

ÉMERSON DA SILVA MIRANDA

**POTENCIAL ATRATIVO ELÉTRON-ELÉTRON NA MAXWELL-CHERN-SIMONS  
QED<sub>3</sub> PARIDADE INVARIANTE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2016

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

M672p  
2016

Miranda, Émerson da Silva, 1989-  
Potencial atrativo elétron-elétron na  
Maxwell-Chern-Simons QED3 paridade invariante / Émerson da  
Silva Miranda. – Viçosa, MG, 2016.  
x, 62f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.60-62.

1. Eletrodinâmica quântica. 2. Supercondutividade.  
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Física.  
Programa de Pós-graduação em Física. II. Título.

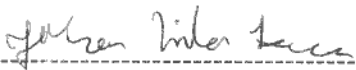
CDD 22. ed. 530.1433

ÉMERSON DA SILVA MIRANDA

POTENCIAL ATRATIVO ELÉTRON-ELÉTRON NA MAXWELL-CHERN-SIMONS  
QED<sub>3</sub> PARIDADE INVARIANTE

Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Física Aplicada,  
para obtenção do título de *Magister  
Scientiae*.

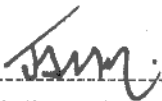
APROVADA: 20 de abril de 2016.



Jakson Miranda Fonseca



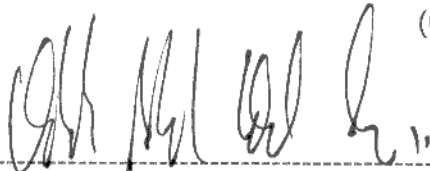
Olivier Piguet



José Abdalla Helayël-Neto



Daniel Heber Theodoro Franco  
(Coorientador)



Oswaldo Monteiro Del Cima  
(Orientador)

À Deus, que por mais que insistam  
em dizer que está morto, mas está  
vivo!

À minha minha família.

*“Make Physics as simple as possible, but no simpler..”*  
*Albert Einstein*

# Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente à minha mãe que mesmo de longe, sempre me deu suporte em qualquer que fosse minha decisão.

Quero agradecer também ao professor e orientador Oswaldo Monteiro Del Cima (Wado), pela enorme disponibilidade em me ajudar neste trabalho, com seu conhecimento e seu jeito único e efetivo de ensinar nos cativa na busca do nosso melhor naquilo que nos propomos a fazer. Com seus anos de experiência e sua paciência possibilitou que este trabalho fosse concluído com todas as intepéries que apareceram em nosso caminho.

Ao professor Daniel H.T. Franco pela oportunidade de estar trabalhando e aprendendo uma área que muito me fascina. Pelas aulas e conselhos no que concerne à qualidade de um trabalho.

Ao professor Winder A. Moura Melo e Jakson M. Fonseca por compartilharem seus conhecimentos e sua experiência.

Ao professor J.A. Helayël Neto por aceitar a vir em nossa cidade participando da banca que avaliará este trabalho.

Aos amigos do curso que sempre que podem nos auxiliam e incentivam, em especial à Sylvestre, Paulo Henrique e Marlon pelas dicas e ajuda com o Latex.

À CAPES pela bolsa concedida sem a qual não seria possível este trabalho.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução ao Modelo</b>	<b>1</b>
1.1 Panorâmico histórico da Supercondutividade . . . . .	1
1.2 O Efeito Hall quântico e a QED <sub>3</sub> . . . . .	3
1.3 O modelo . . . . .	5
<b>2 O modelo: Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub> paridade invariante</b>	<b>9</b>
2.1 Análise e cálculo dos propagadores para $A_\mu$ e $a_\mu$ . . . . .	10
2.1.1 Propagadores no espaço dos momenta . . . . .	14
2.1.2 Causalidade . . . . .	15
2.1.3 Unitariedade . . . . .	16
2.2 Cálculo dos propagadores para $\psi_+$ e $\psi_-$ . . . . .	20
2.2.1 Análise dos propagadores $\Delta^{++}$ e $\Delta^{--}$ . . . . .	22
2.2.2 Unitariedade e graus de liberdade . . . . .	22
2.3 A super renormalizabilidade da teoria . . . . .	23
2.4 Soluções das equações de Dirac livre para $\psi_+$ e $\psi_-$ . . . . .	25
2.5 Números quânticos: spin e carga . . . . .	27
2.5.1 O hamiltoniano . . . . .	27

2.5.2	O spin como número quântico . . . . .	28
2.5.3	Os autovalores de spin . . . . .	29
2.6	Simetria $U_A(1) \times U_a(1)$ e cargas associadas . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Potencial de espalhamento Møller: interação atrativa elétron-elétron</b>	<b>35</b>
3.1	Regras de Feynman . . . . .	35
3.2	Amplitudes de espalhamento . . . . .	38
3.3	O potencial de espalhamento Møller . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Unidades naturais</b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>Álgebra dos operadores de projeção</b>	<b>53</b>
<b>C</b>	<b>Os espinores: <math>\bar{u}_+(p)</math>, <math>\bar{v}_+(p)</math>, <math>\bar{u}_-(p)</math> e <math>\bar{v}_-(p)</math></b>	<b>55</b>
<b>D</b>	<b>Os termos de correntes</b>	<b>56</b>
<b>E</b>	<b>Variáveis de Mandelstam</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

3.1	Amplitude de espalhamento total. . . . .	39
3.2	Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $s$ ( $\uparrow\downarrow$ ) mediado por $A_\mu$ . . . . .	39
3.3	Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $s$ ( $\uparrow\downarrow$ ) mediado por $a_\mu$ . . . . .	39
3.4	Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $p$ ( $\downarrow\downarrow$ ) mediado por $A_\mu$ . . . . .	40
3.5	Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $p$ ( $\downarrow\downarrow$ ) mediado por $a_\mu$ . . . . .	40
3.6	Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $p$ ( $\uparrow\uparrow$ ) mediado por $A_\mu$ . . . . .	40
3.7	Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) por $a_\mu$ no estado de onda- $p$ ( $\uparrow\uparrow$ ). . . . .	40
3.8	Espalhamento elétron-elétron no referencial do CM. . . . .	41
3.9	a) $V(r) = CK_0(\mu r)$ , $C > 0$ ; b) $V(r) = CK_0(\mu r)$ e $V(r) = -C \ln(\mu r)$ , $C < 0$ . . . . .	48
E.1	Esquema de espalhamento segundo Mandelstam . . . . .	58
E.2	Os canais de espalhamento de duas partículas. . . . .	59

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela dos operadores de projeção. . . . .	13
2.2	Cargas e spins das partículas associadas aos operadores de campo $\psi_+$ e $\psi_-$ . . .	34

# Resumo

MIRANDA, Émerson da Silva, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Abril de 2016.

**Potencial atrativo elétron-elétron na Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub> paridade invariante.**

Orientador: Oswaldo Monteiro Del Cima. Coorientador: Daniel Heber Theodoro Franco.

Neste trabalho investigamos um modelo da Eletrodinâmica Quântica em três dimensões espaço-temporais com paridade preservada, onde calculamos o potencial de espalhamento elétron-elétron (Møller) no limite não relativístico. O modelo acopla minimamente os campos de calibre eletromagnético ( $A_\mu$ ) e o estatístico ( $a_\mu$ ), provenientes do *gauging* da simetria global  $U(1)_A \times U(1)_a$ . Inicialmente encontramos os propagadores livres e através de uma análise semi-clássica verificamos a causalidade e a unitariedade, e pelo método de *power counting* a super renormalizabilidade do modelo. Além disso, encontramos também as soluções das equações de Dirac livres através das quais determinamos os auto-valores de *spin* dos férmions ( $\psi_\pm$ ) e suas respectivas cargas associadas à simetria  $U(1)_A \times U(1)_a$ . Em seguida, com as regras de Feynman para os vértices de interação, calculamos as amplitudes de espalhamento Møller, a partir das quais, no limite de Born, determinamos os potenciais de espalhamento elétron-elétron ( $e^- - e^-$ ) nos estados de onda-*s* (*spin*-0) e onda-*p* (*spin*-1). Os potenciais de espalhamento obtidos para os estados de onda-*p* mostram-se repulsivos, já o potencial no estado de onda-*s* se mostra atrativo quando a contribuição advinda do setor estatístico supera a interação do setor eletromagnético, ou seja, quando ( $g > e$ ), permitindo a formação de possíveis estados ligados sem o confinamento dos elétrons.

# Abstract

MIRANDA, Émerson da Silva, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, April, 2016. **Electron-electron attractive potential in parity-preserving Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub>**. Advisor: Oswaldo Monteiro Del Cima. Co-Advisor: Daniel Heber Theodoro Franco.

In this work we investigate a parity-preserving Quantum Electrodynamics model in three space-time dimensions. We calculate the electron-electron scattering potential in the non-relativistic limit (Møller scattering). The model couples minimally the electromagnetic ( $A_\mu$ ) and the statistical ( $a_\mu$ ) gauge fields, both emerged from the gauging of the global symmetry  $U(1)_A \times U(1)_a$ . Initially we calculate the free propagators and through a semiclassical analysis we verify the causality and the unitarity, and through the power counting method, the super renormalizability of the model is identified. Furthermore, the solutions for the free Dirac equations is obtained where for the fermions ( $\psi_\pm$ ) their spin eigenvalues and their respective charges associated to the symmetry  $U(1)_A \times U(1)_a$  are determined. After that, from the Feynman rules for the interaction vertices, we calculate the Møller scattering amplitudes in the Born limit and then we determine the electron-electron scattering potentials ( $e^- - e^-$ ) for the  $s$ -wave state (spin-0) and the  $p$ -wave state (spin-1). The obtained scattering potentials for  $p$ -wave states showed up repulsive, however the  $s$ -wave potential shows attractive when the contribution arising from the statistical sector suppress the electromagnetic sector, in other words ( $g > e$ ), allowing the formation of possible bound states without electronic confinement.

# Capítulo 1

## Introdução ao Modelo

### 1.1 Panorâmico histórico da Supercondutividade

A supercondutividade [1], fenômeno de grande interesse na atualidade, tem como chave de sua descoberta o desenvolvimento de técnicas ligadas à Física de baixas temperaturas (Criogenia). Em 1908, Kamerlingh-Onnes consegue liquefazer o hélio ( $T_c \approx 4K$ ) após grandes esforços, tornando possível resfriar amostras a temperaturas muito baixas. Dando continuidade ao seu projeto de mensurar a condutividade elétrica de metais puros a baixas temperaturas, em 1911, Kamerlingh-Onnes [2], decide medir a condutividade do mercúrio e observou que a temperaturas menores que  $4K$  a resistividade do mercúrio anulava-se, configurando a primeira observação do que atualmente conhecemos como supercondutividade. Não só para o mercúrio se observou este fenômeno, mas também amostras de alumínio ( $T_c = 7,18K$ ), chumbo ( $T_c = 7,20K$ ), nióbio ( $T_c = 9,25K$ ), alguns outros metais e também alguns semicondutores a alta pressão.

Sabemos hoje que a resistividade nula não é a única característica de um supercondutor. Em 1933, Meissner e Ochsenfeld [3] constataram um fenômeno que recebeu o nome de ambos: o campo magnético se anula nesta fase, algo que pode ser interpretado como se a amostra expulsasse o campo magnético para fora da amostra na fase supercondutora. Este efeito ficou conhecido como efeito Meissner-Ochsenfeld. Em 1935, os irmãos London (Fritz e Heinz) propuseram uma teoria fenomenológica para a supercondutividade, baseada no fato dos campos elétrico e magnético serem nulos no interior do material na fase supercondutora. A teoria de London [4] obteve êxito em calcular o comprimento de penetração que um campo magnético externo consegue adentrar perpendicularmente dentro de uma amostra. Já o modelo de transição de fase de segunda ordem aplicado por Landau e Ginsburg [5] em 1950, desenvolvida por Landau em 1937, foi bem sucedida ao tratar a supercondutividade em termos de um parâmetro de

ordem complexo,  $\phi$  que representaria a própria função de onda associada aos portadores de carga, e  $|\phi|^2$  indicaria a densidade de “superelétrons” na amostra. No entanto, apesar dos êxitos obtidos pela teoria de Landau e Ginsburg, nada se sabia acerca do mecanismo físico que promovia a supercondutividade ao nível microscópico, pois este modelo é puramente fenomenológico e assume como ponto de partida o par elétron-elétron ( $e^- - e^-$ ) já formado.

As dificuldades de uma teoria que explicasse do ponto de vista microscópico a supercondutividade começou a mudar quando Maxwell e Reynolds, em 1950, descobriram o efeito isotópico ( $T_c \propto M^{-\frac{1}{2}}$ ) [1], que evidenciou a importância dos fônons na ligação dos pares de elétron-elétron. Em 1957 Bardeen, Cooper, Schrieffer [6] propuseram um modelo baseado na troca de fônons para explicar a atração entre elétrons, que então se condensam aos pares com momentos e *spins* invertidos. Este modelo foi construído em cima de uma formulação de muitos corpos, de modo a admitir a criação e destruição de elétrons no espaço de Fock aos pares, e obteve sucesso ao explicar os dados experimentais disponíveis na época. Supondo o espalhamento por fônons como mecanismo de interação atrativa para elétrons, com energia próxima ao nível de Fermi, foi possível determinar o gap de energia que separa o estado fundamental do supercondutor (condensado BCS) do espectro das excitações de uma partícula.

Aos chamados supercondutores puros, constituídos por um só elemento químico, a teoria BCS aplica-se muito bem. Nesses elementos quando o campo magnético atinge o valor crítico,  $H_c$ , a fase supercondutora é destruída, o que permite a invasão total do campo externo na amostra, isso lhes garante a classificação de supercondutor tipo-I. Há ainda os supercondutores tipo-II, os quais apresentam comportamento distinto, nestes ocorrem duas transições de fase: ao atingir um valor crítico  $H_{1c}$ , o campo magnético penetra na amostra de forma não-homogênea e concentrada em fluxóides; Elevando-se ainda mais  $H$ , até atingir outro campo crítico  $H_{2c}$ , ocorre então a transição para a fase não supercondutora, com a penetração total do campo na amostra, isto foi demonstrado em 1960 por Abrikosov [39].

Descoberto por A. Bednorz e K. A. Müller em 1986 [40], o fenômeno da supercondutividade a alta temperatura crítica ( $SAT_c$ ) foi anunciado na forma de um breve artigo. Após a confirmação dos resultados da descoberta, iniciaram-se várias pesquisas sobre a estrutura das cerâmicas de óxido-cobre, revelando uma estrutura planar: óxidos constituídos por sucessivas camadas de planos de cobre-oxigênio (planos Cu-O) separados entre si por planos de outros óxidos e terras raras. Estas camadas de oxigênio-cobre se confundem com os planos-ab, perpendiculares ao eixo-c, que funciona como referência de orientação para medidas de várias grandezas da  $SAT_c$ . Esta notável estratificação tem como consequência direta uma anisotropia espacial das cerâmicas supercondutoras, cujas grandezas apresentam comportamento distintos quando analisadas no plano-ab ou ortogonalmente a este. Esta estratificação constitui uma motivação para a aplicação do formalismo da Teoria de Campos, mais especificamente, da

Eletrodinâmica Quântica Planar ( $QED_3$ ) para explicar alguns aspectos da supercondutividade "high- $T_c$ ", já que ela implica numa planificação de algumas grandezas físicas fundamentais do estado supercondutor, como o parâmetro de ordem.

Além disso, temos uma outra característica bem marcante destes materiais em sua transição de fase quando dopamos esta estrutura. Alguns são isolantes (de Mott) que migram para a fase metálica supercondutora quando dopados com elétrons ou buracos. Em 1987, surgiram os primeiros experimentos demonstrando ser também a  $SAT_c$  um fenômeno originado a partir da ligação de elétrons correlacionados em pares, como acontece na supercondutividade BCS. Nos gráficos corrente-voltagem foram observados platôs, os chamados platôs de Shapiro, colhidos dentro das junções de Josephson por Niemeyer *et al.* [7], que confirmaram este resultado, indicando que o parâmetro de ordem de uma teoria para  $SAT_c$  deve ser a própria função de onda que representa o par de elétrons.

Devido ao desenvolvimento e aperfeiçoamento de algumas técnicas experimentais e a grande quantidade de experimentos investigando questões polêmicas muitas mudanças ocorreram no entendimento das cerâmicas supercondutoras de alta- $T_c$  ( $CSAT_c$ ). Em um artigo de revisão, publicado em 1988, W. A. Little [9] discutiu o panorama da supercondutividade até aquela época. Baseada em evidências experimentais, havia naqueles dias quase uma certeza de que o parâmetro de ordem das  $CSAT_c$  teria uma forma espacialmente simétrica no plano-ab, uma espécie de projeção da simetria esférica BCS no plano, e que nenhum mecanismo magnético desempenharia qualquer papel relevante no estabelecimento do fenômeno [11]. No caso dos "heavy férmions", os supercondutores de férmions pesados como o caso do  $^3\text{He}$  superfluido, a descoberta do papel das excitações magnéticas despertou interesse por estes mecanismos, abrindo portas para o aparecimento de algumas abordagens onde as flutuações de spin são tomadas como interação principal [15]. Incompatíveis com o parâmetro de ordem tipo-s, estes modelos são consistentes com uma função de onda espacialmente anisotrópica no plano-ab, mais precisamente, uma simetria do tipo-d. Apesar das evidências em favor da simetria tipo-d, novas interpretações de experimentos de Josephson [17] indicaram a presença de uma componente de onda-s e onda-d, de tal modo que o cenário atual aponta para uma componente de ordem mista: composta de uma parte simétrica (onda-s) e assimétrica (onda-d).

## 1.2 O Efeito Hall quântico e a $QED_3$

Há 36 anos, von Klitzing, Dorda e Pepper (1980) fizeram a primeira descoberta o que se provou vital e ao mesmo tempo uma excitante subárea da física da matéria condensada: o efeito Hall quântico (EHQ) [8]. A descoberta da condutividade Hall ( $\sigma_{xy}$ ) de um gás de elétrons bi-

dimensional como múltiplos inteiros de  $n \frac{e^2}{h}$ , unidade quântica da condutividade, é conhecido como efeito Hall quântico inteiro (EHQI). Pouco depois, Tsui, Stömer e Gossard (1982) descobriram ainda mais intrigante o efeito Hall quântico fracionário (EHQF). Desde então, muito mais tem sido observado [19]. Ainda no início dos anos 1980 a Eletrodinâmica Quântica Planar ( $QED_3$ ) estava em crescente desenvolvimento como uma extrapolação da eletrodinâmica quântica convencional ( $QED_4$ ), motivada inicialmente pela sua possível conexão com teorias quadridimensionais no regime de temperatura finita [20] e pelas particularidades e singularidades, a  $QED_3$  foi sendo desenvolvida com um ferramental teórico apropriado para discutir questões fundamentais da Teoria de Campos e Partículas confinadas ao mundo tridimensional, como a quantização, spin, e suas interações [23]. Uma mudança no perfil de investigação da  $QED_3$  ocorreu no início dos anos 1990, quando se mostrou também adequada para tratar alguns sistemas da Matéria Condensada, como ao efeito Hall quântico e a  $SAT_c$  trazendo uma nova perspectiva para teorias tridimensionais.

