d_1} + \|F(\bar{x})\|_k].$$

Substituindo esta inequação na condição 3 e usando (4.19), temos:

$$\|DF(\bar{x} + tu_n)u_n\|_k \leq C_1(u_n)m_k m'_{k+d_1} [c_0(v_n)]^{k+d_1+d_2} + C_1(u_n) \|F(\bar{x})\|_k := \ell_k,$$

onde $C_1(u_n) = e^{c_1(u_n)t}$ provem do fato da função exponencial e^t ser crescente.

Vale notar que ℓ_k não depende de t para todo k .

Desse modo, g_k é *lipschitziana* com constante de Lipschitz ℓ_k , já que g'_{k+} é limitada por ℓ_k . Então, por (4.23),

$$\beta_k \left| \frac{g_k(t) - g_k(0)}{t - 0} \right| \leq \beta_k \ell_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, \bar{t}].$$

Note que

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \ell_k = \sum_{k \geq 0} C_1(u_n) \beta_k m_k m'_{k+d_1} [c_0(v_n)]^{k+d_1+d_2} + \sum_{k \geq 0} C_1(u_n) \beta_k \|F(\bar{x})\|_k.$$

Pela escolha de (β_k) , segue que $\sum_{k \geq 0} C_1(u_n) \beta_k m_k m'_{k+d_1} [c_0(v_n)]^{k+d_1+d_2}$ converge, bastando tomar como o natural mencionado nas hipóteses, o menor natural maior do que $[c_0(v_n)]^{d_1+d_2}$.

Agora, usando que $0 \leq f(\bar{x}) \leq f(0)$ e a definição de f , temos:

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k < +\infty.$$

Daí, pela desigualdade triangular aplicada em cada parcela $\|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k$, temos:

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \|F(\bar{x})\|_k \leq 2 \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k < +\infty.$$

Mostramos assim que

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \ell_k < +\infty.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\psi_k(r) := \beta_k \left| \frac{g_k(\frac{1}{r}) - g_k(0)}{\frac{1}{r} - 0} \right|$, com $r \in \mathbb{N}$.

Temos então:

- $0 \leq |\psi_k(r)| \leq \beta_k \ell_k$, qualquer que seja $r \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_k(r) = \beta_k g'_k(0) \leq \beta_k \ell_k$ e portanto, $0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k |g'_k(0)| < +\infty$.

Note que $(\psi_k(r))$ satisfaz às condições do **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue** para séries de números reais. Tal teorema nos fornece:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \beta_k \left(\frac{g_k(\frac{1}{r}) - g_k(0)}{\frac{1}{r} - 0} \right) = \sum_{k \geq 0} \lim_{r \rightarrow +\infty} \beta_k \left(\frac{g_k(\frac{1}{r}) - g_k(0)}{\frac{1}{r} - 0} \right) = \sum_{k \geq 0} \beta_k g'_k(0).$$

Novamente, pelo **Lema 4.2**,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} \beta_k \left(\frac{g_k(t) - g_k(0)}{t - 0} \right) = \sum_{k \geq 0} \beta_k g'_k(0). \quad (4.24)$$

Agora, substituindo (4.21) e (4.24) em (4.15), temos:

$$\sum_{k \geq 0} -\beta_k g'_k(0) \leq A \sum_{k \geq 0} \alpha_k \|u_n\|_k. \quad (4.25)$$

Agora, pelo **Lema 4.1**, denote por $N_k = \partial \|\cdot\|_k$ sobre Y_k .

Então, dado $y \neq 0$, temos:

$$y^* \in N_k(y) \iff \|y^*\|_k^* = 1 \quad e \quad \langle y^*, y \rangle_k = \|y\|_k.$$

Sendo assim, seja $y_k^*(n) = N_k(F(\bar{x}) - \bar{y})$ tal que

$$g'_k(0) = \langle y_k^*(n), DF(\bar{x})u_n \rangle_k = \langle y_k^*(n), DF(\bar{x} + 0u_n)u_n \rangle_k \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25), temos:

$$\sum_{k \geq 0} -\beta_k g'_k(0) = \sum_{k \geq 0} -\beta_k \langle y_k^*(n), DF(\bar{x} + 0u_n)u_n \rangle_k \leq A \sum_{k \geq 0} \alpha_k \|u_n\|_k. \quad (4.27)$$

Como por hipótese, $F(\bar{x}) - \bar{y} \neq 0$, a caracterização de $N_k(F(\bar{x}) - \bar{y})$ nos dá:

$$\langle y_k^*(n), F(\bar{x}) - \bar{y} \rangle_k = \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|_k \quad (4.28)$$

e também,

$$\|y_k^*(n)\|_k^* = 1. \quad (4.29)$$

Passo 3:

Como $u_n = -L(\bar{x})v_n$ e $DF(\bar{x})u_n = -v_n$, a equação (4.27) se torna:

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k \langle y_k^*(n), v_n \rangle_k \leq A \sum_{k \geq 0} \alpha_k \|L(\bar{x})v_n\|_k. \quad (4.30)$$

Consideremos agora, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_k(n) := \beta_k \langle y_k^*(n), v_n \rangle_k \text{ e } \tau_k(n) = \alpha_k \| L(\bar{x})v_n \|_k .$$

Temos então:

$$|\varphi_k(n)| = \beta_k |\langle y_k^*(n), v_n \rangle_k| \leq \beta_k \| y_k^*(n) \|_k^* \cdot \| v_n \|_k = \beta_k \| v_n \|_k .$$

Como $\| v_n \|_k \leq c_3 \| v \|_k$ (por (4.17)), temos:

$$|\varphi_k(n)| \leq \beta_k c_3(v) \| v \|_k . \quad (4.31)$$

Temos ainda:

$$|\tau_k(n)| = \alpha_k \| L(\bar{x})v_n \|_k = \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} \| L(\bar{x})v_n \|_k .$$

