

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

CARLOS LÚCIO NUNES DE OLIVEIRA FILHO

EVOLUTÓIDES DE CURVAS PLANAS

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022**

CARLOS LÚCIO NUNES DE OLIVEIRA FILHO

EVOLUTÓIDES DE CURVAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Ady Cambraia Junior

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

O48e
2022

Oliveira Filho, Carlos Lúcio Nunes de, 1994-
Evolutóides de curvas planas / Carlos Lúcio Nunes de
Oliveira Filho. – Viçosa, MG, 2022.
1 dissertação eletrônica (86 f.): il.

Inclui apêndice.

Orientador: Ady Cambraia Junior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2022.

Referências bibliográficas: f. 85-86.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2022.217>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Geometria diferencial. 2. Curvas. 3. Singularidades
(Matemática). I. Junior, Ady Cambraia, 1981-. II. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 516.36

Bibliotecário(a) responsável: Alice Regina Pinto CRB6 2523

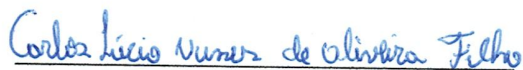
CARLOS LÚCIO NUNES DE OLIVEIRA FILHO

EVOLUTÓIDES DE CURVAS PLANAS

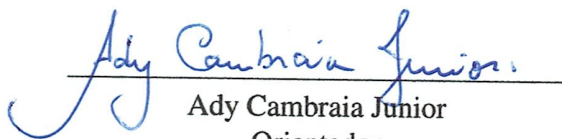
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 04 de março de 2022.

Assentimento:



Carlos Lúcio Nunes de Oliveira Filho
Autor



Ady Cambraia Junior
Orientador

*A Deus e aos meus pais,
Carlos Lúcio e Rozangela.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força todos dias, e por me permitir chegar até aqui.

Agradeço aos meus familiares que estiveram comigo durante essa jornada, em especial ao meus pais, Carlos Lúcio e Rozangela, pelo apoio e conselhos e por sempre acreditarem nas minhas decisões. Além disso, queria deixar um agradecimento em particular à minha Tia Gra e Tio Leo, pela importante contribuição que deram na minha educação.

À minha namorada Renata, pelo companherismo, momentos de estudos, conversas, apoio nos momentos difíceis e bons, e por sempre ter acreditado em mim. E por ter compartilhado seus sonhos. Certamente, sem ela tudo seria mais difícil.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, pelos conhecimentos compartilhados e serviços prestados. Em especial ao meu orientador Ady pelas conversas, paciência, conselhos e por sua dedicação buscando sempre esclarecer minhas dúvidas. Ele se tornou muito mais do que um orientador, mas também inspiração tanto como pessoa quanto como professor.

Agradeço amizade Angie Yurani, Amanda Ornelas, Brendo Faria, Cíntia Coelho, Daiane Breatriz, Danilo Camilo, Diego Vieira e Genilson Soares, que a vida acadêmica me deu, com quem compartilhei momentos de estudos, conversas e risadas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

"Nunca deixe de sonhar, mesmo sabendo
que a trajetória é difícil!

Sonhar com o céu para alcançar as
nuvens e agradeça a Deus para ele lhe
mostrar as estrelas e faça com que as
pessoas lembrem de você como um
sonhador por onde passar "

Carlucio

Resumo

FILHO, Carlos Lúcio Nunes de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2022. **Evolutóides de Curvas Planas**. Orientador: Ady Cambraia Junior.

Dada uma curva γ suave, fechada e sem auto-interseções, o envelope da família de retas tangentes é formado pela própria curva reunida com as retas tangentes nos pontos de inflexão e o envelope da família de retas normais consiste da evoluta de γ . Um questionamento que ocorre de maneira natural é o que existe entre esses dois envelopes. O envelope dessa família de retas é denominado evolutóide. Neste trabalho, abordamos os evolutóides euclidianos e afins. Para isso, fez-se necessário uma revisão da geometria diferencial euclidiana de curvas planas e geometria diferencial afim de curvas planas, bem como um estudo detalhado sobre envelopes e uma introdução a conceitos da Teoria de Singularidades. Os principais resultados apresentados, tanto para o caso euclidiano quanto para o caso afim, foram: parametrização explícita dos evolutóides, condições de regularidade, condições de singularidades A_2 e A_3 e estrutura local da superfície discriminante.

Palavras-chave: Família de curvas. Envelopes. Evoluta. Singularidades.

Abstract

FILHO, Carlos Lúcio Nunes de Oliveira , M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2022.
Plane Curves Evolutoids. Adviser: Ady Cambraia Junior.

Given a smooth, closed and no self-intersecting γ , the envelope of the family of tangent lines is formed by the itself joined with the tangent lines at the inflection points, and the envelope of the family of normal lines consists of the evolute of γ . A question that naturally occurs is what exists between these two envelopes. The envelope of this family of lines is called an evolutoid. In this work, we approach Euclidean evolutoids and Affine evolutoids. For this, it was necessary to review the Euclidean geometry of plane curves and affine differential geometry of plane curves, as well as a detailed study of the differential envelopes and an introduction to the concepts of Singularity Theory. The main results presented, both for the Euclidean case and for the affine case, were: explicit parameterization of the evolutoids, regularity conditions, singularity conditions A_2 e A_3 and local structure for the discriminant surface.

Keywords: Family of curves. Envelopes. Evolute. Singularities.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Revisão de curvas planas euclidianas	12
1.1.1 Curvatura e equações de Serret-Frenet	15
1.1.2 Evoluta	18
1.1.3 Teorema dos quatro vértices	19
1.1.4 Funções definidas sobre curvas	20
1.2 Revisão de geometria afim	23
1.2.1 Geometria afim	24
1.2.2 Transformações afins e cônicas	25
1.2.3 Espaço afim	25
1.2.4 Curvatura afim, tangentes afins e normais afins	28
1.2.5 Teorema dos seis vértices e evoluta afim	34
1.2.6 Transformação equiafim	36
1.2.7 Funções definidas sobre curvas	36
1.3 Resultados da Teoria de Singularidades	37
1.3.1 Envelopes	38
1.3.2 Equivalência à direita	40
1.3.3 Jatos de funções	41
1.3.4 Desdobramento	41
1.3.5 Desdobramento (p)versal	42
1.3.6 Desdobramento versal	48
1.3.7 Transições	55

2	Evolutóides euclidianos	59
2.1	Regularidade do evolutóide euclidiano	61
2.2	Superfície discriminante	63
3	Evolutóides afins	71
3.1	Regularidade do evolutóide afim	73
3.2	Superfície discriminante	75
	Considerações Finais	83
	Referências Bibliográficas	84

Introdução

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave, fechada e sem pontos de inflexão. É bem conhecido que o envelope da família de retas tangentes a γ é o conjunto formado pela própria curva mais as retas tangentes nos pontos de inflexão. Já o envelope da família de retas normais consiste da evoluta da curva γ . Assim, é natural perguntar: o que existe entre os envelopes das retas tangentes e o das retas normais? Para responder a essa pergunta, considere T e N os vetores tangente unitário e normal unitário a γ em $t \in I$, respectivamente, e um vetor entre T e N é o $T^\alpha = T \cos \alpha + N \sin \alpha$ que é a direção da reta L_α obtida girando a reta tangente à curva γ no sentido anti-horário por um ângulo α fixado. O envelope da família de retas L_α consiste do evolutóide euclidiano de γ . A geometria desses envelopes tem ganhado interesse de muitos geômetras. Por exemplo, J. Jerónimo-Castro (2013) explorou relações entre área e perímetro da curva com o evolutóide. Já P. Giblin e J. P. Warder (2014) estudaram como estes conjuntos evoluem desde a curva até a sua evoluta, neste caso para curvas fechadas suaves sem inflexões. Já A. Cambraia Junior e A. L. Cardoso Junior (2020) exploraram os evolutóides no contexto da Geometria Afim. Mais precisamente, estudaram o envelope da família de retas de uma curva plana com direção v^α entre a direção tangente afim e a normal afim.

Esta dissertação foi baseada principalmente em [8] e [10], e está dividida em três capítulos. No Capítulo 1, são apresentados resultados preliminares da Geometria Diferencial euclidiana de curvas planas e uma revisão da Geometria Afim de curvas planas. Além disso, apresentamos conceitos e resultados da Teoria de Singularidades, importantes para entender a estrutura local dos evolutóides euclidiano e afim.

No Capítulo 2, estudamos os evolutóides euclidianos de uma curva fechada e sem pontos de inflexão. Inicialmente, consideramos $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo na família de retas L_α com uma direção $T^\alpha = T \cos \alpha + N \sin \alpha$, a partir daí, explicitamos o envelope, sendo possível estudar a regularidade do evolutóide e condições para que ocorram as singularidades. Na segunda seção deste capítulo, incluímos α como um parâmetro da família, neste caso o envelope da

família é uma superfície que denominaremos de superfície discriminante. Nessa parte usamos ferramentas da Teoria de Singularidades para entender como os evolutóides evoluem desde a curva, passando pelos seus evolutóides até sua evoluta.

No Capítulo 3, apresentamos os evolutóides afins, que são dados pelo envelope de retas com uma direção fixada entre os vetores tangente afim e normal afim. Note que, na geometria afim não podemos falar de ortogonalidade dos vetores tangente afim γ_s e normal afim γ_{ss} , a condição que é imposta é que área entre γ_s e γ_{ss} seja unitária, ou seja, $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, onde $[\cdot, \cdot]$ será a notação usada para determinantes. Semelhante ao caso euclidiano, estamos interessados na reta L_α com uma direção $v^\alpha = (1 - |\alpha|)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}$. Explicitamos o envelope desta família de retas e apresentamos os seguintes resultados: condição de regularidade, singularidades, bem como um resultado sobre a existência do α born, ou seja, o primeiro α que faz com que a curva apresente singularidade. Além disso, como foi estudado no Capítulo 2, incluímos α como parâmetro da família de retas L_α , e para entender a estrutura local dessas superfícies, utilizamos técnicas de Teoria de Singularidades, que possibilitaram estudar as condições para termos singularidade do tipo A_2 e A_3 , determinar as condições para que o conjunto discriminante seja difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal ou rabo de andorinha e compreender como a curva evolui da sua evoluta afim passando pelos seus evolutóides afins.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, apresentamos uma breve revisão da geometria diferencial euclidiana e da geometria diferencial afim de curvas planas, bem como alguns conceitos da Teoria de Singularidades. Para um estudo mais detalhado sobre este último assunto, veja [10].

1.1 Revisão de curvas planas euclidianas

Nesta seção, apresentamos algumas noções básicas de geometria diferencial de curvas planas. Tais preliminares são importantes para entender os evolutóides euclidianos, apresentados no Capítulo 2. As definições e resultados aqui abordados foram retirados de [1], [6] e [12].

Definição 1.1.1. Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação γ de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\gamma(t)$, $t \in I$, é chamado traço da curva.

Definição 1.1.2. Se a aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida num intervalo $I = [a, b]$, tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$, dizemos que γ é uma curva fechada.

Definição 1.1.3. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular se para todo $t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$. Caso contrário, diremos que ela não é regular ou é singular no ponto $t_0 \in I$.

Definição 1.1.4. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A reta tangente a γ em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$, isto é, a reta dada pela função

$$g(r) = \gamma(t_0) + r\gamma'(t_0), r \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.1.5. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, os vetores

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \text{ e } N(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}},$$

são os vetores tangente unitário e normal unitário a γ em t .

Definição 1.1.6. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e J um intervalo aberto. Uma mudança de parâmetro para γ é uma função $h : J \rightarrow I$, que satisfaz:

1. h é suave;
2. $h'(s) \neq 0, \forall s \in J$;
3. $h(J) = I$.

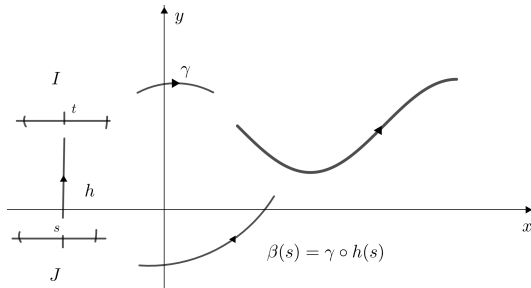


Figura 1.1: Reparametrização da curva γ .

A curva $\beta = \gamma \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\beta(s) = \gamma(h(s))$ é uma curva regular, que tem o mesmo traço de γ e é chamada reparametrização de γ por h .

Exemplo 1.1.7. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Seja $h(s) = \frac{s}{a}$, $s \in \mathbb{R}$. A reparametrização de γ por h é a curva

$$\beta(s) = \gamma \circ h(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right).$$

Definição 1.1.8. Se $h : J \rightarrow I$ é uma função sobrejetiva e estritamente crescente, dizemos que a reparametrização $\beta = \gamma \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reparametrização positiva ou que preserva a orientação de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. No caso em que h é decrescente, denominamos β a reparametrização negativa ou que reverte a orientação de γ .

Definição 1.1.9. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, de classe $\mathcal{C}^1$, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. A função $l : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$l(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$$

$t_0 \in I$, é denominada função comprimento de arco.

Proposição 1.1.10. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Se β é uma reparametrização positiva de γ , então $l_\gamma = l_\beta$.*

Demonstração. Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de γ , então existe uma função $h : J \rightarrow I$ tal que $\beta(t) = \gamma(h(t))$. Assim,

$$l_\beta(t) = \int_{t_0}^t \|\beta'(u)\| du = \int_{t_0}^t \|\gamma'(h(u))\| h'(u) du.$$

Agora, fazendo as seguintes substituições $h(u) = v$, $h(t_0) = t_0$, $h(t) = t$, com $v, t_0, t \in I$, segue

$$l_\beta(t) = \int_{h(t_0)}^{h(t)} \|\beta'(v)\| dv = l_{\gamma(t)}.$$

Portanto, $l_\gamma = l_\beta$. □

Definição 1.1.11. Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente, se

$$\|\gamma'(t)\| = 1,$$

para todo $t \in I$.

Proposição 1.1.12. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $l : I \rightarrow l(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de γ a partir de t_0 . Então existe uma função inversa h de l , definida no intervalo aberto $J = l(I)$, e $\beta = \gamma \circ h$ é uma reparametrização de γ , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja γ uma curva regular, então $\|\gamma'(t)\| > 0$, $l'(t) > 0$. Ou seja, l é estritamente crescente. Assim, existe uma função inversa $h : J \rightarrow I$, definida por $h(l(t)) = t$, para todo $t \in I$. Além disso, $\frac{dh}{dl} \frac{dl}{dt} = 1$. Logo

$$\frac{dh}{dl} = \frac{1}{l'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} > 0.$$

Assim, $\beta(l) = \gamma \circ h(l)$, $l \in J$ é uma reparametrização de γ . Por outro lado

$$\left\| \frac{d\beta}{dl} \right\| = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dh}{dl} \right\| = \left\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'\|} \right\| = 1.$$

Portanto, β é parametrizada pelo comprimento de arco. □

Exemplo 1.1.13. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.

A função comprimento de arco de γ a partir de $t_0 = 0$ é dada por

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

Assim, a inversa de l é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $s \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\beta(s) = \gamma \circ h(s) = \left(\frac{as}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right),$$

é a reparametrização de γ pelo comprimento de arco.

1.1.1 Curvatura e equações de Serret-Frenet

Trataremos nesta seção sobre a curvatura de uma curva, que também pode ser vista como a variação que o vetor tangente faz com o eixo- x .

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco dada por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, para todo $s \in I$. Isso significa que, γ tem velocidade unitária, então $\|T(s)\| = 1$, daí $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$. Daí, a partir da rotação no sentido anti-horário do vetor $T(s) = \gamma'(s)$ a um ângulo $\frac{\pi}{2}$, obtemos $N(s) = (-y'(s), x'(s))$, definido como vetor normal unitário. Temos que $T'(s)$ é paralelo a $N(s)$, isso significa que existe uma função $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$T'(s) = k(s)N(s), s \in I.$$

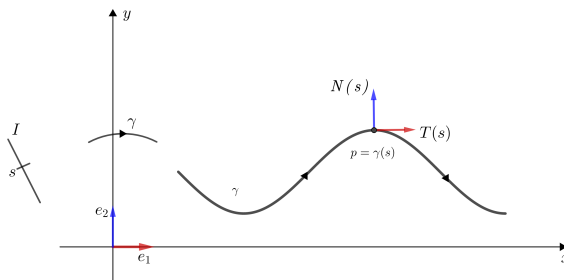


Figura 1.2: Referencial de Frenet.

Definição 1.1.14. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco. A função $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle$, é chamada curvatura de γ em $s \in I$.

Proposição 1.1.15. A curvatura de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é identicamente nula se, e somente se, o traço de γ está contido em uma reta.

Demonstração. Suponha que $k(s) = 0$, então $|k(s)| = \|T'(s)\|$, assim $T'(s) = (0,0)$. Como T está definida em um intervalo I , segue que, $T(s) = V$ é um vetor constante. Então,

$$\int_{s_0}^s \gamma'(\xi) d\xi = \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi \Rightarrow \gamma(s) = \gamma(s_0) + V(s - s_0).$$

Portanto, o traço de γ está contido em uma reta.

Agora, seja γ parametrizada pelo comprimento de arco tal que seu traço esteja contido em uma reta. Então, $\gamma(s) = P + sV$, com $\|V\| = 1$. Derivando γ em relação ao parâmetro s , obtemos:

$$\gamma'(s) = T(s) = V \Rightarrow T'(s) = (0,0).$$

Portanto, $k(s) = 0$. □

Definição 1.1.16. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco l . Os campos tangentes T e normal N satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s). \end{cases}$$

Tais equações são chamadas de equações de Frenet e $\{T(s), N(s)\}$ é chamado referencial de Frenet.

O próximo resultado nos dá um algoritmo para calcular a curvatura de uma curva plana, dado um parâmetro arbitário.

Proposição 1.1.17. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular definida por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então, a curvatura de γ em $t \in I$ é dada pela expressão

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração. Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de γ pelo comprimento do arco, ou seja, $\beta(s(t)) = \gamma(t) = (x(t), y(t))$. Daí:

$$\gamma'(t) = \frac{d\beta(s(t))}{ds} s'(t) \text{ e } \gamma''(t) = \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2} (s'(t))^2 + \frac{d\beta(s(t))}{ds} s''(t).$$

Sabemos que $k(s(t)) = \left\langle \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2}, N(s(t)) \right\rangle$.

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \gamma''(t), N(s(t)) \rangle &= \left\langle \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2} (s'(t))^2 + \frac{d\beta(s(t))}{ds} s''(t), N(s(t)) \right\rangle \\ &= \|\gamma'(t)\|^2 \left\langle \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2}, N(s(t)) \right\rangle + s''(t) \langle T(s(t)), N(s(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \gamma''(t), N(s(t)) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2 \left\langle \frac{d^2\beta(s(t))}{ds^2}, N(s(t)) \right\rangle.$$

Portanto, $k(t) = \frac{\langle \gamma''(t), N(s(t)) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2}$. □

Interpretação geométrica da curvatura

Veremos agora a interpretação geométrica da curvatura para o sinal da função curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco. Se $k(s_0) > 0$, $s_0 \in I$, então, para todo s suficientemente próximo de s_0 , $\gamma(s)$ está no semiplano determinado pela reta tangente à curva γ em $\gamma(s_0)$ para o qual aponta $N(s_0)$.

De fato, seja $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle$. Observe que $h'(s_0) = 0$, isso significa que s_0 é um ponto crítico da função h . Se $h''(s_0) = k(s_0) > 0$, então s_0 é um ponto de mínimo local da função h . Isso significa que $h(s) > 0$ em uma vizinhança de s_0 .

Se $h'' = k(s_0) < 0$, então h possui um máximo local em s_0 , e assim $\gamma(s)$ pertence ao semiplano determinado pela reta tangente para onde aponta o vetor $-N(s_0)$.

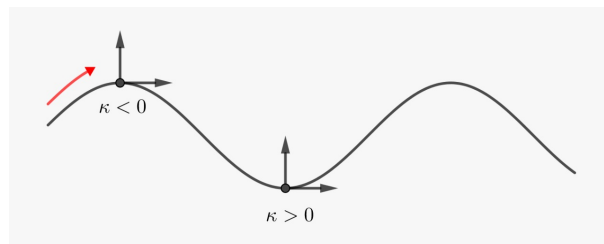


Figura 1.3: Interpretação geométrica para o sinal da curvatura.

1.1.2 Evoluta

Definição 1.1.18. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular tal que a sua curvatura k é não nula em I . A evoluta de γ é a aplicação $\gamma_e: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada $t \in I$ associa o centro de curvatura de γ em t , isto é,

$$\gamma_e(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}N(t),$$

onde N é o vetor normal unitário de γ .

A evoluta também pode ser vista como o lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores que mais se aproximam da curva. O próximo resultado nos dá uma condição para que a evoluta de uma curva seja regular.

Proposição 1.1.19. *Os pontos singulares da evoluta de uma curva regular γ com $k \neq 0$ são aqueles para os quais a função curvatura de γ possui um ponto crítico.*

Demonstração. Suponha que γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco e que $\gamma_e(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$. Derivando esta expressão, obtemos

$$\gamma'_e(s) = \gamma'(s) + \frac{N'(s)k(s) - k'(s)N(s)}{k^2(s)} = T(s) - T(s) + \frac{k'(s)}{k^2(s)}N(s).$$

Logo, γ_e vai ser regular se, e somente se,

$$k'(s) \neq 0.$$

□

Exemplo 1.1.20. Considere a elipse $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$.

Segue da Definição 1.1.5 e Proposição 1.1.17 que o normal unitário e a curvatura de γ são dados por:

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{9\cos^2(t) + 4\sin^2(t)}}(-3\cos(t), -2\sin(t)) \text{ e } k(t) = \frac{6}{(9\cos^2(t) + 4\sin^2(t))^{3/2}}.$$

Logo, a evoluta de γ é dada por:

$$\gamma_e(t) = \left(-\frac{5\cos^3 t}{2}, \frac{5\sin^3 t}{3}\right), t \in [0, 2\pi]$$

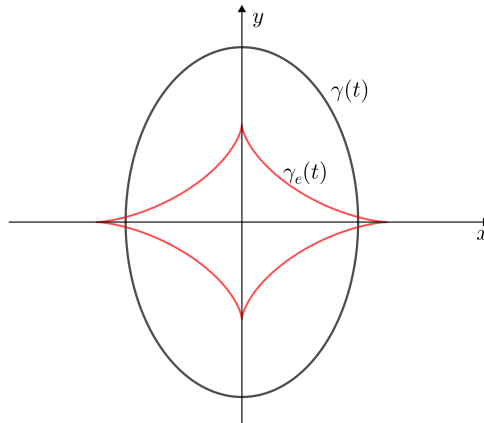


Figura 1.4: A elipse $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ e sua evoluta γ_e .