O efeito Hall quântico ocorre a baixas temperaturas ( $T < 4K$ ) e a campos magnéticos intensos ( $B > 10T$ ) sendo caracterizado pela quantização da condutividade Hall,  $\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), e pela quase anulação da condutividade longitudinal ( $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ ) de um gás de elétrons bidimensional, tornando a condutividade Hall universal. O efeito depende apenas de constantes fundamentais (acoplamento eletromagnético e constante de Planck), independente de particularidades como impurezas, estrutura, etc..., ou seja, ele ocorre bastando que o gás esteja formado independente de como este se formou. Na verdade, a universalidade advém do fato da condutividade em  $D=1+2$  não depender das extensões espaciais da amostra e como consequência da quantização dos níveis de Landau.

Originalmente em sua versão, no EHQI os elétrons são considerados livres, sujeitos a ação apenas do campo magnético, sendo que os primeiros níveis de Landau estão totalmente preenchidos ( $\nu = n$ , fator de ocupação inteiro), correspondendo ao que chamamos de líquido quântico incompressível. Há também alguns sistemas Hall que exibem estados físicos com números quânticos fracionários (de carga ou spin, por exemplo). Estas excitações correspondem à realização física dos ânions, partículas de estatística (spin) fracionária que habitam o mundo planar espacial. Isto corresponde ao que conhecemos como efeito Hall quântico fracionário (EHQF), o qual Laughlin [21] propôs como solução de onda uma função de onda variacional, representando um estado coerente de elétrons girando em fase, demonstrando assim o caráter energeticamente favorável deste estado de ocupação fracionária.

Do sucesso da abordagem de Laughlin, surgiu um novo tratamento para o EHQF dentro do contexto de uma teoria de campos, quando Zhang, Hanson e Kivelson [22], em 1989, propuseram uma ação de Chern-Simons-Landau-Ginsburg capaz de explicar todos os aspectos fenomenológicos conhecidos do EHQF de maneira completamente independente do formalismo

de Laughlin. Este modelo ficou conhecido como ZHK. Ele consiste numa aproximação de um campo médio, na qual os elétrons são mapeados em bósons interagindo com um campo estatístico  $a_\mu$  vinculado ao termo de Chern-Simons. O fator de ocupação em um sistema Hall pode ser escrito como a razão entre o número de elétrons e a quantidade de fluxóides magnéticos ( $\nu = N_e/N_\phi = (2p + 1)^{-1}$ ), o que certamente implica na associação de um número ímpar de fluxóides a cada elétron do sistema. No modelo ZHK, elétrons ligados a um número ímpar de fluxóides magnéticos comportam-se como bósons, ou seja, bósons na ausência de campo magnético (o campo estatístico anula o campo externo:  $\vec{a} + \vec{A} = 0$ ), o que abre espaço para o estudo da relação entre EHQF e superfluidez, e suas excitações elementares (vórtices), que agora exibem carga e estatística fracionária. Em sistemas Hall fracionários podem ocorrer a condensação Bose-Einstein, devido à sua natureza bosônica, tornando a geração de um estado fundamental energeticamente favorável, o que virá acompanhado da abertura de um *gap*, e da incompressibilidade do sistema.

Novas linhas de pesquisa surgem constantemente, propostas de modelos que estabelecem conexões entre efeito Hall quântico e a supercondutividade com a QED<sub>3</sub>, têm sido atualmente objeto de inúmeras publicações.

### 1.3 O modelo

No âmbito da Teoria de Campos a Eletrodinâmica Quântica Planar tem sido objeto de intensa análise, por se apresentar como um novo cenário de discussões fundamentais como quantização, spin e interação [23] e por suas particularidades e singularidades em relação à QED<sub>4</sub>, como o comportamento escalar do fóton e a arbitrariedade do valor de spin, isso ainda falando apenas do ambiente maxwelliano, que tem como forma genérica a ação representada pela expressão

$$S_{MAX} = \int d^3x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right). \quad (1.1)$$

Utilizamos como métrica  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1)$ , sendo  $\mu, \nu = 0, 1, 2$ , o campo de gauge  $A_\mu$  e o field-strength  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  da maneira usual, mas agora, com duas dimensões espaciais e uma temporal.

Das equações de Maxwell em três dimensões espaço-temporais obtidas da ação (1.1), verificamos a propagação de um fóton de massa nula com apenas um grau de liberdade, onde os graus de liberdade não físicos foram eliminados pelas equações de movimento. Ou seja, diferentemente da natureza vetorial do fóton em quatro dimensões espaço-temporais, as excitações físicas desta teoria apresentam um caráter escalar (spin-0), configurando o chamado fóton planar.

Em  $D=1+2$ , dentro da formulação criada por Wigner [29], o spin é tido como um número quântico associado às representações unitárias e irredutíveis dos estados de uma partícula. Estas representações são geradas pelo “*little group*”, um subgrupo de rotação do grupo de Poincaré em 3D, o  $SO(1,2)$ .

O  $SO(2)$  é o “*little group*” para as partículas massivas, que por ser isomorfo ao grupo abeliano  $U(1)$ , vincula representações contínuas e arbitrárias ao spin. Já para as partículas de massa nula, o “*little group*” está associado a uma classe de matrizes com autovalores nulos, para estas partículas indicando como única opção  $\text{spin}=0$  [37]. Embora relacionada com a teoria de grupos em  $D=1+2$ , a idéia de estatística arbitrária, surgiu no cenário da física nos anos 70 [30], e tornou-se conhecida pelos trabalhos de Wilczek [31, 32] que denominou estas partículas de spin arbitrário de *anyons*.

Um fato interessante é que apesar de espinores sem massa terem consequentemente spin nulo, sua natureza fermiônica segundo a ótica do princípio de Pauli é mantida [26], levando-nos à uma noção mais profunda da relação spin-estatística para uma relação grupo de Lorentz-estatística.

Nos sistemas Hall o campo magnético é um fator externo, independente da densidade de carga, conduzindo ao seu caráter incompressível e à ausência da natureza supercondutora apresentando supercorrentes, mas não o efeito Meissner. No entanto, nos supercondutores aniônicos a compressibilidade é uma premissa básica para a formação do estado supercondutor [27] sendo que o campo magnético é fator intrínseco, gerado pelas próprias cargas fermiônicas que proporcionam a compressibilidade do sistema, pois a variação do campo magnético num ponto altera localmente a densidade fermiônica.

Outra característica, é a presença dos níveis de Landau. Estes níveis localizados de energia são gerados pela atuação de um campo magnético de natureza não-local, advindo da média dos fluxóides associados às partículas de toda a amostra. Estes eventos foram culminados com a identificação da  $SAT_c$  como um fenômeno aniônico, através da aplicação da técnica RPA (Random Phase Approximation) por Laughlin *et al.* [28]. No entanto, o que se viu posteriormente é que a supercondutividade se provou ser impossível à temperatura finita [33]. Com a procura de novas abordagens para  $SAT_c$  a formulação de Chern-Simons surgiu como um ferramental apropriado para substituição dos modelos aniônicos na Eletrodinâmica Quântica Planar [34, 35, 36]. A abordagem de Chern-Simons para a supercondutividade aniônica vem numa relação direta, uma vez que o campo estatístico  $a_\mu$ , representando uma interação não-local, reproduz perfeitamente a aproximação de campo médio dos supercondutores aniônicos. A ação é representada, formalmente, pelo termo:

$$S_{CS} = \int d^3x \left( \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\rho\nu} a_\mu \partial_\rho a_\nu \right) \quad (1.2)$$

Esta ação apresenta invariância de gauge, mas não preserva as simetrias de paridade e a simetria por reversão temporal. Além disso, algumas peculiaridades são observadas como a geração de um fóton massivo de natureza não-local, isto porque o termo Chern-Simons (CS) tem caráter topológico, pois não depende da métrica nem contribui para o tensor energia-momento do sistema [24]. Além disso, o termo CS não apresenta dinâmica, sempre requerendo a adição de mecanismos para propagar o fóton, e que também uma carga em repouso gera tanto campo elétrico quanto campo magnético.

A quebra de paridade é uma característica marcante nas teorias de CS, porém nos supercondutores aniônicos não há evidências experimentais que comprovem a quebra de simetria de paridade do estado supercondutor. Desta forma, modelos sem quebra de paridade consistem em tentativas no entendimento da supercondutividade planar. Neste trabalho, sugerimos uma abordagem de Chern-Simons sem violação de paridade, uma vez que poderá ser usado em investigações da Supercondutividade a Alta- $T_c$ . O que propomos é um termo de CS misto, acoplando os campos de gauge  $A_\mu$  e  $a_\mu$ . Deste modo, temos:

$$S_{CS} = \int d^3x \left( \frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu \right). \quad (1.3)$$

Com esta formulação teremos invariância de gauge sem quebra de paridade. A conservação da paridade é garantida pelas transformações:

$$\begin{aligned} A_\mu &\xrightarrow{P} A_\mu^P = (A_0, -A_1, A_2), \\ \partial_\mu &\xrightarrow{P} \partial_\mu^P = (\partial_0, -\partial_1, \partial_2), \\ a_\mu &\xrightarrow{P} a_\mu^P = (-a_0, a_1, -a_2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

É necessário introduzir à ação de Chern-Simons um mecanismo que promova uma eletrodinâmica propagativa. Para isto, adicionamos à ação de CS a ação de Maxwell, configurando a formulação de Maxwell-Chern-Simons (MCS).

Por causa do caráter topológico do termo de CS, nesta abordagem não são introduzidos graus de liberdade adicionais à teoria de Maxwell. Portanto, o campo de MCS apresenta apenas um grau de liberdade, caracterizando sua natureza escalar em 3D.

Assim, a proposta é uma ação, invariante por paridade, de Maxwell-Chern-Simons para ambos os campos de gauge,  $A_\mu$  e  $a_\mu$ , com acoplamento de um sistema de férmions com spin

down(-) e up(+), do seguinte modo:

$$S = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu + \right. \\ \left. + i\bar{\psi}_+ \mathcal{D}\psi_+ + i\bar{\psi}_- \mathcal{D}\psi_- - m(\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \right\}, \quad (1.5)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é *field strength* para o gauge eletromagnético e  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$  é para o estatístico, respectivamente. A derivada covariante é definida por  $\mathcal{D}\psi_\pm \equiv (\partial + ie\mathcal{A} \pm ig\phi)\psi_\pm$ , onde utilizamos a definição genérica  $\mathcal{Q} \equiv \gamma^\mu C_\mu$  e as matrizes gama  $\gamma^\mu = (\sigma_z, -i\sigma_x, i\sigma_y)$ :

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Verifica-se por meio das transformações (1.4) e das transformações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\pm \xrightarrow{P} \psi_\pm^P = -i\gamma^1 \psi_\mp \\ \bar{\psi}_\pm \xrightarrow{P} \bar{\psi}_\pm^P = i\bar{\psi}_\mp \gamma^1 \end{array} \right. , \quad \text{onde } \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.7)$$

a invariância por paridade da ação (1.5), isto é,  $S \xrightarrow{P} S^P = S$ .

A ação (1.5) é invariante pelas seguintes transformações locais  $U_A(1) \times U_a(1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\pm \longrightarrow \psi'_\pm = e^{i(\rho(x) \pm \xi(x))} \psi_\pm. \\ \bar{\psi}_\pm \longrightarrow \bar{\psi}'_\pm = e^{-i(\rho(x) \pm \xi(x))} \bar{\psi}_\pm. \\ \mathcal{D}\psi_\pm \longrightarrow (\mathcal{D}\psi_\pm)' = e^{i(\rho(x) \pm \xi(x))} \mathcal{D}\psi_\pm, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

e através da condição  $(\mathcal{D}\psi_\pm)' = \mathcal{D}'\psi'_\pm$ , obtemos as transformações dos campos de gauge:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \rho(x), \\ a'_\mu = a_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \xi(x). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

## Capítulo 2

# O modelo: Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub> paridade invariante

Ao se fazer o estudo de um modelo devemos nos perguntar: Para quê? E como fazer? A primeira pergunta nos remete ao caso em que almejamos uma possível aplicação, pois sabemos que ao se tratar de novos modelos não conhecemos o total alcance de nossas idéias, pois melhores percepções podem surgir com o melhor conhecimento e entendimento da proposta inicial. Já a segunda pergunta está relacionada em como abordamos o problema, ou seja, como concretizar uma proposta.

Em nosso trabalho adotamos o formalismo lagrangeano, onde a dinâmica dos campos é regida pelo princípio da mínima ação. Os modelos devem satisfazer as seguintes condições físicas de consistência:

**Invariância de Lorentz:** As leis físicas, no regime relativístico, devem ser invariantes entre referenciais inerciais;

**Causalidade:** O princípio da causalidade estabelece uma correlação de tempo entre a causa e seu subsequente efeito;

**Unitariedade:** Reflete o princípio da conservação de probabilidade, significando a ausência de partículas com estado de norma negativa;

**Renormalizabilidade:** A renormalizabilidade de um modelo estabelece que seus campos e parâmetros em nível quântico possam ser redefinidos a partir de seus campos e parâmetros em nível clássico (estabilidade da ação clássica), como também, que suas simetrias clássicas sejam implementadas em nível quântico (ausência de anomalias).

Neste capítulo, verificamos as condições de causalidade, de unitariedade a “*tree-level*” e de renormalizabilidade por “*power-counting*” da teoria. Para isto, se faz necessário o cálculo dos

propagadores. Para tal, expressamos a ação de Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub> com paridade preservada dada por:

$$S = S_{MCS} + S_{\bar{\psi}\psi} + S_{gf} + S_{int}, \quad (2.1)$$

onde

$$S_{MCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu \right\}, \quad (A)$$

$$S_{gf} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu a^\mu)^2 \right\}, \quad (B)$$

$$S_{\bar{\psi}\psi} = \int d^3x \left\{ i\bar{\psi}_+ \not{\partial} \psi_+ + i\bar{\psi}_- \not{\partial} \psi_- - m(\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \right\}, \quad (C)$$

$$S_{int} = \int d^3x \left\{ i\bar{\psi}_+ (ieA + ig\phi) \psi_+ + i\bar{\psi}_- (ieA - ig\phi) \psi_- \right\}. \quad (D)$$

## 2.1 Análise e cálculo dos propagadores para $A_\mu$ e $a_\mu$

Os propagadores são identificáveis com as funções de Green causais, ou seja, seus pólos são interpretados como as partículas mediadoras das interações. Pela análise dos pólos é que podemos verificar, *à tree level*, a causalidade, e pela análise de resíduos nos respectivos pólos que se inferirá sobre a unitariedade. Os propagadores são obtidos pela parte bilinear da ação, ou seja, sua parte livre:

$$S_{livre} = \int dx \left( \Phi \hat{O} \Phi + J \Phi \right), \quad (2.2)$$

Consideramos  $\Phi$  um campo que pode ser bosônico ou fermiônico e que o operador  $\hat{O}$  é inversível escrito na forma  $\hat{O}^{-1}$ . Reescrevendo (2.2), teremos:

$$S_{livre} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \Phi \hat{O} (\Phi + \hat{O}^{-1} J) + \frac{1}{2} J \Phi \right\}, \quad (2.3)$$

Fazendo a seguinte substituição  $X \equiv \Phi + \hat{O}^{-1} J$  em (2.3), visto que ponto de vista funcional  $\hat{O}^{-1} J$  é constante, obteremos:

$$S_{livre} = \int dx \left( \frac{1}{2} X \hat{O} X - \frac{1}{2} J \hat{O}^{-1} J \right). \quad (2.4)$$

onde indentificamos  $\hat{O}^{-1}$  como sendo o propagador.

Tomando-se primeiramente o termo de Maxwell de (A):

$$S_{Max} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} = -\frac{1}{4} \int d^3x \left\{ \left( \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) \left( \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \right\}, \quad (2.5)$$

e integrando-se por partes, pelo fato dos campos anularem-se no infinito, os termos de superfície são nulos. Logo,

$$S_{Max} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \square \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\nu \right\} \quad (2.6)$$

onde  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$  é o operador d'Alambertiano.

Conhecendo os operadores de projeção transversal  $\Theta^{\mu\nu}$  e longitudinal  $\omega^{\mu\nu}$ , definidos como:

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (2.7)$$

$$\omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (2.8)$$

A partir de (2.6):

$$S_{Max} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu (\square \Theta^{\mu\nu}) A_\nu \right\} \quad (2.9)$$

Aqui surge um problema, já que os operadores transversal e longitudinal formam uma base completa, a ausência de um deles no operador de onda o torna não inversível. Precisamos que operador de onda esteja escrito em sua totalidade. Vemos em (2.9) que o termo de Maxwell encontra-se puramente transverso, portanto não inversível. Adotando-se a *gauge-fixing* abaixo e fazendo-se integrações por partes, temos:

$$\begin{aligned} S_{gfA} &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\alpha} \left( A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \right) \right\} = \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2\alpha} \left( A_\mu \square \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu \right) \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left( \frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} \right) A_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De (2.10) e (2.9), onde  $S_{AA} = S_{Max} + S_{gfA}$ , teremos:

$$S_{AA} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left( \square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} \right) A_\nu \right\} \quad (2.11)$$

Procedendo-se do mesmo modo para campo estatístico  $a_\mu$ , já que este possui a mesma estrutura do campo  $A_\mu$ , encontraremos um resultado similar:

$$S_{aa} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} a_\mu \left( \square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta} \omega^{\mu\nu} \right) a_\nu \right\} \quad (2.12)$$

Analisado os termos bilineares da ação para os campos bosônicos  $A_\mu$  e  $a_\mu$  separadamente, seguiremos a análise para o termo misto de Chern-Simons, mas antes disso, definimos um outro operador transversal:

$$S^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\rho\nu} \partial_\rho, \quad (2.13)$$

o que nos leva conseqüentemente,

$$S_{Aa}^{CS} = \int d^3x \{ \mu \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu \} = \int d^3x \{ A_\mu (\mu S^{\mu\nu}) a_\nu \}. \quad (2.14)$$

Não obstante, sabendo-se que  $\int dx A S a = \frac{1}{2} \int dx A S a + \frac{1}{2} \int dx a S A$ , podemos escrever a ação completa bilinear nos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$ .

$$S_{Aa}^{MCS} = \int d^3x \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & a_\nu \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} & \mu S^{\mu\nu} \\ \mu S^{\mu\nu} & \square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta} \omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}}_{\hat{O}^{\mu\nu}} \begin{pmatrix} A_\nu \\ a_\nu \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

A partir deste ponto estamos aptos a encontrar os propagadores dos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$ , isto será feito a partir do inverso de  $\hat{O}^{\mu\nu}$ :

$$(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} \square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} & \mu S^{\mu\nu} \\ \mu S^{\mu\nu} & \square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta} \omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.16)$$

Para o cálculo do inverso dessa matriz precisaremos saber quais relações obedecem os operadores  $\theta^{\mu\nu}$ ,  $\omega^{\mu\nu}$  e  $S^{\mu\nu}$ , o resultado é apresentado na Tabela (2.1) e os detalhes são apresentados no apêndice (B).

