

LUCKAS SABIONI LOPES

**ALGUMAS EVIDÊNCIAS DE NÃO LINEARIDADE E CAOS
DETERMINÍSTICO NOS CICLOS ECONÔMICOS BRASILEIROS
ENTRE 1975-2009**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Economia, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2010

LUCKAS SABIONI LOPES

**ALGUMAS EVIDÊNCIAS DE NÃO LINEARIDADE CAOS
DETERMINÍSTICO NOS CICLOS ECONÔMICOS BRASILEIROS
ENTRE 1975-2009**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Economia, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de fevereiro de 2010.

Prof. Luciano Dias Carvalho

Prof. Newton Paulo Bueno

Prof. Mercio Botelho Faria

Prof. Sidney Martins Caetano
(Co-orientador)

Prof^a. Silvia Harumi Toyoshima
(Orientador)

*A Maria Clara,
Meu porto seguro.*

AGRADECIMENTOS

A Deus e Nossa Senhora Aparecida, por estarem sempre disponíveis e pelo seu amor incondicional.

Aos meus irmãos Quim, Mimi, Cacá e Cris pelos incentivos, elogios, mesmos que às vezes irônicos, e pelo companheirismo.

Às minhas avós, Da. Benvinda e Da. Dorinha, pelo exemplo de vida, trabalho e dedicação à família e filhos.

Aos meus pais, Henrique e Mônica, pelo amor, puxões de orelha, suporte financeiro, mas, sobretudo, por acreditarem no valor que a educação tem.

Aos meus tios e padrinhos José Horta e Joana, por me acolherem em sua morada, me ajudando, e muito, sempre que fosse preciso.

Aos meus amigos de Visconde do Rio Branco e Viçosa, e de outras cidades também, por estarem sempre lá, quando eu precisei, mesmo que fosse para me olhar tomando uma cerveja.

Aos funcionários e demais professores do Depto. de Economia da UFV, bem como aos meus Co-orientadores, Sidney e Marcelo Lobato, e também ao professor Newton, que me deu dicas importantíssimas de como realizar este trabalho, em seu início. Agradeço, adicionalmente, às correções dos professores Luciano e Mercio, membros da banca avaliadora.

A FAPEMIG, pelo apoio financeiro, sempre em dia.

A minha esposa Letícia, e minha filha, Maria Clara, por me darem total apoio, amor e compreensão nesta longa jornada, aceitando mesmo meus momentos de maior ausência.

Agradeço, por fim, a minha grande mestra e orientadora nesta caminhada de monografia, iniciação científica, mestrado, artigos, etc.: Silvia Harumi Toyoshima. Por sua ajuda, sua paciência, sua amizade, seu exemplo de trabalho, profissionalismo e dedicação à profissão.

Espero ter satisfeito as expectativas de todos vocês.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE TABELAS	v
LISTA DE FIGURAS	vi
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1. Introdução.....	1
1.1. Considerações iniciais	1
1.2. Objetivo geral	7
1.3. Objetivos específicos	7
1.4. Hipótese	7
2. Referencial Teórico	9
2.1. Caos: uma resenha da literatura	9
2.1.1. Caos: conceitos básicos	11
2.1.2. Escolhas racionais e comportamentos erráticos	31
2.1.3. Evidências empíricas e considerações finais	34
3. Metodologia	37
4. Resultados	43
4.1. Primeira hipótese: linearidade versus não linearidade nos ciclos econômicos brasileiros	43
4.2. Segunda hipótese: não linearidade associada à heterocedasticidade condicional generalizada versus caos nos ciclos econômicos brasileiros	57
5. Conclusões	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1: Simulações de ROSENSTEIN <i>et al.</i> (1993), para sua estimativa do maior expoente de Lyapunov em vários sistemas.....	26
Tabela 2: Características dos ciclos econômicos no Brasil	46
Tabela 3: Estatísticas descritivas da série cíclica do produto brasileiro 1975-2009	48
Tabela 4: Testes de estacionariedade da série cíclica do produto brasileiro em nível ...	49
Tabela 5: Saídas da estimação do modelo linear – produção geral	50
Tabela 6: Teste de independência dos resíduos do modelo linear* - produção geral	51
Tabela 7: Comparação dos desvios em torno da média das séries cíclicas do produto e investimento no Brasil entre 1975 e 2009	52
Tabela 8: Estatísticas descritivas da série cíclica da produção de bens de capital brasileira	54
Tabela 9: Testes de estacionariedade da série cíclica da produção de bens de capital brasileira em nível	55
Tabela 10: Saídas da estimação do modelo linear para a produção de bens de capital..	56
Tabela 11: Teste de independência dos resíduos do modelo linear* - produção de bens de capital	57
Tabela 12: Saídas da estimação do modelo ARMA – GARCH-M, distribuição Gaussiana, produção geral.....	58
Tabela 13: Teste de independência dos resíduos padronizados da estimação GARCH-M* - produção geral	59
Tabela 14: Saídas da estimação do modelo ARMA – GARCH-M, distribuição Gaussiana, produção de bens de capital	60
Tabela 15: Teste de independência dos resíduos padronizados da estimação GARCH-M* - produção de bens de capital.....	61