O próximo resultado indica que a curvatura é o único invariante local necessário para se recuperar uma curva.

Teorema 1.1.21 (Teorema Fundamental das Curvas Planas). *Seja $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Então, dados $s_0 \in I, P_0 = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $V_0 = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, com $\|V_0\| = 1$, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , tal que a função curvatura de $\gamma(s)$ em $s \in I$ é dada por k , $\gamma(s_0) = P_0$ e $\gamma'(s_0) = V_0$. Além disso, a curva γ é dada por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, onde*

$$\begin{aligned} x(s) &= p_1 + \int_{s_0}^s \cos \left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + \theta_0 \right) d\tau, \\ y(s) &= p_2 + \int_{s_0}^s \sin \left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + \theta_0 \right) d\tau. \end{aligned}$$

e $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ é o único ângulo tal que $V_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$.

Demonstração. Veja [1], pág. 53. □

1.1.3 Teorema dos quatro vértices

Definição 1.1.22. Um vértice de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um ponto de máximo ou mínimo local da função curvatura k .

Exemplo 1.1.23. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$. Sua curvatura é dada por:

$$k(t) = \frac{2}{(\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

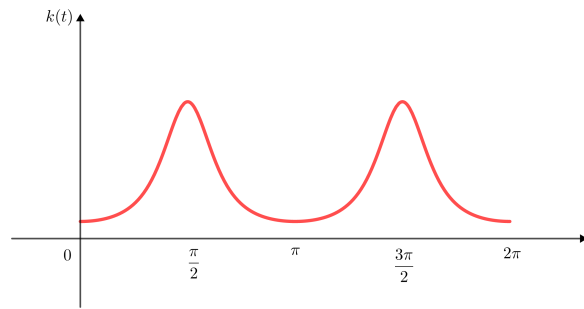


Figura 1.5: Gráfico curvatura da elipse

Derivando k , temos $k' = \frac{18 \sin t \cos t}{(\sin^2 t + 4 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$. Note que, $k'(t) = 0$ se $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, que correspondem aos pontos da elipse:

$$\gamma(0) = A = (1, 0), \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = B = (0, 2), \gamma(\pi) = C = (-1, 0) \text{ e } \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = D = (0, -2).$$

Que são os vértices da elipse.

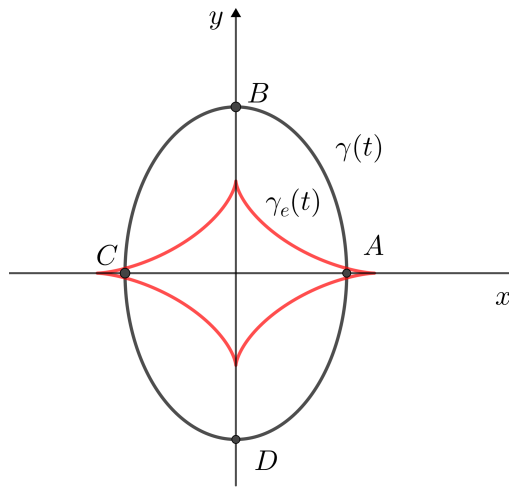


Figura 1.6: A, B, C e D são os quatros vértices da elipse $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$.

Teorema 1.1.24. (*Teorema dos quatro vértices*). *Toda curva fechada, injetiva, regular e de classe C^2 tem pelo menos quatro vértices.*

Demonstração. Veja [1], pág. 259. □

1.1.4 Funções definidas sobre curvas

Nessa seção, apresentamos duas funções definidas sobre curvas e que são muito utilizadas na Teoria de Singularidades, a saber: função distância ao quadrado e a função altura.

Definição 1.1.25. Seja $u \in \mathbb{R}^2$. A função distância ao quadrado é a função $f_d : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_d = \|u - \gamma(t)\|^2 = \langle u - \gamma(t), u - \gamma(t) \rangle.$$

Definição 1.1.26. Seja $u \in \mathbb{R}^2$. A função altura sobre γ na direção de u é a função $f_h : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_h(u, t) = \langle \gamma(t), u \rangle.$$

A seguir, apresentamos a definição de contato entre curvas planas.

Sejam γ e δ duas curvas planas, uma na forma paramétrica $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a outra na forma cartesiana (como pré-imagem de um valor regular de uma função suave $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta := F^{-1}(0)$).

Definição 1.1.27. Dizemos que uma curva γ e F^{-1} tem **k -pontos de contato** em $t = t_0$ (mais precisamente em $p = \gamma(t_0)$) se a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t)),$$

satisfaz

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0 \text{ e } g^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

Nesse caso, dizemos que a **ordem do contato** é k .

Além disso, se

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0,$$

dizemos que a curva γ e $F^{-1}(0)$ tem **pelo menos k -pontos de contato** em $t = t_0$ ou que a ordem de contato é maior ou igual a k .

Exemplo 1.1.28. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na segunda coordenada $F(x, y) = y$ com $F^{-1} = \mathbb{R} \times \{0\}$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (t, t^k)$ e $k \geq 1$. Vamos estudar o contato entre γ e $F^{-1}(0)$ no ponto $t = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = F(\gamma(t)) = t^k$. Derivando a função g , obtemos:

$$g'(t) = kt^{k-1}, g''(t) = k(k-1)t^{k-2}, \dots, g^{(k-1)}(t) = k!t \text{ e } g^{(k)}(t) = k!.$$

Então,

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0 \text{ e } g^{(k)}(0) = k! \neq 0.$$

Portanto, γ e $F^{-1}(0)$ tem k -pontos de contato em $t = 0$.

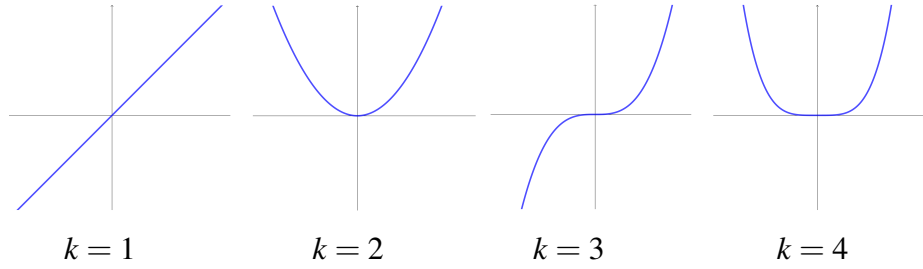


Figura 1.7: Contato entre as curvas $\gamma(t) = (t, t^k)$, com $k = 1, 2, 3, 4$ e o eixo x .

Vejamos agora a definição de vértice via Teoria de contato:

Definição 1.1.29. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana regular.

1. Um ponto $p = \gamma(t_0)$ é um vértice ordinário da curva plana γ se existe um círculo C tal que a curva γ e C têm 4-pontos de contato em $t = t_0$.
2. Um ponto $p = \gamma(t_0)$ é um vértice degenerado da curva plana γ se existe um círculo C tal que a curva γ e C têm pelo menos 5-pontos de contato em $t = t_0$.

Exemplo 1.1.30. A elipse, $\gamma(t) = (A \cos t, B \sin t)$, com $A > B > 0$ tem 4 vértices ordinários.

De fato, seja $C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $C(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$, então a função contato g é dada por:

$$g(t) = C(\gamma(t)) = (A \cos t - a)^2 + (B \sin t - b)^2 - R^2.$$

Precisamos encontrar valores para a, b e R tais que $p = \gamma(t_0)$ seja vértice. Observe que,

- $g(t_0) = 0$ se, e somente se, $(A \cos t - a)^2 + (B \sin t - b)^2 = R^2$.
- $g'(t) = \langle (A \cos t, B \sin t) - (a, b), (-A \sin t, B \cos t) \rangle$, assim $g'(t_0) = 0$ se, e somente se, $\langle (A \cos t_0, B \sin t_0) - (a, b), (-A \sin t_0, B \cos t_0) \rangle = 0$. Logo (a, b) pertence à reta normal à elipse em $p = \gamma(t_0)$.
- $g''(t) = -2(-aA \cos(t) + (-A^2 + B^2) \cos(2t) - bB \sin(t))$, assim $g''(t_0) = 0$ se, e somente se, $2aA \cos t_0 + 2bB \sin t_0 = 2(A^2 - B^2) \cos 2t_0$.

Usando o fato de que $g'(t_0) = 0$ e resolvendo o sistema dado por $g'(t_0) = g''(t_0) = 0$.

Chegamos na seguinte igualdade

$$(a, b) = \left(\frac{(A-B)(A+B) \cos^3(t)}{A}, \frac{(-A+B)(A+B) \sin^3(t)}{B} \right).$$

Note que, para qualquer t existe um ponto (a, b) que é o centro do círculo passando por $(A \cos(t), B \sin(t))$, que tem pelo menos 3-pontos de contato. Esses círculos são chamados de **círculos osculadores** da elipse.

- $g'''(t) = -2aA \sin(t) + 4(A - B)(A + B) \sin(2t) + 2bB \cos(t)$, então, $g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = g'''(t_0) = 0$ se, e somente se, $\sin t_0 \cos t_0 = 0$. Assim, $\sin t_0 = 0$ ou $\cos t_0 = 0$, que acontece em $t_0 = 0, \pi$ ou $t_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
- $g^{(iv)}(t) = -2aA \cos(t) + 8(A - B)(A + B) \cos(2t) - 2bB \sin(t) \neq 0$ em $t_0 = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Logo, a elipse tem 4 vértices.

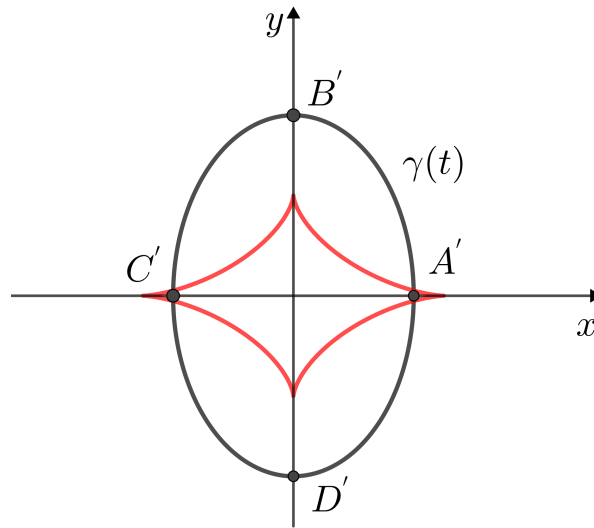


Figura 1.8: A', B', C' e D' são os quatros vértices da elipse $\gamma(t) = (A \cos t, B \sin t)$.

Definição 1.1.31. Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana regular.

1. Um ponto $p = \gamma(t_0)$ é uma inflexão ordinária da curva plana γ se a reta tangente L em $t = t_0$ é tal que a curva γ e L têm 3-pontos de contato para $t = t_0$.
2. Um ponto $p = \gamma(t_0)$ é uma inflexão degenerada da curva plana γ se a reta tangente L em $t = t_0$ é tal que a curva γ e L têm pelo menos 4-pontos de contato para $t = t_0$.

1.2 Revisão de geometria afim

Neste capítulo, apresentamos algumas noções básicas da geometria diferencial afim de curvas planas, que é um dos nossos objetos de estudo. Essas preliminares nos dão embasamento

para compreender os envelopes das famílias de retas afins com uma variação α . Aqui, as principais referências utilizadas foram: [3], [4], [11], e [12].

1.2.1 Geometria afim

Definição 1.2.1. Uma transformação afim de $\mathbb{R}^2$ é uma função $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $L(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz invertível 2×2 e $b \in \mathbb{R}^2$. O conjunto de transformações afins de $\mathbb{R}^2$ é denotado por $\mathcal{A}^2$.

Teorema 1.2.2. *O conjunto de transformações afins $\mathcal{A}^2$ é um grupo com a operação de composição de funções.*

Demonstração. Veja [4], pág. 72. □

Qualquer área do plano pode ser ampliada ou reduzida pelo fator $\det(A)$ por meio de uma transformação dada pela Definição 1.2.1. Assim, um importante subgrupo de $\mathcal{A}^2$ é definido pelas matrizes A tais que, $\det(A) = 1$, isto significa que tais transformações preservam áreas. Estas são chamadas de transformações equiafins.

Além de preservarem área, as transformações equiafins em $\mathcal{A}^2$: levam retas em retas; preservam razão de comprimentos ao longo de uma reta dada; levam retas paralelas em retas paralelas, além disso, preservam o contato entre curvas, ou seja, curvas que compartilham a mesma reta continuam compartilhando-as após a aplicação de uma transformação afim. Esses resultados serão abordados no decorrer do nosso trabalho e irão nos auxiliar no estudo sobre os evolutóides afins.

Teorema 1.2.3. (Teorema fundamental da geometria afim) *Sejam $\{p, q, r\}$ e $\{p', q', r'\}$ dois conjuntos de pontos não colineares em $\mathbb{R}^2$. Então*

1. *Existe uma transformação afim L que satisfaz*

$$L(p) = p', L(q) = q' \text{ e } L(r) = r',$$

2. *Existe uma única transformação afim L .*

Demonstração. Veja [4], pág. 88. □

1.2.2 Transformações afins e cônicas

Definição 1.2.4. Uma cônica é um conjunto em $\mathbb{R}^2$ definido pela equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0$ onde A, B, C, F, G e H são números reais e A, B e C são não todos nulos.

As três formas de cônicas não degeneradas são: elipses, parábolas e hipérbolas. Uma cônica não degenerada vai ser uma:

1. Hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$;
2. Parábola se $B^2 - 4AC = 0$;
3. Elipse se $B^2 - 4AC < 0$.

O número $\Delta = B^2 - 4AC$ é chamado discriminante da cônica.

Definição 1.2.5. Uma figura F_1 é afim-congruente com uma figura F_2 se houver uma transformação afim, que leva F_1 em F_2 .

Teorema 1.2.6. *Qualquer elipse é afim-congruente com o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.*

Teorema 1.2.7. *Qualquer hipérbole é afim-congruente à hipérbole retangular $xy = 1$.*

Teorema 1.2.8. *Qualquer parábola é afim-congruente à parábola $y^2 = x^2$.*

Demonstração. Para demonstração dos Teoremas 1.2.6, 1.2.7 e 1.2.8 veja [4]. □

1.2.3 Espaço afim

Definição 1.2.9. Seja V um espaço vetorial real n -dimensional. Um conjunto não vazio Ω é chamado espaço afim associado a V se, existe uma função

$$\begin{aligned} \pi : \Omega \times \Omega &\rightarrow V \\ (p, q) &\mapsto \overrightarrow{pq} \in V, \end{aligned}$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

1. Para $p, q, r \in \Omega$ temos $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$,
2. Para qualquer $p \in \Omega$ e qualquer $x \in V$, existe um único $q \in \Omega$ tal que $\overrightarrow{pq} = x$.

Exemplo 1.2.10. Todo espaço vetorial real de dimensão finita é um espaço afim.

De fato, seja V um espaço vetorial. Dado $(p, q) \in V \times V$, defina $x = \overrightarrow{pq}$ tal que $p - q \in V$. Portanto, V é um espaço afim.

Definição 1.2.11. Um subconjunto não vazio Ω' de Ω é chamado subespaço afim, se existe um ponto $p \in \Omega'$ tal que o conjunto de vetores $W = \{\overrightarrow{pq} \mid q \in \Omega'\}$ forma um subespaço vetorial de V .

As transformações equiafins preservam áreas, portanto é natural procurarmos um novo parâmetro que seja um invariante afim, de tal forma que a nossa reparametrização da curva σ preserve área.

Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, para todo $t \in I$, tal que $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ como o espaço das matrizes reais $2 \times 1, M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ da forma usual

$$(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

com $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ e denotemos o determinante de $(a, b) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ por $[a, b] = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Definição 1.2.12. Um plano afim é o espaço afim $\mathbb{R}^2$ associado ao espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$ da forma usual, considerando a função $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada par (p, q) ao vetor $p - q \in \mathbb{R}^2$.

O plano afim $\mathbb{R}^2$ é referido em termos de um sistema de coordenadas $\{x, y\}$, por uma mudança de coordenadas permitida, queremos fazer $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ tais que

$$\bar{x} = a_1 x + b_1 y + p \text{ e } \bar{y} = a_2 x + b_2 y + q,$$

onde

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Observação 1.2.13. Sejam $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = [\sigma(t), \beta(t)]$, então a derivada de g é dada pela expressão

$$g_t(t) = [\sigma_t(t), \beta(t)] + [\sigma(t), \beta_t(t)].$$

Definição 1.2.14. Uma curva $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é não degenerada se $[\sigma_t(t), \sigma_{tt}(t)] \neq 0$, para todo $t \in$

I.

Neste trabalho vamos considerar que a curva é não degenerada, ou seja, sem pontos de inflexão.

Agora iniciaremos a construção de um parâmetro que seja invariante por transformações afins.

Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave definida por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ para todo $t \in I$. Queremos reparametrizar σ com um parâmetro s tal que $[\sigma_s, \sigma_{ss}] = 1$ para todo s . O subscrito s refere-se à derivada com respeito ao parâmetro s .

Teorema 1.2.15. *Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão, então existe difeomorfismo $s : I \rightarrow J$ tal que $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, para todo $s \in J$, onde γ é uma reparametrização de σ .*

Demonstração. Devemos mostrar que s é um difeomorfismo. De fato, seja $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma = \sigma \circ s^{-1}$, então $\sigma(t) = \gamma(s(t))$. Assim,

$$\sigma_t = \gamma_s s_t \text{ e } \sigma_{tt} = \gamma_{ss} s_t^2 + \gamma_s s_{tt}.$$

Calculando o determinante e assumindo que $[\sigma_i, \sigma_i] = 0$, temos:

$$[\sigma_t, \sigma_{tt}] = [\gamma_s s_t, \gamma_{ss} s_t^2 + \gamma_s s_{tt}] = s_t^3 [\gamma_s, \gamma_{ss}] + s_t s_{tt} [\gamma_s, \gamma_s].$$

Como $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, segue:

$$s_t^3 = [\sigma_t, \sigma_{tt}].$$

Assim, $\frac{ds}{dt} = [\sigma_t, \sigma_{tt}]^{\frac{1}{3}}$. Fixando $t_0 \in I$, obtemos

$$s(t) = \int_{t_0}^t [\sigma_t(u), \sigma_{tt}(u)]^{\frac{1}{3}} du.$$

Como s é suave e $s'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, concluímos que s é um difeomorfismo. $\square$

Definição 1.2.16. A função comprimento de arco afim de uma curva $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ medido a partir de $\sigma(t_0)$, $t_0 \in I$, é definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t [\sigma_t(u), \sigma_{tt}(u)]^{\frac{1}{3}} du.$$

Observação 1.2.17. Se a curva σ está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, então a função comprimento de arco afim é dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t k(u)^{\frac{1}{3}} du,$$

com $k(u) = [\sigma_t(u), \sigma_{tt}(u)] = x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)$, tal que k é a curvatura euclidiana de σ .

1.2.4 Curvatura afim, tangentes afins e normais afins

Definição 1.2.18. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana sem pontos de inflexão parametrizada por comprimento de arco afim. O vetor $\gamma_s(s_0)$ é chamado vetor tangente afim a γ em $\gamma(s_0)$. O vetor $\gamma_{ss}(s_0)$ é chamado vetor normal afim a γ em $\gamma(s_0)$.

Observação 1.2.19. O vetor normal afim da parábola está na mesma direção do eixo y .

De fato, seja a parametrização da parábola $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \left(a + bt, c + \frac{t^2}{2b}\right)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Observe que, γ está parametrizada pelo comprimento de arco afim, pois

$$[\gamma_t, \gamma_{tt}] = \left[\left(b, \frac{t}{b}\right), \left(0, \frac{1}{b}\right)\right] = 1.$$

Portanto, $\gamma_{tt} = \left(0, \frac{1}{b}\right)$.

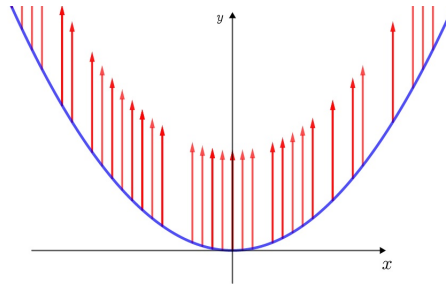


Figura 1.9: Vetores normais afins à parábola definida em $a = c = 0$ e $b = 1$.

Lema 1.2.20. Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, e seja s a função comprimento de arco afim, escrevendo $\varepsilon = s^{-1} : J \rightarrow I$ com $t = \varepsilon(s)$, então a curva $\gamma = \sigma \circ \varepsilon : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por comprimento de arco afim e as seguintes relações são satisfeitas:

$$1. \ \varepsilon_s = k^{-\frac{1}{3}}.$$

$$2. \ \varepsilon_{ss} = -\frac{1}{3}k^{-\frac{5}{3}}k_t.$$

$$3. \ \varepsilon_{sss} = \frac{5}{9}k^{-3}k_t^2 - \frac{1}{3}k^{-2}k_{tt}.$$

onde k é a curvatura de σ .

Demonstração. Veja [12], pág. 50.

□

Observação 1.2.21. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então valem as seguintes relações:

1. $[\gamma_{tt}(t), \gamma_{ttt}(t)] = k(t)^3, \forall t \in I,$
2. $[\gamma_t(t), \gamma_{ttt}(t)] = k_t(t),$ se $k(t) \neq 0.$

onde k é a curvatura de σ .