Pela condição 5 do enunciado,

$$|\tau_k(n)| \leq \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} m'_k \| v_n \|_{k+d_2} = \beta_{k+d_2} \| v_n \|_{k+d_2} .$$

Daí, pela desigualdade (4.17), temos:

$$|\tau_k(n)| \leq c_3(v) \beta_{k+d_2} \| v \|_{k+d_2} = c_3(v) \beta_{k+d_2} \| F(\bar{x}) - \bar{y} \|_{k+d_2} . \quad (4.32)$$

Agora, por (4.10), como $0 \leq f(\bar{x}) \leq f(0) < +\infty$, então

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \| F(\bar{x}) - \bar{y} \|_k \leq \sum_{k \geq 0} \beta_k \| \bar{y} \|_k < +\infty .$$

Mostramos com isso que o segundo membro de (4.32) forma uma série convergente. Note agora, que como

$$\| L(\bar{x})(v_n - v) \|_k \leq m'_k \| v_n - v \|_{k+d_2}$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| L(\bar{x})v_n \|_k = \| L(\bar{x})v \|_k .$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_k(n) = \alpha_k \| L(\bar{x})v \|_k .$$

Já que $v = F(\bar{x}) - \bar{y}$, por (4.28) e (4.29) temos:

$$|\langle y_k^*(n), v_n \rangle_k - \| v \|_k| = |\langle y_k^*(n), v_n \rangle_k - \langle y_k^*(n), v \rangle_k| = |\langle y_k^*(n), v_n - v \rangle_k| \leq \| v_n - v \|_k .$$

Consequentemente, de (4.16):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_k \langle y_k^*(n), v_n \rangle_k = \beta_k \| v \|_k .$$

Recapitulando,

• Para $(\varphi_k(n))$, mostramos que:

1. $|\varphi_k(n)| \leq c_3(v) \beta_k \| F(\bar{x}) - \bar{y} \|_k, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_k(n) = \beta_k \| v \|_k;$
3. $\sum_{k \geq 0} \beta_k \| v \|_k < +\infty.$

• Para $(\tau_k(n))$, mostramos que:

1. $|\tau_k(n)| \leq c_3(v) \beta_{k+d_2} \| F(\bar{x}) - \bar{y} \|_{k+d_2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_k(n) = \alpha_k \| L(\bar{x})v \|_k;$
3. $\sum_{k \geq 0} \alpha_k \| L(\bar{x})v \|_k \leq \sum_{k \geq 0} \alpha_k m'_k \| v \|_{k+d_2} = \sum_{k \geq 0} \beta_{k+d_2} \| v \|_{k+d_2} .$

Mostramos então, que ambas as sequências acima, satisfazem às condições do **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue** para séries de números reais.

Sendo assim, temos como resultados deste teorema:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \beta_k \langle y_k^*(n), v_n \rangle_k = \sum_{k \geq 0} \beta_k \| v \|_k$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \alpha_k \| L(\bar{x})v_n \|_k = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \| L(\bar{x})v \|_k .$$

Aplicando o limite $n \rightarrow +\infty$ em (4.30), temos:

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k \geq 0} \alpha_k \|L(\bar{x})v\|_k = A \sum_{k \geq 0} \frac{\beta_{k+d_2}}{m'_k} \|L(\bar{x})v\|_k.$$

Como $\|L(\bar{x})v\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2}$, segue que

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k \|v\|_k \leq A \sum_{k \geq 0} \beta_{k+d_2} \|v\|_{k+d_2}.$$

No entanto, como ambas são séries de termos não negativos, o resultado da esquerda deve ser maior do que o resultado do somatório da direita. Isto acarreta em $A \geq 1$.

Mas

$$A = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{R' \alpha_{k_0}} \sum_{k \geq 0} \beta_k \|\bar{y}\|_k < \frac{\beta_{k_0+d_2} R'}{m_{k_0}} \frac{1}{R' \alpha_{k_0}} = 1.$$

Esta contradição mostra que $F(\bar{x}) = \bar{y}$. ■

Corolário 4.1. (*Sobrejetividade Local*) Sejam $X = \bigcap_{k \geq 1} X_k$ e $Y = \bigcap_{k \geq 1} Y_k$ dois Espaços de Fréchet Graduados, com Y padrão. Seja ainda $F : X \rightarrow Y$ satisfazendo as condições de (1) até (5) do Teorema 3. Suponha que:

$$\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}.$$

Então, para cada $\mu > m'_{k_0}$, existe algum $x \in B_X(k_0, R)$ tal que:

$$\|x\|_{k_0} \leq \mu \|y\|_{k_0+d_2},$$

e ainda:

$$F(x) = y.$$

Dem.:

Seja $\mu > m'_{k_0}$.

Como $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$, segue que $m'_{k_0} \|y\|_{k_0+d_2} < R$.

Como $\mu > m'_{k_0}$, segue que $m'_{k_0} \|y\|_{k_0+d_2} < \mu \|y\|_{k_0+d_2}$.