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 2.1.1: Atratores estranhos dos mapas de (a) Lorenz, (b) Rössler, e (c) logístico.	18
Figura 2.1.2: Dinâmica do mapa logístico à medida que o parâmetro de controle é variado	22
Figura 2.1.3: Dimensão de correlação do mapa de LORENZ (1961) (a); e de um processo ruído branco (b).	29
Figura 2.1.4: Dinâmica temporal de x_t para $t = 500$, $x(0) = 10^{-5}$: (a) Estabilidade para $b = 2$; e, (b) caos para $b = 4$	33
Figura 4.1: Logaritmo natural da produção industrial, indústria geral, índice quantum, média 2002 = 100 (a); série dessazonalizada, filtro <i>Census X12</i> (b).....	44
Figura 4.2: Resultado da aplicação do filtro HP na série da produção industrial brasileira, índice quantum, média 2002 = 100, 1975.1-2009.11	47
Figura 4.2: Logaritmo natural da produção industrial de bens de capital, índice quantum, média 2002 = 100 (a); série dessazonalizada, filtro <i>Census X12</i> (b).....	52
Figura 4.3: Resultado da aplicação do filtro HP na série da produção de bens de capital brasileira, índice quantum, média 2002 = 100, 1975.1-2009.11	53
Figura 4.4: Comparação da dimensão de correlação dos resíduos do modelo GARCH-M, investimento, e desta série “embaralhada”.	62

RESUMO

LOPES, Luckas Sabioni, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2010.
Algumas evidências de não linearidade e caos determinístico nos ciclos econômicos brasileiros entre 1975-2009. Orientador: Silvia Harumi Toyoshima.
Co-orientadores: Sidney Martins Caetano e Marcelo Lobato Martins.

Esta pesquisa teve como principal objetivo verificar a possível ocorrência de caos nas séries econômicas brasileiras da produção industrial geral e da produção de bens de capital, consideradas *proxies* para a produção total e para o investimento, respectivamente, entre 1975 e 2009. Neste período, o Brasil passou por grandes oscilações nos agregados econômicos analisados, principalmente entre os anos de 1980 até meados da década de 1990, sobretudo em razão de crises geradas por políticas mal-sucedidas de controle da inflação que alcançava patamares cada vez maiores com o passar dos anos. Tal instabilidade se transmitia por todos os setores da economia, abalando as expectativas e a capacidade de previsão dos agentes econômicos, inserindo, com isso, elevadas incertezas no sistema. Os testes realizados, baseados em filtragens do tipo ARMA – GARCH-M sobre as séries cíclicas dos agregados citados, para, em seguida, analisar os resíduos padronizados dos modelos estimados por estatísticas BDS, indicaram sensíveis não linearidades em ambos os casos, porém, somente na variável *proxy* para o investimento pode-se detectar algum nível de caos determinístico ao nível de 5% de significância no teste bicaudal, seja na suposição de distribuição normal, seja na análise de distribuições empiricamente geradas por simulações *bootstrap*. Conclui-se, portanto, que é possível que entre 1975 e 2009 tenham ocorrido períodos em que vigoraram dinâmicas caóticas no investimento no brasileiro, o que sugerem políticas que sirvam para reduzir a instabilidade desta variável no longo prazo e assegurar um crescimento sustentado no futuro, isto é, medidas de caráter mais estrutural do que conjuntural.