Seja γ uma curva nas condições acima. Das equações de Frenet, segue que, $\gamma_t = T, \gamma_{tt} = T_t = kN$ e $\gamma_{ttt} = k_tN + kN_t = k_tN - k^2\gamma_t$. Assim,

$$\begin{aligned} [\gamma_{tt}, \gamma_{ttt}] &= [kN, k_tN - k^2\gamma_t] \\ &= kk_t[N, N] - k^2[kN, \gamma_t] \\ &= -k^2[\gamma_{tt}, \gamma_t] = k^3. \end{aligned}$$

Já,

$$\begin{aligned} [\gamma_t, \gamma_{ttt}] &= [T, k_tN - k^2\gamma_t] \\ &= k_t[T, N] - k^2[T, \gamma_t] \\ &= k_t[\gamma_{tt}, \gamma_t] = k_t. \end{aligned}$$

O próximo resultado nos dá formulas para calcular os vetores tangente afim e normal afim para uma curva parametrizada por um parâmetro arbitrário t .

Teorema 1.2.22. *Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por um parâmetro arbitrário t . O tangente afim $\zeta(t)$ e normal afim $\eta(t)$ são dados, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= k(t)^{-\frac{1}{3}}\sigma_t(t) \\ \eta(t) &= k(t)^{-\frac{2}{3}}\sigma_{tt}(t) - \frac{1}{3}k_t(t)k(t)^{-\frac{5}{3}}\sigma_t(t). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja σ uma curva sem pontos de inflexão. Então, existe $\varepsilon = s^{-1} : J \rightarrow I$ tal que $\varepsilon(s) = t$. Daí, $\gamma(s) = \sigma(\varepsilon(s))$ está parametrizada pelo comprimento de arco afim. Utilizando as relações do Lema 1.2.20, $\gamma_s = \sigma_t \varepsilon_s$ e $\gamma_{ss} = \sigma_{tt} \varepsilon_s^2 + \sigma_t \varepsilon_{ss}$, temos:

$$\zeta = \sigma_t \varepsilon_s = \sigma_t(t) k^{-\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \sigma_{tt} \varepsilon_s^2 + \sigma_t \varepsilon_{ss} \\ &= \sigma_{tt} \varepsilon (k^{-\frac{1}{3}})^2 + \sigma_t \left(-\frac{1}{3} k(t)^{-\frac{5}{3}} k_t \right) \\ &= k^{-\frac{2}{3}} \sigma_{tt} - \frac{1}{3} k^{-\frac{5}{3}} k_t \sigma_t. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o resultado desejado. $\square$

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco afim, isto é, $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$. Derivando a igualdade anterior, obtemos $[\gamma_s, \gamma_{sss}] = 0$. Logo, existe μ tal que $\gamma_{sss} = -\mu \gamma_s$.

Definição 1.2.23. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. A curvatura afim de γ é uma função real $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}]$.

Teorema 1.2.24. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. Então*

$$\gamma_{sss} = -\mu(s) \gamma_s.$$

Demonstração. Veja [12], pág. 43. $\square$

Teorema 1.2.25. *Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então a curvatura afim $\mu(t)$ é dada por*

$$\mu(t) = \frac{1}{9} (3k(t)k_{tt}(t) - 5k_t^2(t) + 9k(t)[\sigma_{tt}(t), \sigma_{ttt}(t)])k(t)^{-\frac{8}{3}}.$$

Demonstração. Seja γ uma curva sem pontos de inflexão. Então, existe $\varepsilon = s^{-1} : J \rightarrow I$ tal que $\varepsilon(s) = t$. Defina, $\gamma(s) = \sigma(\varepsilon(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco afim. Derivando a γ , temos:

$$\gamma_{ss} = \sigma_{tt} \varepsilon_s^2 + \sigma_t \varepsilon_{ss}, \gamma_{sss}(s) = \sigma_{ttt} \varepsilon_s^3 + 3\sigma_{tt} \varepsilon_s \varepsilon_{ss} + \sigma_t \varepsilon_{sss}.$$

Utilizando as relações do Lema 1.2.20 e Observação 1.2.21, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu &= [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] \\
&= [\sigma_{tt}\epsilon_s^2 + \sigma_t\epsilon_{ss}, \sigma_{ttt}\epsilon_s^3 + 3\sigma_{tt}\epsilon_s\epsilon_{ss} + \sigma_t\epsilon_{sss}] \\
&= \epsilon_s^5[\sigma_{tt}, \sigma_{ttt}] - \epsilon_s^2\epsilon_{sss}[\sigma_t, \sigma_{tt}] + \epsilon_s^3\epsilon_{ss}[\sigma_t, \sigma_{ttt}] + 3\epsilon_s\epsilon_{ss}^2[\sigma_t, \sigma_{tt}] \\
&= k^{-\frac{5}{3}}[\sigma_{tt}, \sigma_{ttt}] - \frac{5}{9}k^{\frac{10}{3}}k_t^2 - \frac{1}{3}k^{-\frac{5}{3}}k_{tt} \\
&= \frac{1}{9}(3kk_{tt} - 5k_t^2 + 9k[\sigma_{tt}, \sigma_{ttt}])k^{-\frac{8}{3}}.
\end{aligned}$$

E assim, chegamos ao resultado desejado. $\square$

Agora, veremos alguns exemplos de curvas que têm curvaturas afim constantes.

Exemplo 1.2.26. Vamos determinar a curvatura afim da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizada por $\sigma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, com $a > b > 0$.

Temos que, as derivadas de σ são $\sigma_t(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ e $\sigma_{tt}(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$.

Daí,

$$[\sigma_t, \sigma_{tt}] = [(-a\sin t, b\cos t), (-a\cos t, -b\sin t)] = ab(\sin^2 t + \cos^2 t) = ab.$$

Então,

$$s(t) = \int_0^t (ab)^{\frac{1}{3}} du = (ab)^{\frac{1}{3}} t.$$

Logo s é um difeomorfismo cuja a inversa é $s^{-1}(s) = \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$.

Assim,

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}, b \sin \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right).$$

As derivadas de segunda e terceira ordem de γ são dadas respectivamente por:

$$\gamma_{ss} = \left(-\frac{a}{(ab)^{\frac{2}{3}}} \cos \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}, -\frac{b}{(ab)^{\frac{2}{3}}} \sin \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$\gamma_{sss} = \left(\frac{a}{ab} \sin \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}, -\frac{b}{ab} \cos \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{ab}{(ab)(ab)^{\frac{2}{3}}} \left(\cos^2 \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} + \sin^2 \frac{s}{(ab)(ab)^{\frac{1}{3}}} \right) \\ &= \frac{1}{(ab)^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.27. Determine a curvatura afim da parábola $y = x^2$ parametrizada por $\sigma(t) = (t, t^2)$.

Note que, as derivadas de σ são: $\sigma_t = (1, 2t)$ e $\sigma_{tt} = (0, 2)$. Daí,

$$[\sigma_t, \sigma_{tt}] = [(1, 2t), (0, 2)] = 1 \cdot 2 - 2t \cdot 0 = 2.$$

Então,

$$s(t) = \int_0^t 2^{\frac{1}{3}} du = 2^{\frac{1}{3}} t.$$

Logo, s é um difeomorfismo cuja inversa $s^{-1}(s) = \frac{s}{(2)^{\frac{1}{3}}}$. Assim,

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{2^{\frac{1}{3}}}, \frac{s^2}{2^{\frac{2}{3}}} \right).$$

As derivadas segunda e terceira de γ , são dadas respectivamente por:

$$\gamma_{ss} = \left(0, \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} \right) \text{ e } \gamma_{sss} = (0, 0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mu(s) &= \left[\left(0, \frac{2}{(2)^{\frac{2}{3}}} \right), (0, 0) \right] \\ &= 0 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{2}{(2)^{\frac{2}{3}}} = 0.\end{aligned}$$

Do Exemplo 1.2.27, podemos fazer uma analogia do caso euclidiano para o afim. No caso euclidiano vimos que uma curva tem curvatura nula se, e somente, se a curva for uma reta. Já para o caso afim, isso acontece se a curva for uma parábola.

Exemplo 1.2.28. Agora, queremos determinar a curvatura afim da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizada por $\sigma(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$, com $a > b > 0$.

Para tal, derivamos σ obtendo $\sigma_t(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$ e $\sigma_{tt}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$. Assim,

$$\begin{aligned} [\sigma_t, \sigma_{tt}] &= [(a \sinh t, b \cosh t), (a \cosh t, b \sinh t)] = ab(\sinh^2 t - \cosh^2 t) \\ &= -ab(-\sinh^2 t + \cosh^2 t) = -ab. \end{aligned}$$

Então,

$$s(t) = \int_0^t (-ab)^{\frac{1}{3}} du = -(ab)^{\frac{1}{3}} t.$$

Logo, s é um difeomorfismo com inversa $s^{-1}(s) = -\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$. Assim,

$$\gamma(s) = \left(a \cosh \left(-\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right), b \sinh \left(-\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right) \right) = \left(a \cosh \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}, -b \sinh \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right).$$

As derivadas segunda e terceira de γ , respectivamente, são dadas por:

$$\gamma_{ss} = \left(\frac{a}{(ab)^{\frac{2}{3}}} \cosh \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}, -\frac{b}{(ab)^{\frac{2}{3}}} \sinh \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$\gamma_{sss} = \left(\frac{a}{ab} \sinh \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}, -\frac{b}{ab} \cosh \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{ab}{(ab)(ab)^{\frac{2}{3}}} \left(-\cosh^2 \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} + \sinh^2 \frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right) \\ &= -\frac{1}{(ab)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

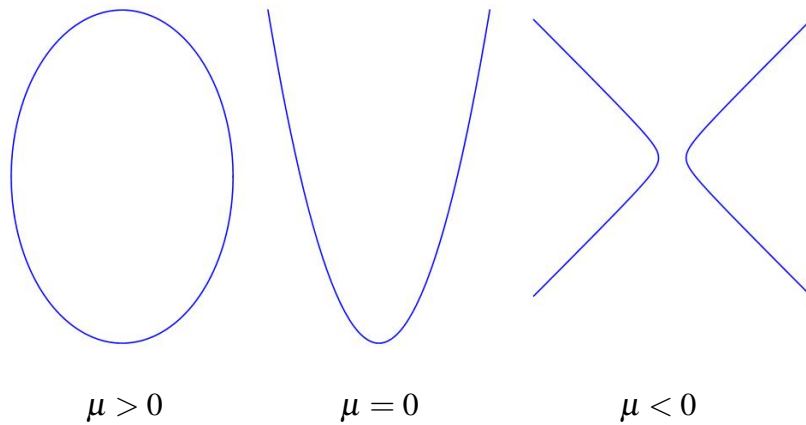


Figura 1.10: Curvas com curvatura afim constante.

O próximo resultado nos diz que as únicas curvas com curvatura afim constante são as seções cônicas.

Teorema 1.2.29. *Curvas não degeneradas têm curvatura afim constante se, e somente se, forem seções cônicas.*

Demonstração. veja [11], pág. 4. □

1.2.5 Teorema dos seis vértices e evoluta afim

Nesta seção, apresentamos um teorema análogo ao teorema dos quatros vértices no caso euclidiano, que é o teorema dos seis vértices para o caso afim.

Definição 1.2.30. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. A curva γ tem um vértice afim em $\gamma(s_0)$ se $\mu_s = 0$. Um vértice afim é chamado ordinário se $\mu_{ss}(s_0) \neq 0$. Um vértice afim é chamado degenerado se, $\mu_{ss}(s_0) = 0$.

Teorema 1.2.31. *Uma curva de Jordan fechada, simples e convexa, com curvatura euclidiana positiva, possui pelo menos seis vértices afins.*

Demonstração. Veja [3], pág. 43. □

Assim como foi definida a evoluta para o caso euclidiano, podemos definir a evoluta afim como sendo o lugar geométrico dos centros de curvatura afim da curva γ .

Definição 1.2.32. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim tal que sua curvatura μ é não nula em I . A evoluta afim de γ é a aplicação $ev : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada

$s \in I$ associa o centro de curvatura de γ em s , isto é,

$$ev(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\mu(s)} \gamma_{ss}(s),$$

onde $\gamma_{ss}(s)$ é o vetor normal afim de γ .

A evoluta afim também pode ser vista como o lugar geométrico dos centro de cônica que fazem até 6-contato com a curva γ . Esses pontos singulares são chamados de pontos sextáticos. Para mais detalhes sobre pontos sextáticos, veja [3].

Proposição 1.2.33. *Os pontos singulares da evoluta afim de uma curva γ parametrizada pelo comprimento de arco afim com $\mu \neq 0$, são aqueles para os quais a função curvatura afim de γ possui um vértice afim.*

Demonstração. Seja γ parametrizada pelo comprimento de arco afim e a evoluta dada por $ev = \gamma + \frac{1}{\mu} \gamma_{ss}$. Derivando a expressão da evoluta, obtemos:

$$ev_s = \gamma_s + \frac{\gamma_{sss}\mu - \gamma_{ss}\mu_s}{\mu^2} = \gamma_s - \frac{\mu^2 \gamma_s}{\mu^2} - \frac{\mu_s \gamma_{ss}}{\mu^2} = -\frac{\mu_s \gamma_{ss}}{\mu^2}.$$

Logo, $ev(s)$ vai ser regular se, e somente se, $\mu_s \neq 0$. □

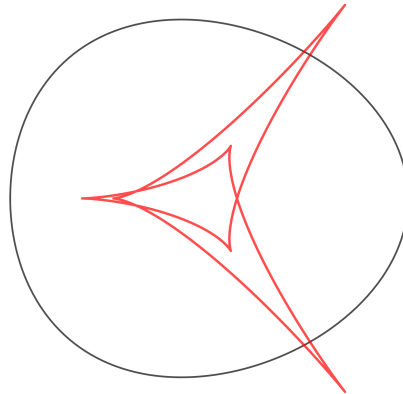


Figura 1.11: Curva em preto dada por $\gamma(t) = (0.07 \cos(2\pi t) + \cos(\pi t), 0.05 \sin(2\pi + 8) + 0.9 \sin(\pi t))$ e sua evoluta afim em vermelho.

1.2.6 Transformação equiafim

Definição 1.2.34. Uma transformação equiafim de $\mathbb{R}^2$ é uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ tal que:

$$\bar{x}(x, y) = ax + by + p$$

$$\bar{y}(x, y) = cx + dy + q,$$

$$\text{com } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

Teorema 1.2.35. *O parâmetro comprimento de arco afim e a curvatura afim são invariantes por transformações equiafins.*

Demonstração. Veja [12], pág. 56. □

1.2.7 Funções definidas sobre curvas

Nessa seção, iremos estudar duas funções definidas sobre curvas que são muito utilizadas na Teoria de Singularidades.

Funções distância ao cubo afim

Definição 1.2.36. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. A família de funções suaves $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(s, x) = [x - \gamma(s), \gamma_s(s)]$$

é chamada função distância ao cubo afim sobre γ . A função F fornece uma família de funções a dois parâmetros definida sobre a curva γ e um ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

Proposição 1.2.37. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, defina $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(s) = [x - \gamma(s), \gamma_s(s)]$. Então*

1. $f_s(s_0) = 0$ se, e somente se, $x - \gamma(s_0) = \lambda(s_0)\gamma_{ss}(s_0)$ com $\lambda(s_0)$ uma função real.
2. $f_s(s_0) = f_{ss}(s_0) = 0$ se, e somente se, $x - \gamma(s_0) = \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0)$ e $\mu(s_0) \neq 0$.
3. $f_s(s_0) = f_{ss}(s_0) = f_{sss}(s_0) = 0$ se, e somente se, $x - \gamma(s_0) = \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0)$, $\mu(s_0) \neq 0$ e $\mu_s(s_0) = 0$.

4. $f_s(s_0) = f_{ss}(s_0) = f_{sss}(s_0) = f_{ssss}(s_0)$ se, e somente se, $x - \gamma(s_0) = \frac{1}{\mu(s_0)} \gamma_{ss}(s_0)$, $\mu(s_0) \neq 0$, $\mu_s(s_0) = 0$ e $\mu_{ss}(s_0) = 0$.

Demonstração. Veja [12], pág.60. □

Função altura afim

Consideremos $\mathbb{S}^1$ como sendo o círculo unitário dado por

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Definição 1.2.38. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão a parametrizada pelo comprimento de arco afim. A família de funções suaves $H : I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$H(s, u) = [\gamma_s(s), u]$$

é chamada função altura afim sobre γ .

Para cada $u \in \mathbb{S}^1$ definimos $H_u : I \rightarrow \mathbb{R}$ como $H_u(s) = H(s, u)$. Observe que, para cada u fixo, H_u é suave.

Proposição 1.2.39. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. Para cada $u \in \mathbb{S}^1$, defina $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(s) = [\gamma_s, u]$. Então

1. $h_s(s_0) = 0$ se, e somente se, $u = \lambda(s_0) \gamma_{ss}(s_0)$ com $\lambda(s_0)$ uma função real.
2. $h_s(s_0) = h_{ss}(s_0) = 0$ se, e somente se, $u = \lambda(s_0) \gamma_{ss}(s_0)$ e $\mu(s_0) \neq 0$.
3. $h_s(s_0) = h_{ss}(s_0) = h_{sss}(s_0) = 0$ se, e somente se, $u = \lambda(s_0) \gamma_{ss}(s_0)$, $\mu(s_0) = 0$ e $\mu_s(s_0) = 0$.

Demonstração. Veja [12], pág.62. □

1.3 Resultados da Teoria de Singularidades

Nesta Seção, serão apresentadas algumas ferramentas e notações da Teoria de Singularidades que possibilitarão o estudo da estrutura local dos evolutóides, tanto para o caso euclidiano, quanto para o caso afim. Estas ferramentas nos permitirão distinguir qual tipo de

singularidade uma determinada família de funções possui, em termos da curvatura, e identificar quando o conjunto discriminante da família de retas será difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal ou a uma superfície rabo de andorinha, de acordo com a variação do α . Exemplos e resultados aqui abordados foram retirados de [6] e [12].

1.3.1 Envelopes

Apresentamos agora a definição de envelope de uma família de curvas e alguns exemplos.

Definição 1.3.1. O envelope, ou discriminante, de uma família $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ a n parâmetros, é o conjunto:

$$\mathcal{D}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^r, F(u, x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u, x) = 0, i = 1, \dots, r \right\}.$$

Exemplo 1.3.2. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1$ tal que $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Observe que para cada t real, $F(t, x) = 0$ nos fornece $(x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0$, que é um círculo de raio 1 e centro no eixo x_1 . Segue da Definição 1.3.13 que o discriminante de F é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}; F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}; (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \text{ e } 2(x_1 - t) = 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = t \text{ e } x_2^2 = 1, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \pm 1 \}. \end{aligned}$$

Logo, o envelope da família F é dado pelas retas $x_2 = \pm 1$ do plano. Além disso, para cada t corresponde a dois elementos do envelope, dados por $(t, 1)$ e $(t, -1)$.

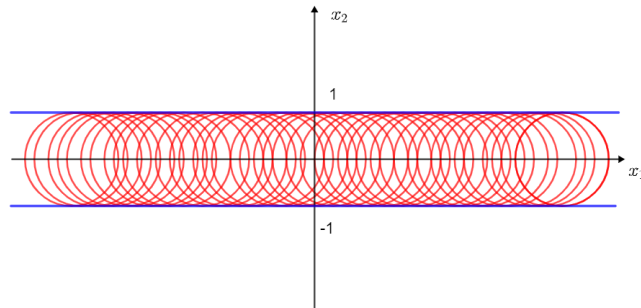


Figura 1.12: Os círculos dados por $F(t, x) = 0$ estão em vermelho e o envelope da família F são as retas $x_2 = \pm 1$ em azul.

Proposição 1.3.3. A evoluta euclidiana de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o envelope de retas normais à curva.

Demonstração. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco e considere $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a família definida por $F(s, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \gamma(s), \gamma'(s) \rangle$. Calculando o discriminante, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in \mathbb{R}; \langle \mathbf{x} - \gamma(s), \gamma'(s) \rangle = 0 \text{ e } -1 + \langle \mathbf{x} - \gamma(s), \gamma'(s) \rangle = 0 \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} - \gamma(s) = \lambda N(s) \text{ e } -1 + \lambda(s)k(s) = 0, \text{ para algum } s \in \mathbb{R} \} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s), k(s) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.4. A família $F(t, x_1, x_2) = -x_1 + t(1 - 2x_2) + 2t^3$ das retas normais à parábola $x_2 = x_1^2$ tem como envelope:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + t(1 - 2x_2) + 2t^3 = 0, \quad 1 - 2x_2 + 6t^2 = 0 \} \\ &= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -4t^3 \text{ e } x_2 = \frac{1}{2}(6t^2 + 1) \} \\ &= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(1 - 2x_2)^3 = -27x_1^2 \} \end{aligned}$$

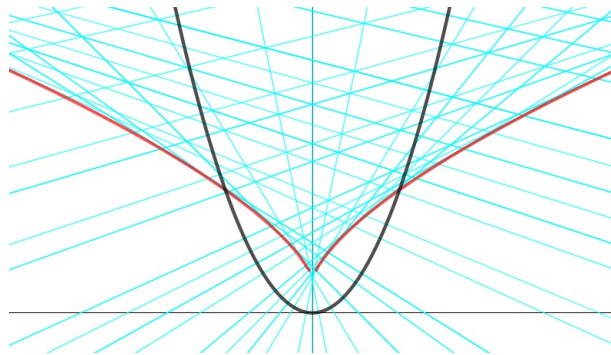


Figura 1.13: Envelope de retas normais à parábola.

Proposição 1.3.5. O envelope de retas tangentes consiste da própria curva mais as retas tangentes nos pontos de inflexão.