Operadores			
	$\Theta$	$\omega$	$S$
$\Theta$	$\Theta$	$0$	$S$
$\omega$	$0$	$\omega$	$0$
$S$	$S$	$0$	$-\square\Theta$

Tabela 2.1: Tabela dos operadores de projeção.

Além disso usaremos o método de inversão de Hans Bolz e Tadeusz Banachiewicz, um dos métodos que permite inverter uma matriz em forma de blocos.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\hat{O}} \underbrace{\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}}_{\hat{O}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}}_{\mathbb{1}_{n \times n}}. \quad (2.17)$$

Após manipulações algébricas encontramos a matrix inversa:

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ (CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Identificando os elementos da matriz (2.16), temos que:

$$A = \square\Theta + \frac{\square}{\alpha}\omega; \quad B = C = \mu S; \quad D = \square\Theta + \frac{\square}{\beta}\omega. \quad (2.19)$$

De (2.19), sabendo-se que  $A.A^{-1} = \mathbb{1}$  e  $D.D^{-1} = \mathbb{1}$  e utilizando-se da Tabela (2.1) encontramos:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\square}\Theta + \frac{\alpha}{\square}\omega, \\ D^{-1} &= \frac{1}{\square}\Theta + \frac{\beta}{\square}\omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agora, finalmente podemos encontrar os propogadores, através da inversa de nossa matriz (2.18). Eles são expressos da seguinte forma:

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = \frac{1}{\square + \mu^2}\Theta + \frac{\alpha}{\square}\omega, \quad (2.21)$$

$$A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} = -\frac{\mu}{\square(\square + \mu^2)}S, \quad (2.22)$$

$$(CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} = -\frac{\mu}{\square(\square + \mu^2)}S, \quad (2.23)$$

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = \frac{1}{\square + \mu^2}\Theta + \frac{\beta}{\square}\omega. \quad (2.24)$$

ou seja,

$$(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\square + \mu^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square}\omega^{\mu\nu} & -\frac{\mu}{\square(\square + \mu^2)}S^{\mu\nu} \\ -\frac{\mu}{\square(\square + \mu^2)}S^{\mu\nu} & \frac{1}{\square + \mu^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\square}\omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Definindo a matriz dos propagadores  $G^{\mu\nu}$ :

$$G^{\mu\nu}(x - y) = i(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1}\delta^3(x - y), \quad (2.26)$$

identificamos, portanto, os propagadores:

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(\partial) \equiv i\left(\frac{1}{\square + \mu^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square}\omega^{\mu\nu}\right)\delta^3(x - y), \quad (2.27)$$

$$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(\partial) \equiv -i\left(-\frac{\mu}{\square(\square + \mu^2)}S^{\mu\nu}\right)\delta^3(x - y), \quad (2.28)$$

$$\Delta_{aA}^{\mu\nu}(\partial) \equiv -i\left(-\frac{\mu}{\square(\square + \mu^2)}S^{\mu\nu}\right)\delta^3(x - y), \quad (2.29)$$

$$\Delta_{aa}^{\mu\nu}(\partial) \equiv i\left(\frac{1}{\square + \mu^2}\Theta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\square}\omega^{\mu\nu}\right)\delta^3(x - y). \quad (2.30)$$

Deste modo, obtemos os propagadores para os campos  $a_\mu$  e  $A_\mu$ , porém restam algumas análises a serem realizadas sobre os propagadores de modo a garantir que tenhamos uma teoria fisicamente “saudável”.

### 2.1.1 Propagadores no espaço dos momenta

Primeiro vamos analisar os pólos e os resíduos destes propagadores, mas antes passaremos para o espaço dos momenta onde é mais conveniente a análise. Deste modo, analisaremos os pólos, daí pode-se verificar os possíveis quanta da teoria são ou não taquiônicos. Após seguimos para uma análise de resíduos onde inferiremos sobre a natureza física e dinâmica desses quanta e também a contagem sobre os graus de liberdade propagados.

Para isso, identificamos através da transformada de Fourier de  $G^{\mu\nu}(x - y)$ :

$$G^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{G}^{\mu\nu} e^{ik(x-y)}, \quad (2.31)$$

e definimos a distribuição delta de Dirac como:

$$\delta^3(x-y) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)}, \quad (2.32)$$

Da transformada de Fourier (2.31) e da distribuição delta de Dirac (2.32) obtemos a matriz dos propagadores no espaço dos momenta,  $G^{\mu\nu}(k)$ , como sendo:

$$G^{\mu\nu}(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} & i \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \\ i \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda & \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

escrevendo-se,

$$G^{\mu\nu}(k) = \begin{pmatrix} \Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) & \Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) \\ \Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) & \Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

temos,

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad (2.35)$$

$$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \quad (2.36)$$

$$\Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \quad (2.37)$$

$$\Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \quad (2.38)$$

## 2.1.2 Causalidade

O propagador é indentificado como uma função de Green causal, ou seja, intepretamos os pólos como as partículas mediadoras estáveis da teoria. Então, pela análise dos pólos é que poderemos verificar a causalidade, que é assegurada pela ausência de táquions do espectro e através de uma análise de resíduos inferiremos sobre a unitariedade do modelo, que assegurará

a ausência de “*ghosts*” (estados de norma negativa) da teoria ou pelo desacoplamento destes dos demais estados do modelo.

Começaremos por uma inspeção dos propagadores acima, identificando seus pólos e a natureza dos mesmos, se brádions ou táquions. Assim, temos:

$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}$  e  $\Delta_{aA}^{\mu\nu}$  apresentam dois pólos simples no setor transversal, sendo:  $k^2 = \mu^2$  e  $k^2 = 0$  ;

$\Delta_{aa}^{\mu\nu}$  apresenta dois pólos simples, um no setor transversal,  $k^2 = \mu^2$ , e outro pólo simples,  $k^2 = 0$ , no setor longitudinal;

$\Delta_{aA}^{\mu\nu}$  apresenta um pólo simples no setor transversal,  $k^2 = \mu^2$ , e outro pólo simples,  $k^2 = 0$ , no setor longitudinal.

Analisando as massas dos possíveis quanta mediadores dos campos vetoriais, verifica-se a causalidade, pois para todas encontramos  $k^2 \geq 0$ , nos indicando a ausência de táquions.

### 2.1.3 Unitariedade

A fim de evitarmos que funções de onda de normas negativas que geram estados de probabilidade negativa, os conhecidos “*ghosts*” da teoria, não estejam presente, fazemos a verificação da unitariedade do modelo. O método empregado é o acoplamento de correntes externas ao propagador, obtendo, desse modo, as amplitudes que representam a emissão e absorção das partículas mediadoras, os quanta da teoria.

A unitariedade é garantida se a parte imaginária dos resíduos dessas amplitudes, nos respectivos pólos, são positivo-definidos, ou seja, é necessário que:

$$\begin{aligned}
 i) \quad \mathcal{A}_{AA} &\equiv J_\mu \Delta_{AA}^{\mu\nu} J_\nu \Rightarrow \text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{AA}|_{\text{pólos}})\} \geq 0. \\
 ii) \quad \mathcal{A}_{Aa} &\equiv J_\mu \Delta_{Aa}^{\mu\nu} j_\nu \Rightarrow \text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{Aa}|_{\text{pólos}})\} \geq 0. \\
 iii) \quad \mathcal{A}_{aA} &\equiv j_\mu \Delta_{aA}^{\mu\nu} J_\nu \Rightarrow \text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{aA}|_{\text{pólos}})\} \geq 0. \\
 iv) \quad \mathcal{A}_{aa} &\equiv j_\mu \Delta_{aa}^{\mu\nu} j_\nu \Rightarrow \text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{aa}|_{\text{pólos}})\} \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Tendo definido as amplitudes, podemos escrevê-las caso a caso:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \mathcal{A}_{AA} &= -iJ_\mu \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) J_\nu \\
 &= -iJ_\mu \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) J_\nu - J_\mu \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) J_\nu + \frac{\alpha}{k^2} J_\mu \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) J_\nu
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

É importante salientar aqui que devido à invariância de gauge as correntes são conservadas, isto é,  $k_\mu J^\mu = k_\mu j^\mu = 0$ , logo:

$$\mathcal{A}_{AA} = -iJ_\mu \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) J_\nu \tag{2.41}$$

Como consequência somente os graus de liberdade do setor transversal se propagam, já que, os graus de liberdade do setor longitudinal se desacoplam totalmente do modelo. Aqui, fica claro que os termos de *gauge-fixing* não possuem nenhuma dinâmica.

Do mesmo modo, para as demais amplitudes temos

$$\text{ii) } \mathcal{A}_{Aa} = J_\mu \left( \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \right) j_\nu, \tag{2.42}$$

$$\text{iii) } \mathcal{A}_{aA} = j_\mu \left( \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \right) J_\nu, \tag{2.43}$$

$$\text{iv) } \mathcal{A}_{aa} = -ij_\mu \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) j_\nu. \tag{2.44}$$

No intuito de calcularmos a parte imaginária do resíduo nos respectivos pólos, como proposto em (2.39), escolhemos para  $k^2 = \mu^2$  o vetor  $k^\mu = (\mu, 0, 0)$  e para  $k^2 = 0$  o vetor  $k^\mu = (\mu, 0, \mu)$ , algo semelhante encontra-se em [16].

As correntes vetoriais,  $J^\mu$  e  $j^\mu$ , podem ser decompostas em termos de uma base completa

tridimensional no espaço dos momenta como se segue:

$$\begin{cases} J^\mu \equiv Ak^\mu + B\tilde{k}^\mu + C\varepsilon^\mu, \\ j^\mu \equiv ak^\mu + b\tilde{k}^\mu + c\varepsilon^\mu. \end{cases} \quad (2.45)$$

tendo  $k^\mu = (k^0, k^1, k^2)$ ,  $\tilde{k}^\mu = (k^0, -k^1, -k^2)$  e  $\varepsilon^\mu = (0, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  obedecendo aos vínculos covariantes  $k^\mu \varepsilon_\mu = 0$ ,  $\tilde{k}^\mu \varepsilon_\mu = 0$  e  $\varepsilon^\mu \varepsilon_\mu = -1$ . Onde, para os pólos massivos  $k^\mu k_\mu = \tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = \mu^2$  e para os não massivos  $k^\mu k_\mu = \tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = 0$ , tendo em mente a conservação da corrente.

**i) Pólo não massivo** ( $k^2 = 0$ ):

Podemos escrever  $J^\mu$  e  $j^\mu$  neste caso como:

$$J^\mu = ((A + B)\mu, C\varepsilon^1, (A - B)\mu + C\varepsilon^2), \quad (2.46)$$

$$j^\mu = ((a + b)\mu, c\varepsilon^1, (a - b)\mu + c\varepsilon^2). \quad (2.47)$$

Além disso, pelos vínculos covariantes:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad k_\mu \varepsilon^\mu &= 0 & k_\mu \varepsilon^\mu &= -\mu \varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon^2 = 0, \\ 2^\circ) \quad \tilde{k}_\mu \varepsilon^\mu &= 0 & k_\mu \varepsilon^\mu &= -\mu \varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon^2 = 0, \\ 2^\circ) \quad \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu &= -1 & -(\varepsilon^1)^2 &= -1 \Rightarrow \varepsilon^1 = 1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Até este momento vemos que,

$$J^\mu = ((A + B)\mu, C, (A - B)\mu),$$

e utilizando a fato da conservação da corrente,

$$k_\mu J^\mu = 2\mu^2 B = 0 \Rightarrow B = 0,$$

assim,

$$J^\mu|_{k^2=0} = (A\mu, C, A\mu). \quad (2.49)$$

Procedendo do mesmo modo para  $j^\mu|_{k^2=0}$ , teremos:

$$j^\mu|_{k^2=0} = (a\mu, c, a\mu). \quad (2.50)$$

**ii) Pólo massivo** ( $k^2 = \mu^2$ ):

Para os pólos massivo,  $k^\mu = (\mu, \vec{0})$ , a operação é mais simplificada, onde tomamos a

conservação da corrente.

$$k_\mu J^\mu = \underbrace{Ak_\mu k^\mu}_{=\mu^2} + \underbrace{BK_\mu \tilde{k}^\mu}_{=\mu^2} + \underbrace{Ck_\mu \varepsilon^\mu}_{=0} = 0, \quad (2.51)$$

Como consequência é necessário que  $A = B = 0$ . Se fazemos o mesmo para  $j^\mu$  teremos  $a = b = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} J^\mu|_{k^2=\mu^2} &= C\varepsilon^\mu. \\ j^\mu|_{k^2=\mu^2} &= c\varepsilon^\mu. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Com os resultados (2.49), (2.50) e (2.52), calcula-se os acoplamentos definidos em (2.39) e então encontramos a parte imaginária dos resíduos.

i) Para o caso  $k^2 = \mu^2$  temos os acoplamentos nos pólos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AA}|_{k^2=\mu^2} &= -iJ_\mu \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) J_\nu = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} J_\mu J^\mu, \\ &= -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} C\varepsilon_\mu C\varepsilon^\mu = i \frac{1}{k^2 - \mu^2} C^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Obtemos para  $\mathcal{A}_{aa}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{aa}|_{k^2=\mu^2} &= -ij_\mu \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) j_\nu = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} j_\mu j^\mu, \\ &= -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} c\varepsilon_\mu c\varepsilon^\mu = i \frac{1}{k^2 - \mu^2} c^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para  $\mathcal{A}_{Aa}$  e  $\mathcal{A}_{aA}$ :

$$\mathcal{A}_{Aa}|_{k^2=\mu^2} = \mathcal{A}_{aA}|_{k^2=\mu^2} = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} Cc\varepsilon_\mu \varepsilon^{\mu\lambda\nu} \varepsilon_\nu k_\lambda = 0 \quad (2.55)$$

ii) Para o caso  $k^2 = 0$ , temos:

$$\mathcal{A}_{Aa}|_{k^2=0} = \mathcal{A}_{aA}|_{k^2=0} = j_\mu \left( \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} \varepsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \right) J_\nu = 0$$

Encontrando a parte imaginária dos resíduos ( $\mathcal{R}es$ ) dos acoplamentos ( $\mathcal{A}$ ), teremos:

$$\begin{aligned} Im\left\{\mathcal{R}es\mathcal{A}_{AA}\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= C^2 & Im\left\{\mathcal{R}es\mathcal{A}_{aa}\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= c^2 \\ Im\left\{\mathcal{R}es\mathcal{A}_{Aa}\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= 0 & Im\left\{\mathcal{R}es\mathcal{A}_{aA}\Big|_{k^2=\mu^2}\right\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Apenas os propagadores  $\Delta_{AA}^{\mu\nu}$  e  $\Delta_{aa}^{\mu\nu}$  tem a parte imaginária do resíduo do acoplamento maior do que zero ( $Im\{\mathcal{R}es\mathcal{A}\} > 0$ ), excluindo a possibilidade de “ghosts” e assegurando a existência de graus de liberdade propagados. Já os propagadores mistos  $\mathcal{A}_{Aa}$ ,  $\mathcal{A}_{aA}$  apresentam ( $Im\{\mathcal{R}es\mathcal{A}\} = 0$ ) o que exclui os “ghosts” pois não há propagação de graus de liberdade. Com base neste resultado e nos demais dessa seção, escrevemos abaixo um resumo sobre os propagadores dos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$ , gauge eletromagnético e estatístico, respectivamente:

i)  $\Delta_{AA}^{\mu\nu}$  :

Setor longitudinal, pólo  $k^2 = 0$ , não dinâmico.

Setor transversal, pólo  $k^2 = \mu^2$ , dinâmico, causal e unitário a tree-level.

ii)  $\Delta_{aa}^{\mu\nu}$  :

Setor longitudinal, pólo  $k^2 = 0$ , não dinâmico.

Setor transversal, pólo  $k^2 = \mu^2$ , dinâmico, causal e unitário a tree-level.

iii)  $\Delta_{Aa}^{\mu\nu}$  :

Setor transversal, pólo  $k^2 = 0$ , não dinâmico.

Setor transversal, pólo  $k^2 = \mu^2$ , não dinâmico.

iv)  $\Delta_{aA}^{\mu\nu}$  :

Setor transversal, pólo  $k^2 = 0$ , não dinâmico.

Setor transversal, pólo  $k^2 = \mu^2$ , não dinâmico.

## 2.2 Cálculo dos propagadores para $\psi_+$ e $\psi_-$

Para finalizar o cálculo dos propagadores da ação proposta (1.5), vamos obter os propagadores dos campos fermiônicos, através da ação  $S_{\bar{\psi}\psi}$ .