Seja agora R' tal que

$$R' > m'_{k_0} \|y\|_{k_0+d_2}$$

e

$$R' < \min\{R, \mu \|y\|_{k_0+d_2}\}.$$

Daí, temos:

$$m'_{k_0} \|y\|_{k_0+d_2} < R' < \min\{R, \mu \|y\|_{k_0+d_2}\}.$$

Sejam

$$0 < c := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^k}$$

e

$$0 < h < \frac{\frac{R'}{m'_{k_0}} - \|y\|_{k_0+d_2}}{c}.$$

Desse modo, $\|y\|_{k_0+d_2} + h \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^k} < \frac{R'}{m'_{k_0}}.$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 0$, seja

$$\beta_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k < k_0 + d_2 \\ 1 & \text{se } k = k_0 + d_2 \\ \frac{h}{k^k \max\{\|y\|_k, m_k m'_{k+d_1}\}} & \text{se } k > k_0 + d_2 \end{cases}$$

Vamos mostrar que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k < +\infty.$$

De fato,

$$p_k := \max\{\|y\|_k, m_k m'_{k+d_1}\}, \quad k > k_0 + d_2, \text{ é tal que } p_k \geq m_k m'_{k+d_1}.$$

Logo,

$$\frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{m_k m'_{k+d_1}}, \quad \forall k > k_0 + d_2.$$

E daí,

$$\frac{h}{p_k k^k} \leq \frac{h}{k^k m_k m'_{k+d_1}}, \quad \forall k > k_0 + d_2.$$

Como $\frac{h}{k^k p_k} = \beta_k$, se $k > k_0 + d_2$, então seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer.

Se $k > N = \max\{2n, k_0 + d_2\}$, temos:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

e

$$\frac{h}{k^k p_k} = \beta_k.$$

Consequentemente,

$$\frac{h}{p_k k^k} \leq \frac{h}{k^k m_k m'_{k+d_1}}, \quad \forall k > k_0 + d_2.$$

Como $\frac{h}{p_k k^k} = \beta_k$, segue que

$$\beta_k \leq \frac{h}{k^k m_k m'_{k+d_1}}, \quad \forall k > k_0 + d_2.$$

Logo, se $k > N$, então

$$\beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \leq h \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq h \frac{1}{2^k}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k>N} \beta_k m_k m'_{k+d_1} n^k \leq \sum_{k>N} h \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Por outro lado, temos que se $k > k_0 + d_2$, então:

$$\beta_k \|y\|_k = \frac{h}{k^k p_k} \|y\|_k \leq \frac{h \|y\|_k}{k^k \|y\|_k} = \frac{h}{k^k}.$$

Portanto, temos, somando membro a membro e pela definição de β_k :

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k \|y\|_k = \|y\|_{k_0+d_2} + \sum_{k > k_0+d_2} \beta_k \|y\|_k \leq \|y\|_{k_0+d_2} + \sum_{k > k_0+d_2} \frac{h}{k^k} < \frac{R'}{m'_{k_0}} < +\infty.$$

Para mostrar a existência do elemento $x \in B_X(k_0, R)$ basta aplicar o **Teorema 4.2** com $R = R'$ como encontrado neste corolário. ■

Lema 4.3. *Seja $\lambda \geq 0$. Então a condição (3) do **teorema 4.2** é equivalente a:*

$$\forall k, \quad \|DF(x)u\|_k \leq c'_1(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + \lambda), \quad (4.33)$$

para algum $c'_1(u) \geq 0$.

Dem.:

(3) $\implies$ (4.33) :

Imediato, para $c_1(u) = c'_1(u)$.

(4.33) $\implies$ (3) :

Se $u = 0$ o resultado é trivialmente verificado. Sejam então, $u \neq 0$ e

$$c_1(u) = c'_1(u) \left(1 + \frac{\lambda}{m_0 \|u\|_0} \right).$$

Então,

$$c_1(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k) \geq c'_1(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k + \lambda).$$

Logo, vale (3). ■

Corolário 4.2 (Inversa Lipschitziana). *Para cada $y_0, y_1 \in B_Y(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}})$, todo $x_0 \in F^{-1}(y_0)$, e todo $\mu > m'_{k_0}$ temos:*

$$\inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} \mid x_1 \in F^{-1}(y_1)\} = \inf\{\|x_0 - x_1\|_{k_0} \mid F(x_1) = y_1\} \leq \mu \|y_0 - y_1\|_{k_0+d_2}.$$

Dem.:

Como $y_0, y_1 \in B_Y(k_0 + d_2, \frac{R}{m'_{k_0}})$, então

$$m'_{k_0} \| y_0 \|_{k_0+d_2} < R$$

e

$$m'_{k_0} \| y_1 \|_{k_0+d_2} < R.$$

Seja então,

$$p = \max\{m'_{k_0} \| y_0 \|_{k_0+d_2}, m'_{k_0} \| y_1 \|_{k_0+d_2}\}.$$

Escolha $R' \in (p, R)$.

Então, $R' < R$ e $\max\{\| y_0 \|_{k_0+d_2}, \| y_1 \|_{k_0+d_2}\} < \frac{R}{m'_{k_0}}$.

Considere o segmento de reta $y_t := y_0 + t(y_1 - y_0)$, com $t \in [0, 1]$.

Note que

$$\| y_t \|_{k_0+d_2} = \| y_0 + t(y_1 - y_0) \|_{k_0+d_2} \leq (1-t) \| y_0 \|_{k_0+d_2} + t \| y_1 \|_{k_0+d_2} < \frac{R'}{m'_{k_0}},$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Então, pelo corolário anterior, existe algum $x_t \in F^{-1}(y_t)$, com $\| x_t \|_{k_0} < R'$. A função

$$F_t(x) = F(x + x_t) - y_t$$

satisfaz às condições de (1) a (5) do **teorema 4.2**, com R substituído por $r := R - R'$. De fato, primeiro, mostremos que o vetor $x + x_t$ está na bola $B_X(k_0, R)$:

$$x \in B_X(k_0, r) \implies \| x \|_{k_0} < r = R - R' \implies \| x \|_{k_0} + R' < R.$$

Daí, $\| x + x_t \|_{k_0} \leq \| x \|_{k_0} + \| x_t \|_{k_0} < \| x \|_{k_0} + R' < R$. Portanto, $x + x_t \in B_X(k_0, R)$.