Demonstração. Seja γ parametrizada pelo comprimento de arco e a família de retas tangentes $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle.$$

Calculando o discriminante, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_F &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}; \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle = \langle \mathbf{x} - \gamma, N' \rangle = 0 \} \\
 &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}; \mathbf{x} - \gamma = \lambda T \text{ e } -\langle \lambda T, kT \rangle = 0 \} \\
 &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}; \mathbf{x} - \gamma = 0 \text{ e } k\lambda = 0 \} \\
 &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \gamma \text{ e } k = 0 \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \}
 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.3.6. *A evoluta afim de uma curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o envelope de retas normais afins à curva.*

Demonstração. A demonstração é semelhante à da Proposição 1.3.3, basta considerar $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco afim e a família $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(s, \mathbf{x}) = [\mathbf{x} - \gamma(s), \gamma_{ss}(s)]$ e calcular o discriminante. □

Proposição 1.3.7. *O envelope de retas tangentes afins consiste da própria curva mais as retas tangentes afins nos pontos de inflexão afim.*

Demonstração. A demonstração é similar à da Proposição 1.3.5, basta considerar $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco afim e a família $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(s, \mathbf{x}) = [\mathbf{x} - \gamma(s), \gamma_s(s)]$ e calcular o discriminante. □

1.3.2 Equivalência à direita

Sejam U_i ($i = 1, 2$), subconjuntos abertos da reta $\mathbb{R}$, t_i um ponto de U_i e $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves.

Definição 1.3.8. Dizemos que f_1 (em t_1) e f_2 (em t_2) são **equivalentes à direita** ($\mathcal{R}$ -equivalentes) se existem intervalos abertos $V_i \subset U_i$ ($i = 1, 2$), com $t_i \in V_i$, um difeomorfismo $h: V_1 \rightarrow V_2$ e uma constante c tais que, para todo $t \in V_1$

$$h(t_1) = t_2 \text{ e } f_1(t) = f_2(h(t)) + c,$$

onde $c = f_1(t_1) - f_2(t_2)$.

Lema 1.3.9. (de Hadamard) *Seja $f: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, e suponha que $f^{(p)}(t_0) = 0$ para todo p com $1 \leq p \leq k$. Então, existe uma função suave $f_1: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) =$*

$f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$ para todo t em alguma vizinhança de t_0 . Além disso, se $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ então, $f_1(t_0) \neq 0$.

Demonstração. Veja [6], pág. 42. □

Definição 1.3.10. Suponhamos que $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{R}$ -equivalente a $\pm t^{k+1}$ então, para $k \geq 0$, diremos que f **tem tipo** A_k em t_0 , ou uma A_k **singularidade** em t_0 . Assim, se f é do tipo A_0 , então $f'(t_0) \neq 0$. Também dizemos que f tem tipo $A_{\geq k}$ quando $f^{(p)}(t_0) = 0$ para $1 \leq p \leq k$.

1.3.3 Jatos de funções

Apresentamos agora o conceito de jato de uma função, que será importante para entender o comportamento das singularidades de funções.

Definição 1.3.11. Seja $k \geq 1$ um inteiro. o k -jato de f em t_0 é o polinômio

$$j^k f(t_0) = t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0),$$

obtido do truncamento da série de Taylor no grau k e excluindo o termo constante $f(t_0)$.

Observe que dois jatos são iguais quando têm o mesmo polinômio. Já o k -jato com o termo constante é definido por $f(t_0) + j^k f(t_0)$.

Exemplo 1.3.12. Considere $f(t) = (1+t) \sin(t^2)$. As derivadas de primeira, segunda e terceira ordem da f avaliadas no ponto $t_0 = 0$ são, respectivamente:

$$f'(0) = 0, f''(0) = 2, f'''(0) = 6.$$

Portanto, o 3-jato da f é dado por

$$j^3 f(t_0) = t^2 + t^3.$$

1.3.4 Desdobramento

Introduziremos agora o conceito de desdobramento de uma função f , que de certa forma, contém funções próximas a f . Um exemplo de desdobramento é a função $F(t, x_1, x_2, x_3) = t^5 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t$ que é um desdobramento a 3-parâmetros da $f(t) = t^5$.



Figura 1.14: Perturbação da $f(t) = t^5$.

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Podemos naturalmente considerar F como uma família a r -parâmetros de funções $F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ou como uma família a 1-parâmetro das funções $F_t : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Escrevemos $f = F_{x_0} : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(t) = F(t, x_0)$.

Definição 1.3.13. A função F como definida acima é chamada desdobramento a r -parâmetros de f .

Exemplo 1.3.14. Sejam $x \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A família de funções distância ao quadrado $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(s, x) = \langle x - \gamma(s), x - \gamma(s) \rangle,$$

é um desdobramento a 2-parâmetros.

1.3.5 Desdobramento (p)versal

Existem alguns desdobramentos que contém todas as deformações possíveis de f . Tais desdobramentos são chamados de desdobramentos universais. Eles fornecem um modelo para as singularidades que aparecem nas pequenas perturbações de f .

Assim como toda função $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de singularidade do tipo A_k pode ser reduzida, em uma vizinhança de t_0 a uma função do tipo $g(t) = \pm t^{k+1}$, com $f(t) = g(h(t)) + c$ onde $h : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$, 0 é um difeomorfismo e c uma constante aditiva, a ideia central para verificar que F é um desdobramento da f é reduzi-la através de uma mudança de variáveis adequada e fazer composições de difeomorfismos a, b e c até que seja possível escrever a função $F = G(a, b) + c$, com $g(t) = t^{k+1} = F$. Esse resultado pode ser visto com mais detalhes em [6].

Definição 1.3.15. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros da função

$g = G_{y_0} : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Considere

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$b : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}^s, y_0,$$

$$c : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}^s$$

em que a, b e c são funções suaves e $a(t, x_0) = t$, para t próximo a t_0 . Então, o desdobramento

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$$

é dito ser **(p) induzido** de G .

Observe que F é um desdobramento de f , tal que $f(t) = g(t) + c(x_0)$. Isso significa que $F(t, x_0) = G(a(t, x_0), b(x_0)) + c(x_0)$ e $G(t, y_0) = g(t)$. Logo, o desdobramento da f é igual a g mais uma constante aditiva.

Definição 1.3.16. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros da função $g : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que G é um desdobramento **(p) versal** de g em t_0 , se qualquer desdobramento de g é (p) induzido de G .

Teorema 1.3.17. O desdobramento $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$G(t, x_1, \dots, x_k) = \pm t^{k+1} + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_{k-1} t^{k-1}$$

é um desdobramento (p) versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ em $t_0 = 0$.

Demonstração. Veja [6], pág. 106. □

Exemplo 1.3.18. Seja $g(t) = t^3$, $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a 1-parâmetro da função g , dada por $G(t, x) = t^3 + xt$ e $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a 2-parâmetros da g , dado por $H(t, x, y) = t^3 + xt + yt^2$. Afirmamos que G é (p) induzido de H , e H é (p) induzido de G .

Iremos mostrar que G é (p) induzido de H .

De fato, seja $G(t, x) = H(t, x, 0) = t^3 + xt$. Defina

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, a(t, x) = t$$

$$b : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, b(x) = (x, 0)$$

$$c : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, c(x) = 0$$

Temos então, $G(t, x) = H(a(t, x), b(x)) + c(x)$.

Agora, queremos mostrar que H é (p) induzido de G e, para isso, precisamos eliminar o termo t^2 . Calculando $H(t - \frac{y}{3}, x, y)$, obtemos $t - \frac{y}{3} = t - \frac{y}{3}$. Então

$$\begin{aligned} H\left(t - \frac{y}{3}, x, y\right) &= \left(t - \frac{y}{3}\right)^3 + x\left(t - \frac{y}{3}\right) + y\left(t - \frac{y}{3}\right)^2 \\ &= t^3 + t\left(x - \frac{y^2}{3}\right) - \frac{xy}{3} + \frac{2y^3}{27} \end{aligned}$$

Assim, obtemos funções a, b e c dadas por

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, a(t, x, y) = t + \frac{y}{3}$$

$$b : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, b(x, y) = x - \frac{y^2}{3}$$

$$c : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, c(x, y) = -\frac{xy}{3} + \frac{2y^3}{27}$$

Portanto, segue o enunciado.

Na Definição 1.3.16, vimos que um desdobramento é (p) induzido, se é possível encontrar funções suaves a, b, c que satisfaçam a condição $F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$.

O próximo teorema determina sob quais condições uma família F dada como na Definição 1.3.13 será um desdobramento (p) versal de uma função f .

Teorema 1.3.19. (Critério matricial de (p) versalidade) *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a r -parâmetros da função $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que f tenha singularidade do tipo $A_k, k \geq 1$ em t_0 , e seja*

$$j^{k-1} \left(\frac{\partial F(t, x_0)}{\partial x_i} \right) (t_0) = \alpha_{1,i} t + \alpha_{2,i} t^2 + \cdots + \alpha_{k-1,i} t^{k-1},$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é (p) versal se, e somente se, a matriz $(k-1) \times r$ dos coeficientes α tem posto $k-1$.

Demonstração. Veja [6], pág. 108. □

Exemplo 1.3.20. Seja $F(t, x) = t^4 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ um desdobramento a 3-parâmetros de $f(t) = t^4$ em $t_0 = 0$. Vejamos que F é um desdobramento (p) versal de f em $t_0 = 0$.

De fato, observe que f tem singularidade do tipo A_3 em $t_0 = 0$, pois $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{(4)}(0) \neq 0$. Vamos aplicar o critério de versalidade do Teorema 1.3.19. Calculando os 2-jatos em torno de $t_0 = 0$, obtemos:

$$j^2 \left(\frac{\partial F(t, 0)}{\partial x_1} \right) (0) = 0, j^2 \left(\frac{\partial F(t, 0)}{\partial x_2} \right) (0) = t^2 \text{ e } j^2 \left(\frac{\partial F(t, 0)}{\partial x_3} \right) (0) = t.$$

Logo, a matriz dos coeficientes dos 2-jatos é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tem posto 2.

Portanto, F é um desdobramento (p) versal de f em $t_0 = 0$.

Conjunto Singular e Bifurcação

Definição 1.3.21. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a r -parâmetros de f . O **conjunto singular** $\mathcal{S}_F$ de F é dado por:

$$\mathcal{S}_F = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \mid \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ em } (t, x) \right\}.$$

O **conjunto de bifurcação** $\mathcal{B}_F$ de F é dado por:

$$\mathcal{B}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \text{ tal que } \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ em } (t, x) \right\}.$$

O próximo resultado estabelece que, dados dois desdobramentos (p) versais F e G de funções com singularidade do tipo A_k , os conjuntos $\mathcal{B}_F$ e $\mathcal{B}_G$ são difeomorfos.

Proposição 1.3.22. *Sejam F e G dois desdobramentos (p) versais a r -parâmetros de f (em t_0) e g (em t_1), respectivamente, ambos do tipo A_k ($k \geq 1$), então existem vizinhanças U e V e um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ na forma $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, onde $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_0$ e*

$$1. \quad \phi(\mathcal{S}_F \cap U) = \mathcal{S}_G \cap V.$$

2. b é um difeomorfismo de $\pi(U)$ a $\pi(V)$, onde cada $\pi(t, x) = x$ é a projeção dos parâmetros de desdobramento e $b(\mathcal{B}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{B}_G \cap \pi(V)$.

Demonstração. Veja [6], pág. 111. □

Veremos agora como é a estrutura local do conjunto Singular e Bifurcação de um desdobramento (p) versal de uma função que tem singularidade do tipo A_k .

Desdobramento (p) versal de $A_2(r \geq 1)$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x_1) = \pm t^3 + x_1 t$ um desdobramento (p) versal de $f(t) = t^3$.

Logo,

$$\mathcal{S}_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3t^2 + x_1 = 0\}$$

$$\mathcal{B}_F = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \text{ tal que } 3t^2 + x_1 = 6t = 0\},$$

Isto significa que, o conjunto de bifurcação é apenas um ponto em $\mathbb{R}$, a saber $\{0\}$.

Já para $r \geq 1$, $\bar{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\bar{F}(t, x_1, x_2, \dots, x_r) = t^3 + x_1 t$ é um desdobramento (p) versal a r -parâmetros de f , e daí obtemos

$$\mathcal{S}_F = \{(t, x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \mid 3t^2 + x_1 = 0\}$$

$$\mathcal{B}_F = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid 3t^2 + x_1 = 6t = 0\},$$

Assim, o conjunto de bifurcação é dado por $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$. Ou seja, o conjunto de bifurcação de qualquer desdobramento (p) versal de singularidade do tipo A_2 a r -parâmetros, é uma $(r-1)$ -variedade local parametrizada em $\mathbb{R}^r$.

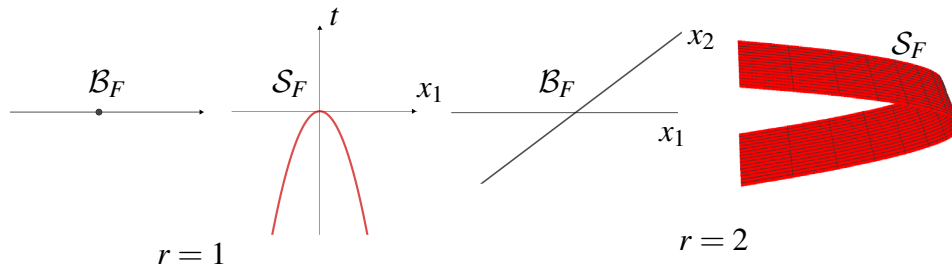


Figura 1.15: Conjuntos singular e bifurcação de desdobramento $A_2, r \geq 1$.

Desdobramento (p) versal de $A_3(r \geq 2)$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, (r \geq 2)$ dada por $F(t, x_1, \dots, x_r) = \frac{t^4}{4} + \frac{x_1 t^2}{2} + x_2 t$.

F é um desdobramento (p) versal de $f(t) = \frac{t^4}{4}$ em t_0 .

O conjunto bifurcação é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_F &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \text{ tal que } t^3 + x_1 t + x_2 = 3t^2 + x_1 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \text{ tal que } x_1 = -3t^2 \text{ e } x_2 = 2t^3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0\}\end{aligned}$$

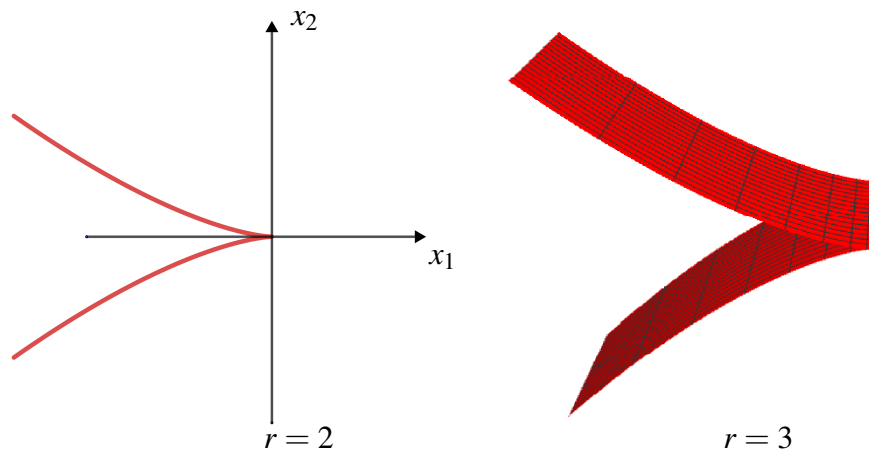


Figura 1.16: Conjunto bifurcação.

Desdobramento (p) versal de $A_4(r \geq 3)$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t,x) = \frac{t^5}{5} + \frac{x_1 t^3}{3} + \frac{x_2 t^2}{2} + x_3 t$ um desdobramento (p) versal de $f(t) = \frac{t^5}{5}$.

O conjunto bifurcação é dado por:

$$\mathcal{B}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \text{ tal que } t^4 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3 = 4t^3 + 2x_1 t + x_2 = 0\}.$$

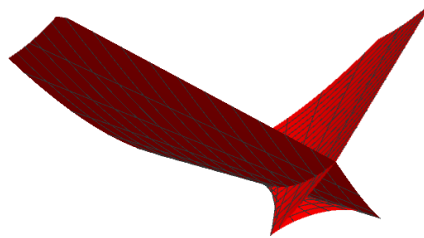


Figura 1.17: Superfície rabo de andorinha.

1.3.6 Desdobramento versal

Definição 1.3.23. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros da função $g : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Considere

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}^s, y_0,$$

onde a e b são funções suaves e $a(t, x_0) = t$, para t próximo a t_0 . Então o desdobramento

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x))$$

é dito ser **induzido** de G .

Definição 1.3.24. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s -parâmetros da função $g : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$, G é chamado desdobramento versal de g em t_0 , se qualquer desdobramento de g é induzido de G .

Teorema 1.3.25. O desdobramento $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$G(t, x_1, \dots, x_k) = \pm t^{k+1} + x_1 + x_2 t + \dots + x_k t^{k-1}$$

é um desdobramento versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ em $t_0 = 0$. A G será miniversal quando o número de parâmetros k for mínimo, para singularidade do tipo A_k .

Demonstração. Veja [6], pág. 117. □

Teorema 1.3.26. (Critério matricial de versalidade) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a r -parâmetros da função $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que f tenha singularidade de tipo $A_k, k \geq 1$ em t_0 . Escrevemos os $(k-1)$ -jatos com constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ em t_0 como

$$\alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}t + \alpha_{2,i}t^2 + \dots + \alpha_{k-1,i}t^{k-1}$$

para $i = 1, \dots, r$. Então F é versal se, e somente se, a matriz $k \times r$ dos coeficientes $(\alpha_{j,i})$ tem posto k ($r \geq k$).

Exemplo 1.3.27. Seja $G(t, x_1, x_2, x_3) = 2t^3 + x_1 t^2 + x_2$ um desdobramento a 3-parâmetros de $g(t) = 2t^3$ em $t_0 = 0$. Verifique se G é um desdobramento versal de g em $t_0 = 0$.

De fato, observe que g tem singularidade do tipo A_2 em $t_0 = 0$, pois $g'(0) = g''(0) = 0$, e $g^{(3)}(0) \neq 0$. Vamos aplicar o critério de versalidade do Teorema 1.3.26. Calculando os 2-jatos com constante em torno de $t_0 = 0$, obtemos:

$$\frac{\partial G(0,0)}{\partial x_1} + j^1 \left(\frac{\partial G(t,0)}{\partial x_1} \right) (0) = 0, \frac{\partial G(0,0)}{\partial x_2} + j^1 \left(\frac{\partial G(t,0)}{\partial x_2} \right) (0) = 1$$

$$\frac{\partial G(0,0)}{\partial x_3} + j^1 \left(\frac{\partial G(t,0)}{\partial x_3} \right) (0) = 0.$$

Logo, a matriz dos coeficientes do 1-jato com constante é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e tem posto 1.

Portanto, G não é um desdobramento versal de g em 0.

Esse exemplo nos diz que o fato de G ter singularidade do tipo A_k , não significa que G vai ser um desdobramento versal g .

Conjunto discriminante e de zeros

Definição 1.3.28. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que f tenha singularidade do tipo $A_k, k \geq 1$ em t_0 .

O **conjunto de zeros** $\mathcal{M}_F$ de F é o conjunto :

$$\mathcal{M}_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \mid F(t, x) = 0\}.$$

O **conjunto de discriminante** $\mathcal{D}_F$ de F é o conjunto:

$$\mathcal{D}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid \exists t \text{ tal que } F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ em } (t, x) \right\}.$$

O próximo resultado determina que dados dois desdobramentos versais F e G de funções com singularidade do tipo A_k , os conjuntos $\mathcal{D}_F$ e $\mathcal{D}_G$ são difeomorfos.

Proposição 1.3.29. *Sejam F e G dois desdobramentos versais a r -parâmetros de f (em t_0) e g (em t_1), respectivamente, ambos do tipo $A_k (k \geq 1)$, então existem vizinhanças U e V e um*

difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ na forma $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, onde $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_0$ e

1. $\phi(\mathcal{M}_F \cap U) = \mathcal{M}_G \cap V$.
2. b é um difeomorfismo de $\pi(U)$ a $\pi(V)$, onde cada π é a projeção dos parâmetros de desdobramento e $b(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V)$.

Demonstração. Veja [6], pág. 145. □

Veremos agora como é a estrutura local do conjunto Discriminante de um desdobramento versal de uma função que tem singularidade do tipo A_k .

Desdobramento versal de $A_1(r \geq 1)$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, (r \geq 1)$ dada por $F(t, x) = t^2 + x_1$ um desdobramento versal de $f : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^2$.

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r; \quad \exists t \in \mathbb{R} \text{ com } x_1 + t^2 = 2t = 0\}$$

.

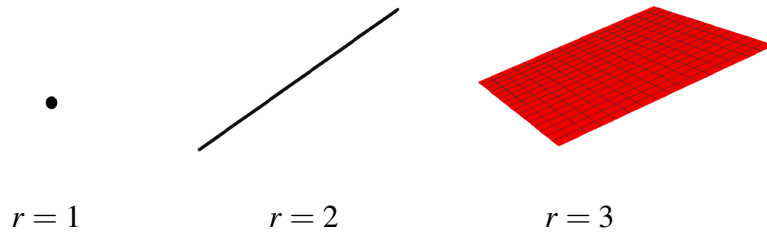


Figura 1.18: Conjunto discriminante para $r = 1, 2, 3$.

Desdobramento versal de $A_2(r \geq 2)$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, (r \geq 2)$ definido por $F(t, x_1, \dots, x_r) = t^3 + x_1 + x_2 t$ é um desdobramento $f : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(t) = t^3$.

O conjunto discriminante é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{x \in \mathbb{R}^r; \quad \exists t \in \mathbb{R} \text{ com } t^3 + x_1 + x_2 t = 3t^2 + x_2 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid 27x_1^2 + 4x_2^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{D}_F$ é difeomorfo a $C \times \mathbb{R}^{r-2}$, onde será a aresta cuspidal se $r=3$, caso $r=2$ será uma cúspide.

Desdobramento versal de $A_3(r \geq 3)$

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0,0) \rightarrow \mathbb{R}, (r \geq 3)$ definido por $F(t, x_1, \dots, x_r) = t^4 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3$ um desdobramento de $f : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^4$.

O conjunto discriminante é dado por:

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r; \exists t \in \mathbb{R} \text{ com } t^4 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3 = 4t^3 + 2x_1 t + x_2 = 0\},$$

que é a superfície rabo de andorinha (ver Figura 1.17).

Teorema 1.3.30. *Suponha que F satisfaça o critério dado pelo Teorema 1.3.26 para a matriz $k \times 3$ dos coeficientes $(\alpha_{j,i})$. Em uma vizinhança $x_0 \in \mathcal{D}_F$, o conjunto discriminante é localmente difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal para $k = 2$ e a uma superfície rabo de andorinha para $k = 3$.*

Demonstração. Veja [10], pág. 10. □

Os exemplos e afirmações apresentados a seguir aplicam resultados da teoria de singularidades nas famílias das funções de distância ao quadrado e ao cubo.