Considerando apenas os termos bilineares em  $\psi_+$  e  $\psi_-$ , temos  $S_{\bar{\psi}\psi}$ .

$$S_{\bar{\psi}\psi} = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}_+(i\partial - m)\psi_+ + \bar{\psi}_-(i\partial + m)\psi_- \right\}$$

$$= \int d^3x (\bar{\psi}_+ \quad \bar{\psi}_-) \begin{pmatrix} i\partial - m & 0 \\ 0 & i\partial + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

onde o operador de onda  $\Gamma$  é dado por:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} i\partial - m & 0 \\ 0 & i\partial + m \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

Definimos o propagador por:

$$G_{\bar{\psi}\psi}(x - y) = -i\Gamma^{-1}\delta^3(x - y). \quad (2.59)$$

Calculando-se a inversa da matriz  $\Gamma$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i\partial - m & 0 \\ 0 & i\partial + m \end{pmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\Gamma^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

onde concluímos que  $B = C = 0$  e,

$$i(\partial - m)A = 1, \quad (2.61)$$

$$i(\partial + m)D = 1. \quad (2.62)$$

Multiplicando (2.61) por  $(-i\partial - m)$  e (2.62) por  $(-i\partial + m)$  teremos:

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)A = -i\gamma^\nu \partial_\nu - m, \quad (2.63)$$

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)D = -i\gamma^\nu \partial_\nu + m. \quad (2.64)$$

Observando as relações acima e sabendo-se que  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ , então

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\nu \partial_\mu)\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + \partial_\nu \partial_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu), \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \partial_\mu \partial_\nu \eta^{\mu\nu} = \square.$$

Continuando com a equação (2.63) e fazendo-se análogo para (2.64), teremos:

$$A = \frac{-i\gamma^\mu \partial_\mu - m}{\square + m^2}, \quad D = \frac{-i\gamma^\mu \partial_\mu + m}{\square + m^2}. \quad (2.66)$$

Agora torna-se possível escrever a matriz inversa:

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-i\rlap{/}\partial - m}{\square + m^2} & 0 \\ 0 & \frac{-i\rlap{/}\partial + m}{\square + m^2} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

e, conseqüentemente, a matriz dos propagadores:

$$G_{\bar{\psi}\psi} = - \begin{pmatrix} \frac{\rlap{/}\partial - im}{\square + m^2} & 0 \\ 0 & \frac{\rlap{/}\partial + im}{\square + m^2} \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (2.68)$$

onde identificamos os propagadores para  $\psi_+$  e  $\psi_-$ , respectivamente, como sendo:

$$\Delta^{++}(\rlap{/}\partial) = - \frac{\rlap{/}\partial - im}{\square + m^2} \delta^3(x - y), \quad (2.69)$$

$$\Delta^{--}(\rlap{/}\partial) = - \frac{\rlap{/}\partial + im}{\square + m^2} \delta^3(x - y). \quad (2.70)$$

### 2.2.1 Análise dos propagadores $\Delta^{++}$ e $\Delta^{--}$

Como anteriormente, faz-se necessário analisar os propagadores e para isso utilizamos o espaço dos “*momenta*”. Portanto,

$$\Delta^{++}(k) = - \left( \frac{\gamma^\mu k_\mu - im}{-k^2 + m^2} \right) = i \frac{\rlap{/}k - m}{k^2 - m^2}, \quad (2.71)$$

$$\Delta^{--}(k) = - \left( \frac{\gamma^\mu k_\mu + im}{-k^2 + m^2} \right) = i \frac{\rlap{/}k + m}{k^2 - m^2}. \quad (2.72)$$

Com base nos pólos dos propagadores, onde  $k^2 = m^2$ , assegura-se a ausência de táquions, garantindo-se a causalidade. Ainda nos falta certificar sobre a unitariedade e os graus de liberdade físicos.

### 2.2.2 Unitariedade e graus de liberdade

Para completar nossa análise, definiremos a matriz corrente-propagador-corrente:

$$\mathcal{A}_{ii} = \bar{J}_i \Delta_{ii}(k) J_i \quad \text{onde, } \bar{J}_i = J_i^\dagger \gamma^0, \quad J_i = \begin{pmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{pmatrix} \quad \text{e } i = (+, -) \quad (2.73)$$

Temos portanto que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{++} &= \bar{J}_+ \Delta_{++}(k) \bar{J}_+ = i \bar{J}_+ \frac{k - m}{k^2 - m^2} J_+, \\ &= \frac{2im}{k^2 - m^2} \theta_{2+}^* \theta_{2+}. \\ \mathcal{A}_{--} &= \bar{J}_- \Delta_{--}(k) \bar{J}_- = i \bar{J}_- \frac{k + m}{k^2 - m^2} J_-, \\ &= \frac{2im}{k^2 - m^2} \theta_{1-}^* \theta_{1-}.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Dáí, tomando-se a parte imaginária dos resíduos nos pólos, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{++})|_{k^2=m^2} = 2im\theta_{2+}^* \theta_{2+} &\implies \text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{++})|_{k^2=m^2}\} = 2m\theta_{2+}^* \theta_{2+} > 0, \\ \mathcal{R}es(\mathcal{A}_{--})|_{k^2=m^2} = 2im\theta_{1-}^* \theta_{1-} &\implies \text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A}_{--})|_{k^2=m^2}\} = 2m\theta_{1-}^* \theta_{1-} > 0.\end{aligned}\tag{2.75}$$

A partir deste resultado podemos ver que tanto para  $\psi_+$  e  $\psi_-$  temos  $\text{Im}\{\mathcal{R}es(\mathcal{A})\} > 0$  em  $k^2 = m^2$ , logo os dois graus de liberdade propagados por ambos os espinores são físicos.

## 2.3 A super renormalizabilidade da teoria

Embora não seja o objetivo deste trabalho, o estudo de renormalizabilidade do modelo proposto, tendo em vista a necessidade deste estudo posteriormente, será discutido brevemente com base no *power-counting*.

Na região do ultra-violeta ( $k \rightarrow \infty$ ), ou seja, em altas energias, o objetivo do *power-counting* é estabelecer resultados sobre a renormalizabilidade do modelo, para isso indentificamos os vértices de interação do modelo.

Deste modo, da ação (1.5) reconhecemos quatro termos de interação:

$$S_{int}^{(1)} = i \int d^3x \bar{\psi}_+(ieA)\psi_+ \implies V_{+A+}^\mu, \tag{2.76}$$

$$S_{int}^{(2)} = i \int d^3x \bar{\psi}_+(ig\mathcal{A})\psi_+ \implies V_{+a+}^\mu, \tag{2.77}$$

$$S_{int}^{(3)} = i \int d^3x \bar{\psi}_-(ieA)\psi_- \implies V_{-A-}^\mu, \tag{2.78}$$

$$S_{int}^{(4)} = i \int d^3x \bar{\psi}_-(-ig\mathcal{A})\psi_- \implies V_{-a-}^\mu. \tag{2.79}$$

Identificados os respectivos vértices de interação, passemos ao cálculo da contagem de potências, na qual saberemos o grau superficial de divergência do modelo.

Como as correções radiativas a 1,2,3... loops equivalem a integrais simples, duplas, triplas e assim por diante dos propagadores e dos vértices, a contagem de potências é a contagem de potências de  $k$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Da identidade topológica envolvendo o número loops (L), linhas internas (I) e vértices (V), temos:

$$L = I - (V - 1) \quad (2.80)$$

onde  $I = I_{AA} + I_{aa} + I_{Aa} + I_{aA} + I_{\bar{\psi}_+\psi_+} + I_{\bar{\psi}_-\psi_-}$  é o número total de linhas internas e  $V = V_{+A+}^\mu + V_{+a+}^\mu + V_{-A-}^\mu + V_{-a-}^\mu$  é o número total de vértices de um gráfico.

Temos então para os propagadores:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{\psi}_+\psi_+}(k) \text{ e } \Delta_{\bar{\psi}_-\psi_-}(k) &\rightarrow \frac{1}{k}, \\ \Delta_{AA}(k) \text{ e } \Delta_{aa}(k) &\rightarrow \frac{1}{k^2}, \\ \Delta_{Aa}(k) \text{ e } \Delta_{aA}(k) &\rightarrow \frac{1}{k^3}. \end{aligned}$$

Portanto, em  $D = 3$  o grau superficial de divergência ( $\delta$ ) de um dado gráfico dado por:

$$\delta = 3L - I_{\bar{\psi}_+\psi_+} - I_{\bar{\psi}_-\psi_-} - 2I_{AA} - 2I_{aa} - 3I_{Aa} - 3I_{aA}. \quad (2.81)$$

Um vértice (V) decompõe-se em linhas internas (I) e linhas externas (E), sabendo disso obtemos as relações de V, E e I para cada campo:

$$\psi_+ : 2I_{\bar{\psi}_+\psi_+} + E_{\bar{\psi}_+\psi_+} = 2V_{+A+}^\mu + 2V_{+a+}^\mu. \quad (2.82)$$

$$\psi_- : 2I_{\bar{\psi}_-\psi_-} + E_{\bar{\psi}_-\psi_-} = 2V_{-A-}^\mu + 2V_{-a-}^\mu. \quad (2.83)$$

$$A : 2I_{AA} + I_{Aa} + E_{AA} = V_{+A+}^\mu + V_{-A-}^\mu. \quad (2.84)$$

$$a : 2I_{aa} + I_{aA} + E_{aa} = V_{+a+}^\mu + V_{-a-}^\mu. \quad (2.85)$$

Obtemos o grau superficial de divergência da teoria em altas energias com a ajuda das equações acima:

$$\begin{aligned} \delta = 3 - \frac{1}{2}V_{+A+}^\mu - \frac{1}{2}V_{+a+}^\mu - \frac{1}{2}V_{-A-}^\mu - \frac{1}{2}V_{-a-}^\mu - \frac{1}{2}I_{Aa} + \\ - \frac{1}{2}I_{aA} - \frac{1}{2}E_{AA} - \frac{1}{2}E_{aa} - E_{\bar{\psi}_+\psi_+} - E_{\bar{\psi}_-\psi_-}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

A divergência  $\delta$  possui termos de linhas internas, desta forma, à medida que aumentamos a ordem dos gráficos diminuimos o grau superficial de divergência. Constatamos então que se trata de uma teoria super-renormalizável [18], isto é, há um número finito de diagramas que podem conter possíveis divergências.

## 2.4 Soluções das equações de Dirac livre para $\psi_+$ e $\psi_-$

Considerando as equações de Dirac livre para os espinores  $\psi_+$  e  $\psi_-$ , obtidas a partir da ação (1.5)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\psi_+ = 0, \quad (2.87)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\mathbb{1})\psi_- = 0, \quad (2.88)$$

suas soluções, lêem-se:

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{E} [a_+(k)u_+(k)e^{-ikx} + b_+^\dagger(k)v_+(k)e^{ikx}], \quad (2.89)$$

$$\psi_-(x) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{E} [a_-(k)u_-(k)e^{-ikx} + b_-^\dagger(k)v_-(k)e^{ikx}], \quad (2.90)$$

A partir das equações acima, encontramos quatro equações para as componentes dos espinores.

$$(\not{p} - m\mathbb{1})u_+(p) = 0 \quad , \quad (-\not{p} - m\mathbb{1})v_+(p) = 0, \quad (2.91)$$

$$(\not{p} + m\mathbb{1})u_-(p) = 0 \quad , \quad (-\not{p} + m\mathbb{1})v_-(p) = 0, \quad (2.92)$$

Utilizando-se as matrizes  $\gamma^\mu$  já definidas e tendo  $p^\mu = (E, p_x, p_y)$ , encontraremos as soluções de energia positiva e negativa para  $\psi_+$  e  $\psi_-$ . Iniciando por  $u_+(p)$ , de (2.91) temos:

$$\begin{pmatrix} E - m & ip_x - p_y \\ ip_x + p_y & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+(p) \\ \beta_+(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.93)$$

Calculando-se o determinante do sistema acima, vemos que só possui uma variável independente, isto está de acordo com nossa análise anterior, onde cada componente do espinor  $\psi_+$ ,

neste caso  $u_+(p)$ , carrega apenas um grau de liberdade:

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \alpha_+(p) \\ \frac{ip_x + p_y}{E + m} \alpha_+(p) \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

Utilizando-se a condição de normalização,  $\bar{u}_+(p)u_+(p) = 1$ , chegaremos finalmente em:

$$u_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E + m)}} \begin{pmatrix} E + m \\ ip_x + p_y \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

No referencial de repouso onde  $E > 0$ ,  $E = m$  e  $p^\mu = (E, \vec{0})$ , temos:

$$u_+(m, \vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

Portanto, podemos reescrever (2.95) diferentemente, como:

$$u_+(p) = \frac{(\not{p} + m)}{\sqrt{2m(E + m)}} u_+(m, \vec{0}). \quad (2.97)$$

Analogamente, obtém-se:

$$u_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E + m)}} \begin{pmatrix} E + m \\ ip_x + p_y \end{pmatrix}, \quad v_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E + m)}} \begin{pmatrix} p_y - ip_x \\ E + m \end{pmatrix}, \quad (2.98)$$

$$u_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E + m)}} \begin{pmatrix} p_y - ip_x \\ E + m \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E + m)}} \begin{pmatrix} E + m \\ p_y + ip_x \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

considerando-se as seguintes condições de normalização<sup>1</sup>:

$$\bar{u}_+(p)u_+(p) = 1 \quad , \quad \bar{u}_-(p)u_-(p) = -1, \quad (2.100)$$

$$\bar{v}_+(p)v_+(p) = -1 \quad , \quad \bar{v}_-(p)v_-(p) = 1. \quad (2.101)$$

<sup>1</sup>Se encontram no apêndice  $\bar{u}_+(p)$ ,  $\bar{v}_+(p)$ ,  $\bar{u}_-(p)$  e  $\bar{v}_-(p)$ .

Expressando-se em termos dos espinores no referencial de repouso, tem-se que:

$$u_+(p) = \frac{(\not{p} + m)}{\sqrt{2m(E + m)}} u_+(m, \vec{0}), \quad u_-(p) = \frac{(-\not{p} + m)}{\sqrt{2m(E + m)}} u_-(m, \vec{0}), \quad (2.102)$$

$$v_+(p) = \frac{(-\not{p} + m)}{\sqrt{2m(E + m)}} v_+(m, \vec{0}), \quad v_-(p) = \frac{(\not{p} + m)}{\sqrt{2m(E + m)}} v_-(m, \vec{0}), \quad (2.103)$$

onde,

$$u_+(m, \vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_-(m, \vec{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_+(m, \vec{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_-(m, \vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Um comentário deve ser deixado aqui, apesar do uso do termo solução de energia “positiva” e de energia “negativa”, deve-se ficar claro que a energia é sempre positiva ( $E \equiv k^0 = \sqrt{\mathbf{k} + m^2} > 0$ ), o termo “energia negativa” é usado apenas por questões históricas!

## **2.5 Números quânticos: spin e carga**

Continuando a construção da base necessária para o cálculo do potencial de espalhamento, determinaremos o hamiltoniano associado aos espinores  $\psi_+$  e  $\psi_-$  [34]. Logo em seguida faremos uma análise do conteúdo de spin e sua condição de número quântico, calculando sua relação de comutação com o hamiltoniano.

### **2.5.1 O hamiltoniano**

A equação de Dirac para um espinor qualquer  $\chi$  é dado por:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\chi = 0. \quad (2.104)$$

Da equação (2.104) encontramos o hamiltoniano multiplicando ambos os lados por  $\gamma^0 = \beta$ . Sabendo que  $\beta^2 = \mathbb{1}$  e  $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$ , tem-se que:

$$i\partial_t \chi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m \mathbb{1}) \chi = H_0 \chi. \quad (2.105)$$

Relembrando as equações de Dirac (2.87) e (2.88) para os espinores  $\psi_+$  e  $\psi_-$ , respectivamente,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\psi_+ = 0,$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\mathbb{1})\psi_- = 0,$$

a partir de (2.105) obteremos:

$$H_0^{(+)}\psi_+ = i\partial_t\psi_+ = (\vec{\alpha}_+\vec{p} + \beta_{(+)}m\mathbb{1})\psi_+, \quad (2.106)$$

$$H_0^{(-)}\psi_- = i\partial_t\psi_- = (\vec{\alpha}_-\vec{p} + \beta_{(-)}m\mathbb{1})\psi_-, \quad (2.107)$$

Ao compararmos (2.106) e (2.107) com (2.105), vemos que:

$$\vec{\alpha}_{(+)} = \gamma_{(+)}^0 \vec{\gamma}_{(+)} \quad e \quad \beta_+ = \gamma_{(+)}^0, \quad (2.108)$$

$$\vec{\alpha}_{(-)} = \gamma_{(-)}^0 \vec{\gamma}_{(-)} \quad e \quad \beta_- = -\gamma_{(-)}^0. \quad (2.109)$$

### 2.5.2 O spin como número quântico

Em  $D = 3$  os geradores da álgebra de Lie do grupo  $SO(1, 2)$  na representação espinorial, lê-se:

$$\sum^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (2.110)$$

onde as matrizes  $\gamma^\mu$  satisfazem a álgebra de  $so(1, 2)$ .

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha. \quad (2.111)$$

Computa-se os spins no referencial de repouso das partículas e o operador de spin é obtido através do gerador de rotação no plano, desse modo escrevemos o operador de spin como sendo  $S^{12} \equiv \sum^{12}$ , assim:

$$S^{12} = \frac{1}{2}\sigma_z \quad (2.112)$$

Tendo obtido o operador de spin, deve-se garantir que o spin seja um número quântico, portanto, verifica-se que o operador de spin comuta com os hamiltonianos, sendo assim um observável.

$$[H_0^{(+)}, S^{12}] = 0 \quad (2.113)$$

$$[H_0^{(-)}, S^{12}] = 0 \quad (2.114)$$

Analisando-se primeiro para  $[H_0^{(+)}, S^{12}] = 0$ ,<sup>2</sup> segue que

$$[H_0^{(+)}, S^{12}] = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}_{(+)}\vec{p} + \beta_{(+)}mI, \sigma_z], \quad (2.115)$$

$$[H_0^{(+)}, S^{12}] = \frac{1}{2}\{[\gamma^0\gamma^i p_i, \gamma^0] + m[\gamma^0, \gamma^0]\}, \quad (2.116)$$

$$[H_0^{(+)}, S^{12}] = 0. \quad (2.117)$$

Realizando-se a mesma operação para (2.114), obteremos:

$$[H_0^{(-)}, S^{12}] = 0, \quad (2.118)$$

Assim, os resultados asseguram que os autovalores de spin ( $s_+^u, s_+^v, s_-^u, s_-^v$ ) do operador de spin  $S^{12}$ , correspondentes as funções de onda ( $u_+, v_+, u_-$  e  $v_-$ ) são números quânticos para estes estados físicos.