ABSTRACT

LOPES, Luckas Sabioni, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2010. **Some evidences of nonlinearity and deterministic chaos in the Brazilian economical cycles among 1975-2009.** Adviser: Silvia Harumi Toyoshima. Co-advisers: Sidney Martins Caetano and Marcelo Lobato Martins.

This research had as main objective to verify the possible occurrence of chaos in economic series of Brazilian industrial output and production of capital goods, considered proxies for the total production and investment, respectively, between 1975 and 2009. In this period, Brazil experienced large swings in such aggregates, especially between the years 1980 to mid-1990s, mainly due to economic crisis generated by failures in control of inflation that reached levels increasing over the years. Such instability was transmitted by all sectors of the economy, shattering expectations and forecasting ability of economic agents, entering, thereby, high uncertainties in the system. The tests, based on filtering of the type ARMA - GARCH-M on the series of cyclic aggregates mentioned to then analyze the standardized residuals of the models estimated by BDS statistics indicated sensitive nonlinearities in both cases, however, only the proxy variable for investment can detect some level of deterministic chaos to the 5% level of significance in two-tailed test, is the assumption of normal distribution, is the analysis of empirical distributions generated by bootstrap simulations. It follows therefore that it is possible that between 1975 and 2009 have been periods in which they operated in the chaotic dynamics in the Brazilian investment, which suggests policies that serve to reduce the instability of this variable in the long term and ensure sustained growth in future ie, measures more structural than cyclical.

1. Introdução

1.1. Considerações iniciais

As leis da mecânica newtoniana, ao longo dos últimos séculos, dominaram as áreas da ciência que trabalham com sistemas dinâmicos. Acreditava-se que o universo poderia ser descrito por um conjunto de leis motoras essencialmente lineares e determinísticas, as quais poderiam prever, com elevado grau de acuidade, o valor de alguma variável no futuro desde que se conhecesse com detalhes o sistema que a gerou.

Entretanto, a experiência tem mostrado que sistemas dinâmicos podem exibir um elevado grau de complexidade que só foi possível analisar à medida que a matemática e a computação se desenvolveu. Foi nesse sentido que a teoria do caos se estabeleceu e, desde então, vem alterando a maneira de pensar em vários ramos do pensamento científico.

Em sistemas caóticos, torna-se impossível a previsão de variáveis para longos períodos de tempo em razão de sua sensibilidade às condições iniciais, pois simulações que se diferissem infinitesimalmente quanto aos seus estados iniciais apresentariam soluções exponencialmente divergentes, como foi inicialmente percebido por LORENZ (1963), em seus estudos de previsões meteorológicas.

Paradoxalmente, oscilações caóticas, apesar de extremamente complexas, exibem algum nível de padronização que pode ser identificado. Adicionalmente, elas podem surgir de sistemas simples e que apresentem não-linearidades¹. Pode-se dizer, todavia, de uma maneira mais criteriosa, que sistemas não lineares são condições

¹ Vide, por exemplo, o modelo de LORENZ (1963) que contava com apenas três equações diferenciais. Eventualmente, tais sistemas podem, ainda, ser derivados em mapas unidimensionais que exibem caos.

necessárias, mas não suficientes para ocorrência de caos, isto é, este último, mesmo surgindo das não-linearidades dos sistemas, só o faz para determinados valores dos parâmetros experimentais de controle.