Exemplo 1.3.31. Sejam $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A família das funções distância ao quadrado $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(s, x) = \langle x - \gamma(s), x - \gamma(s) \rangle,$$

é um desdobramento a 2-parâmetros, cujas singularidades dos tipos A_2 e A_3 são dadas por:

1. Tipo A_2 em s_0 ,

$$x - \gamma = \frac{N}{k} \text{ e } k' \neq 0,$$

2. Tipo A_3 em s_0 ,

$$x - \gamma = \frac{N}{k}, k' = 0 \text{ e } k'' \neq 0$$

onde k é a curvatura euclidiana da curva γ .

Os conjuntos singular e de bifurcação de F são dados por:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_F &= \{(s, x) \in I \times \mathbb{R}^2 \mid x - \gamma = \lambda N, \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{B}_F &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in I \text{ tal que } \gamma - x = \frac{N}{k} \text{ e } k \neq 0\}.\end{aligned}$$

Seja $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e a família das funções distância ao quadrado dada por $F(s, x) = (X - x_1)^2 + (Y - x_2)^2$. Vamos aplicar o critério de versalidade do Teorema 1.3.19. Calculando os 2-jatos em torno de $s = s_0$, obtemos:

$$\frac{\partial F(x_0, s_0)}{\partial x_1} = 2(x_1 - X(s_0)) \Rightarrow j^2 \left(\frac{\partial F(x_0, s_0)}{\partial x_1} \right) (s_0) = -2tX'(s_0) - t^2X''(s_0)$$

$$\frac{\partial F(x_0, s_0)}{\partial x_2} = 2(x_2 - Y(s_0)) \Rightarrow j^2 \left(\frac{\partial F(x_0, s_0)}{\partial x_2} \right) (s_0) = -2tY'(s_0) - t^2Y''(s_0)$$

Veja que a matriz dos coeficientes dos 1-jato é dada por $\begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) \end{pmatrix}$, que tem posto 1, já que γ é regular. Portanto, F é um desdobramento (p) versal a 2-parâmetros.

Seja J a matriz dos coeficientes dos 2-jatos, dada por:

$$J = \begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) \\ -X''(s_0) & -Y''(s_0) \end{pmatrix}.$$

Temos $\det(J) = 2k(s_0) \neq 0$. Portanto, F é um desdobramento (p) versal a 2-parâmetros para singularidade do tipo A_3 .

Portanto, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.3.32. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura não nula e x um ponto da evoluta de γ em t . Então, localmente em x , a evoluta é*

1. *difeomorfa a uma reta em $\mathbb{R}^2$, se a curva não possui um vértice em t ,*
2. *difeomorfa a uma cúspide ordinária em $\mathbb{R}^2$, se a curva tem um vértice ordinário em t .*

Exemplo 1.3.33. A família das funções distância ao cubo afim $F: I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(s, x) = [x - \gamma(s), \gamma_s(s)]$ com $x = (x_1, x_2)$ tem singularidades

1. Tipo A_2 em s_0 ,

$$x - \gamma = \frac{\gamma_{ss}}{\mu} \text{ e } \mu_s \neq 0,$$

2. Tipo A_3 em s_0 ,

$$x - \gamma = \frac{\gamma_{ss}}{\mu}, \mu_s = 0 \text{ e } \mu_{ss} \neq 0.$$

De fato, seja γ parametrizada pelo comprimento de arco afim e a família dada por $F(s) = [x - \gamma, \gamma_s]$. Vamos adotar a notação $\gamma_s = \gamma_s(s)$. Para $f(s) = F(s, x)$, ter singularidade do tipo A_2 em $s = s_0$ as seguintes condições devem ser satisfeitas: $f_s = f_{ss} = 0$ e $f_{sss} \neq 0$. Assim

$$f_s = [-\gamma_s, \gamma_s] + [x - \gamma, \gamma_{ss}] = [x - \gamma, \gamma_{ss}].$$

Logo,

$$f_s = 0 \Leftrightarrow [x - \gamma, \gamma_{ss}] \Leftrightarrow x - \gamma = \lambda \gamma_{ss}, \text{ onde } \lambda \text{ é uma função real,}$$

ou seja, $x - \gamma$ está na mesma direção do normal afim. Derivando mais uma vez, obtemos

$$f_{ss} = [-\gamma_s, \gamma_{ss}] + [x - \gamma, \gamma_{sss}] = -1 - \mu [x - \gamma, \gamma_{ss}].$$

Assim

$$f_{ss} = 0 \Leftrightarrow -1 - \mu [x - \gamma, \gamma_s] = 0 \Leftrightarrow -1 - \mu [\lambda \gamma_{ss}, \gamma_s] = 0 \Leftrightarrow -1 + \mu \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\mu}.$$

Portanto, $x - \gamma = \frac{\gamma_{ss}}{\mu}$ é solução da f_{ss} .

Derivando f pela terceira vez, obtemos:

$$\begin{aligned} f_{sss} &= -\mu_s [x - \gamma, \gamma_s] - \mu [-\gamma_s, \gamma_s] - \mu [x - \gamma, \gamma_{ss}] \\ &= -\mu_s [x - \gamma, \gamma_s] - \mu [x - \gamma, \gamma_{ss}]. \end{aligned}$$

Usando as condições acima, concluímos que

$$f_{sss} = -\mu_s \left[\frac{\gamma_{ss}}{\mu}, \gamma_s \right] - \mu \left[\frac{\gamma_{ss}}{\mu}, \gamma_{ss} \right] = \frac{\mu_s}{\mu}.$$

Logo, $f_{sss} \neq 0$ se, e somente se, $\mu_s \neq 0$.

Já, para termos singularidade do tipo A_3 devemos ter: $f_s = f_{ss} = f_{sss} = 0$ e $f_{ssss} \neq 0$. Assim

$$\begin{aligned} f_{ssss} &= -\mu_{ss}[x - \gamma, \gamma_s] - \mu_s[x - \gamma, \gamma_{ss}] - \mu_s[x - \gamma, \gamma_{ss}] - \mu[-\gamma_s, \gamma_{ss}] - \mu[x - \gamma, \gamma_{sss}] \\ &= -\mu_{ss}[x - \gamma, \gamma_{ss}] - 2\mu_s[x - \gamma, \gamma_{ss}] + \mu + \mu^2[x - \gamma, \gamma_s]. \end{aligned}$$

Das condições propostas acima, temos

$$f_{ssss} = \frac{\mu_{ss}}{\mu}[\gamma_s, \gamma_{ss}] + \mu + \frac{\mu^2}{\mu}[\gamma_{ss}, \gamma_s] = \frac{\mu_{ss}}{\mu}$$

Portanto, $f_{ssss} \neq 0$ se, e somente, se $\mu_{ss} \neq 0$.

Sejam $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ e $F(s, x) = (x_1 - X)Y_s - (x_2 - Y)X_s$. Vamos aplicar o critério de (p) versalidade do Teorema 1.3.19. Calculando 2-jatos em torno de $s = s_0$, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = Y_s \Rightarrow j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) = Y_{ss}t - \frac{\mu Y_s}{2}t^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -X_s \Rightarrow j^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = -X_{ss}t + \frac{\mu X_s}{2}t^2$$

Veja que a matriz dos coeficientes dos 1-jato dada por $\begin{pmatrix} Y_{ss} & -X_{ss} \end{pmatrix}$ tem posto 1, já que γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim.

Já a matriz dos 2-jatos é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} Y_{ss} & -X_{ss} \\ -\frac{\mu Y_s}{2} & \frac{\mu X_s}{2} \end{pmatrix},$$

donde $\det(J) = \frac{\mu}{2}(X_s Y_{ss} - X_{ss} Y_s) = \frac{\mu}{2}[\gamma_s, \gamma_{ss}] \neq 0$, pois, γ está parametrizada pelo comprimento de arco e $\mu \neq 0$.

Logo, as condições para F ser um desdobramento (p) versal são satisfeitas.

Portanto, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.3.34. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura afim não nula e x um ponto da evoluta afim de γ em t . Então, localmente em x , a evoluta afim é*

1. *difeomorfa a uma reta em $\mathbb{R}^2$, se a curva não possui um vértice afim em t ,*
2. *difeomorfa a uma cúspide afim ordinária em $\mathbb{R}^2$, se a curva tem um vértice afim ordinário em t .*

1.3.7 Transições

Agora vamos apresentar as transições que ocorrem na estrutura local do conjunto discriminante de um desdobramento versal de uma função que tem singularidade do tipo A_2 e A_3 para um desdobramento a 3- parâmetros de uma família F . Para mais detalhes, veja [2], [6] e [10].

Os conjuntos de níveis de uma função em uma superfície aresta cuspidal e rabo de andorinha no espaço $\mathbb{R}^3$ se comportam de maneiras diferentes. Analisando os conjuntos de nível da função $h_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, observa-se que, para todo $c \in \mathbb{R}$ as interseções da $h_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 = c$ com a superfície aresta cuspidal, são cúspides. Para a função $h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3^2$, os conjuntos de nível sofrem transição do tipo "bicos", enquanto que, a $h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3^2 = c$ sofre transição do tipo "lábios", e quando $c > 0$, degenera em um ponto. Para mais detalhes, veja Figura 1.19.

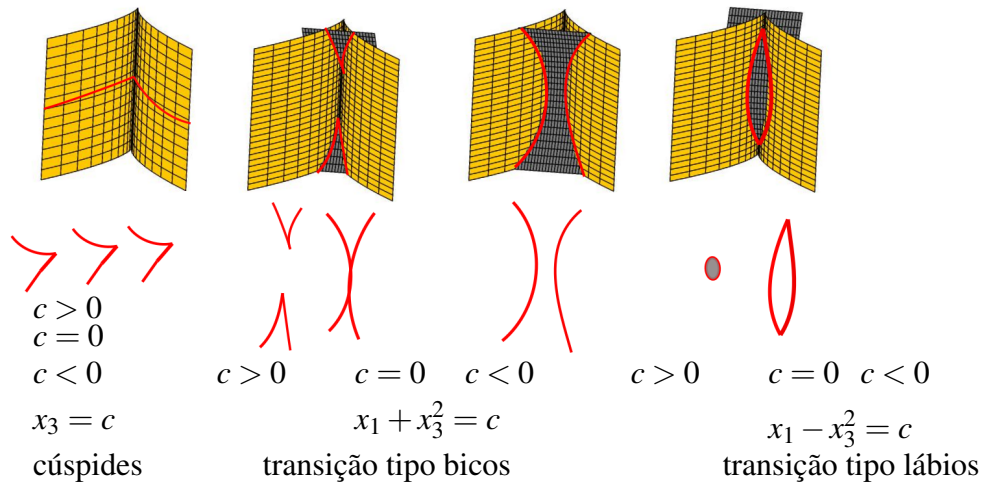


Figura 1.19: Transições que ocorrem na superfície aresta cuspidal.

Já para a superfície rabo de andorinha, os conjuntos de nível determinados pela $h_4(x_1, x_2, x_3) = x_1 = c$, têm as seguintes características: para $c < 0$, a curva tem interseção e possui duas cúspides; já para $c = 0$ e $c > 0$ ocorre duas cúspides, sendo uma delas curvada. Observe a Figura 1.20.

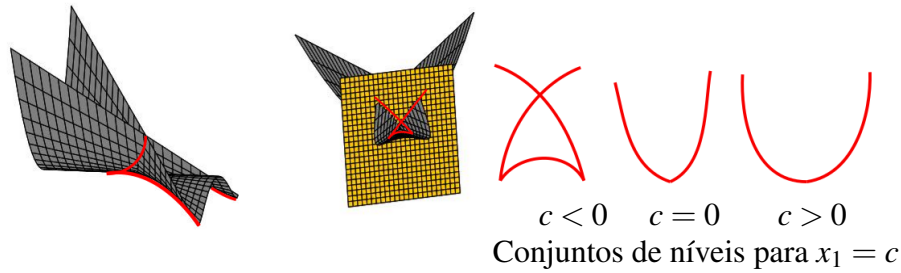


Figura 1.20: Transições que ocorrem na superfície rabo de andorinha.

Note que, para a função suave $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0 \in D_F$, haverá um plano kernel π até $\mathbf{x}_0$. Este é o plano tangente do conjunto de nível da função h passando por $\mathbf{x}_0$ e tem como equação do plano $\langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), (h_{x_1}, h_{x_2}, h_{x_3}) \rangle = 0$, cujas derivadas parciais são avaliadas em $\mathbf{x}_0$. Já o plano tangente limitante á superfície é um plano que passa pela imagem de um ponto singular e é ortogonal ao vetor normal da superfície. A Proposição 1.3.35 abaixo nos dá as condições para termos as transições dos tipos cúspides, bicos, lábios e rabo de andorinha. Para uma discussão mais detalhada de funções sobre discriminante e transições, veja [2] e [5] .

Proposição 1.3.35. (i) *Para superfície aresta cuspidal, com cúspide em $\mathbf{x}_0 \in D_F$, os conjuntos de nível de h em D_F serão todas curvas cúpides, desde que o plano π não contenha a tangente a linha de cúspides passando em $\mathbf{x}_0$ (" π é transversal à curva cúspide"). Por outro lado, os conjuntos de nível sofrem uma transição de "bicos" ou "lábios", desde que π contenha essa tangente, mas não coincida com o plano tangente limite a superfície aresta cuspidal em um ponto que se aproxima de $\mathbf{x}_0$ (" π é transversal a este plano tangente limitante").*

(ii) *Para superfície rabo de andorinha, com $\mathbf{x}_0$ um ponto da superfície, os conjuntos de nível em D_F sofrem uma transição de rabo de andorinha com duas cúspides se fundindo e desaparecendo, desde que π não contenha a tangente limitante às cúspides em D_F em $\mathbf{x}_0$ (" π é transversal à reta tangente limitante").*

D_F denota o conjunto discriminante da família F .

Demonstração. Veja [2], pág. 574. □

A Figura 1.21 nos fornece uma interpretação geométrica de quando as condições da Proposição 1.3.35 são satisfeitas. Note que, pela Figura 1.21 (a) temos que o conjunto de nível da função $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3^2$, para $c = 0$ coincide com o plano tangente limitante à superfície, assim a transição que ocorre é diferente das transições dos tipos

cúspides, bicos e lábios como mostrado na Figura 1.19. Já na Figura 1.21 (b) a reta tangente à linha de cúspide $\mathcal{C}$ não está contida no plano $\pi = x_3$, daí, temos cúspides. E para a Figura 1.21 (c) temos que a reta tangente à linha de cúspide $\mathcal{C}$ está contida no plano $\pi = x_3$, além disso, o plano tangente limitante é transversal ao plano $\pi = x_3$. Logo, temos transições do tipo bicos ou lábios.

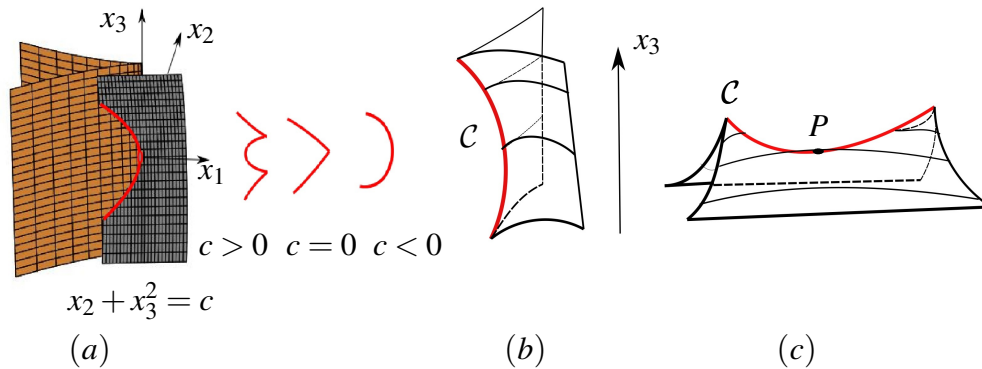


Figura 1.21: Condições para que ocorra transições dos tipos cúspides, bicos ou lábios .

Agora, note que as condições da Proposição 1.3.35 são satisfeitas desde que a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenha um vértice ordinário em $t_0 \in I$, isto é, $k(t_0) \neq 0$, $k'(t_0) = 0$ e $k''(t_0) \neq 0$ ou inflexão ordinária que é quando $k(t_0) = 0$ e $k'(t_0) \neq 0$, onde k é curvatura da curva γ .

Para o envelope de retas tangentes dadas pelas Proposições 1.3.5 e 1.3.7 segue que conjunto $\mathcal{D}_F$ próximo de $(x_0, y_0, 0)$ com γ uma curva com inflexão ordinária é difeomorfo a superfície aresta cuspidal. Logo, as transições que ocorrem são do tipo bico com duas cúspides se cruzando, posteriormente temos as retas tangentes nos pontos de inflexão e depois se separam em duas curvas, e em sequência ocorre a transição do tipo rabo de andorinha próximo aos pontos de inflexão. Por outro lado, note que não podemos ter uma transição do tipo lábios, uma vez que o envelope de retas tangentes é a própria curva mais as retas tangentes nos pontos de inflexão. Logo, o envelope não pode ser vazio.

Para ilustrar o que foi posto acima, considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = ((\cos(t) + 2\cos(2t) + 10)\cos t, (12\sin t - 8)\sin t)$ com duas inflexões como na Figura 1.22.

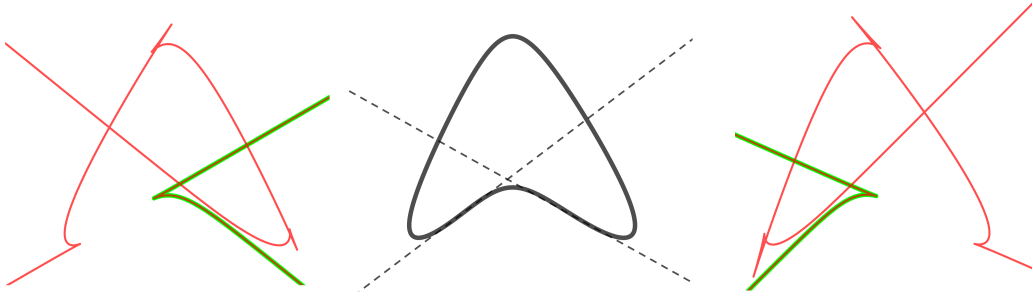


Figura 1.22: Curva $\gamma(t) = ((\cos(t) + 2\cos(2t) + 10)\cos t, (12\sin t - 8)\sin t)$ e suas transições.

Capítulo 2

Evolutóides euclidianos

Neste capítulo iremos estudar os evolutóides euclidianos de uma curva γ suave, fechada e sem pontos de inflexão. A principal referência utilizada foi [10].

É conhecido que o envelope de retas tangentes é própria curva juntamente com as retas tangentes nos pontos de inflexão, veja Proposição 1.3.5. Já o envelope de retas normais é a evoluta da curva, veja Proposição 1.3.3. É natural se indagar sobre o que existe entre os envelopes de retas tangentes e normais. O envelope da família de retas que faz um ângulo α fixo com a reta tangente, é chamado evolutóide euclidiano.

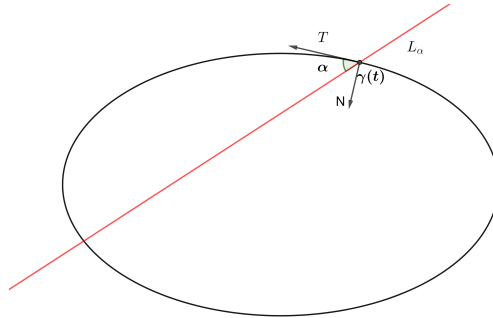


Figura 2.1: Curva γ e a Reta L_α .

Estamos interessados na reta L_α obtida girando a reta tangente a um ângulo fixo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Note que, a direção de L_α é dada por:

$$T^\alpha(t) = T(t) \cos \alpha + N(t) \sin \alpha.$$

Logo,

$$N^\alpha(t) = T(t) \sin \alpha - N(t) \cos \alpha$$

é ortogonal a T^α .

Definição 2.0.1. O evolutóide de uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o envelope da família $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de retas L_α , definida por

$$F(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \gamma(t), T(t) \sin \alpha - N(t) \cos \alpha \rangle,$$

com $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Para encontrarmos o envelope na forma paramétrica, devemos resolver o discriminante dado pela Definição 1.3.13. Considere a seguinte notação para a curva $\gamma(t) = \gamma$, e as equações de Frenet dadas por $T' = kN\|\gamma'\|$ e $N' = -kT\|\gamma'\|$. Omitiremos o parâmetro t por acúmulo de notação nos cálculos. Assim, temos:

$$\begin{aligned} F &= \langle \mathbf{x} - \gamma, T \sin \alpha - N \cos \alpha \rangle = 0 \\ \implies \sin \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle - \cos \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ao derivar F em relação a t , obtemos:

$$\begin{aligned} F_t &= \langle -\gamma', T \sin \alpha - N \cos \alpha \rangle + \langle \mathbf{x} - \gamma, T' \sin \alpha - N' \cos \alpha \rangle \\ &= \langle -\gamma', T \sin \alpha \rangle + \langle \mathbf{x} - \gamma, kN\|\gamma'\| \sin \alpha + kT\|\gamma'\| \cos \alpha \rangle \\ &= -\|\gamma'\| \sin \alpha + k\|\gamma'\| \cos \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle + k\|\gamma'\| \sin \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como $\mathbf{x} - \gamma$ é uma combinação linear de T e N , podemos escrever $\mathbf{x} - \gamma = \lambda T + \psi N$ com λ e ψ funções a serem determinadas. Ao substituir a expressão $\mathbf{x} - \gamma$ nas equações (2.1) e (2.2), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \lambda \sin \alpha - \psi \cos \alpha = 0 \\ \lambda k \sin \alpha + \psi k \cos \alpha = \sin \alpha. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\psi = \frac{\sin^2 \alpha}{k} \text{ e } \lambda = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k}.$$

Portanto, o evolutóide é dado explicitamente por:

$$\mathbf{x} - \gamma = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k} T + \frac{\sin^2 \alpha}{k} N \quad (2.3)$$

Observação 2.0.2. Da equação (2.3) obtemos:

- i) Se $\alpha = 0$, então o evolutóide é dado por $\mathbf{x} = \gamma$ que coincide com a própria curva γ .
- ii) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então o evolutóide é dado por $\mathbf{x} = \gamma + \frac{N}{k}$ que é a evoluta de γ .