### 2.5.3 Os autovalores de spin

Nesta seção determinaremos os autovalores dos spins associados às funções de onda,  $u_+(p)$ ,  $v_+(p)$ ,  $u_-(p)$  e  $v_-(p)$ . Para isso, vamos atuar com o operador  $S^{12}$  nas soluções de energia positiva e “negativa” (2.98-2.99) que são as autofunções das partículas. No entanto, como o spin é uma propriedade intrínseca, basta simplesmente que atuemos nos espinores de repouso, assim:

$$S^{12}u_+(m, \vec{0}) = s_+^u u_+(m, \vec{0}) \quad , \quad S^{12}v_+(m, \vec{0}) = s_+^v v_+(m, \vec{0}) \quad (2.119)$$

$$S^{12}u_-(m, \vec{0}) = s_-^u u_-(m, \vec{0}) \quad , \quad S^{12}v_-(m, \vec{0}) = s_-^v v_-(m, \vec{0}) \quad (2.120)$$

Utilizando-se das soluções calculadas na Seção 2.4 temos que:

$$S^{12}u_+(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}u_+(m, \vec{0}) \quad , \quad (2.121)$$

$$S^{12}v_+(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}u_+(m, \vec{0}) \quad , \quad (2.122)$$

$$S^{12}u_-(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}u_+(m, \vec{0}) \quad , \quad (2.123)$$

<sup>2</sup>Comutação esta verificada no referencial de repouso.

$$S^{12}v_-(m, \vec{0}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}v_-(m, \vec{0}) . \quad (2.124)$$

Conclui-se, portanto, que os autovalores de spin  $s_+^u, s_+^v, s_-^u$  e  $s_-^v$ , são:

$$s_+^u = \frac{1}{2}, \quad s_+^v = -\frac{1}{2}, \quad s_-^u = -\frac{1}{2}, \quad s_-^v = \frac{1}{2}. \quad (2.125)$$

Podemos concluir que os elétrons ( $u_+$  e  $u_-$ ) e os pósitrons<sup>3</sup> ( $v_+$  e  $v_-$ ) com termos de massas opostas possuem polarização oposta de spins, o que está em acordo com os resultados de [37]. Como uma típica característica do espaço-tempo tridimensional, a polarização de uma partícula ( $u$ ) e sua correspondente anti-partícula ( $v$ ) pertencem ao mesmo espinor de Dirac ( $\psi$ ), e se a partícula tem spin  $s$ , sua antipartícula tem spin  $-s$ .

## 2.6 Simetria $U_A(1) \times U_a(1)$ e cargas associadas

As simetrias desempenham um papel fundamental em muitos aspectos da física moderna por estabelecer propriedades gerais de sistemas físicos estudados. Fazendo o uso em nossas discussões do formalismo lagrangiano obtemos quantidades físicas que são conservadas, isto é, observáveis que são independentes do tempo.

**Teorema 1 (Noether) :** *Se o funcional ação é invariante sob um grupo contínuo de transformações dos campos, então, o correspondente Lagrangeano fixa um conjunto de invariantes dinâmicos, isto é, as correntes locais conservadas.*

Agora, determinaremos as cargas associadas às funções de onda,  $u_+(k), v_+(k), u_-(k)$  e  $v_-(k)$ , devido à simetria  $U_A(1) \times U_a(1)$ . Para isso, vamos calcular os autovalores dos operadores de carga  $Q_+, Q_-, q_+$  e  $q_-$ :

<sup>3</sup>Podem parecer imprudente chamar estes férmions de elétrons e de pósitrons neste momento, mas na próxima seção isto se tornará claro.

$$Q_+ = \int d^2\vec{x} : J_+^0(x) : = -e \int d^2\vec{x} : \psi_+^\dagger(x)\psi_+(x) : , \quad (2.126)$$

$$Q_- = \int d^2\vec{x} : J_-^0(x) : = -e \int d^2\vec{x} : \psi_-^\dagger(x)\psi_-(x) : , \quad (2.127)$$

$$q_+ = \int d^2\vec{x} : j_+^0(x) : = -g \int d^2\vec{x} : \psi_+^\dagger(x)\psi_+(x) : , \quad (2.128)$$

$$q_- = \int d^2\vec{x} : j_-^0(x) : = +g \int d^2\vec{x} : \psi_-^\dagger(x)\psi_-(x) : , \quad (2.129)$$

associados aos autoestados  $u_+, v_+, u_-$  e  $v_-$ . A expansão dos operadores de campo em termos dos operadores de criação e aniquilação é dado por:

$$\psi_+(x) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} [a_+(k)u_+(k)e^{-ikx} + b_+^\dagger(k)v_+(k)e^{ikx}] , \quad (2.130)$$

$$\psi_-(x) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} [a_-(k)u_-(k)e^{-ikx} + b_-^\dagger(k)v_-(k)e^{ikx}] , \quad (2.131)$$

$$\psi_+^\dagger(x) = \int \frac{d^2\vec{k}'}{(2\pi)^2} \frac{m}{k'^0} [a_+^\dagger(k')u_+^\dagger(k')e^{ik'x} + b_+(k')v_+^\dagger(k')e^{-ik'x}] , \quad (2.132)$$

$$\psi_-^\dagger(x) = \int \frac{d^2\vec{k}'}{(2\pi)^2} \frac{m}{k'^0} [a_-^\dagger(k')u_-^\dagger(k')e^{ik'x} + b_-(k')v_-^\dagger(k')e^{-ik'x}] . \quad (2.133)$$

A partir das equações de Dirac (2.91 -2.92), das condições de normalização (2.100-2.101) e da relação

$$\{\not{p}, \gamma^0\} = 2p^0, \quad (2.134)$$

obtemos as seguintes equações, satisfeitas pelas funções de onda:

$$u_+^\dagger(p)u_+(p) = \frac{p^0}{m} , \quad v_+^\dagger v_+(p) = \frac{p^0}{m}, \quad (2.135)$$

$$u_-^\dagger(p)u_-(p) = \frac{p^0}{m} , \quad v_-^\dagger v_-(p) = \frac{p^0}{m}. \quad (2.136)$$

As relações de anticomutação fixadas pela microcausalidade são:

$$\left\{ \psi_+(x), \psi_+^\dagger(y) \right\}_{x_0=y_0} = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) , \quad \left\{ \psi_-(x), \psi_-^\dagger(y) \right\}_{x_0=y_0} = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.137)$$

Utilizando-se das condições de normalização (2.135-2.136) e as expansões dos operadores de campo (2.130-2.133) encontramos as relações entre os operadores de criação e aniquilação:

$$\{a_+(k), a_+^\dagger(p)\} = (2\pi)^2 \frac{k^0}{m} \delta^2(\vec{k} - \vec{p}), \quad (2.138)$$

$$\{b_+(k), b_+^\dagger(p)\} = (2\pi)^2 \frac{k^0}{m} \delta^2(\vec{k} - \vec{p}), \quad (2.139)$$

$$\{a_-(k), a_-^\dagger(p)\} = (2\pi)^2 \frac{k^0}{m} \delta^2(\vec{k} - \vec{p}), \quad (2.140)$$

$$\{b_-(k), b_-^\dagger(p)\} = (2\pi)^2 \frac{k^0}{m} \delta^2(\vec{k} - \vec{p}). \quad (2.141)$$

Com todos estes resultados podemos escrever os operadores de carga  $Q_+$ ,  $Q_-$ ,  $q_+$  e  $q_-$  (2.127-2.129), em termos dos operadores de criação e aniquilação:

$$Q_+ = -e \int d^2\vec{x} \int \frac{d^2\vec{k}'}{(2\pi)^2} \frac{m}{k'^0} \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} : \left\{ \left[ a_+^\dagger(k') u_+^\dagger(k') e^{ik'x} + b_+(k') v_+^\dagger(k') e^{-ik'x} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ a_+(k) u_+(k) e^{-ikx} + b_+^\dagger(k) v_+(k) e^{ikx} \right] \right\} : , \quad (2.142)$$

Executando os produtos de operadores, realizando-se o produto normal ordenado e em seguida calculando a integral na variável  $x$ , para depois resolver a integral em uma das variáveis  $k$  ou  $k'$ , teremos a seguinte expressão para o operador de carga,  $Q_+$  :

$$Q_+ = -e \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} \frac{m}{k^0} \left[ a_+^\dagger(k) a_+(k) u_+^\dagger(k) u_+(k) - b_+(k) b_+^\dagger(k) v_+^\dagger(k) v_+(k) \right] + \\ - e \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} \frac{m}{k^0} \left[ a_+^\dagger(-k) b_+^\dagger(k) u_+^\dagger(-k) v_+(k) + b_+(-k) a_+(k) v_+^\dagger(-k) u_+(k) \right] .$$

A partir das relações (2.135-2.136) conseguimos simplificar o primeiro termo da expressão acima, e utilizando as relações (2.98-2.99), vemos que o segundo termo é identicamente nulo. Deste modo, temos finalmente que:

$$Q_+ = -e \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} \left[ a_+^\dagger(k) a_+(k) - b_+^\dagger(k) b_+(k) \right] . \quad (2.143)$$

Seguindo o mesmo procedimento chegaremos aos resultados para os outros operadores de carga:

$$Q_- = -e \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} \left[ a_-^\dagger(k) a_-(k) - b_-^\dagger(k) b_-(k) \right] , \quad (2.144)$$

$$q_+ = -g \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} \left[ a_+^\dagger(k) a_+(k) - b_+^\dagger(k) b_+(k) \right], \quad (2.145)$$

$$q_- = +g \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{m}{k^0} \left[ a_-^\dagger(k) a_-(k) - b_-^\dagger(k) b_-(k) \right]. \quad (2.146)$$

Tendo escrito os operadores de carga em termos dos operadores de criação e aniquilação, vamos agora calcular o comutador dos operadores de carga com os operadores de criação. Para isso utilizaremos as condições (2.138-2.141) e as expressões (2.143-2.146):

$$[Q_+, a_+^\dagger(p)] = -e a_+^\dagger(p) \quad , \quad [q_+, a_+^\dagger(p)] = -g a_+^\dagger(p), \quad (2.147)$$

$$[Q_+, b_+^\dagger(p)] = +e b_+^\dagger(p) \quad , \quad [q_+, b_+^\dagger(p)] = +g b_+^\dagger(p), \quad (2.148)$$

$$[Q_-, a_-^\dagger(p)] = -e a_-^\dagger(p) \quad , \quad [q_-, a_-^\dagger(p)] = +g a_-^\dagger(p), \quad (2.149)$$

$$[Q_-, b_-^\dagger(p)] = +e b_-^\dagger(p) \quad , \quad [q_-, b_-^\dagger(p)] = -g b_-^\dagger(p). \quad (2.150)$$

O estado fundamental de vácuo denotamos através do “ket”,  $|0\rangle$ , que satisfaz a condição de normalização,  $\langle 0|0\rangle = 1$ , e as condições:

$$a_+(k)|0\rangle = 0 \quad , \quad b_+(k)|0\rangle = 0, \quad (2.151)$$

$$a_-(k)|0\rangle = 0 \quad , \quad b_-(k)|0\rangle = 0. \quad (2.152)$$

Tendo em mente as relações de comutação (2.147-2.150) e aplicando o operador de carga  $Q_+$  ao estado de um elétron  $|e_{(+)}^-\rangle$ , obteremos:

$$Q_+ |e_{(+)}^-\rangle = Q_+ a_+^\dagger(p) |0\rangle = \left( [Q_+, a_+^\dagger(p)] - a_+^\dagger(p) Q_+ \right) |0\rangle = -e a_+^\dagger(p) |0\rangle = -e |e_{(+)}^-\rangle, \quad (2.153)$$

pois  $Q_+ |0\rangle = 0$ .

Procedendo exatamente do mesmo modo para os demais operadores de carga, obteremos que:

$$Q_+ |e_{(+)}^-\rangle = -e |e_{(+)}^-\rangle \quad , \quad q_+ |e_{(+)}^-\rangle = -g |e_{(+)}^-\rangle \quad \text{onde} \quad |e_{(+)}^-\rangle = a_+^\dagger(p) |0\rangle, \quad (2.154)$$

$$Q_+ |e_{(+)}^+\rangle = +e |e_{(+)}^+\rangle \quad , \quad q_+ |e_{(+)}^+\rangle = +g |e_{(+)}^+\rangle \quad \text{onde} \quad |e_{(+)}^+\rangle = b_+^\dagger(p) |0\rangle, \quad (2.155)$$

$$Q_- |e_{(-)}^-\rangle = -e |e_{(-)}^-\rangle \quad , \quad q_- |e_{(-)}^-\rangle = +g |e_{(-)}^-\rangle \quad \text{onde} \quad |e_{(-)}^-\rangle = a_-^\dagger(p) |0\rangle, \quad (2.156)$$

$$Q_- |e_{(-)}^+\rangle = +e |e_{(-)}^+\rangle \quad , \quad q_- |e_{(-)}^+\rangle = -g |e_{(-)}^+\rangle \quad \text{onde} \quad |e_{(-)}^+\rangle = b_-^\dagger(p) |0\rangle. \quad (2.157)$$

Com base nestes resultados e nos da Seção 2.5.3 podemos concluir que:

1.  $a_+^\dagger(p)$  cria um elétron  $u_+(p)$  com spin  $s_+^u = \frac{1}{2}$ , carga elétrica  $-e$  e carga estatística  $-g$ .
2.  $b_+^\dagger(p)$  cria um pósitron  $v_+(p)$  com spin  $s_+^v = -\frac{1}{2}$ , carga elétrica  $+e$  e carga estatística  $+g$ .
3.  $a_-^\dagger(p)$  cria um elétron  $u_-(p)$  com spin  $s_-^u = -\frac{1}{2}$ , carga elétrica  $-e$  e carga estatística  $+g$ .
4.  $b_-^\dagger(p)$  cria um pósitron  $v_-(p)$  com spin  $s_-^v = +\frac{1}{2}$ , carga elétrica  $+e$  e carga estatística  $-g$ .

Abaixo sintetizamos os resultados na Tabela (2.2):

Função de onda	Operador de criação	Operador de Carga $Q$	Carga ( $Q$ )	Operador de carga $q$	Carga ( $q$ )	Spin	Partícula	Símbolo
$u_+(p)$	$a_+^\dagger(p)$	$Q_+$	$-e$	$q_+$	$-g$	$s_+^u = +\frac{1}{2}$	elétron	$e_{(+)}^-$
$v_+(p)$	$b_+^\dagger(p)$	$Q_+$	$+e$	$q_+$	$+g$	$s_+^v = -\frac{1}{2}$	pósitron	$e_{(+)}^+$
$u_-(p)$	$a_-^\dagger(p)$	$Q_-$	$-e$	$q_-$	$+g$	$s_-^u = -\frac{1}{2}$	elétron	$e_{(-)}^-$
$v_-(p)$	$b_-^\dagger(p)$	$Q_-$	$+e$	$q_-$	$-g$	$s_-^v = +\frac{1}{2}$	pósitron	$e_{(-)}^+$

Tabela 2.2: Cargas e spins das partículas associadas aos operadores de campo  $\psi_+$  e  $\psi_-$ .

Da tabela observamos a relação unívoca abaixo entre o operador de spin  $S^{12}$  e os operadores de carga  $q_\pm$ . Não se sabe ao certo o por que desta relação, no entanto isto reforça o fato de chamarmos o campo  $a_\mu$  de campo estatístico:

$$S^{12} |\psi\rangle_\pm = -\frac{1}{2g} q_\pm |\psi\rangle_\pm. \quad (2.158)$$

Neste capítulo observamos alguns aspectos não triviais de férmions massivos em  $D=1+2$ , e em especial, no nosso modelo. A relação do sinal de spin e o sinal do termo de massa de Dirac, além da peculiaridade do sinal da carga estatística ( $g$ ), que possui sinal oposto à polarização do spin, foi observado. Como conclusão final,  $u_+$  e  $u_-$ , são as funções de onda dos elétrons com polarizações opostas de spin ( $e_{(+)}^-$  e  $e_{(-)}^-$ ), onde também,  $v_+$  e  $v_-$ , são as funções de onda dos pósitrons com polarizações opostas de spin ( $e_{(+)}^+$  e  $e_{(-)}^+$ ), o que está em total acordo com o fato de que o spin está relacionado com a simetria do espaço-tempo (Grupo de Lorentz), enquanto a carga elétrica e a carga estatística estão relacionadas com simetrias internas (simetrias de calibre).

## Capítulo 3

# Potencial de espalhamento Møller: interação atrativa elétron-elétron

Neste capítulo estamos interessados no cálculo do potencial de interação elétron-elétron no limite não-relativístico, denominado potencial de espalhamento Møller [34]. Para se derivar um potencial de interação entre duas partículas, dentro do arcabouço da teoria de campos, se faz necessário calcular a amplitude de espalhamento entre as partículas envolvidas, para em seguida tomar o limite de baixas energias (não-relativístico) e efetuar a transformada de Fourier que resulta no potencial de espalhamento na aproximação de Born [38]. Para este propósito precisamos encontrar as regras de Feynman para os vértices de interação.

### 3.1 Regras de Feynman

Partimos da ação efetiva  $\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi)$  que está relacionada ao funcional gerador das funções de Green conexas  $\mathcal{Z}^C(J, j, \bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S})$  por uma transformada de Legendre:

$$\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi) = \mathcal{Z}^C(J, j, \bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}) - \int d^3x (J^\mu A_\mu + j^\mu a_\mu + \bar{\psi} \mathfrak{S} + \mathfrak{S} \psi), \quad (3.1)$$

onde  $J^\mu$ ,  $j^\mu$  e  $\mathfrak{S}$  são fontes externas – funções teste.