Na economia, uma área em potencial para a aplicação dos conceitos da teoria do caos é a que trata dos ciclos econômicos. Dentre as várias abordagens dessa linha de pesquisa, podem-se contrapor duas escolas de pensamento em razão de suas suposições acerca das dinâmicas dos sistemas. Na primeira estão os teóricos dos ciclos reais de negócios, ou *Real Business Cycles* (RBC), entre eles KYDLAND e PRESCOTT (1982) e PLOSSER (1989), que defendem que as flutuações econômicas são geradas por choques exógenos em modelos estruturalmente lineares, com agentes maximizadores que escolhem entre trabalho e lazer. Já, na segunda escola, defendida seminalmente por KALDOR (1940) e GOODWIN (1951) e, mais atualmente por DAY (1982), ciclos irregulares de crescimento podem ser gerados mesmo na ausência de choques, surgindo endogenamente e como frutos de sistemas não-lineares.

A diferença entre as duas abordagens quanto às políticas públicas é significativa. Na teoria dos RBC, ciclos são respostas de agentes maximizadores aos choques externos e, portanto, as políticas poderiam distanciar a economia de seu ponto ótimo, sendo assim não desejáveis. Além disso, para os autores desta escola, técnicas econométricas lineares seriam suficientes para a previsão de variáveis macroeconômicas como produto, consumo e investimento. Em trabalhos anteriores, LUCAS (1972) e SARGENT e WALLACE (1975) basearam essa visão, defendendo que somente políticas não antecipadas poderiam afetar a atividade econômica.

Por outro lado, na teoria dos ciclos econômicos endógenos, de cunho keynesiano e bem desenvolvida em GRANDMONT (1985), além dos trabalhos citados acima, ciclos surgem de um sistema econômico com concorrência perfeita, que ignore totalmente a presença de choques exógenos e que compute a presença de não-linearidades. Nestes modelos, caos pode aparecer e, com ele, as incertezas geradas pela incapacidade de previsão do futuro. Assim, as políticas econômicas, como a monetária e a fiscal, teriam poder estabilizante sobre as flutuações na medida em que elas estimulassem o gasto privado e a atividade econômica.

Na verdade, conforme SCHEINKMAN (1990), pode-se considerar que ambas as visões estejam corretas em algum grau. Crises poderiam surgir de mecanismos exógenos a uma dada economia e serem aprofundadas endogenamente. Por isso, GRANDMONT (1985) defende que o desenvolvimento de um modelo que estude a

relação entre os componentes externos e autônomos dos ciclos econômicos pode favorecer o seu melhor entendimento.

Há outras implicações que surgiriam com a ocorrência de caos ou elevadas não-linearidades na economia. Por exemplo, para MEDIO e GALLO (1992) a suposição de expectativas racionais perde sua força para métodos alternativos de formulação de expectativas, atualmente tidos como irracionais, por exemplo, mecanismos de respostas adaptativas, ou modelos de racionalidade limitada. Com algum peso, a presença de caos faz as hipóteses de informação sem custo e da infinitamente poderosa habilidade de aprendizagem e cálculo dos agentes econômicos, assumida implicitamente pelos modelos de expectativas racionais, serem difíceis de aceitar.

Outra questão importante está relacionada ao por que de localidades similares em uma dada ocasião poderem se desenvolver de maneira inteiramente diversa ao passar dos anos. Isso ocorre no modelo de ZHANG (2005), que funde outros três importantes modelos, a saber: o de crescimento com um setor de SOLOW (1956), o de *learning by doing* de ARROW (1962) e o de crescimento com educação de Uzawa-Lucas². Seus resultados mostram que regiões aparentemente idênticas podem seguir trajetórias de desenvolvimento radicalmente diferentes, uma levando à prosperidade, e outra à estagnação. O referido autor argumenta que para retirar uma economia da armadilha da pobreza é necessária uma alta intervenção estatal ou alto fluxo de ajuda estrangeira.

O resultado acima confirma as conclusões de BEN-DAVID (1994), que, ao estudar a convergência de clubes entre países, encontrou um processo de *catch-up* entre os mais ricos e convergência para baixo entre os mais pobres, ou seja, entre estes grupos houve um aumento da divergência de rendas, ao contrário do que é predito por modelos clássicos de crescimento.