2.1 Regularidade do evolutóide euclidiano

Seja γ uma curva regular convexa e fechada com curvatura não nula. Temos que o evolutóide de γ dado em (2.3) pode ter singularidades. A proposição a seguir nos dá condições necessárias e suficientes para que o evolutóide seja singular.

Proposição 2.1.1. *O envelope dado pela equação (2.3) não é regular se, e somente se, $k^2 \cos \alpha - k_s \sin \alpha = 0$, onde k_s é a derivada da curvatura em relação ao comprimento de arco s de γ .*

Demonstração. Derivando a equação (2.3) em relação à variável t , temos:

$$\mathbf{x}' = \gamma' + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{T'k - k'T}{k^2} \right) + \sin^2 \alpha \left(\frac{N'k - k'N}{k^2} \right).$$

Das equações de Frenet, segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \gamma' + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{kN\|\gamma'\|k - k'T}{k^2} \right) + \sin^2 \alpha \left(\frac{-kT\|\gamma'\|k - k'N}{k^2} \right) \\ &= T\|\gamma'\| + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{k^2N\|\gamma'\| - k'T}{k^2} \right) + \sin^2 \alpha \left(\frac{-k^2T\|\gamma'\| - k'N}{k^2} \right) \\ &= \left(\|\gamma'\| \cos \alpha - \frac{k' \sin \alpha}{k^2} \right) (T \cos \alpha + N \sin \alpha). \end{aligned}$$

Como $T \cos \alpha + N \sin \alpha \neq 0$, já que é a direção da reta L_α , segue que,

$$\|\gamma'\| \cos \alpha - \frac{k' \sin \alpha}{k^2} = 0.$$

Logo,

$$k^2 \|\gamma'\| \cos \alpha - k' \sin \alpha = 0. \quad (2.4)$$

Agora, se s é o parâmetro comprimento de arco em γ , temos:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{dk}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dk}{ds} \|\gamma'\|. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) em (2.4), obtemos $k^2 \cos \alpha - k_s \sin \alpha = 0$. □

Exemplo 2.1.2. Seja a elipse definida por $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, com $a > b > 0$. O primeiro valor de α para o qual evolutóide de γ tem singularidade é $\alpha_0 = \arctan\left(\frac{2ab}{3(a^2 - b^2)}\right)$.

De fato, a Proposição 1.1.17 nos dá:

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow k'(t) = \frac{-3ab(a^2 - b^2) \sin 2t}{2((a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}})}.$$

Da Proposição 2.1.1, o evolutóide de γ é singular se vale

$$\frac{1}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}} \cdot \left(a^2 b^2 \cos \alpha + \frac{3ab(a^2 - b^2) \sin 2t \sin \alpha}{2} \right) = 0.$$

Como,

$$\frac{1}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}} \neq 0,$$

segue que:

$$a^2 b^2 \cos \alpha + \frac{3ab(a^2 - b^2) \sin 2t \sin \alpha}{2} = 0.$$

Logo,

$$\tan \alpha = -\frac{a^2 b^2 2}{3ab(a^2 - b^2) \sin 2t} = -\frac{2ab}{3(a^2 - b^2) \sin 2t} \Rightarrow \alpha(t) = \arctan\left(-\frac{2ab}{3(a^2 - b^2) \sin 2t}\right).$$

O valor de α é mínimo quando $\sin 2t = -1$.

Portanto, $\alpha_0 = \arctan\left(\frac{2ab}{3(a^2 - b^2)}\right)$.

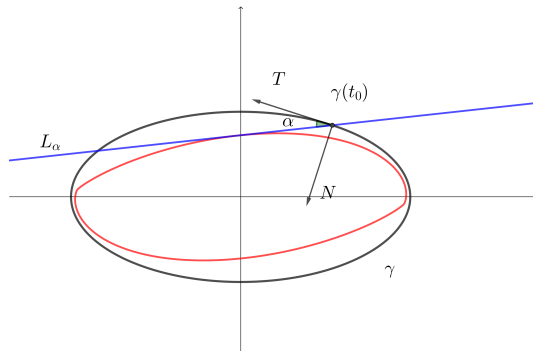


Figura 2.2: Para a elipse $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$, $\alpha_0 = \arctan\left(\frac{4}{9}\right)$.

Proposição 2.1.3. Suponha $k \neq 0$ e $\sin \alpha \neq 0$. Então, a cúspide como na Proposição 2.1.1 é um cúspide ordinária se, e somente, se $2k_s^2 - kk_{ss} \neq 0$, onde as derivadas, em relação ao comprimento de arco s , são avaliadas no ponto da cúspide.

Demonstração. Suponha que γ seja parametrizada pelo comprimento de arco e seja o evolutóide dado pela equação (2.3). Devemos mostrar que os vetores $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ são linearmente independentes. De fato, seja $\mathbf{x}' = \lambda T \cos \alpha + \lambda N \sin \alpha$, tal que $\lambda = \cos \alpha - \frac{k' \sin \alpha}{k^2}$. Usando as equações de Frenet e calculando as derivadas de segunda e terceira ordem, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= \lambda' T \cos \alpha + \lambda T' \cos \alpha + \lambda' N \sin \alpha + \lambda N' \sin \alpha \\ &= T(\lambda' \cos \alpha - k\lambda \sin \alpha) + N(k\lambda \cos \alpha + \lambda' \sin \alpha). \\ \mathbf{x}''' &= T'(\lambda' \cos \alpha - k\lambda \sin \alpha) + T(\lambda'' \cos \alpha - k'\lambda \sin \alpha - k\lambda' \sin \alpha) \\ &\quad + N'(k\lambda \cos \alpha + \lambda' \sin \alpha) - N(k'\lambda \cos \alpha + k\lambda' \cos \alpha + \lambda'' \sin \alpha) \\ &= T(\lambda'' \cos \alpha - 2\lambda'k \sin \alpha - \lambda k' \sin \alpha - \lambda k^2 \cos \alpha) \\ &\quad + N(\lambda'' \sin \alpha + 2\lambda'k \cos \alpha + \lambda k' \cos \alpha - \lambda k^2 \sin \alpha). \end{aligned}$$

Recorde que, para termos um singularidade, a condição $\lambda = 0$ deve ser cumprida. Assim, a matriz dos vetores $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ na base $\{T, N\}$ é dada da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda' \cos \alpha & \lambda' \sin \alpha \\ \lambda'' \cos \alpha - 2\lambda'k \sin \alpha & \lambda'' \sin \alpha + 2\lambda'k \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Logo, $\det(A) = 2(\lambda')^2 k \cos^2 \alpha + 2(\lambda')^2 k \sin^2 \alpha$.

Observe que $\det(A) = 0$ se, e só se, $2(\lambda')^2 k = 0$. Como $k \neq 0$ segue que $\lambda' = 0$.

Então,

$$\lambda' = -\frac{\sin \alpha}{k^2} \left(k'' - \frac{2(k')^2}{k} \right) = 0,$$

desde que $k''k - 2(k')^2 = 0$.

□

2.2 Superfície discriminante

Com o intuito de entender precisamente como a curva evolui até sua evoluta passando por seus evolutóides, nesta seção iremos incluir o α como parâmetro da família F dada na Definição 2.0.1 e usar conceitos da Teoria de Singularidades. Aqui, usaremos a função $h(x, y, \alpha) = \alpha$ para estudar esta evolução. Para mais detalhes sobre a Teoria de Singularidades e funções sobre discriminantes, veja [5] e [6].

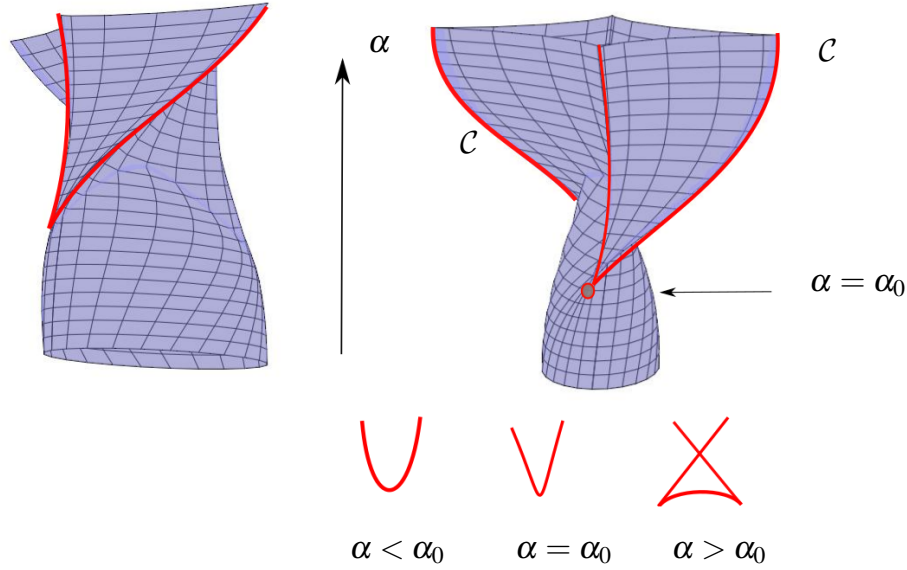


Figura 2.3: A superfície discriminante da elipse $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$ tem a estrutura de superfície aresta cuspidal (curvada) na qual aparecem curvas cúspides $\mathcal{C}$, e os conjuntos de nível próximos a $\alpha = \alpha_0$ parecem sofrer uma transição para rabo de andorinha. Além disso, a função $h(x, y, \alpha) = \alpha$ nos fornece curvas de nível que passam pela própria curva γ , depois pelos seus evolutóides e no topo, temos a evoluta da curva.

Dado um ponto sobre a superfície discriminante de F , queremos saber as condições para que a função desdobrada tenha singularidades. No próximo resultado, exploramos isto:

Proposição 2.2.1. *Seja $(\mathbf{x}_0, \alpha_0, t_0) = (x_0, y_0, \alpha_0, t_0)$ satisfazendo $F = F_t = 0$ tal que $(\mathbf{x}_0, \alpha_0) \in \mathfrak{D}_F$.*

1. *Seja s a função comprimento de arco de γ . Suponha que $k(t_0) \neq 0$ tal que $\mathbf{x}_0$ seja dado pela equação (2.3). Então $f(t) = F(\mathbf{x}_0, \alpha_0, t)$ em $t = t_0$ terá singularidade do*
 - a. *Tipo A_2 em $t = t_0$, se $k^2 \cos \alpha - k_s \sin \alpha = 0$ e $2k_s^2 - kk_{ss} \neq 0$.*
 - b. *Tipo A_3 em $t = t_0$, se $k^2 \cos \alpha - k_s \sin \alpha = 0$, $2k_s^2 - kk_{ss} = 0$ e $6k_s^3 - k^2 k_{sss} \neq 0$.*
2. *Suponha que $k(t_0) = 0$, $k'(t_0) \neq 0$, ou seja, γ tenha uma inflexão ordinária em $t = t_0$. Então, definido $\alpha_0 = 0$ o único $\mathbf{x}$ próximo $\gamma(t_0)$ para o qual $F_t(\mathbf{x}, 0, t) = 0$ e $\mathbf{x} = \gamma(t_0)$ e $f(t) = F(\gamma(t_0), 0, t)$ tem singularidade do tipo A_2 em t_0 .*

Demonstração. Seja γ parametrizada pelo comprimento de arco e a família de retas L_α dada por $F = \langle \mathbf{x} - \gamma, T \sin \alpha - N \cos \alpha \rangle$ e $\mathbf{x} - \gamma = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k} T + \frac{\sin^2 \alpha}{k} N$ um ponto do evolutóide. Para

termos singularidade do tipo A_2 no ponto $t = t_0$, as condições são $F_t = F_{tt} = 0$ e $F_{ttt} \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 F_t &= \langle -T, T \sin \alpha \rangle + \langle \mathbf{x} - \gamma, T' \sin \alpha - N' \cos \alpha \rangle \\
 &= -\sin \alpha + k \sin \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle + k \cos \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle \\
 &= -\sin \alpha + k \sin \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{k} \langle N, N \rangle + k \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k} \langle T, T \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
 F_{tt} &= k' \sin \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle + k \sin \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, N' \rangle + k' \cos \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle \\
 &+ k \cos \alpha \langle \mathbf{x} - \gamma, T' \rangle - k \cos \alpha \\
 &= \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle (-k^2 \sin \alpha + k' \cos \alpha) + \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle (k' \sin \alpha + k^2 \cos \alpha) - k \cos \alpha \\
 &= -\frac{\sin^2 \alpha}{k} \cdot (k' \cos \alpha - k^2 \sin \alpha) + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k} \cdot (k' \sin \alpha + k^2 \cos \alpha) - k \cos \alpha \\
 &= \frac{k' \sin \alpha - k^2 \cos \alpha}{k}.
 \end{aligned}$$

Logo, $F_{tt} = 0$ se, e somente se, $-k' \sin \alpha + k^2 \cos \alpha = 0$.

Ao derivar F mais uma vez, obtemos:

$$\begin{aligned}
 F_{ttt} &= \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle (k'' \cos \alpha - 3kk' \sin \alpha - k^3 \cos \alpha) + k^2 \sin \alpha - 2k' \cos \alpha \\
 &+ \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle (k'' \sin \alpha + 3kk' \cos \alpha - k^3 \sin \alpha) \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{k} \cdot (k'' \cos \alpha - 3kk' \sin \alpha - k^3 \cos \alpha) + k^2 \sin \alpha - 2k' \cos \alpha \\
 &+ \frac{\sin^2 \alpha}{k} \cdot (k'' \sin \alpha + 3kk' \cos \alpha - k^3 \sin \alpha) \\
 &= \frac{k'' \sin \alpha - 2kk' \cos \alpha}{k}.
 \end{aligned}$$

Assim, $F_{ttt} \neq 0$ se, e somente se, $k'' \sin \alpha - 2kk' \cos \alpha \neq 0$. Usando a condição de que $k' \sin \alpha + k^2 \cos \alpha = 0$, segue $-kk'' + 2(k')^2 \neq 0$.

Agora para verificar a singularidade do tipo A_3 em $t = t_0$. A derivada de quarta ordem é

dada por:

$$\begin{aligned}
F_{ttt} &= \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle (k''' \cos \alpha - 3(k')^2 \sin \alpha - 4kk'' \sin \alpha - 6k^2k' \cos \alpha + k^4 \sin \alpha) \\
&+ \langle \mathbf{x} - \gamma, N \rangle (k''' \sin \alpha + 3(k')^2 \cos \alpha + 4kk'' \cos \alpha - 6k^2k' \sin \alpha - k^4 \cos \alpha) \\
&- 3K'' \cos \alpha + 5kk' \sin \alpha + k^3 \cos \alpha \\
&= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k} \cdot (k''' \cos \alpha - 3(k')^2 \sin \alpha - 4kk'' \sin \alpha - 6k^2k' \cos \alpha + k^4 \sin \alpha) \\
&+ \frac{\sin^2 \alpha}{k} \cdot (k''' \sin \alpha + 3(k')^2 \cos \alpha + 4kk'' \cos \alpha - 6k^2k' \sin \alpha - k^4 \cos \alpha) \\
&- 3K'' \cos \alpha + 5kk' \sin \alpha + k^3 \cos \alpha \\
&= \frac{k'''}{k} \sin \alpha - kk' \sin \alpha - 3k'' \cos \alpha + k^3 \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Assim, $F_{ttt} \neq 0$, desde que

$$k''' \sin \alpha - 3kk' \cos \alpha - k^2k' \sin \alpha + k^4 \cos \alpha \neq 0.$$

Usando as condições que $-k' \sin \alpha + k^2 \cos \alpha = 0$ e $-kk'' + 2(k')^2 = 0$, chegamos que $(6k')^3 - k^2k''' \neq 0$.

Para demonstrar o item(ii), considere γ parametrizada pelo comprimento de arco e tome $\alpha = 0$. Então a família de retas L_α é dada por $F(\mathbf{x}, 0, t) = \langle \mathbf{x} - \gamma, -N \rangle$. Isso significa que $\mathcal{D}_F$ é a própria $\gamma = \mathbf{x}$ mais as retas tangentes nos pontos de inflexão. Derivando F em relação ao parâmetro t , obtemos:

$$F_t = k \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle \Rightarrow F_{tt} = -k + k^2 \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle + k' \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle.$$

Como $k = 0$, temos $F_{tt} = k' \langle \mathbf{x} - \gamma, T \rangle = 0$ uma vez que $\gamma = \mathbf{x}$. Da condição que $F_t = F_{tt} = 0$, obtemos $F_{ttt}(0, 0, 0) = -2k'(0) \neq 0$, então $F(0, 0, t)$ tem singularidade do tipo A_2 em $t = 0$. $\square$

Teorema 2.2.2. *A família F , dada na Definição 2.0.1, satisfaz as condições do Teorema 1.3.30. Assim, quando $f(t) = F(\mathbf{x}_0, t)$ tem uma singularidade A_r em t_0 , $r = 2$ ou 3 , nos casos abrangidos pela Proposição 2.2.1, o conjunto discriminante $\mathcal{D}_F$, que é a união dos envelopes espalhados na direção, é localmente difeomorfo a uma superfície uma aresta cuspidal para $r = 2$ ou uma superfície de rabo de andorinha para $r = 3$, em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$.*

Demonstração. Seja $F(\mathbf{x}, \alpha, t) = (x - X)(X's + Y'c) + (y - Y)(Y's - X'c)$ a família de retas L_α e considere as seguintes notações $u = (\sin \alpha, \cos \alpha) = (s, c)$, $\mathbf{x} = (x, y, \alpha)$ e seja $\gamma(t) = (X, Y)$ parametrizada pelo comprimento de arco.

Vamos utilizar o critério de versalidade dado pelo Teorema 1.3.26. Assim, calculemos os 2-jatos com constante de F_x, F_y e F_α em torno de t_0 :

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{x}_0, \alpha_0, t) + j^2(F_x(\mathbf{x}_0, \alpha_0, t))(t_0) &= \langle T(t_0), u \rangle + k(t_0) \langle N(t_0), u \rangle t \\ &+ (k'(t_0) \langle N(t_0), u \rangle - k^2(t_0) \langle T(t_0), u \rangle) \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

os outros 2-jatos com constante são calculados de maneira análogo. Daí, a matriz dos coeficientes dos 2-jatos com constante é dado por:

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_\alpha \\ F_{xt} & F_{yt} & F_{\alpha t} \\ F_{xtt} & F_{ytt} & F_{\alpha tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle T(t_0), u \rangle & -\langle N(t_0), u \rangle & \frac{s}{k(t_0)} \\ k(t_0) \langle N(t_0), u \rangle & k(t_0) \langle T(t_0), u \rangle & -c \\ \frac{k'(t_0) \langle N(t_0), u \rangle - k^2(t_0) \langle T(t_0), u \rangle}{2!} & \frac{k'(t_0) \langle T(t_0), u \rangle + k^2(t_0) \langle N(t_0), u \rangle}{2!} & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz do 1-jato com constante é dada por:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \langle T(t_0), u \rangle & -\langle N(t_0), u \rangle & \frac{s}{k(t_0)} \\ k(t_0) \langle N(t_0), u \rangle & k(t_0) \langle T(t_0), u \rangle & -c \end{pmatrix}.$$

Seja,

$$J_{1.1} = \begin{pmatrix} \langle T(t_0), u \rangle & -\langle N(t_0), u \rangle \\ k(t_0) \langle N(t_0), u \rangle & k(t_0) \langle T(t_0), u \rangle \end{pmatrix},$$

o determinante $\det(J_{1.1}) = k(t_0)(\langle T(t_0), u \rangle^2 + \langle N(t_0), u \rangle^2) \neq 0$, já que γ é regular e $k(t_0) \neq 0$, portanto, F é um desdobramento versal a 3-parâmetros.

Vamos agora demonstrar o caso da singularidade do tipo A_3 . Temos que o determinante da matriz J é dado por:

$$\begin{aligned} \det(J) &= \frac{(ck'(t_0) + sk^2(t_0))}{2} (\langle T(t_0), u \rangle \langle T(t_0), u \rangle + \langle N(t_0), u \rangle \langle N(t_0), u \rangle) \\ &= \frac{ck'(t_0) + sk^2(t_0)}{2}. \end{aligned}$$

Note que, se $ck'(t_0) + sk^2(t_0) = 0$, substituindo a condição para ter singularidade do tipo A_3 , temos $k^4(t_0) + (k'(t_0))^2 = 0$, desde que $k(t_0) = 0$, o que é uma contradição, pois $k(t_0) \neq 0$.

Logo, $\det(J) \neq 0$, donde segue que a família F é um desdobramento versal. Portanto, pelo Teorema 1.3.30, pode-se concluir que o discriminante $\mathcal{D}_F$ é localmente difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal ou a uma superfície rabo de andorinha.

□

É interessante entender como a curva evolui passando pelos seus evolutóides euclidianos e chegando até sua evoluta euclidiana. Para isso iremos verificar que as condições da Proposição 1.3.35 são satisfeitas para o conjunto discriminante $\mathcal{D}_F$ do envelope da família L_α da curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ para um desdobramento a 3-parâmetros da família $F: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F((x, y, \alpha), t) = \langle \mathbf{x} - \gamma(t), T(t) \sin(\alpha) - N(t) \cos(\alpha) \rangle,$$

com $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $t \in I$.

Suponha γ sem pontos de inflexão e que $f(t) = F(\mathbf{x}_0, \alpha_0, t)$ tenha singularidades A_2 ou A_3 em $t = t_0$. Para o caso em que f tem singularidade do tipo A_2 , pelo Teorema 2.2.2, o conjunto $\mathcal{D}_F$ vai ser localmente difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal na vizinhança de $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$. A linha de cúspide é dada por $F = F_t = F_{tt} = 0$, que fornece três equações nas quatro variáveis x, y, t, α e as soluções são então projetadas no espaço- (x, y, α) , onde está o conjunto discriminante.