Dentro do formalismo das integrais de caminho as funções de Green conexas nos fornecem valores esperados no vácuo da teoria. A ação efetiva também é o funcional gerador das funções de vértice irreduzível de n-pontos, chamadas funções de Green 1PI (One-Particle-Irreducible)

de n-pontos. Definidas como:

$$\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\alpha\dots\beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^n \Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi)}{\delta A^\mu(x_1) \dots \delta a^\nu(x_i) \dots \delta \bar{\psi}^\alpha(x_j) \dots \delta \psi^\beta(x_n)} \Bigg|_{\substack{A=a=0 \\ \bar{\psi}=\psi=0}}, \quad (3.2)$$

estas funções representam a soma de todos os gráficos de Feynman que não podem ser reduzidos a outros mais simples. Expandindo-se a ação efetiva  $\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi)$  em termos da função de Green 1PI de n-pontos obtemos a *tree-level* os vértices de interação que é o nosso objetivo. Utilizando-se a chamada expansão de Volterra para o funcional ação efetiva (3.1), teremos:

$$\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \int d^3x_1 \dots \int d^3x_i \dots \int d^3x_j \dots \int d^3x_n \times \left\{ \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\alpha\dots\beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \times A_{(x_1)}^\mu \dots a_{(x_i)}^\nu \dots \bar{\psi}_{(x_j)}^\alpha \dots \psi_{(x_n)}^\beta \right\}. \quad (3.3)$$

Como os cálculos de loops são trabalhados no espaço dos momenta, escrevemos as transformadas de Fourier dos campos para obter a ação efetiva (3.3) neste espaço. As transformadas de Fourier dos campos, são:

$$\bar{\psi}_\alpha(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_\alpha(k) e^{-ikx}, \quad (3.4)$$

$$\psi_\beta(x) = \int \frac{d^3m}{(2\pi)^3} \psi_\beta(m) e^{imx}, \quad (3.5)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \psi_\mu(l) e^{ilx}, \quad (3.6)$$

$$a_\nu(x) = \int \frac{d^3n}{(2\pi)^3} a_\nu(n) e^{inx}. \quad (3.7)$$

Com as transformadas de Fourier dos campos, escreve-se a ação efetiva (3.3), como :

$$\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \int d^3x_1 \dots \int d^3x_i \dots \int d^3x_j \dots \int d^3x_n \times \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \times A_{(p_1)}^\mu \dots a_{(p_i)}^\nu \dots \bar{\psi}_{(p_j)}^{(\alpha)} \dots \psi_{(p_n)}^\beta \dots e^{ip_1x_1} \dots e^{ip_ix_i} \dots e^{-ip_jx_j} \dots e^{ip_nx_n}, \quad (3.8)$$

E com a ajuda da transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} & (2\pi)^3 \delta(p_1 + \dots + p_i \dots p_j + \dots + p_n) \Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(p_1 + \dots + p_i \dots p_j + \dots + p_n) \equiv \\ & \equiv \int d^3 x_1 \dots \int d^3 x_i \dots \int d^3 x_j \dots \int d^3 x_n \Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \times \\ & \quad \times e^{-ip_1 x_1} \dots e^{-ip_i x_i} \dots e^{-ip_j x_j} \dots e^{ip_n x_n}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

escrevendo (3.9) em conjunto com a expressão da ação efetiva (3.8), obteremos no espaço dos momenta a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3 p_{n-1}}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) \times A_{(p_1)}^\mu \dots a_{(p_i)}^\nu \dots \bar{\psi}_{(p_j)}^\alpha \dots \psi_{(p_n)}^\beta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $p_j = p_1 + \dots + p_i + \dots + p_n$ .

A partir da ação efeiva, expandida no espaço dos momenta, derivam-se as regras de Feynman para os vértices de interação, identificando-os com a função de Green 1PI a *tree-level* de n-pontos neste espaço – a *tree-level* a ação efetiva nada mais é do que a ação clássica acrescida dos termos das fontes externas.

Identificando os vértices de interação abaixo:

$$S_{int}^{(1)} = i \int d^3 x \bar{\psi}_+(ieA)\psi_+, \quad (3.11)$$

$$S_{int}^{(2)} = i \int d^3 x \bar{\psi}_+(ig\mathcal{d})\psi_+, \quad (3.12)$$

$$S_{int}^{(3)} = i \int d^3 x \bar{\psi}_-(ieA)\psi_-, \quad (3.13)$$

$$S_{int}^{(4)} = i \int d^3 x \bar{\psi}_-(-ig\mathcal{d})\psi_-, \quad (3.14)$$

e definindo-se a distribuição delta do seguinte modo

$$\int d^3 x e^{i(l+m-k)x} \equiv (2\pi)^3 \delta^3(l+m-k), \quad (3.15)$$

teremos para o vértice (3.11)

$$S_{int}^{(1)} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} ie\gamma^\mu (\bar{\psi}_+(k) A_\mu(l) \psi_+(m)), \quad (3.16)$$

onde  $k = l + m$ .

Portanto, a regra de Feynman para o vértice é

$$\mathcal{V}_{+A+}^{\mu} = ie\gamma^{\mu}. \quad (3.17)$$

Procedendo-se do mesmo modo para os demais vértices de interação (3.12, 3.13 e 3.14) obtaremos as seguintes regras de Feynman, respectivamente:

$$\mathcal{V}_{+a+}^{\mu} = ig\gamma^{\mu}, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{V}_{-A-}^{\mu} = ie\gamma^{\mu}, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{V}_{-a-}^{\mu} = -ig\gamma^{\mu}. \quad (3.20)$$

## 3.2 Amplitudes de espalhamento

O espalhamento de elétrons não-relativísticos, comumente chamado de espalhamento Møller, recebeu este nome após C. Møller ter tratado do problema pela primeira vez em 1931 [38]. Analisando-se este processo de espalhamento, conforme a referência [38], encontramos a expressão para a amplitudes de espalhamento:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= \bar{u}(p'_1)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(1)}]u(p_1)\{\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_1)\}\bar{u}(p'_2)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(2)}]u(p_2) + \\ &\quad -\bar{u}(p'_2)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(3)}]u(p_1)\{\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_2)\}\bar{u}(p'_1)[\mathcal{V}_{Feyn.}^{(4)}]u(p_2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(1)}$ ,  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(2)}$ ,  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(3)}$ ,  $\mathcal{V}_{Feyn.}^{(4)}$  são as regras de Feynman para cada vértice de interação,  $\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_1)$  e  $\Delta_{\mu\nu}(p_1 - p'_2)$  os propagadores no canal- $t$  e canal- $u$ <sup>1</sup>, e  $u(p_1)$ ,  $u(p'_1)$ ,  $u(p_2)$ ,  $u(p'_2)$  as funções de onda dos elétrons no espaço dos momenta.

Reescrevendo-se (3.21):

$$-i\mathcal{M} = -i(\mathcal{M}^{direto} + \mathcal{M}^{cruzado}) = -i(\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)}), \quad (3.22)$$

e na Figura (3.1) em termos dos gráficos de Feynman:

<sup>1</sup>Detalhes sobre canal- $t$ , canal- $u$  e variáveis de Mandelstam encontram-se no apêndice (E).

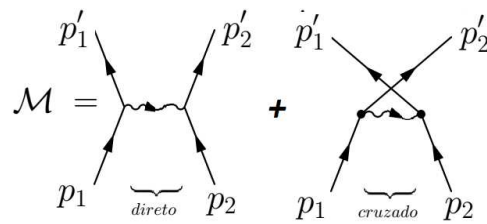


Figura 3.1: Amplitude de espalhamento total.

As amplitudes mostradas em (3.21) deixam implícitas as condições que levaremos em conta quando calcularmos as amplitudes de espalhamento que propomos no nosso trabalho. Estas condições são as polarizações dos elétrons que participam da interação, pois o resultado de (3.21) ainda não as levou em conta. Os elétrons estão polarizados ( $e \downarrow$  ou  $e \uparrow$ )<sup>2</sup> e os campos de gauge eletromagnético ( $A_\mu$ ) e o estatístico ( $a_\mu$ ) são os campos que mediam as interações. São três as possibilidades para o processo de espalhamento polarizado que estudaremos aqui: espalhamento onda- $s$  ( $\downarrow\uparrow$ ) e espalhamento onda- $p$  ( $\downarrow\downarrow$  e  $\uparrow\uparrow$ ).

Daí teremos os gráficos de Feynman para o espalhamento onda- $s$  mediado pelo campo  $A_\mu$ :

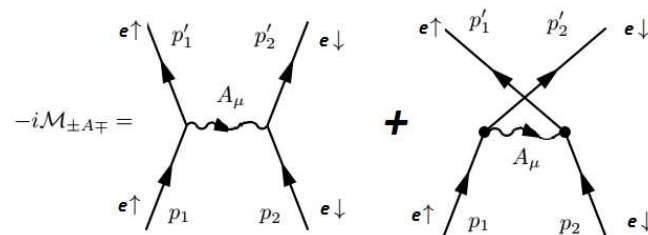


Figura 3.2: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $s$  ( $\uparrow\downarrow$ ) mediado por  $A_\mu$ .

E pelo campo  $a_\mu$ :

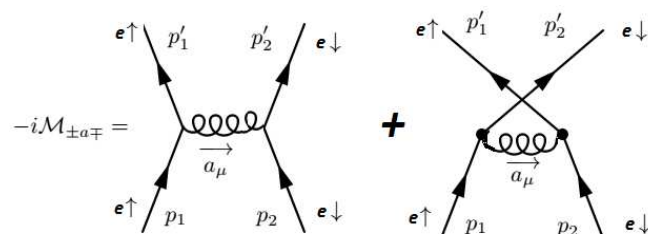


Figura 3.3: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $s$  ( $\uparrow\downarrow$ ) mediado por  $a_\mu$ .

<sup>2</sup>As setas  $\uparrow\downarrow$  se referem às polarizações dos elétrons, spin up (+) e down (-) respectivamente.

A representação gráfica do espalhamento no estado de onda- $p$  ( $\downarrow\downarrow$ ) mediado por  $A_\mu$ :

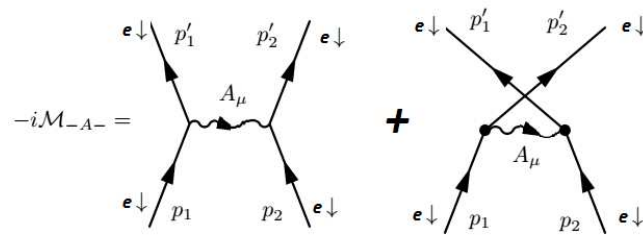


Figura 3.4: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $p$  ( $\downarrow\downarrow$ ) mediado por  $A_\mu$ .

E no estado de onda- $p$  ( $\downarrow\downarrow$ ) para o campo  $a_\mu$ :

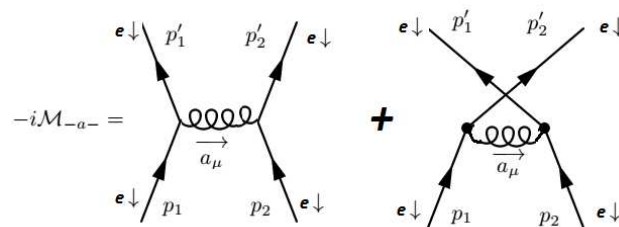


Figura 3.5: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $p$  ( $\downarrow\downarrow$ ) mediado por  $a_\mu$ .

A representação gráfica do espalhamento no estado de onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ) mediado por  $A_\mu$ :

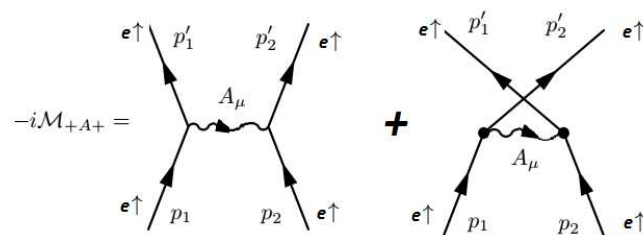


Figura 3.6: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ) mediado por  $A_\mu$ .

E no estado de onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ) pelo campo  $a_\mu$ :

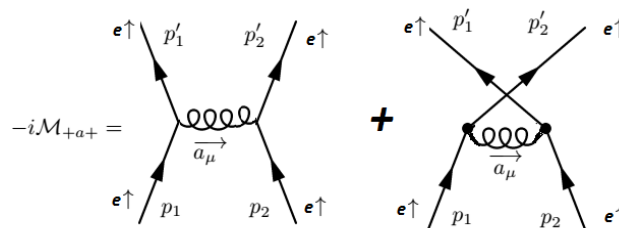


Figura 3.7: Espalhamento ( $e^- - e^-$ ) por  $a_\mu$  no estado de onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ).

Faz-se necessário o uso dos propagadores para o cálculo das amplitudes de espalhamento, conforme apresentados no Capítulo 2 :

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad (3.23)$$

$$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} e^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \quad (3.24)$$

$$\Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2 - \mu^2)} e^{\mu\lambda\nu} k_\lambda, \quad (3.25)$$

$$\Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2} (\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \quad (3.26)$$

No entanto, é interessante ressaltar que os propagadores (3.24) e (3.25) não carregam graus de liberdade, sendo assim, não promovem nenhuma interação física no espalhamento.

O cálculo das amplitudes de espalhamento será realizado no referencial de centro de massa (CM) do sistema, representado graficamente abaixo:

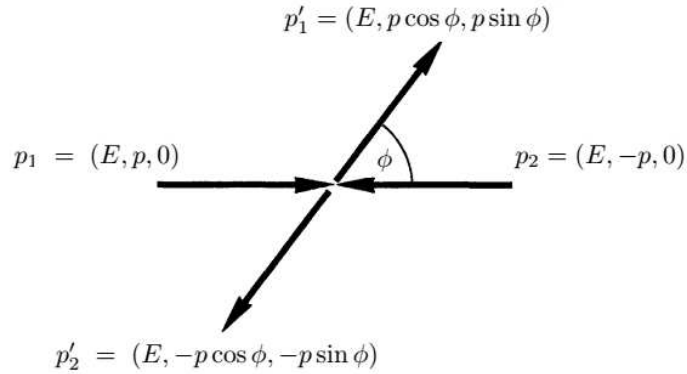


Figura 3.8: Espalhamento elétron-elétron no referencial do CM.

O ângulo pós-espalhamento,  $\phi$ , é definido a partir da direção inicial do espalhamento entre os elétrons.

Partiremos a seguir para o cálculo dos potenciais de espalhamento onda- $s$  e onda- $p$  a partir das amplitudes de espalhamento.

Começando por  $\mathcal{M}_{+A-}^{(1)}$  (espalhamento direto) :

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+A+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-A-}^\nu] u_-(p_2), \\
 -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [ie\gamma^\mu] u_+(p_1) \left\{ \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k_1^2 - \mu^2} \right\} \bar{u}_-(p'_2) [ie\gamma^\nu] u_-(p_2).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde utilizamos o princípio de conservação da corrente como já abordado no Capítulo 2, e além disso utilizando-se das relações calculadas no Apêndice (D.3) , teremos:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \frac{ie^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \left( \frac{(E+m)^2 + p^2 e^{-i\phi}}{2m(E+m)} \right) \left( \frac{(E+m)^2 + p^2 e^{-i\phi}}{2m(E+m)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{p(1+e^{i\phi})}{2m} \right) \left( \frac{p(1+e^{-i\phi})}{2m} \right) + \left( \frac{ip(1-e^{i\phi})}{2m} \right) \left( \frac{ip(1-e^{-i\phi})}{2m} \right) \right\}, \\
 \mathcal{M}_{+A-}^{(1)} &= \frac{-e^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 2(E+m)^2 p^2 [\cos \phi + 2] + p^4}{4m^2(E+m)^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde  $k_1 = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$  , canal- $t$  do espalhamento direto.

Calculando  $\mathcal{M}_{+A-}^{(2)}$  (espalhamento cruzado) :

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+A-}^{(2)} &= \bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+A+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_2) \} \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-A-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+A-}^{(2)} &= \frac{e^2}{k_2^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 3(E+m)^2 p^2 e^{i\phi} + (E+m)^2 p^2 e^{-i\phi} - p^4}{4m^2(E+m)^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde  $k_2 = p_1 - p'_2 = p'_1 - p_2$  , canal- $u$  do espalhamento cruzado. Importante mencionar que  $\mathcal{M}_{+A-}^{(1)} = \mathcal{M}_{-A+}^{(1)}$  e  $\mathcal{M}_{+A-}^{(2)} = \mathcal{M}_{-A+}^{(2)}$ .

Fazendo-se o mesmo procedimento realizado acima no cálculo de  $\mathcal{M}_{+a-}^{(1)}$  e  $\mathcal{M}_{+a-}^{(2)}$ , teremos para  $\mathcal{M}_{+a-}^{(1)}$  (direto):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+a-}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+a+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-a-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+a-}^{(1)} &= \frac{g^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 2(E+m)^2 p^2 [\cos \phi + 2] + p^4}{4m^2(E+m)^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

e para  $\mathcal{M}_{+a-}^{(2)}$  (cruzado):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+a-}^{(2)} &= \bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+a+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_2) \} \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-a-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+a-}^{(2)} &= \frac{-g^2}{k_2^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 3(E+m)^2 p^2 e^{i\phi} + (E+m)^2 p^2 e^{-i\phi} - p^4}{4m^2(E+m)^2} \right\}, \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

observando-se também que  $\mathcal{M}_{+a-}^{(1)} = \mathcal{M}_{-a+}^{(1)}$  e  $\mathcal{M}_{+a-}^{(2)} = \mathcal{M}_{-a+}^{(2)}$ .