Apesar das considerações feitas acima, a opinião dos pesquisadores no que diz respeito à detecção do caos nas séries temporais econômicas difere bastante. Por exemplo, BROCK e SAYERS (1988) estudaram várias séries macroeconômicas norte-americanas, tais como emprego, desemprego, produção industrial, investimento e PNB, encontrando fortes evidências de não-linearidade, exceto no caso do PNB, mas, apenas alguma fraca evidência de caos nas séries. Resultado similar foi obtido por SCHEINKMAN e LEBARON (1989b), que estudaram as séries de PNB e produção

² UZAWA (1965) e LUCAS (1988).

industrial norte-americanas. Por outro lado, FRANK e STENGOS (1988) não encontraram evidências de não-linearidade nas séries macroeconômicas canadenses.

Entretanto, como ponderam MEDIO e GALLO (1992), esses resultados devem ser vistos com cautela. Primeiro, pelo número reduzido de dados utilizados (menos que 200 pontos); e, segundo, porque alguns trabalhos não utilizam o algoritmo adequado de cálculo, desenvolvido por WOLF *et al.* (1985), mas um diferente, mais simplificado.

Um exercício particularmente interessante foi o desenvolvido por BARNETT e CHEN (1986), que encontraram evidências de comportamento caótico nas séries monetárias norte-americanas. O que se argumenta em favor desse resultado é que os referidos autores utilizaram em sua análise dados de qualidade superior, filtrados por métodos micro-fundamentados. Nesse sentido, MEDIO e GALLO (1992) enfatizam a necessidade de se aplicar filtros nas séries temporais econômicas, no intuito de melhorar sua qualidade.

A análise de dinâmicas caóticas em séries financeiras tem se mostrado promissora, em razão do maior número de dados disponíveis e da alta qualidade das séries temporais (as medições nestes casos são mais precisas e não são necessárias grandes agregações). Nesse sentido, SCHEINKMAN e LEBARON (1989a), estudando séries temporais financeiras diárias e semanais dos Estados Unidos da América, encontraram fortes evidências de não-linearidade e alguma evidência de caos. Resultados similares foram encontrados por FRANK e STENGOS (1989), analisando os dados do mercado de ouro e prata canadenses.

Como foi visto, a análise empírica de comportamentos caóticos ainda é incipiente na economia. A maioria dos estudos nacionais acerca de sistemas não-lineares está concentrada nas áreas das ciências naturais como física, biologia e, também, matemática. Na área de economia, poucos países foram estudados e os resultados ainda não são totalmente esclarecedores, talvez em razão dos métodos aplicados. Há, ainda, uma escassez de estudos voltados à economia brasileira, podendo-se destacar os artigos de BUENO (2002), que encontrou alguma evidência de caos na série do índice da Bolsa de Valores de São Paulo, Ibovespa, na década de 1990; e BUENO (2009) que atestou para sensíveis não-linearidades na série de produção de bens de capital no Brasil. Portanto, o desenvolvimento desta pesquisa pretende cobrir a lacuna de estudos referentes ao Brasil, tentando fornecer subsídios adicionais importantes na formulação de modelos teóricos e políticas econômicas mais realistas.

A presente pesquisa pretende responder, essencialmente, à seguinte questão: a

dinâmica da produção e do investimento brasileiro apresentou componentes não-lineares ou caóticos entre 1975 e 2009?

No período analisado, a economia deste país presenciou momentos realmente conturbados. Por exemplo, a moeda foi alterada seis vezes, passando de Cruzeiro para Cruzado em fevereiro de 1986; de Cruzado para Cruzado Novo em janeiro de 1989; de Cruzado Novo para, novamente, Cruzeiro em março de 1990; de Cruzeiro para Cruzeiro Real em agosto de 1993; e, finalmente, de Cruzeiro Real para Real em julho de 1994.

Essa profusão de novas moedas que, via de regra, era acompanhada de planos econômicos, tinha a principal finalidade de conter o avanço dos preços que atingia níveis hiperinflacionários. Entre 1975 e 1979, por exemplo, o índice geral de preços IGP-DI aumentou em 41% ao ano, em média, chegando a se elevar em 100% ao ano durante 1980-1982. A situação fica ainda mais delicada a partir de 1988, quando o nível de preço sobe em 685% nesse ano, e 2740% em 1990. Somente após 1994, com a implantação do Plano Real, a escalada dos preços se arrefece. Apesar de ter sido alta em 1995, cerca de 67%, a inflação se estabilizou em aproximadamente 6 a 7% nos anos seguintes.