Seja $H: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $H(x, y, \alpha, t) = (F(x, y, \alpha, t), F_t(x, y, \alpha, t), F_{tt}(x, y, \alpha, t))$, se 0 for um valor regular da H , segue que $H^{-1}(0)$ é uma curva suave em $\mathbb{R}^4$. Considere a Jacobiana de H avaliada no ponto $(t_0, x_0, y_0, \alpha_0)$,

$$J_H(t_0, x_0, y_0, \alpha_0) = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_\alpha & F_t \\ F_{xt} & F_{yt} & F_{\alpha t} & F_{tt} \\ F_{xtt} & F_{y tt} & F_{\alpha tt} & F_{ttt} \end{pmatrix},$$

cujas três primeiras colunas coincidem com a matriz J dada na demonstração do Teorema 2.2.2. Note que a quarta coluna da matriz J_H é dada pela transposta do vetor $(0, 0, F_{ttt} \neq 0)$ em um ponto de A_2 , já em um ponto de A_3 é dada pela transposta do vetor $(0, 0, 0)$.

Assim, para um ponto A_2 sempre é possível encontrar um vetor $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{t})$ no núcleo de J_H , cujas primeiras três componentes são nem todas nulas. Usando as duas primeiras linhas de J_H , podemos determinar os vetores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}$ uma vez que a submatriz de J_H dada anteriormente por J_1 tem posto 2 e $F_x \neq 0$ ou $F_y \neq 0$. Esse mesmo fato ocorre para os elementos da segunda linha da matriz J_1 . Então, o vetor tangente à linha de cúspide $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}_F$ no espaço- (x, y, α) é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}) = \left(\left(\frac{\langle (\sin 2\alpha, \cos 2\alpha), N \rangle}{k} \right) \bar{\alpha}, \left(\frac{\langle (\sin 2\alpha, \cos 2\alpha), T \rangle}{k} \right) \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \right)$$

Já para determinar $\bar{t}$ use a terceira linha de J_2 , uma vez que $F_{ttt} \neq 0$. Então,

$$\bar{t} = \left(\frac{(\langle (\sin 2\alpha, \cos 2\alpha), N \rangle - x' \sin(2\alpha) + y' \cos(2\alpha))(k' \langle N(t_0), u \rangle - k^2 \langle T(t_0), u \rangle)}{\cos(\alpha)(k^3 - 3k'') + \sin(\alpha)(k''' - kk')} \right) \bar{\alpha}.$$

Note que, se $\bar{\alpha} = 0$ teríamos que a reta tangente a $\mathcal{C}$ estaria contida no plano $\pi = \alpha$, assim as curvas de nível não seriam cúspides o que é uma contradição, em vista que a sub-matriz 2×2 do canto superior esquerdo da matriz de J_H possui determinante não nulo e para valores próximos de α , obtemos cúspides.

Há um problema com este argumento em um ponto $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ em A_3 , onde $F_{ttt} = 0$, uma vez que, pela não singularidade da matriz J , todos os vetores do núcleo de J_H são da forma $(0, 0, 0, \bar{t})$. Isso significa que, no espaço- (x, y, α) , a curva $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}_F$ é singular em $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$. Isso não é novidade, pois $\mathcal{D}_F$ é uma superfície rabo de andorinha e a própria curva espacial $\mathcal{C}$ tem uma cúspide em $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$. No entanto, o argumento acima ainda se aplica, tomando por exemplo, um vetor tangente unitário $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha})$ e movendo-o na direção $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ ao longo de $\mathcal{C}$: a última componente não pode tender a 0 sem que as outras duas também tendam a 0, o que é uma contradição. Para sermos mais claros, um vetor tangente (de comprimento $\sqrt{1 + \kappa^2} > 1$) a $\mathcal{C}$, obtido das primeiras duas linhas de J_2 é $(\langle (\sin 2\alpha, \cos 2\alpha), N \rangle, \langle (\sin 2\alpha, \cos 2\alpha), T \rangle, k)$. É claro que isso não pode ter um limite em que a terceira componente seja 0.

Agora, considere que γ tenha uma inflexão em t_0 , e $\mathbf{x}_0 = \gamma(t_0)$, $\alpha_0 = 0$. Pelo Teorema 2.2.2, o conjunto discriminante é localmente difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal. Neste caso, é mais fácil fazer o cálculos em coordenadas locais, escrevendo $\gamma(t) = (t, at^3 + bt^4 + ct^5 + \dots)$ com $a \neq 0$, uma vez que existe um ponto de inflexão ordinário na origem, e expandindo tudo sobre $(x, y, \alpha, t) = (0, 0, 0, 0)$. Assim, um cálculo explícito mostra que o conjunto discriminante $\mathcal{D}_F$ e linha de cúspide $\mathcal{C}$ são parametrizados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F : (x, t) &\mapsto (x, 6ax^2t - 9axt^2 + 4at^3 + \dots, 6axt - 6at^2 + \dots); \\ \mathcal{C} : t &\mapsto \left(2t + \dots, \frac{8b(24b - 35ac)}{a^2}t^4 + \dots, -40ct^5 + \dots \right). \end{aligned}$$

É claro que a reta tangente limite a $\mathcal{C}$ está na direção $(1, 0, 0)$ que está no plano $\pi = \alpha = 0$. Como o conjunto $\mathcal{D}_F$ é uma superfície aresta cuspidal, podemos encontrar o plano tangente limitante a $\mathcal{D}_F$ em pontos distantes de $\mathcal{C}$ tomando qualquer caminho em $\mathcal{D}_F$ que não intercepte $\mathcal{C}$ e $(\mathbf{x}, \alpha) = (0, 0, 0)$, como o caminho dado por $t = 0$. O vetor normal a $\mathcal{D}_F$ chega em $(0, -6ax + \dots, 6ax^2 + \dots)$ que tem limite em $(0, 1, 0)$, então o plano tangente limitante é dado

por $y = 0$ e, portanto, não coincide com o plano $\pi = \alpha = 0$, como queríamos demonstrar.

Teorema 2.2.3. *Os evolutóides em pontos de A_2 onde a curvatura, denotada por k , é diferente de zero evoluem para cúspide estável; Em pontos A_3 onde $k \neq 0$ eles sofrem uma transição do tipo "rabo de andorinha"; em pontos onde $k = 0$ e $\alpha = 0$, sofrem uma transição do tipo "bicos". Em todos os outros pontos, o evolutóide é uma curva suave.*

Demonstração. Seja F a família de retas L_α dada na Definição 2.0.1. Pelo Teorema 2.2.2, o conjunto $\mathcal{D}_F$ é localmente difeomorfo à superfície aresta cupidal para uma singularidade do tipo A_2 e à superfície rabo de andorinha para singularidade do tipo A_3 . Logo, podemos aplicar a Proposição 1.3.35, o que finaliza a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Evolutóides afins

Neste capítulo, apresentamos os evolutóides afins de curvas planas. Assim como no caso euclidiano, iremos nos apoiar em resultados da Teoria de singularidades para entender como a curva evolui até a sua evoluta afim passando por seus evolutóides afins. Para mais detalhes, veja [8].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e sem inflexão afim. É conhecido que o envelope de retas tangentes afins é a própria curva juntamente com as retas tangentes afins nos pontos de inflexão, veja Proposição 1.3.7. Já o envelope de retas normais afins consiste da evoluta afim, veja Proposição 1.3.6. Assim, como nos estudos sobre evolutóides euclidianos, é natural se perguntar o que existe entre os envelopes de retas tangentes afins e normais afins.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim s e sem pontos de inflexão afim. Dada uma direção qualquer entre os vetores tangente afim e normal afim, iremos associar esta direção a um número α fixo entre $[-1, 1]$ e denotaremos tal direção por $v^\alpha = (1 - |\alpha|)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}$.

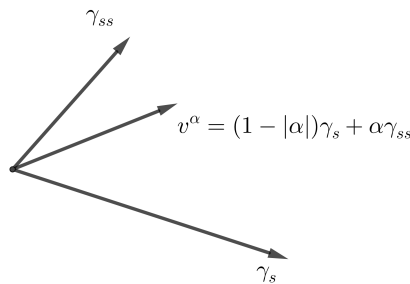


Figura 3.1: Direção v^α .

Aqui, iremos abordar o caso em que $\alpha \geq 0$, uma vez que o caso $\alpha < 0$ é semelhante.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$F((x, y), s) = [\mathbf{x} - \gamma(s), (1 - \alpha)\gamma_s(s) + \alpha\gamma_{ss}(s)],$$

onde $\alpha \in [0, 1]$ é $[\cdot, \cdot]$ é a notação para determinantes.

Note que, para cada α fixado, $F(\mathbf{x}, s) = 0$ é a família de retas L_α com direção v^α .

Definição 3.0.1. O evolutóide afim de uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o envelope da família de retas L_α , ou seja, o envelope da família $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$F((x, y), s) = [\mathbf{x} - \gamma(s), (1 - \alpha)\gamma_s(s) + \alpha\gamma_{ss}(s)],$$

com $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, s \in I$ e $\alpha \in [0, 1]$ fixado.

Vamos determinar o envelope da família F acima. Calculando o discriminante, obtemos:

$$F(\mathbf{x}, s) = 0 \Rightarrow [\mathbf{x} - \gamma, (1 - \alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}] = 0. \quad (3.1)$$

Como γ_s e γ_{ss} são linearmente independentes, segue $\mathbf{x} - \gamma = \lambda\gamma_s + \psi\gamma_{ss}$, onde λ e ψ são funções a serem determinadas. Pelo fato de s ser o parâmetro comprimento de arco afim, segue que $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$. Substituindo essas informações na equação (3.1), obtemos:

$$[\lambda\gamma_s + \psi\gamma_{ss}, (1 - \alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}] = \alpha\lambda[\gamma_s, \gamma_{ss}] + \psi(1 - \alpha)[\gamma_{ss}, \gamma_s] = 0.$$

Assim,

$$\alpha\lambda - \psi(1 - \alpha) = 0.$$

A derivada F em relação a s é:

$$\begin{aligned} F_s(\mathbf{x}, s) &= [-\gamma_s, (1 - \alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}] + [\mathbf{x} - \gamma, (1 - \alpha)\gamma_{ss} + \alpha\gamma_{sss}] \\ &= -\alpha + (1 - \alpha)[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}] + \alpha[\mathbf{x} - \gamma, -\mu\gamma_s] \\ &= -\alpha + (1 - \alpha)\lambda + \alpha\psi\mu. \end{aligned}$$

Daí, $F = F_s = 0$ implica em:

$$\begin{cases} \lambda\alpha - \psi(1 - \alpha) = 0 \\ (1 - \alpha)\lambda + \alpha\psi\mu = \alpha \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\psi = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} \text{ e } \lambda = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}.$$

Portanto, o evolutóide afim é dado explicitamente por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \gamma + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} \gamma_s + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} \gamma_{ss} \\ &= \gamma + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} ((1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observação 3.0.2. Considere a equação (3.2):

1. Observe que $(1-\alpha)^2 + \mu(s)\alpha^2 \neq 0$, para todo $s \in I$, pois caso contrário teríamos

$$(1-\alpha)^2 + \mu(s_0)\alpha^2 = 0 \Rightarrow \mu(s_0) = -\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} < 0,$$

para algum $s_0 \in I$. Assim a curva γ tem curvatura constante negativa e pelo Teorema 1.2.29 a curva não seria fechada. Se μ muda de sinal, então existe $\bar{s}_0 \in I$ tal que $\mu(\bar{s}_0) = 0$, o que nos dá uma contradição.

2. Se $\alpha = 0$, então o evolutóide afim é $\mathbf{x} = \gamma(s)$, que é a própria curva γ .
3. Se $\alpha = 1$, então o evolutóide afim $\mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{\gamma_{ss}(s)}{\mu(s)}$ é a evoluta afim de γ .

3.1 Regularidade do evolutóide afim

Nesta seção, vamos encontrar condições para o evolutóide afim ser regular e também para que ocorra e cúspide afim ordinária.

Proposição 3.1.1. *O evolutóide dado em (3.2) não é regular se, e somente se,*

$$\mu_s(s) = \frac{(1-\alpha)((1-\alpha)^2 + \mu(s)\alpha^2)}{\alpha^3},$$

onde $\mu_s(s)$ é a derivada da curvatura afim em relação ao parâmetro s em γ .

Demonstração. Tome $\gamma_{sss} = -\mu\gamma_s$. Derivando a equação (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s &= \gamma_s + \frac{\alpha^2 \mu_s}{((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)^2} (-(1-\alpha)\alpha\gamma_s - \alpha^2\gamma_{ss}) \\
 &+ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} ((1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{sss}) \\
 &= \left(1 - \frac{\alpha^3(1-\alpha)\mu_s}{((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)^2} - \frac{\alpha^2\mu}{(1-\alpha)^2 + \mu(s)\alpha^2} \right) \gamma_s \\
 &+ \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} - \frac{\alpha^4\mu_s}{((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)^2} \right) \gamma_{ss} \\
 &= \left(\frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} - \frac{\alpha^3\mu_s}{((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)^2} \right) ((1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}).
 \end{aligned}$$

Como $(1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss} \neq 0$, já que é a direção da reta L_α , segue que

$$A(s) = \left(\frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} - \frac{\alpha^3\mu_s}{((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)^2} \right) = 0.$$

Portanto, o evolutóide não vai ser regular desde que $\mu_s = \frac{(1-\alpha)}{\alpha^3}((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)$. $\square$

Proposição 3.1.2. *Suponha $\mu \neq 0$ e $\alpha \in (0,1)$. Então, a cúspide afim como da Proposição 3.1.1 é uma cúspide afim ordinária se, e somente se, $\alpha\mu_{ss} \neq (1-\alpha)\mu_s$, onde as derivadas são avaliadas no ponto da cúspide.*

Demonstração. Seja $\mathbf{x}_s = Av^\alpha$ como dado pela Proposição 3.1.1 tais que

$$A = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} - \frac{\alpha^3\mu_s}{((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2)^2} \text{ e } v^\alpha = (1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}.$$

Devemos mostrar que os vetores $\mathbf{x}_{ss}$ e $\mathbf{x}_{sss}$ são linearmente independentes. Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de $\mathbf{x}_s$, temos:

$$\mathbf{x}_{ss} = A_s v^\alpha + A v_s^\alpha \text{ e } \mathbf{x}_{sss} = A_{ss} v^\alpha + A_s v_s^\alpha + A_s v_s^\alpha + A v_{ss}^\alpha = A_{ss} v^\alpha + 2A_s v_s^\alpha + A v_{ss}^\alpha.$$

Além disso, considere

$$v_s^\alpha = (1-\alpha)\gamma_{ss} + \alpha\gamma_{sss} = (1-\alpha)\gamma_{ss} - \mu\gamma_s, \quad (3.3)$$

e

$$v_{ss}^\alpha = (1-\alpha)\gamma_{sss} - \mu_s\alpha\gamma_s - \mu\alpha\gamma_{ss} = -(1-\alpha)\mu\gamma_s - \mu_s\alpha\gamma_{ss} - \mu\alpha\gamma_{ss}. \quad (3.4)$$

Calculando o determinante, temos

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sss}] &= [A_s v^\alpha + A v_s^\alpha, A_{ss} v^\alpha + 2A_s v_s^\alpha + A v_{ss}^\alpha] \\
 &= [A_s v^\alpha, 2A_s v_s^\alpha] + [A_s v^\alpha, A v_{ss}^\alpha] + [A v_s^\alpha, A_{ss} v^\alpha] + [A v_s^\alpha, A v_{ss}^\alpha] \\
 &= 2A_s^2 [v^\alpha, v_s^\alpha] + AA_s [v^\alpha, v_{ss}^\alpha] + AA_{ss} [v_s^\alpha, v^\alpha] + A^2 [v_s^\alpha, v_{ss}^\alpha].
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Da Proposição 3.1.1 temos uma singularidade quando $A = 0$. Logo a equação (3.5) se resume em

$$[\mathbf{x}_{ss}, \mathbf{x}_{sss}] = 2A_s^2 [v^\alpha, v_s^\alpha]. \tag{3.6}$$

Das equações (3.3) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 [v^\alpha, v_s^\alpha] &= [(1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}, (1-\alpha)\gamma_{ss} - \mu\gamma_s] \\
 &= [(1-\alpha)\gamma_s, (1-\alpha)\gamma_{ss}] + [\alpha\gamma_{ss}, (1-\alpha)\gamma_{ss}] + [\alpha\gamma_{ss}, -\mu\gamma_s] \\
 &= (1-\alpha)^2 [\gamma_s, \gamma_{ss}] + \alpha\mu [\gamma_s, \gamma_{ss}] \\
 &= (1-\alpha)^2 + \alpha\mu \neq 0 \text{ (veja observação 3.0.2)}.
 \end{aligned}$$

Assim, segue da equação (3.6) que $\mathbf{x}_{ss}$ e $\mathbf{x}_{sss}$ são linearmente independentes se, e só se, $A_s \neq 0$, o que nos fornece a condição requerida. $\square$

3.2 Superfície discriminante

Para estudar como a curva evolui até sua evoluta afim passando por seus evolutóides afins, vamos incluir α como parâmetro da família F dada na Definição 3.0.1 e aplicar resultados da Teoria de Singularidades.

Considere a família de uma variável s a 3-parâmetros x, y e α dada por:

$$F((x, y, \alpha), s) = [\mathbf{x} - \gamma(s), (1-\alpha)\gamma_s(s) + \alpha\gamma_{ss}(s)],$$

com $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ e $\mathbf{x} = (x, y)$, onde s é o parâmetro comprimento de arco afim e $\alpha \in [0, 1]$.

A superfície discriminante desta família é dada por:

$$\mathcal{D}_F = \{(\mathbf{x}, \alpha) \in \mathbb{R}^3; \exists s \in I \text{ com } F(\mathbf{x}, \alpha, s) = F_s(\mathbf{x}, \alpha, s) = 0\}.$$

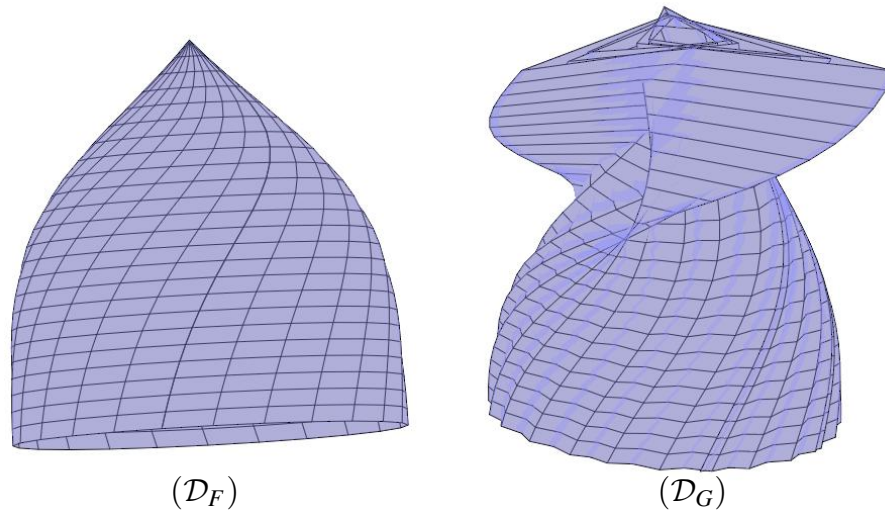


Figura 3.2: A superfície discriminante $\mathcal{D}_F$ associada a elipse $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$. Se $\alpha = 0$, temos a própria curva γ e para $\alpha = 1$, temos a evoluta afim. Agora, para α diferente destes valores, temos os evolutóides afins. A superfície discriminante afim $\mathcal{D}_G$ associada a curva $\gamma(t) = (2\cos(2t) - \cos(t + 1.9), \sin(2t) + \sin(t))$, para $\alpha = 0$ temos a própria curva e $\alpha = 1$ temos a evoluta afim. Além disso, presumimos que apareçam na superfície discriminante arestas cuspidais ou superfícies rabo de andorinha.

Note que, a superfície discriminante é a união de todos os envelopes de retas L_α para cada α , ou seja, se considerarmos a função $h(x, y, \alpha) = \alpha$, os níveis $h(x, y, \alpha) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) são os evolutóides afins.

Dado um ponto sobre a superfície discriminante de F , queremos saber as condições para que a função desdobrada tenha singularidades. No próximo resultado, exploramos isto:

Proposição 3.2.1. *Seja o ponto $(x_0, y_0, \alpha_0) = (\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ e que satisfaça $F = F_s = 0$ e $\mu(s_0) \neq 0$. Então $f(s) = F(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s)$ tem singularidade do*

1. *Tipo A_2 em s_0 , se $\alpha\mu_{ss} - (1 - \alpha)\mu_s \neq 0$;*
2. *Tipo A_3 em s_0 , se $\alpha^5\mu_{sss} \neq -(1 - \alpha)^3((1 - \alpha)^2 + \alpha^2\mu)$.*

Demonstração. Seja a família de retas L_α dada por $F = [\mathbf{x} - \gamma, (1 - \alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}]$ com γ parametrizada pelo comprimento de arco afim. Observe que, para termos singularidade do tipo A_2 no ponto $s = s_0$, as condições são $F_s = F_{ss} = 0$ e $F_{sss} \neq 0$.