Procedendo de modo semelhante para as amplitudes de espalhamento onda-p ( $\downarrow\downarrow$ ) para o campo  $A_\mu$ , temos:

Para  $\mathcal{M}_{-A-}^{(1)}$  (direto):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{-A-}^{(1)} &= \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-A-}^\mu] u_-(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-A-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{-A-}^{(1)} &= \frac{-e^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 6(E+m)^2 p^2 e^{-i\phi} + p^4 e^{-2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}, \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

e para  $\mathcal{M}_{-A-}^{(2)}$  (cruzado):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{-A-}^{(2)} &= \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-A-}^\mu] u_-(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_2) \} \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-A-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{-A-}^{(2)} &= \frac{-e^2}{k_2^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 - 6(E+m)^2 p^2 e^{-i\phi} + p^4 e^{-2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

No entanto, as amplitudes de espalhamento onda-p ( $\downarrow\downarrow$ ) para o campo  $a_\mu$ , temos:

Para  $\mathcal{M}_{-a-}^{(1)}$  (direto):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{-a-}^{(1)} &= \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-a-}^\mu] u_-(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_1) \} \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-a-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{-a-}^{(1)} &= \frac{-g^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 6(E+m)^2 p^2 e^{-i\phi} + p^4 e^{-2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}, \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

e para  $\mathcal{M}_{-a-}^{(2)}$  (cruzado):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{-a-}^{(2)} &= \bar{u}_-(p'_2) [\mathcal{V}_{-a-}^\mu] u_-(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_2) \} \bar{u}_-(p'_1) [\mathcal{V}_{-a-}^\nu] u_-(p_2) \\
 \mathcal{M}_{-a-}^{(2)} &= \frac{-g^2}{k_2^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 - 6(E+m)^2 p^2 e^{-i\phi} + p^4 e^{-2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}. \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

As amplitudes de espalhamento onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ) para o campo  $A_\mu$ , iniciando-se com  $\mathcal{M}_{+A+}^{(1)}$  (direto):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+A+}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+A+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_1) \} \bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+A+}^\nu] u_+(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+A+}^{(1)} &= \frac{-e^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 6(E+m)^2 p^2 e^{i\phi} + p^4 e^{2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

calculando-se agora para  $\mathcal{M}_{+A+}^{(2)}$  (cruzado):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+A+}^{(2)} &= \bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+A+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{AA}(k_2) \} \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+A+}^\nu] u_+(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+A+}^{(2)} &= \frac{-e^2}{k_2^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 - 2(E+m)^2 p^2 e^{i\phi} + p^4 e^{2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Para as amplitudes de espalhamento onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ) para o campo  $a_\mu$ , temos para  $\mathcal{M}_{+a+}^{(1)}$  (direto):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+a+}^{(1)} &= \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+a+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_1) \} \bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+a+}^\nu] u_+(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+a+}^{(1)} &= \frac{-g^2}{k_1^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 + 6(E+m)^2 p^2 e^{i\phi} + p^4 e^{2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}, \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

e finalmente para  $\mathcal{M}_{+a+}^{(2)}$  (cruzado):

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_{+a+}^{(2)} &= \bar{u}_+(p'_2) [\mathcal{V}_{+a+}^\mu] u_+(p_1) \{ \Delta_{\mu\nu}^{aa}(k_2) \} \bar{u}_+(p'_1) [\mathcal{V}_{+a+}^\nu] u_+(p_2) \\
 \mathcal{M}_{+a+}^{(2)} &= \frac{-g^2}{k_2^2 - \mu^2} \left\{ \frac{(E+m)^4 - 2(E+m)^2 p^2 e^{i\phi} + p^4 e^{2i\phi}}{4m^2(E+m)^2} \right\}. \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

### 3.3 O potencial de espalhamento Møller

Na mecânica quântica não-relativística introduzimos a noção de potencial para ser usado em conjunto com a equação de Schrödinger. Em contraste a isto, na teoria relativística de campos interpretamos as interações como sendo realizadas por meio da troca de quanta. Então podemos nos perguntar como ambos os conceitos estão relacionados. Estabelecer esta conexão para partículas movendo-se a baixas velocidades se torna factível se estamos apenas tratando de processos de baixas energias. De acordo com a aproximação de Born na teoria de Schrödinger, a seção de choque diferencial para espalhamentos elásticos entre duas partículas com massas

$m_1$  e  $m_2$  é dado por:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \left| \frac{m_{red}}{2\pi} \int d^2\vec{r}' e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right|^2, \quad (3.40)$$

onde  $m_{red}$  é a massa reduzida,

$$m_{red} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.41)$$

e  $\vec{p}$  e  $\vec{p}'$  são os momentos inicial e final de uma das partículas no referencial do centro de massa (CM). Da relação entre a seção de choque diferencial e a matriz de espalhamento  $\mathcal{M}$  [38]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \left| \left(\frac{1}{4\pi}\right) \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \mathcal{M} \right|^2, \quad (3.42)$$

comparando-se (3.42) e (3.40), obteremos

$$\mathcal{M} = \int d^2\vec{r} V(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.43)$$

onde  $\vec{k} = \vec{p}'_1 - \vec{p}$ .

A partir de (3.43) obtemos o potencial de espalhamento:

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \mathcal{M} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (3.44)$$

Este tratamento<sup>3</sup> nos permite calcular o potencial de interação desde que conheçamos o limite não-relativístico do elemento de matriz covariante. O ponto principal aqui é que o potencial nada mais é do que a transformada de Fourier do elemento de matriz  $\mathcal{M}$  em baixas ordens. Uma observação que será fundamental para o cálculo do potencial é que no caso de espalhamento de dois férmions idênticos, como é o nosso caso com os elétrons, o elemento de matriz  $\mathcal{M}$  (3.44) é apenas a parte do elemento de matriz covariante que corresponde ao espalhamento direto (canal- $t$ ), pois, o uso de funções de onda antisimétricas na mecânica quântica não relativística automaticamente inclui a contribuição do espalhamento de troca (canal- $u$ ). Em outras palavras, em uma teoria relativística, dois elétrons com polarizações paralelas são indistinguíveis, enquanto que com polarizações antiparalelas são distinguíveis. No entanto, quando desejamos calcular a amplitude de espalhamento de duas partículas indistinguíveis, consideram-se ambos os canais de espalhamento, canal- $t$  (direto) e o canal- $u$  (permutado). O mesmo não acontece quando as partículas são distinguíveis, onde usamos apenas o canal- $t$ . O que acontece aqui é

<sup>3</sup>Esta análise se encontra em [38], pp 258.

que no contexto de uma aproximação não-relativística, mesmos os elétrons com polarização idêntica são vistos como partículas distinguíveis, uma vez que, em baixas energias, recupera-se a noção clássica de trajetória [38].

Portanto, na aproximação de baixas energias (limite não-relativístico), os potenciais de espalhamento elétron-elétron, para os estados de onda  $s$  e  $p$ , são dados a partir da transformada de Fourier da amplitude total do espalhamento Møller ( $\mathcal{M}_{total} = \mathcal{M}_A^{(1)} + \mathcal{M}_a^{(1)}$ ):

$$V_{\pm\mp}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \mathcal{M}_{total}^{(\pm\mp)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.45)$$

$$V_{--}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \mathcal{M}_{total}^{(--)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.46)$$

$$V_{++}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \mathcal{M}_{total}^{(++)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.47)$$

onde  $\mathcal{M}_{total}^{(\pm\mp)}$ ,  $\mathcal{M}_{total}^{(++)}$  e  $\mathcal{M}_{total}^{(--)}$  são, respectivamente, no limite não relativístico:

$$\mathcal{M}_{total}^{(\pm\mp)} = \mathcal{M}_{\pm A\mp}^{(1)} + \mathcal{M}_{\pm a\mp}^{(1)}, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{M}_{total}^{(--)} = \mathcal{M}_{-A-}^{(1)} + \mathcal{M}_{-a-}^{(1)}, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{M}_{total}^{(++)} = \mathcal{M}_{+A+}^{(1)} + \mathcal{M}_{+a+}^{(1)}, \quad (3.50)$$

onde o sobrescrito (1) refere-se ao espalhamento direto (canal- $t$ ).

Como consequência, os potenciais de espalhamento onda- $s$  e onda- $p$  são tais que:

$$V_{\pm\mp}(r) = V_{\pm A\mp}(r) + V_{\pm a\mp}(r) \quad (3.51)$$

$$V_{--}(r) = V_{-A-}(r) + V_{-a-}(r) \quad (3.52)$$

$$V_{++}(r) = V_{+A+}(r) + V_{+a+}(r) \quad (3.53)$$

Tomando-se o limite não-relativístico ( $E^2 \approx m^2 \implies p \ll m$  e  $p \ll E$ ) das amplitudes de espalhamento (3.48)-(3.50) no referencial do centro de massa (Figura (3.8), com as seguintes prescrições

$$\begin{aligned} k_1 &= p_1 - p'_1 = (0, \vec{p} - \vec{p}') = (0, \vec{k}), \\ k_1^2 &= -\vec{k}^2, \end{aligned} \quad (3.54)$$

chegaremos aos seguintes resultados:

1- Estado de onda- $s$ :

$$\mathcal{M}_{\pm A\mp}^{(1)} = \frac{e^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}, \quad \mathcal{M}_{\pm a\mp}^{(1)} = \frac{-g^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}. \quad (3.55)$$

2- Estado de onda- $p$  ( $\downarrow\downarrow$ ):

$$\mathcal{M}_{-A-}^{(1)} = \frac{e^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}, \quad \mathcal{M}_{-a-}^{(1)} = \frac{g^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}. \quad (3.56)$$

3- Estado de onda- $p$  ( $\uparrow\uparrow$ ):

$$\mathcal{M}_{+A+}^{(1)} = \frac{e^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}, \quad \mathcal{M}_{+a+}^{(1)} = \frac{g^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}. \quad (3.57)$$

Com isto, podemos escrever as expressões das amplitudes totais de espalhamento no limite não relativístico:

$$\mathcal{M}_{total}^{(\pm\mp)} = \frac{e^2}{\vec{k}^2 + \mu^2} - \frac{g^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}, \quad (3.58)$$

$$\mathcal{M}_{total}^{(--)} = \frac{e^2}{\vec{k}^2 + \mu^2} + \frac{g^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}, \quad (3.59)$$

$$\mathcal{M}_{total}^{(++)} = \frac{e^2}{\vec{k}^2 + \mu^2} + \frac{g^2}{\vec{k}^2 + \mu^2}. \quad (3.60)$$

Consequentemente, os potenciais de espalhamento nos estados de onda  $s$  e  $p$  são:

$$V_{\pm\mp}^s(r) = \frac{e^2}{2\pi}K_0(\mu r) - \frac{g^2}{2\pi}K_0(\mu r) = (e^2 - g^2)\frac{K_0(\mu r)}{2\pi}, \quad (3.61)$$

$$V_{--}^p(r) = \frac{e^2}{2\pi}K_0(\mu r) + \frac{g^2}{2\pi}K_0(\mu r) = (e^2 + g^2)\frac{K_0(\mu r)}{2\pi}, \quad (3.62)$$

$$V_{++}^p(r) = \frac{e^2}{2\pi}K_0(\mu r) + \frac{g^2}{2\pi}K_0(\mu r) = (e^2 + g^2)\frac{K_0(\mu r)}{2\pi}, \quad (3.63)$$

onde  $K_0(\mu r)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero. Deve ser observado que os potenciais de espalhamento elétron-elétron ( $e^- - e^-$ ) apresentados são obtidos no regime de baixas energias, válidos apenas no regime perturbativo, onde as correções de loop são desprezíveis frente aos termos das aproximações semi-clássicas.

Com o objetivo de analisar os potenciais (3.61-3.63) de modo qualitativo, apresentamos (Figura 3.9) os gráficos de dois potenciais com a mesma estrutura dos potenciais de espalhamento ( $V_{\pm\pm}^p, V_{\pm\mp}^p$ ), ou seja,  $V(r) = CK_0(\mu r)$  onde  $C$  é uma constante e também o potencial  $V(r) = -C \ln(\mu r)$ .

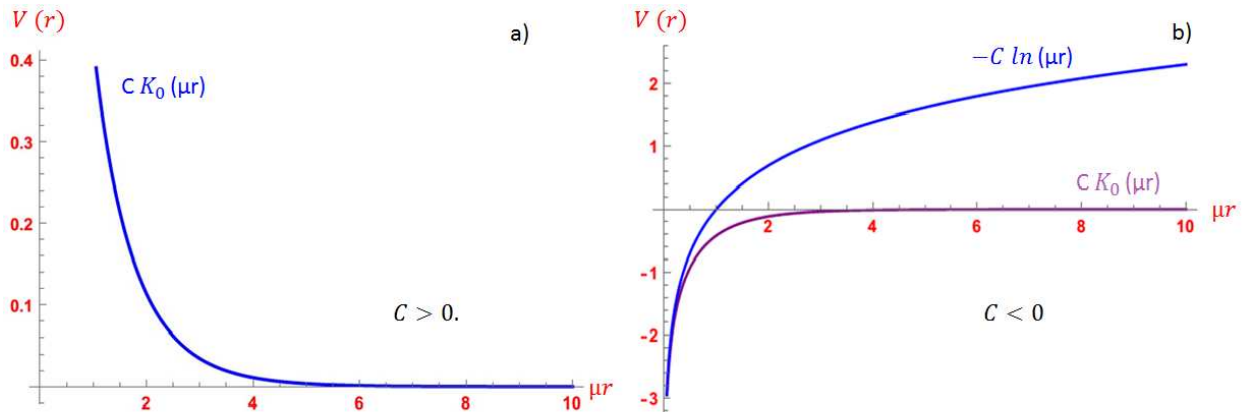


Figura 3.9: a)  $V(r) = CK_0(\mu r)$ ,  $C > 0$ ; b)  $V(r) = CK_0(\mu r)$  e  $V(r) = -C \ln(\mu r)$ ,  $C < 0$ .

Com base nestes resultados, observa-se que no espalhamento de partículas com a mesma carga elétrica, a polarização dos spins é determinante no que se refere ao potencial de interação. Observamos que os potenciais de espalhamento com polarização no estado de onda- $p$  ( $V_{++}^p(r)$  e  $V_{--}^p(r)$ ) resultam, independentemente das constantes de acoplamento ( $e$  e  $g$ ), repulsivos. Por outro lado, os potenciais de espalhamento no estado de onda- $s$  ( $V_{\pm\mp}^s(r)$ ) mostram-se atrativos quando  $g > e$ , ou seja, quando a contribuição advinda do campo estatístico supera a contribuição do campo eletromagnético, o que pode favorecer a formação de estados ligados sem o confinamento dos elétrons, caso este que ocorre na QED<sub>3</sub> quando não se tem nenhum mecanismo de geração de massa para o fóton.

## Capítulo 4

### Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, estudamos o modelo de Maxwell-Chern-Simons QED<sub>3</sub> paridade invariante. No Capítulo 2, realizou-se a análise do espectro do modelo, por meio do cálculo dos propagadores no espaço dos momenta e verificou-se que o mesmo satisfaz a condição de causalidade. Em seguida, proseguiu-se com a análise da unitariedade. Para isso, fez-se o acoplamento corrente-propagador-corrente, e calculando-se a parte imaginária dos resíduos das amplitudes corrente-corrente nos pólos, verificou-se que o espectro satisfaz a condição de unitariedade, excluindo-se do modelo, a possibilidade da existência de “ghosts” – estados assintóticos de norma negativa. A renormalizabilidade também é outro aspecto fundamental de um modelo. Para uma análise qualitativa, que representa uma condição necessária da renormalizabilidade do modelo, utilizou-se o método de *power-counting*, que por este, o modelo mostrou-se super-renormalizável. Ainda no Capítulo 2, as soluções,  $u_+$ ,  $v_+$ ,  $u_-$  e  $v_-$ , das equações de Dirac livres para os espiniores  $\psi_+$  e  $\psi_-$  foram determinadas. A partir do hamiltoniano livre verificamos que a relação de comutação  $[H_{\pm}, S^{12}] = 0$  é satisfeita no referencial de repouso da partícula, com base nisto, concluímos ser  $S^{12}$  um operador quântico de spin. Em seguida, calculamos os autovalores,  $s_+^u$ ,  $s_+^v$ ,  $s_-^u$  e  $s_-^v$ , do operador de spin ( $S^{12}$ ) associados as autofunções,  $u_+$ ,  $v_+$ ,  $u_-$  e  $v_-$ , respectivamente. Finalizando, encontramos os autovalores dos operadores de carga (elétrica  $Q_{\pm}$  e estatística  $q_{\pm}$ ) associados à simetria  $U_A(1) \times U_a(1)$  onde verificamos alguns aspectos não triviais da QED<sub>3</sub>, em especial deste modelo. A partir desses resultados identificamos a relação unívoca, entre o operador de spin ( $S^{12}$ ) e o operador de carga estatística ( $q_{\pm}$ ), expressa pela equação

$$S^{12}|\psi\rangle_{\pm} = -\frac{1}{2g}q_{\pm}|\psi\rangle_{\pm},$$

o que demonstra a relação entre spin e carga estatística.

Já no Capítulo 3, calculamos as regras de Feynman para os vértices de interação expandindo a ação efetiva  $\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi)$  em termos das funções de Green 1PI de  $n$ -pontos a *tree-level*. Feito

isto, calculou-se, no referencial de centro de massa das partículas as amplitudes de espalhamento elétron-elétron. Sabendo-se que no limite de baixas energias somente o canal-t contribui para amplitude de espalhamento [38], calculamos então as amplitudes totais de espalhamento para o estado de onda- $s$  ( $\mathcal{M}_{total}^{(\pm\mp)}$ ) e onda- $p$  ( $\mathcal{M}_{total}^{++}$  e  $\mathcal{M}_{total}^{--}$ ). Na aproximação de Born, por meio da transformada de Fourier das amplitudes totais de espalhamento, determinamos os potenciais de interação para os estados de onda- $s$  e onda- $p$ . Observamos que os potenciais de espalhamento no estado de onda- $p$  ( $V_{++}$  e  $V_{--}$ ) são repulsivos independentemente das constantes de acoplamento  $e$  e  $g$ , no entanto, o potencial de espalhamento no estado de onda- $s$  ( $V_{\pm\mp}$ ) é atrativo no caso em que a contribuição atrativa do setor estatístico supera a repulsiva do setor eletromagnético, isto é, na situação em que  $g > e$ . Portanto, devido ao fato dos bósons vetoriais,  $A_\mu$  (campo eletromagnético) e  $a_\mu$  (campo estatístico), serem massivos, caso o potencial de interação no estado de onda- $s$  seja atrativo ( $g > e$ ), também será não confinante.

Contudo, é deixado para trabalhos futuros investigações que contribuirão com a fundamentação matemática e física do modelo, bem como as conexões que este modelo possa vir a ter com fenômenos de interesse em Matéria Condensada como o grafeno, supercondutores de alta temperatura crítica, isolantes topológicos, em suma, fenômenos que residam num universo puramente planar.

A aplicação do modelo proposto ao grafeno já está em andamento, onde analisa-se a possibilidade de formação de bipolarons, que são estados ligados de dois elétrons-pólarons [41]. Em relação à consistência física do modelo de MCSQED<sub>3</sub> paridade invariante resta analisar, para se ter o total controle da unitariedade a *tree-level*, o limite de Froissart-Martin [43] por meio do comportamento das seções de choque de espalhamento no limite de altas energias em relação ao centro massa ( $E_{CM} = \sqrt{s} \rightarrow \infty$ ). Faz-se necessário também verificar a consistência do modelo em nível quântico, portanto, sua renormalizabilidade, que estabelece que seus campos e parâmetros em nível quântico possam ser redefinidos a partir de seus campos e parâmetros em nível clássico (estabilidade da ação clássica), como também, que suas simetrias clássicas sejam implementadas em nível quântico (ausência de anomalias), esta análise será realizada pelo método de Renormalização Algébrica [42] que independe de todo e qualquer esquema de regularização.

A auto-adjunticidade do hamiltoniano livre, ao se acrescentar um potencial de interação atrativo, é condição necessária para garantir que o espectro de auto valores de energia seja real. Portanto, em nosso caso, ao acrescentarmos o potencial atrativo ( $g > e$ ) de espalhamento onda- $s$  ( $V_{\pm\mp}$ ) ao hamiltoniano livre ( $H_0^\pm$ ), este deve ser “fraco” no sentido de Kato [44], devendo satisfazer para tal, a seguinte condição

$$\int_0^\infty r(1 + |\ln(r)|)|V(r)|dr < \infty ,$$

satisfeito isto, o número de estados ligados ( $N_2^0$ ), para momento angular igual a zero, é dado pelo limite de Newton-Setô

$$N_2^0 \leq 1 + \frac{\frac{1}{2} \int_0^\infty dr \int_0^\infty dr' \left| \ln \frac{r}{r'} \right| V(r)V(r')}{-\int_0^\infty rV(r)dr},$$

condições estas a serem verificadas.