Agora, note que:

- (1) $F_t(0) = F(x_t) - y_t = y_t - y_t = 0$, $\forall t \in [0, 1]$;
- (2) Como F e as translações são contínuas e Gâteaux-Diferenciáveis, segue que F_t também é contínua e Gâteaux-Diferenciável, qualquer que seja $t \in [0, 1]$;
- (3) Use o **lema 4.3** para x substituído por $x + x_t$ e use a desigualdade triangular;
- (4) Imediato para $x + x_t$;
- (5) Imediato para $x + x_t$.

Tome então, $x_0 \in F^{-1}(y_0)$. Pelo corolário anterior aplicado a F_0 , vemos que para cada y tal que

$$\|y - y_0\|_{k_0+d_2} \leq \frac{r}{m'_{k_0}},$$

temos algum $x \in F^{-1}(y)$ com:

$$\|x_0 - x\|_{k_0} \leq \mu \|y_0 - y\|_{k_0}.$$

Vamos agora ligar y_0 a y_1 por uma cadeia de pontos alinhados, $y_0 = y'_0, y'_1, \dots, y'_N = y_1$, tais que a distância entre y'_n e y'_{n+1} seja sempre inferior a $\frac{r}{m'_{k_0}}$, e para cada y'_n escolha $x_n \in F^{-1}(y'_n)$ tal que:

$$\|x_n - x_{n+1}\|_{k_0} \leq \mu \|y'_n - y'_{n+1}\|_{k_0+d_2}.$$

Somando membro a membro acima em n , temos:

$$\|x_0 - x_1\|_{k_0} \leq \sum_{n=0}^N \|x_n - x_{n+1}\|_{k_0} \leq \mu \sum_{n=0}^N \|y'_n - y'_{n+1}\|_{k_0+d_2} = \mu \|y_1 - y_0\|_{k_0+d_2}.$$

A última igualdade vem do fato de os pontos y'_i estarem alinhados. ■

Corolário 4.3 (Regularidade Finita da Inversa). *Suponha que F se estenda a uma aplicação contínua $\bar{F} : X_{k_0} \rightarrow Y_{k_0+d_1}$. Escolha algum $y \in Y_{k_0+d_2}$ com $\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$. Então, existe algum $x \in X_{k_0}$ tal que $\|x\|_{k_0} < R$ e $\bar{F}(x) = y$.*

Dem.:

Escolha uma sequência $(y_n) \subset Y$ tal que $\|y_n - y\|_{k_0+d_2} \leq \frac{1}{2^n}$. Pelo corolário anterior, podemos obter uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que

$$\|x_n - x_{n+1}\|_{k_0} \leq \mu \|y_n - y_{n+1}\|_{k_0+d_2} \leq \mu \frac{1}{2^n}.$$

Isto mostra que (x_n) é de Cauchy em X_{k_0} . Como X_{k_0} é completo, existe $x \in X_{k_0}$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $\|x\|_{k_0} < R$. Então, pela continuidade de $\bar{F}$, temos $\bar{F}(x) = y$. ■

Vamos resumir todos os resultados vistos até aqui em um só teorema:

Teorema 4.3 (Teorema da Função Inversa). *Sejam $X = \bigcap_{k \geq 0} X_k$ e $Y = \bigcap_{k \geq 0} Y_k$ espaços graduados de Fréchet, com Y padrão, e seja F uma aplicação de X em Y . Admita que*

existam algum inteiro positivo k_0 , algum $R > 0$ (possivelmente igual a $+\infty$), inteiros positivos d_1 e d_2 e duas sequências positivas não decrescentes (m_k) e (m'_k) tais que, para $\|x\|_{k_0} < R$, temos:

$$(1) \quad F(0) = 0;$$

$$(2) \quad F \text{ é contínua e diferenciável segundo Gâteaux com derivada } DF(x);$$

$$(3) \quad \text{Para cada } u \in X \text{ existe um número positivo } c_1(u) \text{ tal que:}$$

$$\forall k, \quad \|DF(x)u\|_k \leq c_1(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(x)\|_k);$$

$$(4) \quad \text{Existe uma aplicação linear } L(x) : Y \rightarrow X \text{ tal que } DF(x)L(x) = I_Y;$$

$$(5) \quad \text{Para cada } v \in Y, \text{ temos:}$$

$$\forall k, \quad \|L(x)v\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2}.$$

Então F aplica a bola $\{\|x\|_{k_0} < R\} \subset X$ na bola $\{\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}\} \subset Y$, e para todo $\mu > m'_{k_0}$ a inversa F^{-1} é lipschitziana:

$$\forall x_1 \in F^{-1}(y_1), \quad \inf\{\|x_1 - x_2\|_{k_0} \mid x_2 \in F^{-1}(y_2)\} \leq \mu \|y_1 - y_2\|_{k_0+d_2}.$$

Se F se estende a uma aplicação contínua $\bar{F} : X_{k_0} \rightarrow Y_{k_0+d_1}$, então $\bar{F}$ aplica a bola $\{\|x\|_{k_0} < R\} \subset X_{k_0}$ na bola $\{\|y\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}\} \subset Y_{k_0+d_2}$, e a inversa $\bar{F}^{-1}$ também é lipschitziana.