Tal instabilidade do nível de preços se disseminava por toda a economia abalando as expectativas do setor privado e gerando oscilações em agregados reais como o Produto Interno Bruto (PIB) e a Formação Bruta de Capital Físico (FBCF). Tais séries cresceram em 1975, respectivamente, 10 e 18%. De 1976 ao fim de 1980, houve uma elevação média de 7% nestas contas, porém bem inferiores às taxas médias do quinquênio 1971-75, respectivamente, 15 e 20%. Do ano de 1981 ao fim de 1984, o Brasil experimentou uma forte crise. A atividade econômica, medida pelo PIB, caiu em média 4% ao ano, porém com quedas de 8,5% e 12% em 1981 e 1983, respectivamente. O efeito da instabilidade sobre a FBCF foi pior, registrando uma queda média anual de 9%, chegando a variar em -23% no ano de 1983 (para uma análise ampliada da macroeconomia brasileira neste período, consultar ABREU, 1992, e BAER, 1994).

Entre o decênio de 1984-1994, a economia brasileira apresentou uma trajetória errática, alternando períodos de aceleração do crescimento (em 1985, 1986 e 1994) e outros de recessão (em 1988, 1990 e 1992), na medida em que as expectativas dos agentes econômicos deste país, quanto à eficácia dos planos econômicos implantados, se alterava.

Entretanto, o ano de 1990 merece destaque em razão da forte queda observada na produção industrial. Em março deste ano, entrava em vigor um conjunto de políticas

econômicas que visava conter a inflação, que ficou conhecido como “Plano Collor I”. Ao consubstanciar uma série de medidas equivocadas, como o confisco de ativos, as tentativas fracassadas de ajuste fiscal e a suspensão dos pagamentos da dívida externa, o governo brasileiro inseriu tamanha incerteza na economia que terminou por gerar, em poucos meses, uma queda de quase 40% na produção industrial e reduções de 6 e 4% no pessoal ocupado nessa atividade, no primeiro e segundo semestre, respectivamente.

De fato, apesar do discurso favorável à queda do processo inflacionário, durante a década de 1980 a participação do estado na economia era elevada, e constantemente havia desequilíbrios em suas contas, como aconteceu no período do Plano Cruzado (ABREU, 1992). Foi somente na segunda metade da década de 1990, com a implantação do Plano Real, que a economia brasileira voltou a apresentar maior estabilidade. Entre outras medidas, este plano contou com privatizações, liberalização das taxas de câmbio, ajuste fiscal, por meio da política de metas de superávit, e o regime de metas inflacionárias, implantado a partir de 1999 e gerido, principalmente, por alterações da taxa de juros básica (PINHEIRO *et al.*, 2001).

Nesse sentido, tem-se que a análise da possível ocorrência de ciclos econômicos não-lineares e, ou, caóticos é de relevante importância para a formulação de políticas econômicas mais eficazes no Brasil, dado que no período compreendido entre 1975 e 2009 esse país tenha registrado sensíveis variações em seus agregados macroeconômicos, movimentações estas normalmente amplificadas por crises de expectativas do setor privado.

A presente pesquisa pretende, assim, com base no caso brasileiro, avançar nos estudos dessa abordagem ainda não tão disseminada em economia, mas que altera, com algum peso, a visão econômica predominante sobre a dinâmica do sistema capitalista. De comportamento essencialmente estável e, em grande parte, previsível, pressupostos da macroeconomia *mainstream*, o sistema passa a ser visto como passível de oscilações criadas endogenamente e de pouca previsibilidade no longo prazo. Esse tipo de pesquisa é justificável, contudo, porque apesar dessa possível instabilidade e nenhuma tendência para o ponto de equilíbrio ótimo dos sistemas, a dinâmica econômica, do mesmo modo que as demais, apresenta certo padrão de comportamento que é possível de ser apreendido com ajuda dos pressupostos da teoria dos sistemas não lineares. A compreensão desse padrão permite a atuação de políticas públicas que possam melhorar o desempenho do sistema.