# Apêndice A

## Unidades naturais

Em todo trabalho foi adotado o sistema de unidades naturais, definido através da convenção:

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{A.1})$$

Como resultado, comprimento e tempo passam a ter a mesma dimensão, e são medidos em unidades de  $(\text{massa})^{-1}$  ou  $(\text{energia})^{-1}$ . Do mesmo modo, todas as outras grandezas físicas podem ser expressas em unidades de energia. Neste sistema de unidades as seguintes conversões são úteis:

$$1m = 3,3358 \times 10^{-9}s = 3,1631 \times 10^{25}J^{-1} = 5,0679 \times 10^6(eV)^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$1J = 3,163 \times 10^{25}m^{-1} = 1,1128 \times 10^{-17}kg; 1Kg = 8,9874 \times 10^{16}J = 5,609 \times 10^{35}eV \quad (\text{A.3})$$

$$1eV = 5,0678 \times 10^{-4}\text{\AA}^{-1} = 11604,5K \rightarrow 1(eV)^{-1} = 193,26\text{\AA} = 8,617 \times 10^{-5}K^{-1} \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{137,04} = 7,297 \times 10^{-3} \quad (\text{A.5})$$

As unidades são, m (metro), s (segundo), J (Joule), eV (elétron-Volt), K (Kelvin) que representam as unidades de comprimento, tempo, energia e temperatura no Sistema Internacional, respectivamente, enquanto que  $\alpha$  é a constante de estrutura fina.

## Apêndice B

# Álgebra dos operadores de projeção

Neste apêndice detalharemos alguns pontos sobre o cálculo das relações que obedecem os operadores de projeção  $\omega^{\mu\nu}$ ,  $\Theta^{\mu\nu}$  e  $S^{\mu\nu}$ . Estas relações estão escritas na tabela (2.1) e são essenciais para se encontrar os propagadores dos campos  $A_\mu$  e  $a_\mu$ . Relembrando os operadores:

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}, \quad (\text{B.1})$$

$$\omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}, \quad (\text{B.2})$$

$$S^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\rho\nu} \partial_\rho. \quad (\text{B.3})$$

Começando pelo operador  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \left( \eta^{\mu\alpha} - \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \right) \left( \eta_{\alpha\nu} - \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \right), \\ \Theta^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} - \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} - \eta_{\alpha\nu} \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} + \frac{\partial^\mu \partial^\alpha \partial_\alpha \partial_\nu}{\square}, \\ \Theta^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \delta_\nu^\mu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} = \Theta_\nu^\mu, \text{ ou seja, } (\Theta)^2 = \Theta. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Continuando com  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu} &= \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} = \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square}, \\ \omega^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu} &= \omega_\nu^\mu, \text{ ou seja, } (\omega)^2 = \omega. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Com o operador  $S$ :

$$\begin{aligned}
 S^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu} &= \epsilon^{\mu\rho\alpha} \partial_\rho \epsilon_{\alpha\kappa\nu} \partial^\kappa, \\
 S^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu} &= (\delta_\kappa^\mu \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\mu \delta_\kappa^\rho) \partial_\rho \partial^\kappa, \\
 S^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu} &= \partial^\mu \partial_\nu - \delta_\nu^\mu \square, \\
 S^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu} &= -\square \Theta_\nu^\mu.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

O produto misto entre os operadores:

$$\begin{aligned}
 \omega^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \left( \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \right) \left( \eta_{\alpha\nu} - \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \right), \\
 \omega^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \frac{\eta_{\alpha\nu} \partial^\mu \partial^\alpha}{\square} - \frac{\partial^\mu \partial^\alpha \partial_\alpha \partial_\nu}{\square^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Agora  $S^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu}$ :

$$S^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\nu} = \epsilon^{\mu\rho\alpha} \partial_\rho \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} = 0, \tag{B.8}$$

o que é esperado, pois, o produto entre um operador anti-simétrico e um simétrico é identicamente nulo.

E finalmente:

$$\begin{aligned}
 S^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \epsilon^{\mu\rho\alpha} \partial_\rho \left( \eta_{\alpha\nu} - \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \right), \\
 S^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \epsilon^{\mu\rho\alpha} \partial_\rho \eta_{\alpha\nu} = S_\nu^\mu.
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Vê-se claramente que os operadores  $\Theta$  e  $\omega$  são genuinamente operadores de projeção ortogonal.

## Apêndice C

### Os espinores: $\bar{u}_+(p)$ , $\bar{v}_+(p)$ , $\bar{u}_-(p)$ e $\bar{v}_-(p)$

Ao se encontrar as soluções de energia positiva e negativa para  $\psi_+$  e  $\psi_-$  na seção (2.4) tivemos que fazer o uso de condições de contorno, nestas foi necessário que utilizemos o conjugado de Dirac para as componentes dos espinores ( $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ ). Escreveremos aqui em detalhes o conjugado de Dirac para  $\bar{u}_+$  e procedendo do mesmo modo pode-se facilmente encontrar os demais.

Para as soluções de energia “positiva”:

$$\begin{aligned} \bar{u}_+(p) &= u_+(p)^\dagger \gamma^0, \\ \bar{u}_+(p) &= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m & -ip_x + p_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \bar{u}_+(p) &= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m & ip_x - p_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Do mesmo modo para  $\bar{u}_-(p)$ :

$$\bar{u}_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p_y + ip_x & -(E+m) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Para as soluções de energia “negativa”:

$$\bar{v}_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p_y + ip_x & -(E+m) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$\bar{v}_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m & ip_x - p_y \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Utilizamos a comum notação  $A^\dagger = (A^*)^T$ , isto é, o transposto conjugado do elemento, e a matriz  $\gamma^0$  é matriz definida em (1.6).

## Apêndice D

### Os termos de correntes

Na seção (3.2) onde encontramos as amplitudes de transição fazemos uso das relações que se encontram aqui. Os cálculos são feitos no referencial do centro de massa. Utilizando as convenções já adotadas, calculamos os termos de correntes.

Os termos de correntes associados ao canal- $t$ :

- espinor com spin up (+):

$$\bar{u}_+(p'_1)\gamma^0 u_+(p_1) = \frac{(E+m)^2 + p^2 e^{i\phi}}{2m(E+m)} = \bar{u}_+(p'_2)\gamma^0 u_+(p_2) \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{u}_+(p'_1)\gamma^1 u_+(p_1) = \frac{p(1 + e^{i\phi})}{2m} = -\bar{u}_+(p'_2)\gamma^1 u_+(p_2) \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{u}_+(p'_1)\gamma^2 u_+(p_1) = \frac{ip(1 - e^{i\phi})}{2m} = -\bar{u}_+(p'_2)\gamma^2 u_+(p_2) \quad (\text{D.3})$$

- espinor com spin down (-):

$$\bar{u}_-(p'_1)\gamma^0 u_-(p_1) = \frac{(E+m)^2 + p^2 e^{-i\phi}}{2m(E+m)} = \bar{u}_-(p'_2)\gamma^0 u_-(p_2) \quad (\text{D.4})$$

$$\bar{u}_-(p'_1)\gamma^1 u_-(p_1) = \frac{p(1 + e^{-i\phi})}{2m} = -\bar{u}_-(p'_2)\gamma^1 u_-(p_2) \quad (\text{D.5})$$

$$\bar{u}_-(p'_1)\gamma^2 u_-(p_1) = \frac{-ip(1 - e^{-i\phi})}{2m} = -\bar{u}_-(p'_2)\gamma^2 u_-(p_2) \quad (\text{D.6})$$

Os termos de correntes associados ao canal- $u$ :

- espinor com spin up (+):

$$\bar{u}_+(p'_2)\gamma^0 u_+(p_1) = \frac{(E+m)^2 + p^2 e^{i\phi}}{2m(E+m)} = \bar{u}_+(p'_1)\gamma^0 u_+(p_2) \quad (\text{D.7})$$

$$\bar{u}_+(p'_2)\gamma^1 u_+(p_1) = \frac{p(1 - e^{i\phi})}{2m} = -\bar{u}_+(p'_1)\gamma^1 u_+(p_2) \quad (\text{D.8})$$

$$\bar{u}_+(p'_2)\gamma^2 u_+(p_1) = \frac{ip(1 + e^{i\phi})}{2m} = -\bar{u}_+(p'_1)\gamma^2 u_+(p_2) \quad (\text{D.9})$$

- espinor com spin down (-):

$$\bar{u}_-(p'_2)\gamma^0 u_-(p_1) = \frac{(E+m)^2 - p^2 e^{-i\phi}}{2m(E+m)} = \bar{u}_-(p'_1)\gamma^0 u_-(p_2) \quad (\text{D.10})$$

$$\bar{u}_-(p'_2)\gamma^1 u_-(p_1) = \frac{p(1 - e^{-i\phi})}{2m} = -\bar{u}_-(p'_1)\gamma^1 u_-(p_2) \quad (\text{D.11})$$

$$\bar{u}_-(p'_2)\gamma^2 u_-(p_1) = \frac{-ip(1 + e^{-i\phi})}{2m} = -\bar{u}_-(p'_1)\gamma^2 u_-(p_2) \quad (\text{D.12})$$

Estes são os termos de corrente usados nos cálculos das amplitudes de transição no limite de baixas energias  $p^2 \ll m^2$ .

## Apêndice E

### Variáveis de Mandelstam

Na física de partículas de altas energias, as variáveis de Mandelstam, invariantes de Lorentz, relacionam energia, momento e ângulos de espalhamento das partículas. Consideremos um espalhamento de duas partículas inicialmente nos estados 1 e 2 e posteriormente, após o espalhamento, nos estados 3 e 4:

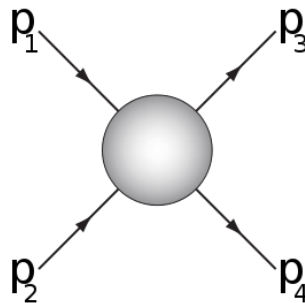


Figura E.1: Esquema de espalhamento segundo Mandelstam

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os 3-momentum das partículas no estado inicial do espalhamento e  $p_3$  e  $p_4$  os 3-momentum das partículas no estado final.

Neste caso temos 12 parâmetros livres que são as componentes dos 3-momenta (no caso da  $QED_{1+3}$  são 16). Porém temos algumas condições que restringem o nosso número de parâmetros livres. De acordo com a teoria da relatividade restrita, temos a condição  $p_i^2 = m_i^2$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Além disso, temos a conservação dos 3-momenta,  $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$ , a invariância de Lorentz, sobrando ao final apenas dois parâmetros livres.

Tendo em vista a métrica do espaço-tempo de Minkowski escolhida ser dada por

$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1)$ , as variáveis de Mandelstam  $s, t, u$  são definidas:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \end{aligned} \tag{E.1}$$

e obedecem a seguinte relação:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{E.2}$$

Portanto, vemos que apenas duas das três variáveis são independentes. Além disso, no que diz respeito aos diagramas de Feynman de espalhamento de duas partículas, é convenção descrever o espalhamento em termos de canais específicos, que são:

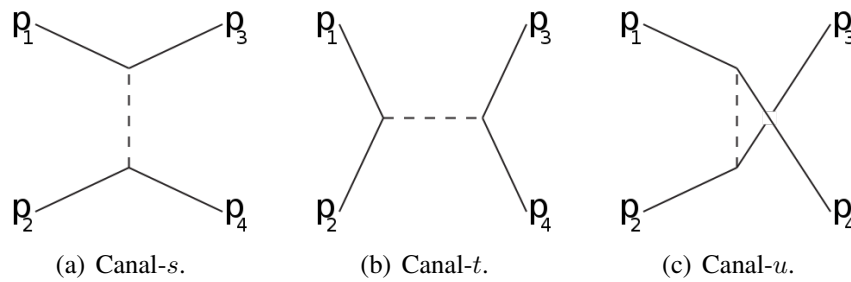


Figura E.2: Os canais de espalhamento de duas partículas.

As letras  $s, t$  e  $u$  são usadas para o canal- $s$  (canal espacial), canal- $t$  (canal temporal) e canal- $u$ . Em geral, um espalhamento tem contribuição de mais de um canal, e estas contribuições devem ser acrescentadas coerentemente de acordo com a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}$  analisada.

## Referências Bibliográficas

- [1] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, Dover, (1996).
- [2] H. Kamerlingh Onnes, Leiden Comm. 120b, 122b, 124c, (1911).
- [3] W. Meissner e R. Ochsenfeld, *Naturwissenschaften* 21, (1993) 787.
- [4] H. London e F. London, *Proc. Roy. Soc.(London)* A149, (1935) 71; *Physica* 2, (1935) 341; F. London, *Superfluids*, Addison-Wesley, (1950).
- [5] V.L. Ginzburg e L.D. Landau, *Zh. Eksperim. Teor. Fiz.* 20, (1950) 1064.
- [6] L.N. Cooper, *Phys. Rev.* 104, (1956) 1189; J. Bardeen, L.N. Cooper e J.R. Schriffer, *Phys. Rev.* 108, (1956) 1175.
- [7] C.E. Gough *et al.*, *Nature* 326, (1966) 855; J. Niemeyer, M.R. Dietrich e C. Politics, *Z. Phys.* B67, (1987) 155.
- [8] K.v. Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* 45, (1980) 494.
- [9] W.A. Little, *Science* 242, (1988) 1390.
- [10] O.S. Akhryamov, *Sov. Phys. JEPT Lett.* 3, (1966) 183; J. Niemeyer, M.R. Dietrich and C. Politics, *Z. Phys.* B67, 155 (1987).
- [11] T. Brükel *et al.*, *Europhys. Lett.* 4, (1987) 1189; R. J.Cava *et al.*, *Nature* 332, (1988) 814.
- [12] D.R. Harshman *et al.*, *Phys. Rev.* B36, (1987) 2386, L. Krusin-Elbaum *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 62, (1987) 217.
- [13] M.N. Keene *et al.*, *Nature* 340, (1989) 210; R. Gross *et al.*, *Physica C*166, (1990) 277.
- [14] S.E. Barret *et al.*, *Phys. Rev.* B41, (1990) 6283; P.C. Hammel *et al.*, *Phys. Rev.* B9, (1989) 7371.

- [15] J.R. Schrieffer *et al.*, Phys. Rev. Lett. 60, (1988) 944; N.E. Bickers *et al.*, Int. J. Mod. Phys. B1, (1987) 687; N. E. Bickers *et al.*, Phys. Rev. Lett. 62, (1989) 961; P. Monthoux *et al.*, Phys. Rev. B46, (1992) 14803; P. Monthoux e D. Pines, Phys. Rev. Lett. 69, (1992) 961.
- [16] O.M. Del Cima, Phys. Lett. B, (2013) 720, 254.
- [17] A.G. Sun *et al.*, Phys. Rev. Lett. 72, (1994) 2267 ; K.A. Kouznetsov *et al.*, Phys. Rev. Lett. 79, (1997) 3050.
- [18] Pierre Ramond, *Field Theory: A modern Primer*, ed. Addison-Wesley Publishing Company (1990).
- [19] R. Shankar, *Hamiltonian Theories of the FQHE*, Physics Department University of Kentucky, Lexington KY 40506, (2008).
- [20] A. Linde, Rep. Prog. Phys. 42, (1979) 389; D. Gross, R. Pisarky e L. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53, (1981) 43.
- [21] R.B. Laughlin, Phys. Rev. B23, (1981) 5632; K.V. Klitzing *et al.*, Phys. Lett. 45, (1980) 494 ; R.B. Laughlin, Phys. Rev. B23, (1981) 5632; D.C. Tsui *et al.*, Phys. Rev. Lett. 48, (1982) 1559.
- [22] S.C. Zhang, T. Hanson e S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. 62, (1989) 82; S.C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B6, (1992) 25.
- [23] W. Siegel, Nucl. Phys. B156, (1979) 135; R. Jackiw e S. Templeton, Phys. Rev. D23, (1981) 2291; J. Schonfeld, Nucl. Phys. B185, (1981) 157.
- [24] R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. 140, (1982) 372.
- [25] S. Coleman e B. Hill, Phys. Lett. B159, (1985) 184; Y.C. Kao e M. Suzuki, Phys. Rev. D31, (1985) 2137.
- [26] S. Deser e R. Jackiw, Phys. Lett. B263, (1991) 431.
- [27] E. Fradkin, Phys. Rev. B42, (1990) 570.
- [28] A.L. Fetter, C.B. Hanna e R.B. Laughlin, Phys. Rev. B39, (1989) 9679.
- [29] E.P. Wigner, *Unitary Representations of Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections*, Istanbul Summer School of Theoretical Physics, ed. F. Güsey *et al.* (New York).
- [30] D. Finkelstein e J. Rubinstein, J. Math. Phys. 9, (1968) 1762.

- [31] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48, (1982) 1144.
- [32] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 49, (1982) 957.
- [33] J. Lykken *et al.*, Phys. Rev. D42, (1990) 2161.
- [34] M.A. De Andrade, O.M. Del Cima e J.A. Helayël-Neto, Il Nuovo Cimento A111, (1998) 1145.
- [35] H. Belich, O.M. Del Cima, M.M. Ferreira Jr. e J.A. Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. A16, (2001) 4939.
- [36] H. Christiansen, O.M. Del Cima, M.M. Ferreira Jr. e J.A. Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. A18, (2003) 725.
- [37] B. Binengar, J. Math. Phys. 23, (1982) 1511 .
- [38] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Adison-Wesley Publishing Company, (1967).
- [39] A.A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP 5, (1957) 1174.
- [40] J.G. Bednorz e D.E. Müller, Z. Phys. B64, (1986) 189.
- [41] O.M. Del Cima e E.S. Miranda, *Electron-polaron–electron-polaron attractive interaction in mass-gap graphene- like planar quantum eletrodynamics*, em fase de redação.
- [42] O. Piguet e S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization*, LNP M28, Springer-Verlag, (1995).
- [43] M. Chaichian, J. Fischer e Yu.S. Vernov, Nucl. Phys. B383 (1992) 152; O.M. Del Cima, Mod. Phys. Lett. A9, (1994) 1695.
- [44] K. Chadan, N.N. Khuri, A. Martin e T.T. Wu, Phys. Rev. D58, (1998) 025014; T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1976).