Teorema 4.4. *Sejam $X = \bigcap_{k \geq 0} X_k$ e $Y = \bigcap_{k \geq 0} Y_k$ espaços graduados de Fréchet, com Y padrão, e seja $F(\varepsilon, x) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x)$ uma aplicação de $X \times \mathbb{R}$ em Y . Admita que existam algum inteiro positivo k_0 , algum $R > 0$, algum $\varepsilon_0 > 0$, inteiros positivos d_1 e d_2 e duas sequências positivas não decrescentes (m_k) e (m'_k) de modo, para cada par (x, ε) tal que $\|x\|_{k_0} < R$ e $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, temos:*

$$(1) \quad F_0(0) = 0 \text{ e } F_1(0) \neq 0;$$

$$(2) \quad F_0 \text{ e } F_1 \text{ são contínuas e diferenciáveis segundo Gâteaux};$$

$$(3) \quad \text{Para cada } u \in X \text{ existe um número positivo } c_1(u) \text{ tal que:}$$

$$\forall k, \quad \|DF(\varepsilon, x)u\|_k \leq c_1(u)(m_k \|u\|_{k+d_1} + \|F(\varepsilon, x)\|_k);$$

(4) Existe uma aplicação linear $L(\varepsilon, x) : Y \rightarrow X$ tal que $DF(\varepsilon, x)L(\varepsilon, x) = I_Y$;

(5) Para cada $v \in Y$, temos:

$$\forall k, \quad \|L(\varepsilon, x)v\|_k \leq m'_k \|v\|_{k+d_2}.$$

Então, para cada ε tal que:

$$|\varepsilon| < \min \left\{ \frac{R}{m'_{k_0}} \|F_1(0)\|_{k_0+d_2}^{-1}, \varepsilon_0 \right\}$$

e todo $\mu > m'_{k_0}$, existe um x_ε tal que:

$$F(\varepsilon, x_\varepsilon) = 0$$

e

$$\|x_\varepsilon\|_{k_0} \leq \mu |\varepsilon| \|F_1(0)\|_{k_0+d_2}.$$

Dem.:

Fixemos $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Considere a função

$$G_\varepsilon(x) = F_0(x) + \varepsilon(F_1(x) - F_1(0)).$$

G_ε satisfaz as condições de (1) a (5) do teorema anterior. A equação $F(\varepsilon, x_\varepsilon) = 0$ pode ser reescrita como $G_\varepsilon(x) = -\varepsilon F_1(0) := y$. Pelo teorema anterior, somos capazes de resolvê-lo, contanto que

$$\|y\|_{k_0+d_2} = |\varepsilon| \|F_1(0)\|_{k_0+d_2} < \frac{R}{m'_{k_0}}$$

e a solução x_ε satisfaz:

$$\|x_\varepsilon\|_{k_0} \leq \mu \|y\|_{k_0+d_2} = \mu |\varepsilon| \|F_1(0)\|_{k_0+d_2}. \quad \blacksquare$$

Apêndice

4.5 Introdução

Este apêndice é uma aplicação de [8] e, como nesse texto, X denotará um conjunto não vazio qualquer; $\overline{\mathbb{R}}$ representa o conjunto dos números reais incluindo os elementos $+\infty$ e $-\infty$; se f e g são funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$, então escreveremos $f \leq g$ para indicar que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e por último, $f \vee g = \max\{f(x), g(x)\}$, $f \wedge g = \min\{f(x), g(x)\}$, $|f| = |f(x)|$ para $x \in X$.

4.6 A Integral de Daniell

Definição 4.3. Sejam X um conjunto não vazio, $\mathcal{E}$ o espaço vetorial das funções de X em $\mathbb{R}$ e I uma **funcional de Daniell** em $\mathcal{E}$, isto é, uma aplicação $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

- (1) $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$ (Isotonia)
- (2) $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ (Linearidade)
- (3) $f \in \mathcal{E}$, $f_n \in \mathcal{E}^+$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \geq f \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} I(f_n) \geq I(f)$. (Continuidade Inferior)

Onde $\mathcal{E}^+$ representa as funções de $\mathcal{E}$ que assumem apenas valores não negativos.

Nosso objetivo, é partir do espaço $(X, \mathcal{E}, I)$ e construir uma integral $\int$ que generaliza a integral I e conseqüentemente, descrever o conjunto das funções que são integráveis segundo esta nova integral. Tal conjunto será chamado $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}, I)$.

Seja $f : X \rightarrow [0, \infty]$ qualquer. Defina:

$$\bar{I} = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} I(f_n) \mid f_n \in \mathcal{E}^+, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \geq f \right\}.$$

Note que $\bar{I}(f)$ pode assumir o valor $+\infty$. No conjunto $\mathcal{P}$ de todas as funções $f : X \rightarrow [0, \infty]$ o funcional é isotônico e portanto, positivo. Isto segue da positividade de I . Temos ainda:

$$(4) \quad \bar{I}(\alpha f) = \alpha \bar{I}(f), \quad \alpha \geq 0 \quad (\text{Homogeneidade Positiva})$$

$$(5) \quad \bar{I}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \bar{I}(f_n) \quad (\text{Subaditividade Enumerável})$$

Pela isotonia de $\bar{I}$, obtemos de (5) que $\bar{I}$ é contínuo inferiormente em $\mathcal{P}$, isto é, (3) vale se trocarmos I por $\bar{I}$ e $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^+$ são trocados por $\mathcal{P}$. Claramente $\bar{I} \leq I$ em $\mathcal{E}^+$. Para um $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ seja $\|g\| = \bar{I}(|g|)$. Sejam $\mathcal{E}' = \{f \in \mathcal{E} \mid \|f\| < \infty\}$ e $\mathcal{F} = \{g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid \|g\| < \infty\}$.

Observação: Se $f = g - h$, com $g, h \in \mathcal{E}^+$, então $|f| \leq g + h \in \mathcal{E}^+$ e daí $\|f\| \leq I(g) + I(h) < \infty$. Portanto, se $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^+$, então $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$.

Definição 4.4. Uma função $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é chamada de *função nula* se $\|g\| = 0$. Um conjunto $A \subset X$ é chamado *conjunto nulo* se χ_A é uma função nula. Uma propriedade Q é dita valer quase sempre (q.s.) se Q vale fora de um conjunto nulo.