1.2. Objetivo geral

O objetivo deste estudo foi analisar a possível presença de componentes não-lineares e, ou, caóticos na dinâmica temporal da produção industrial total do país, utilizada como *proxy* para a produção total, e da produção de bens de capital, considerada *proxy* para o investimento. Utilizaram-se estas variáveis, pois, não obstante sejam de relevante interesse teórico, sua periodicidade mensal fornece um maior número de observações, característica imprescindível das séries analisadas em estudos desse tipo.

1.3. Objetivos específicos

- i. Extração dos componentes cíclicos e irregulares das séries produção industrial e produção de bens de capital com o método de HODRICK e PRESCOTT (1997);
- ii. Ajuste dos modelos ARMA – GARCH-M adequados sobre as séries de “i”, com intuito de eliminar possíveis linearidades e, ou, não-linearidades; e,
- iii. Elaboração de testes de independência BDS sobre os resíduos padronizados de “ii”.

A presença de estatísticas BDS significativas ao fim do passo “iii” é, segundo HSIEH (1991), associada à presença de caos nas séries analisadas. Tal significância será testada por meio de tabelas normais padronizadas, a qual é a distribuição assintótica do teste, e também por distribuições empíricas gerados por simulações *bootstrap*, que na presença de poucos pontos amostrais podem fornecer resultados mais confiáveis.

1.4. Hipótese

Os anos compreendidos entre 1975 e 2009 na economia brasileira apresentaram fases de elevada conturbação. O país experimentou alguns períodos de crescimento acelerado, porém passando por várias crises como a do endividamento externo em 1980, do congelamento da poupança na década de 1990, entre outras herdadas do ambiente econômico externo; além disso, apresentou risco de hiperinflação em grande parte deste

período, especialmente do fim dos anos 1970 até 1994. Devido às sensíveis perturbações da economia brasileira nestas últimas décadas, em especial em períodos anteriores ao Plano Real, é pode-se supor que dinâmicas não-lineares e, ou, caóticas possam ter operado nesses anos.

O restante desta pesquisa envolve, além desta introdução, mais quatro seções. Na segunda, se faz uma resenha sobre a teoria do caos, principalmente voltada para a teoria econômica; na terceira, discorre-se sobre a metodologia a ser utilizada; a quarta apresenta os resultados; e, por fim, a quinta traz as principais conclusões.

2. Referencial Teórico

O referencial teórico desta dissertação está dividido em três partes: na primeira seção, 2.1.1, introduzem-se conceitos básicos da teoria do caos; já, na segunda seção, 2.1.2, apresenta-se um modelo econômico que pode servir como um guia para a introdução de caos em modelagens dessa área; e, na terceira, 2.1.3, expõem-se os resultados disponíveis na literatura internacional e nacional.

2.1. Caos: uma resenha da literatura

Nesta seção pretende-se desenvolver conceitos de interesse ao bom entendimento da teoria do caos, sem, entretanto, ter a pretensão de esgotar o assunto. Fornecem-se subsídios ao leitor que tem um primeiro contato com esta teoria, fazendo considerações em relação a definições-chaves, além de apresentar algumas das aplicações teóricas e empíricas na área das ciências econômicas.

Nos últimos três séculos, o comportamento aperiódico, ou errático, de séries temporais tem sido associado a choques exógenos aleatórios em razão da predominância de modelos com uma estrutura linear em vários ramos da ciência (SHONE, 2002). Entretanto, o simples fato de um modelo ser não-linear pode levar tanto à dinâmica aperiódica como caótica.

Em sistemas lineares, uma pequena alteração em algum parâmetro não afeta a natureza quantitativa e qualitativa do sistema. Por outro lado, em sistemas não-lineares, isto está longe de ser verdade. Para alguma pequena mudança, ambos os comportamentos do sistema podem se alterar dramaticamente. Não obstante, a não-

linearidade parece ser a forma natural que os fenômenos assumem e, ignorá-la, pode tornar-se um sério problema. A necessidade de se incluir não-linearidade no corpo teórico das ciências de um modo geral vem trazendo consigo um novo campo de pesquisa.