Derivando a $f(s) = F$ em relação ao parâmetro s e usando o fato de que $\gamma_{sss} = -\mu\gamma_s$, $\mathbf{x} - \gamma =$

$\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}((1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}), \quad [\gamma_s, \gamma_s] = [\gamma_{ss}, \gamma_{ss}] = 0$ e $[\gamma_{ss}, \gamma_s] = -[\gamma_s, \gamma_{ss}]$, temos:

$$\begin{aligned}
 F_s &= [-\gamma_s, \alpha\gamma_{ss}] + [\mathbf{x} - \gamma, (1-\alpha)\gamma_{ss}] + [\mathbf{x} - \gamma, \alpha\gamma_{sss}] \\
 &= -\alpha + (1-\alpha)[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}] - \alpha\mu[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_s] \\
 &= -\alpha - (1-\alpha)\left(-\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}\right) - \alpha\mu\left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}\right) \\
 &= -\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} + \frac{\mu\alpha^3}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} \\
 &= \frac{-\alpha(1-\alpha)^2 - \mu\alpha^3 + \alpha(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^3}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} = 0.
 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
 F_{ss} &= (1-\alpha)[- \gamma_s, \gamma_{ss}] + (1-\alpha)[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{sss}] - \mu_s\alpha[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_s] - \mu\alpha[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}] \\
 &= -(1-\alpha) + \frac{(1-\alpha)\alpha^2\mu}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} - \frac{\alpha^2(1-\alpha)\mu}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} + \frac{\alpha^3\mu_s}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} \\
 &= -(1-\alpha) + \frac{\alpha^3\mu_s}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$F_{ss} = 0 \Rightarrow -(1-\alpha) + \frac{\alpha^3\mu_s}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} = 0 \Rightarrow \alpha^3\mu_s = (1-\alpha) \cdot ((1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2).$$

Ao derivar F mais uma vez, obtemos:

$$\begin{aligned}
 F_{sss} &= [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}](-(1-\alpha)\mu - \mu_s\alpha) + [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_s](-(1-\alpha)\mu_s - \mu_{ss}\alpha) \\
 &\quad - \mu_s\alpha[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}] - \mu\alpha[-\gamma_s, \gamma_{ss}] - \mu\alpha[\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{sss}] \\
 &= [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_s](-(1-\alpha)\mu_s - \mu_{ss}\alpha + \mu^2\alpha) + [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}](-(1-\alpha)\mu - 2\mu_s\alpha) \\
 &\quad + \mu\alpha \\
 &= \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha}(-\alpha\mu^2 + (1-\alpha)\mu_s + \alpha\mu_{ss}) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha}(-(1-\alpha)\mu - 2\alpha\mu_s) + \alpha\mu \\
 &= \frac{-\alpha^2(1-\alpha)\mu_s + \alpha^3\mu_{ss}}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 F_{sss} \neq 0 &\Rightarrow \frac{-\alpha^2(1-\alpha)\mu_s + \alpha^3\mu_{ss}}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2} \neq 0 \Rightarrow -\alpha^2(1-\alpha)\mu_s + \alpha^3\mu_{ss} \neq 0 \\
 &\Rightarrow \alpha\mu_{ss} \neq (1-\alpha)\mu_s.
 \end{aligned}$$

Agora, para verificarmos a singularidade do tipo A_3 em $s = s_0$, iremos considerar as

condições para o tipo A_2 e a condição de regularidade dada pela Proposição 3.1.1. Derivando F até a quarta ordem, obtemos:

$$\begin{aligned}
F_{ssss} &= [-\gamma_s, \gamma_{ss}](-(1-\alpha)\mu - 2\mu_s\alpha) + [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{sss}](-(1-\alpha)\mu - 2\mu_s\alpha) \\
&+ [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}](-(1-\alpha)\mu_s - 2\mu_{ss}\alpha) + [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}](-(1-\alpha)\mu_s - \mu_{ss}\alpha + \mu^2\alpha) \\
&+ [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_s](-(1-\alpha)\mu_{ss} - \mu_{sss}\alpha + 2\mu\mu_s\alpha) + \mu_s\alpha \\
&= (1-\alpha)\mu + 3\mu_s\alpha + [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_s]((1-\alpha)\mu^2 + 4\mu\mu_s\alpha - (1-\alpha)\mu_{ss} - \mu_{sss}\alpha) \\
&+ [\mathbf{x} - \gamma, \gamma_{ss}](-2(1-\alpha)\mu_s - 3\mu_{ss}\alpha + \mu^2\alpha) \\
&= -\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}((1-\alpha)\mu^2 + 4\mu\mu_s\alpha - (1-\alpha)\mu_{ss} - \mu_{sss}\alpha) \\
&+ \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}(-2(1-\alpha)\mu_s - 3\mu_{ss}\alpha + \mu^2\alpha) + (1-\alpha)\mu + 3\mu_s\alpha \\
&= \frac{-\alpha^3\mu\mu_s - 2(1-\alpha)\alpha^2\mu_{ss} + (1-\alpha)\alpha^2\mu^2 + \alpha^3\mu_{sss} + (1-\alpha)^3\mu + (1-\alpha)^2\alpha\mu_s}{(1-\alpha)^2 + \mu\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Assim, $F_{ssss} \neq 0$ desde que

$$-\alpha^3\mu\mu_s - 2(1-\alpha)\alpha^2\mu_{ss} + (1-\alpha)\alpha^2\mu^2 + \alpha^3\mu_{sss} + (1-\alpha)^3\mu + (1-\alpha)^2\alpha\mu_s \neq 0.$$

Usando as seguintes condições,

$$\alpha^3\mu_s = (1-\alpha)((1-\alpha)^2 + \alpha^2\mu) \text{ e } \alpha\mu_{ss} = (1-\alpha)\mu_s.$$

Concluimos que $\alpha^5\mu_{sss} \neq (1-\alpha)^3((1-\alpha)^2 + \alpha^2\mu)$. □

Teorema 3.2.2. *A família F satisfaz o critério matricial de versalidade. Assim, quando $f(s) = F(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s)$ tem singularidade A_r em s_0 , $r = 2$ ou 3 , o discriminante $\mathfrak{D}_F$ é localmente difeomorfo a superfície aresta cuspidal ($r = 2$) ou a uma superfície rabo de andorinha ($r = 3$) em uma vizinhança $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$.*

Demonstração. Seja $F(\mathbf{x}, \alpha, s) = [\mathbf{x} - \gamma, (1-\alpha)\gamma_s + \alpha\gamma_{ss}] = (x - x(s))((1-\alpha)Y_s + \alpha Y_{ss}) - (y - y(s))((1-\alpha)x_s + \alpha x_{ss})$ a família de retas L_a , com $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\alpha \in (0, 1)$.

Vamos aplicar o critério de versalidade dado pelo Teorema 1.3.26. Para tanto, calculemos os 2-jatos com constante de $F_x(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s)$, $F_y(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s)$ e $F_\alpha(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s)$ em torno de s_0 :

$$F_x(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s_0) + j^2(F_x(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s))(s_0) =$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \alpha)y_s(s_0) + \alpha y_{ss}(s_0) + ((1 - \alpha)y_{ss}(s_0) + \alpha y_{sss}(s_0))s \\
& + ((1 - \alpha)y_{sss}(s_0) - \alpha \mu s(s_0)y_s(s_0) - \alpha \mu(s_0)y_{ss}(s_0))\frac{s^2}{2!} \\
& = (1 - \alpha)y_s(s_0) + \alpha y_{ss}(s_0) + ((1 - \alpha)y_{ss}(s_0) + \alpha y_{sss}(s_0))s \\
& + \left(\frac{-2(1 - \alpha)\alpha^2 \mu(s_0)y_s(s_0) - (1 - \alpha)^3 y_s(s_0) - \alpha^3 \mu(s_0)y_{ss}(s_0)}{\alpha^2} \right) \frac{s^2}{2!},
\end{aligned}$$

onde, $\mu_s(s_0) = \frac{(1-\alpha)((1-\alpha)^2 + \mu(s_0)\alpha^2)}{\alpha^3}$. Os outros 2-jatos com constante são calculados de modo análogo. Daí, a matriz dos coeficientes dos 2-jatos com constante é dado por:

$$\begin{aligned}
\bar{J} &= \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_\alpha \\ F_{xt} & F_{yt} & F_{\alpha t} \\ F_{xtt} & F_{ytt} & F_{\alpha tt} \end{pmatrix} = \\
& \frac{1}{(1 - \alpha)^2 + \mu \alpha^2} \begin{pmatrix} (1 - \alpha)y_s + \alpha y_{ss} & -(1 - \alpha)x_s - \alpha x_{ss} & \alpha \\ -\alpha \mu y_s + (1 - \alpha)y_{ss} & \alpha \mu x_s - (1 - \alpha)x_{ss} & -(1 - \alpha) \\ F_{xss} & F_{yss} & \frac{(1 - \alpha)^2}{2! \alpha} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
F_{xss} &= \frac{-2(1-\alpha)\alpha^2 \mu y_s - (1-\alpha)^3 y_s - \alpha^3 \mu y_{ss}}{2! \alpha^2} \\
F_{yss} &= \frac{2(1-\alpha)\alpha^2 \mu x_s + (1-\alpha)^3 x_s + \alpha^3 \mu x_{ss}}{2! \alpha^2}.
\end{aligned}$$

Veja que a matriz dos coeficientes do 1-jato com constante é dada por:

$$\bar{J}_1 = \begin{pmatrix} (1 - \alpha)y_s + \alpha y_{ss} & -(1 - \alpha)x_s - \alpha x_{ss} & \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2 + \mu \alpha^2} \\ -\alpha \mu y_s + (1 - \alpha)y_{ss} & \alpha \mu x_s - (1 - \alpha)x_{ss} & -\frac{(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2 + \mu \alpha^2} \end{pmatrix}$$

Seja

$$\bar{J}_{1.1} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha)y_s + \alpha y_{ss} & -(1 - \alpha)x_s - \alpha x_{ss} \\ -\alpha \mu y_s + (1 - \alpha)y_{ss} & \alpha \mu x_s - (1 - \alpha)x_{ss} \end{pmatrix}.$$

O determinante de $\bar{J}_{1.1}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\det(\bar{J}_{1,1}) &= ((1-\alpha)y_s + \alpha y_{ss}) \cdot (-(1-\alpha)x_{ss} + \alpha \mu x_s) \\
&\quad - (-(1-\alpha)x_s - \alpha x_{ss}) \cdot (-(1-\alpha)y_{ss} - \alpha \mu y_s) \\
&= -(1-\alpha)^2 x_{ss} y_s + \alpha^2 \mu x_s y_{ss} + (1-\alpha)^2 x_s y_{ss} - \alpha^2 y_s x_{ss} \\
&= ((1-\alpha)^2 + \alpha^2 \mu) [\gamma_s, \gamma_{ss}].
\end{aligned}$$

Como γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim, segue que $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$ e $(1-\alpha)^2 + \alpha^2 \mu \neq 0$ (veja Observação 3.0.2).

Logo, $\det(\bar{J}_{1,1}) \neq 0$ e portanto, F é um desdobramento versal a 3-parâmetros.

Já para A_3 , vamos considerar a matriz $\bar{J}$ dos coeficientes 2-jatos com constante, assim o determinante é dado por:

$$\begin{aligned}
\det(\bar{J}) &= \left(\frac{4(1-\alpha)^2 \alpha^2 \mu + 3(1-\alpha)^4 + \alpha^4 \mu^2}{2\alpha((1-\alpha)^2 + \mu \alpha^2)} \right) (x_s y_{ss} - x_{ss} y_s) \\
&= \left(\frac{4(1-\alpha)^2 \alpha^2 \mu + 3(1-\alpha)^4 + \alpha^4 \mu^2}{\alpha((1-\alpha)^2 + \mu \alpha^2)} \right) [\gamma_s, \gamma_{ss}] \\
&= \left(\frac{\alpha^2 \mu + 3(1-\alpha)^2}{2\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Note que se $\det(\bar{J}) = 0$, então

$$\left(\frac{\alpha^2 \mu(s_0) + 3(1-\alpha)^2}{2\alpha} \right) = 0 \Rightarrow \alpha^2 \mu(s_0) + 3(1-\alpha)^2 = 0 \Rightarrow \mu(s_0) = -\frac{3(1-\alpha)^2}{\alpha^2} < 0$$

para algum $s_0 \in I$. Logo a curva γ tem curvatura constante negativa e pelo Teorema 1.2.29 a curva não seria fechada, o que é uma contradição. Mas, se $\mu(s)$ muda de sinal, então para algum $\bar{s}_0 \in I$ tem-se $\mu(\bar{s}_0) = 0$, o que também nos dá uma contradição, já que γ é uma curva sem inflexão.

Logo, $\det(\bar{J}) \neq 0$ e consequentemente, a família F é um desdobramento versal. Portanto, segue do Teorema 1.3.30 que a superfície discriminante $\mathcal{D}_F$ é localmente difeomorfa a uma superfície aresta cuspidal ou a uma superfície rido de andorinha. $\square$

Assim como no caso euclidiano temos as transições dos tipos cúspide, bicos, lábios e rabo de andorinha é também interessante entender para o caso afim como que a curva evolui passando pelos seus evolutóides afins e chegando até sua evoluta afim. Para isso iremos verificar se as condições da Proposição 1.3.35 são satisfeitas para o conjunto discriminante $\mathcal{D}_F$ do envelope da família de retas afins L_α da curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ para um desdobramento a 3- parâmetros, isto

é, a família a 3- parâmetros $F : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F((x, y, \alpha), s) = [\mathbf{x} - \gamma(s), (1 - \alpha)\gamma_s(s) + \alpha\gamma_{ss}(s)],$$

com $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in [0, 1]$ e $s \in I$.

Considere que $f(s) = F(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ tenha singularidade do tipo A_2 ou A_3 em $s = s_0$. No caso que f tem singularidade A_2 , pelo Teorema 3.2.2, o conjunto $\mathcal{D}_F$ é localmente difeomorfo a superfície aresta cuspidal na vizinhança de $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$. A linha cuspide é dada por $F = F_s = F_{ss} = 0$, que são, três equações nas quatro variáveis x, y, α, s ; e as suas soluções são projetadas no espaço- (x, y, α) , onde $\mathcal{D}_F$ está.

Seja $H : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $H(x, y, \alpha, s) = (F(x, y, \alpha, s), F_s(x, y, \alpha, s), F_{ss}(x, y, \alpha, s))$, se 0 for um valor regular da H , segue que $H^{-1}(0)$ é uma curva suave em $\mathbb{R}^4$. Considere a Jacobiana de H avaliada no ponto $(x_0, y_0, \alpha_0, s_0)$,

$$J_H(x_0, y_0, \alpha_0, s_0) = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_\alpha & F_s \\ F_{xs} & F_{ys} & F_{\alpha s} & F_{ss} \\ F_{xss} & F_{yss} & F_{\alpha ss} & F_{sss} \end{pmatrix},$$

cujas três primeiras colunas coincidem com a matriz $\bar{J}$. Note que a quarta coluna da matriz J_H é dada pela transposta do vetor $(0, 0, F_{sss} \neq 0)$ em um ponto de A_2 , já em um ponto de A_3 é dada pela transposta do vetor $(0, 0, 0)$.

Assim, para um ponto A_2 sempre é possível encontrar um vetor $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{s})$ no núcleo de J_H , cujas primeiras três componentes são nem todas nulas. Usando as duas primeiras linhas de J_H , podemos determinar os vetores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}$ uma vez que a submatriz de J_H dada anteriormente por $\bar{J}_1$ tem posto 2 e $F_x \neq 0$ ou $F_y \neq 0$. Esse mesmo fato ocorre para os elementos da segunda linha da matriz $\bar{J}_1$. Assim, o vetor tangente afim à linha de cúspide $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}_F$ no espaço- (x, y, α) é

$$\left(\left(\frac{2\alpha(\alpha - 1)x_{ss} + x_s(\alpha^2\mu - (1 - \alpha)^2)}{\alpha^2\mu + (1 - \alpha)^2} \right) \bar{\alpha}, \left(\frac{2\alpha(\alpha - 1)y_{ss} + y_s(\alpha^2\mu - (1 - \alpha)^2)}{\alpha^2\mu + (1 - \alpha)^2} \right) \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \right).$$

Já para determinar $\bar{s}$ use a terceira linha de J_2 , uma vez que $F_{sss} \neq 0$ e $\alpha\mu_{ss} \neq (1 - \alpha)\mu$. Assim,

$$\bar{s} = \left(\frac{\alpha^5(-\mu^2) + 3(\alpha - 1)^2\alpha^3\mu + 2(\alpha - 1)^4\alpha}{2\alpha^4((1 - \alpha)\mu_s + \alpha\mu_{ss})} \right) \bar{\alpha}.$$

Note que, se $\bar{\alpha} = 0$ teríamos que a reta tangente afim a linha de cúspide $\mathcal{C}$ estaria contida no

plano $\pi = \alpha$, assim as curvas de nível não seriam cúspides o que é uma contradição, em vista que a sub-matriz 2×2 do canto superior esquerdo da matriz de J_H possui determinante não nulo e para valores próximos de α , obtemos cúspides.

Há um problema de usar esse argumento para uma singularidade A_3 em $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$, onde $F_{sss} = 0$, uma vez que $\bar{J}$ é não singular, e todos os vetores do núcleo de J_H têm a forma $(0, 0, 0, \bar{s})$. Isso simplesmente diz que, no espaço espaço (x, y, α) , a curva $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}_F$ é singular em (x_0, y_0, α_0) , o que é verdade, uma vez que $\mathcal{D}_F$ é uma superfície rabo de andorinha e a própria curva espacial $\mathcal{C}$ tem uma cúspide em (x_0, y_0, α_0) ao longo de $\mathcal{C}$. Note que a última componente não pode tender a 0 sem que as duas primeiras tendam a 0, o que é uma contradição. Neste caso, podemos ser mais explícitos: seja (v_1, v_2, v_3) um vetor tangente afim a $\mathcal{C}$, obtido a partir das duas primeiras linhas de J_2 . Dados $v_1 = 2\alpha(\alpha - 1)x_{ss} + x_s(\alpha^2\mu - (1 - \alpha)^2)$, $v_2 = 2\alpha(\alpha - 1)y_{ss} + y_s(\alpha^2\mu - (1 - \alpha)^2)$ é $v_3 = -(\alpha^2\mu + (1 - \alpha)^2)^2$, vemos claramente o limite da terceira componente não pode ser 0.

Teorema 3.2.3. *Os evolutóides afins em pontos de A_2 onde a curvatura, denotada por μ , é diferente de zero, evoluem para uma cúspide estável; em pontos A_3 onde $\mu \neq 0$, eles sofrem uma transição do tipo "rabo de andorinha". Em todos os outros pontos, o evolutóide afim é uma curva suave.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao Teorema 2.2.3. □

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos os evolutóides de curvas planas imersas em $\mathbb{R}^2$, tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Afim. Os evolutóides são obtidos via envelope de uma família a 2-parâmetros de retas que dependem de um outro parâmetro α fixado. Em ambas geometrias, apresentamos a parametrização explícita dos evolutóides, bem como usamos a Teoria de Singularidades para entender como a curva evolui até a sua evoluta (evoluta afim), passando por seus evolutóides (evolutóides afins), ou seja, estudamos como as singularidades aparecem e desaparecem nos evolutóides a medida que α varia.

Para se cumprir os objetivos do projeto, se fez necessário recorrer a diversas literaturas, visto que, cada geometria tem suas peculiaridades, apesar de que, para atingir o objetivo principal a técnica seja semelhante. Vale ressaltar que os trabalhos utilizados como referência são recentes e existe uma convergência entre os autores sobre as técnicas aplicadas, o que é altamente interessante pois possibilita aplicar tais técnicas em trabalhos futuros.

Além disso, existem ainda lacunas a serem exploradas, por exemplo, os evolutóides afins de superfícies no $\mathbb{R}^3$ ainda não foram estudados. Pensando nisso, e motivados pelo trabalho [7], na fase final do mestrado, iniciamos uma pesquisa, que ainda está em fase de desenvolvimento, mas já temos alguns resultados promissores. Neste estudo, estamos estudando os evolutóides de superfícies via envelope de planos que fazem um ângulo constante α com o plano tangente, os quais denominamos de α -planos.

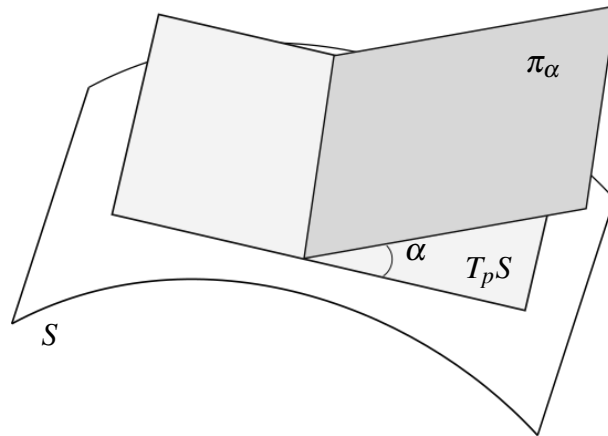


Figura 3.3: Envelope de α -planos.

Por fim, acredito que este tipo de trabalho é fundamental para treinamentos a nível de mestrado. No meu caso, por exemplo, possibilitou um aprofundamento em temas relevantes da geometria que têm recebido foco de diversos geômetras pelo mundo e consequentemente este embasamento teórico permitirá pesquisas mais avançadas futuramente.

Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G, S. A. **Geometria diferencial de curvas no $\mathbb{R}^2$** , 1ª edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática- SBM, 2020.
- [2] ARNOLD, V.I. **Wave front evolution and equivariant Morse lemma**. Communications on pure and applied mathematics. vol 29, p., 557-582, 1976.
- [3] BUCHIN, S. **Affine Differential Geometry**. 1. ed. New York: Gordon and Breach, p.258, 1983.
- [4] BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. **Geometry**. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [5] BRUCE, J. W. **Functions on discriminants**, J. London Math. Soc.(2)30 (1984) 551–567.
- [6] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities: A geometrical introduction to singularity theory**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, p.340, 1992.
- [7] CAMBRAIA JUNIOR, A.; LEMOS, A.; SALARINOGHABI, M. **On evolutoids of regular surfaces in Euclidean 3-space**. International journal of geometry. vol 2, p.1911-11830, 2021.
- [8] CAMBRAIA JUNIOR, A.; LEMOS, A. **On affine evolutoids**. Quaestiones Mathematicae, vol 43, p.193-202, 2020.
- [9] CASTRO, J. J. **On plane convex curve evolutoids**. Aequationes mathematicae. vol 88, p.97–103, 2014.
- [10] GIBLIN, P.J.; WARDER, J. P. **Evolving Evolutoids**. The American Mathematical Monthly, vol 121, Ed. 10, p. 871-889, 2017.

- [11] NOMIZU, K.; SASAKI, T. **Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 263p.
- [12] SANCHEZ, L. F. E. **Singularidades de curvas na geometria afim**.2010. Dissertação(Mestrado em Matemática)- Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2010.