Proposição 4.2. (i) $\|g\| = 0 \Leftrightarrow g = 0$ (q.s.);

(ii) A união enumerável de conjuntos nulos é ainda um conjunto nulo;

(iii) $g = f$ (q.s.) $\Rightarrow \|g\| = \|f\|$;

(iv) $g \in \mathcal{F} \Rightarrow \{x \in X \mid |g(x)| = \infty\}$ é um conjunto nulo.

Dem.:

(i)

($\Rightarrow$) Sejam $\|g\| = 0$ e $A = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$. Como $\chi_A \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g|$, temos que $\|\chi_A\| = 0$ por isotonia e subaditividade de $\bar{I}$. Então A é um conjunto nulo, e $g = 0$ fora de A .

($\Leftarrow$) Seja $B \subset X$ um conjunto nulo tal que $g = 0$ fora de B . Como $|g| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \chi_B$, obtemos $\|g\| = 0$.

(ii)

Sejam $\{A_i\}$ uma sequência de conjuntos nulos e $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_i$. Então $\chi_A \leq \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_i}$. Daí, $\|\chi_A\| = 0$.

(iii)

É suficiente mostrar que: Se N é um conjunto nulo e $M = X - N$, então $\|g\chi_M\| = \|g\|$.

Esta última asserção vem de $|g\chi_M| \leq |g| \leq |g\chi_M| + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_N$.

(iv)

Seja $A = \{x \in X \mid |g(x)| = \infty\}$. Temos $n\chi_A \leq |g|$, então $n\|\chi_A\| \leq \|g\| < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|\chi_A\| = 0$. ■

Por conveniência, vamos identificar as funções que coincidem fora de um conjunto nulo. Segue disso e da proposição acima que $\mathcal{F}$ pontualmente com as operações usuais (onde definimos $(f + g)(x) = 0$, se $f(x) + g(x)$ não existe) é um espaço vetorial normado com a norma definida como acima. Podemos e iremos admitir que os elementos de $\mathcal{F}$ estão definidos apenas *quase sempre*, já que isso não muda o caráter de $\mathcal{F}$ ser um espaço vetorial normado. Nesse contexto, $\|\cdot\|$ é enumeravelmente subaditiva no seguinte sentido:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge pontualmente quase sempre (portanto, $\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|$ faz sentido), então

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|.$$

Isto segue da isotonia e da subaditividade enumerável de $\bar{I}$.

Teorema 4.5 (Teorema Generalizado de Beppo-Levi). *Se $f_n \in \mathcal{F}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$, então $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge pontualmente (q.s.) e $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n - \sum_{n=0}^k f_n \right\| \rightarrow 0$. Em particular, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{F}$.*

Dem.:

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ segue que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\| = \bar{I}(|f_n|) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} I(h_{n,k}) \mid h_{n,k} \in \mathcal{E}^+, \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k} \geq |f_n| \right\}.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível se obter uma sequência $h_{n,k} \in \mathcal{E}^+$ que satisfaz

$$\|f_n\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} I(h_{n,k}) < \|f_n\| + \frac{1}{2^n} \quad (4.34)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k} \geq |f_n| \quad (4.35)$$

Somando em n , cada lado da desigualdade (4.35), temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k} \geq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \quad (4.36)$$

Agora, notemos que

$$\bar{I}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\right) = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\| = \inf \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} I(g_s) \mid g_s \in \mathcal{E}^+, \sum_{s=0}^{\infty} g_s \geq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\}.$$

Dai,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\| \leq I\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} I(h_{n,k}) \quad (4.37)$$

onde (4.37) é obtido de (4.36) e da subaditividade enumerável de I .

Combinando (4.37) com (5.34), temos:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\| < \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| + 1 < \infty.$$

Por (iv) do teorema anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty \text{ quase sempre.}$$

Em particular, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge quase sempre, e satisfaz $\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n - \sum_{n=0}^k f_n \| \rightarrow 0$ pela subaditividade enumerável de $\| \cdot \|$. ■

Corolário 4.4. *Se (g_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{F}$, então existe $g \in \mathcal{F}$ com $\|g - g_k\| \rightarrow 0$ e $g_{k_n} \rightarrow g$, quase sempre, para alguma subsequência conveniente (g_{k_n}) .*

Dem.:

Como (g_k) é de Cauchy, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem g_{k_n} e $g_{k_{n+1}}$ tais que

$$\|g_{k_n} - g_{k_{n+1}}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Seja $f_n = g_{k_n} - g_{k_{n+1}}$.

Note que $\|f_n\| = \|g_{k_n} - g_{k_{n+1}}\| < \frac{1}{2^n}$.

Daí,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

Então, pelo teorema anterior aplicado em f_n :

$$g_{k_n} = g_{k_1} - \sum_{m=0}^{n-1} f_m \text{ converge quase sempre e se } g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{k_1} - \sum_{m=0}^{n-1} f_m, \text{ então, } g_{k_n} \rightarrow g.$$

Note que $g \in \mathcal{F}$ pois, $g_{k_1}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{F}$. ■

Corolário 4.5. $\mathcal{F}$ é completo.

Definição 4.5. Uma função $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita **integrável** se para cada $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{E}'$ com $\|g - f\| < \varepsilon$. O espaço de todas as funções integráveis é denotado por $\mathcal{L}^1$.

Observação: $\mathcal{L}^1$ é o fecho de $\mathcal{E}'$ em $\mathcal{F}$. Como em um espaço métrico, o fecho de um conjunto é fechado, segue que $\mathcal{L}^1$ é fechado em $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é completo, segue que $\mathcal{L}^1$ é completo.

A partir de agora, nós usaremos a condição (3) de I . Então $\bar{I} \geq I$ em $\mathcal{E}^+$ e, como nós já tínhamos a desigualdade contrária, então $\bar{I} = I$ em $\mathcal{E}^+$.

Proposição 4.3. $|I(f)| \leq \|f\|$ para $f \in \mathcal{E}'$.

Dem.:

Seja $g_n \in \mathcal{E}^+$ tal que $f \leq |f| \leq \sum_{n=0}^{\infty} g_n$. Pela continuidade inferior de I , temos $I(f) \leq \sum_{n=0}^{\infty} I(g_n)$. Consequentemente, $I(f) \leq \|f\|$. Ainda como, $-I(f) = I(-f) \leq \|f\|$, a asserção está provada. ■

O corolário acima implica que o funcional I é contínuo sobre $\mathcal{E}'$. Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos estender continuamente esse funcional ao espaço $\mathcal{L}^1$. Isto induz então, a seguinte

Definição 4.6. A extensão de $I|_{\mathcal{E}'}$ a um funcional linear contínuo na norma de $\mathcal{L}^1$ é chamada de *I -integral*. Seu valor em f é denotado por $\int f dI$ ou simplesmente $\int f$ e chamada **a integral de f** com respeito a I .

4.7 O Teorema de Beppo-Levi

Teorema 4.6 (Teorema de Beppo-Levi). *Seja $f_n \in \mathcal{L}^1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$. Então $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge, quase sempre, e $\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n - \sum_{n=0}^k f_n\| \rightarrow 0$, em particular $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^1$ e $\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n$ pela continuidade da norma na integral.*

Dem.:

A afirmação segue do teorema generalizado de Beppo-Levi e do fato de que $\mathcal{L}^1$ é um subespaço fechado de $\mathcal{F}$. ■

Considere válidas as seguintes condições:

- (a) Cada $f \in (\mathcal{L}^1)^+$ pode ser aproximado em $\|\cdot\|$ por elementos de $\mathcal{E}^+$;
- (b) $\mathcal{L}^1$ é um reticulado, isto é: $f, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{L}^1$.
(É suficiente que $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f^+ \in \mathcal{L}^1$.)

Se $\mathcal{E}$ é reticulado, então (a) e (b) são satisfeitos pois $|f^+ - h^+| \leq |f - h|$. Como $\|\cdot\| = \bar{I} = I = \int$ em $\mathcal{E}^+$ e como a integral $\int$ é contínua na norma $\|\cdot\|$, a condição (a) implica em :

$$(c) \int f = \|f\| \text{ para } f \in (\mathcal{L}^1)^+.$$

A condição (c) implica, em especial, que $\int$ é um funcional positivo em $\mathcal{L}^1$.

4.8 O Teorema da Convergência Monótona

Se (c) vale, então:

Teorema 4.7 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja (f_n) uma sequência de funções não negativas e integráveis tal que $f_n \nearrow f$, $\int f_n \leq \text{const} < \infty$. Então $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. Em particular $f \in \mathcal{L}^1$ e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.*

Dem.:

Considere $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$, onde $g_n = f_{n+1} - f_n \geq 0$. Como, por (c), $\int$ e $\|\cdot\|$ coincidem em $(\mathcal{L}^1)^+$, o resultado segue do teorema de Beppo-Levi. ■

4.9 O Lema de Fatou

Seja agora $\mathcal{L}^1$ um reticulado. O que é o caso, em particular, se $\mathcal{E}$ é um reticulado. Então:

Teorema 4.8 (Lema de Fatou). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis e não negativas tais que $\liminf f_n = f$. Então,*

$$\int f = \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Dem.:

Sejam $g = \liminf f_n$ e $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$, para $k \geq 0$. Então $0 \leq g_0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x),$$

para todo $x \in X$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, $\int g = \lim \int g_k$. Como $g_k \leq f_k$, segue que

$$\lim \int g_k \leq \liminf \int f_k. \quad \blacksquare$$

4.10 O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Assumindo ainda $\mathcal{L}^1$ é um reticulado, obtemos:

Teorema 4.9 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja f_n , $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções integráveis em X tais que $f(x) = \lim f_n(x)$, para todo $x \in X$. Suponha que exista $g \in \mathcal{L}^1$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $f \in \mathcal{L}^1$ e*

$$\lim \int |f_n - f| = 0.$$

Dem.:

Como $|f| \leq g$, temos $f \in \mathcal{L}^1$. Seja $g_n = 2g - |f_n - f|$, $n \geq 0$. Pelo Lema de Fatou,

$$\int 2g = \int \liminf g_n \leq \liminf \int g_n = \int 2g - \limsup \int |f_n - f|.$$

Como $g \in \mathcal{L}^1$, concluímos que $\limsup \int |f_n - f| \leq 0$. Logo, $\lim \int |f_n - f| = 0$. ■

Observação: Os conjuntos integráveis (isto é, os conjuntos em que a função característica pertence a $\mathcal{L}^1$) formam um anel já que $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$ e $\chi_{A \setminus B} = \chi_{A \cup B} - \chi_B$. Os conjuntos mensuráveis (isto é, os conjuntos cuja intersecção com conjuntos integráveis é integrável) então formam uma σ -álgebra $\mathcal{M}$, e obtemos uma medida μ em $\mathcal{M}$ definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} \int \chi_A & \text{se } A \text{ é integrável} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se a condição de Stone

$$(d) \ f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \wedge 1 \in \mathcal{L}^1$$

é satisfeita, segue do Teorema da Convergência Monótona que $\mathcal{L}^1$ é um reticulado: para $f \in \mathcal{L}^1$, temos $f \wedge \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(nf \wedge 1) \in \mathcal{L}^1$ e $f \wedge \frac{1}{n} \searrow f \wedge 0$. Do Teorema de Stone [15] e de (d) segue que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu)$ é válido, tal como usualmente se faz.

4.11 A Integral de Daniell para Séries de Números Reais

Vamos agora mostrar que é possível obter importantes resultados sobre as séries de números reais partindo da teoria da medida que foi estudada pela abordagem de Daniell acima.

Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{E}$ o conjunto das sequências de suporte limitado. Note que nessas condições, $\mathcal{E}$ é um reticulado. Definamos então sobre $\mathcal{E}$ o seguinte funcional:

$$I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por $I(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$. Temos que:

1. I é linear;
2. $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$;
3. Mostremos a continuidade inferior:

De fato, sejam $f \in \mathcal{E}$, f_n é uma sequência tal que $f_n \geq 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \geq f$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k) \geq f(k).$$

Somando ambos os lados em k e logo em seguida fazendo $k \rightarrow \infty$, temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Pelo teorema de *Tonelli* para séries [20], podemos trocar a ordem dos somatórios. Daí,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Mas pela definição de I , $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(k) = I(f_n)$ e $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = I(f)$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} I(f_n) \geq I(f).$$

Desse modo, I como definido acima, é um funcional de Daniell.

Naturalmente, $\mathcal{P}$ é o conjunto das sequências de números reais não negativos. Note que neste caso, $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ pois todo elemento de $\mathcal{E}$ tem soma finita. Temos então pela definição que $\mathcal{F}$ é o conjunto das sequências associadas a séries absolutamente convergentes.

Pelas observações anteriores, não é difícil perceber que a integral neste caso é o somatório infinito dos termos das sequências, que a função nula é a sequência nula e que o único subconjunto nulo sobre os naturais é o conjunto vazio. Ainda por definição, $\mathcal{L}^1$ é o próprio $\mathcal{F}$ já que como o vazio é o único conjunto de medida nula sobre os naturais, segue que duas funções são iguais quase sempre se, e somente se são iguais em todo o conjunto dos naturais. É conveniente denotar, no caso de séries de números reais, $\mathcal{L}^1$ por ℓ^1 que é o espaço das sequências associadas às séries absolutamente convergentes. Vamos agora dar uma interpretação dos teoremas anteriores para séries:

4.12 Alguns Resultados para Séries

Teorema 4.10 (Teorema de Beppo-Levi). *Seja $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^1$ uma sequência dupla de termos não negativos tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, se tenha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k < \infty.$$

Então,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k - \sum_{n=0}^k a_n^k \right| = 0.$$

Em particular, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k.$$

Teorema 4.11 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^1$ uma sequência dupla de termos não negativos tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k \nearrow a^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_n^k \leq \text{const} < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $(a^k) \in \ell^1$ e*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k.$$

Teorema 4.12 (Lema de Fatou). *Seja $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^1$ uma sequência dupla de termos não negativos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^k = a^k$. Então,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n^k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k.$$

Teorema 4.13 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^1$ uma sequência de termos não negativos tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$. Suponha ainda que exista $(b^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ tal que $|a_n^k| \leq b^k$ quaisquer que sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então, $(a^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n^k - a^k| = 0.$$

Referências Bibliográficas

- [1] EKELAND, I.: “An Inverse Function Theorem in Fréchet Spaces”, *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Analyse Non Lineaire* 91-105, número 28, 2011.
- [2] EKELAND, I.: “Nonconvex minimization problems”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 1, number 3, may 1979.
- [3] FIGUEIREDO, D.G. DE: *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Berlim: Springer-Verlag, 1989.
- [4] HAMILTON, R.S.: “The Inverse Function Theorem of Nash and Moser”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 17, number 1, july 1982
- [5] HELEMSKII, A. YA.: *Lectures and exercises on Functional Analysis*, Providence: AMS, 2006.
- [6] HÖRMANDER, L.: “The Boundary Problem of Physical Geodesy”, *Arch. Rational Mech. Anal.* 62 (1976), 1-52.
- [7] HOUNIE, J. & MALAGUTTI, P.: *O teorema de Nash-Moser e suas aplicações*, Trabalho Apresentado no 19º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1993.
- [8] LEINERT, M.: “Daniell-Stone integration without the lattice condition”, *Arch. Math*, volume 38, 258-265, 1982.
- [9] MOSCATELLI, V.B. & SIMÕES, M.A.: “Generalized Nash-Moser smoothing operators and the structure of Fréchet Spaces”, *Studia Mathematica*, T. LXXXVII, 1987.
- [10] MOSER, J.: “A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations”, I *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 20 (1966), 265-315, II 499-535.
- [11] NASH, J.: “The imbedding problem for riemannian manifolds” , *Annals of Mathematics*, volume 63, number 1, january, 1956.

- [12] PHELPS, R.R.: *Convex Functions, Monotone Operators and differentiability*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [13] POPPENBERG, M.: “Smooth Solutions for a class of Nonlinear Parabolic Evolutions Equations”, *Journal of the London Mathematical Society*, volume 61, 2000.
- [14] POPPENBERG, M.: “An Inverse Function Theorem in Sobolev Spaces and Applications to Quasilinear Schrödinger Equations”, *J. Math. Anal. Appl.* 258 (2001), 146170.
- [15] ROYDEN, H. L.: *Real Analysis*, 3rd. ed. Prentice Hall, 1988.
- [16] RUDIN, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [17] SCHAEFFER, D. G.: “The Capacitor Problem”, *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1974/1975), 1143-1167.
- [18] SERGERAERT, F.: “Un Théorème de Fonctions Implicites sur Certains Espaces de Fréchet e Quelques Applications”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 4e serie, 5 (1972), 599-660.
- [19] SULLIVAN, F.: “ A characterization of complete metric spaces”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 83, number 2, october 1981.
- [20] TAO, T.: *An Introduction to measure theory*, American Mathematical Society, September 14, 2011.
- [21] ZEHNDER, E.: “Generalized Implicit Function Theorems with Applications to Small Divisor Problems”, *I Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975), 91-141; *II* 29 (1966), 49-113.