Segundo FIEDLER-FERRARA e PRADO (1995), a teoria do caos remonta aos estudos de dinâmicas celestes de Henri-Poincaré, realizados em 1899, com contribuições posteriores de BIRKHOFF (1935). Poincaré analisou o comportamento de três corpos celestes por intermédio de leis de movimentos deterministas newtonianas, concluindo, entretanto, que suas equações levavam a resultados irregulares e imprevisíveis. Com este estudo, introduziram-se alguns dos conceitos que hoje se sabe serem intrínsecos a fenômenos caóticos.

Porém, “a ciência do caos” se estabeleceu recentemente, aproximadamente nos últimos quarenta anos. Seus desenvolvimentos se deram em várias frentes, mas foi no domínio dos sistemas dinâmicos dissipativos, fluxos e mapas para os quais o volume associado no espaço de fases se contrai, que a ruptura epistemológica ocorre, com a introdução de conceitos importantes para essa análise como o de *atrator estranho*³ (caótico) e do seu corolário, a sensibilidade às condições iniciais.

A constatação pioneira de que movimentos caóticos podem ocorrer em sistemas determinísticos dissipativos é devida a LORENZ (1963), que, com a finalidade de estudar o problema da previsão meteorológica para longos períodos de tempo, analisou as equações associadas a processos físicos envolvendo convecções térmicas de fluídos, concluindo pela impraticidade de tal previsão devido à imprecisão da determinação das condições iniciais.

Sabe-se atualmente, principalmente em função dos resultados de LORENZ (1963), que sistemas caóticos podem surgir de dinâmicas determinísticas relativamente simples, com poucos graus de liberdade. Entretanto, tais sistemas podem ser, eventualmente, derivados em mapas unidimensionais que apresentam caos, como é caso do mapa logístico, discutido adiante. Esta constatação é, normalmente, desconcertante, pois mostra que comportamentos aparentemente aleatórios e, muitas vezes, imprevisíveis, podem surgir de leis motoras elementares.

³ RUELLE, D., e TAKENS, F. “On the nature of turbulence”. **Commun. Math. Phys.** 20, 167 (addendum 21, p. 21); 23, 343, 1971.

Segundo PROKHOROV (2001), a relutância do homem em aceitar este fato, isto é, a possibilidade de oscilações extremamente complexas surgirem de equações diferenciais determinísticas simples, tem conduzido a ciência ao longo de sua história, produzindo valiosas descobertas. Na física, por exemplo, dinâmicas caóticas foram aplicadas em estudos de osciladores mecânicos e elétricos; na biologia, em estudos populacionais; na meteorologia, em estudos da convecção de fluídos e do ar; na medicina, em estudos do funcionamento de órgãos como o cérebro e o coração; e, na química, em estudos de reações químicas (PROKHOROV, 2001).

Mas, na economia a teoria do caos não obteve o mesmo êxito. Não obstante vários modelos tenham sido desenvolvidos, como o de crescimento populacional e econômico de HAAVELMO (1954); o de crescimento econômico com poluição de DAY (1982); o de ciclos de negócios de GRANDMONT (1985); o de ajustamento *cobweb* entre oferta e demanda de ONOZAKI, *et al.* (2000); e, o de estoques com expectativas racionais, explicado em SHONE (2002), dentre outros, fornecendo enriquecimentos teóricos importantes, a ausência de evidências empíricas contundentes em séries macroeconômicas, tais como produto e investimento, arrefeceu o interesse de muitos pesquisadores nessa área. Entretanto, deve-se ter em mente que a ausência de dados, ou a má qualidade destes, ao nível macro, não deveria ser a razão última da dificuldade de uma maior aceitação da teoria do caos e de suas implicações na economia.

Assim, nas próximas subseções deste texto clarificam-se termos importantes desta teoria: primeiramente, algumas características básicas de dinâmicas caóticas são explicadas; em seguida, apresenta-se uma aplicação teórica do caos na economia; e, por fim, discutem-se algumas das evidências empíricas disponíveis em estudos econômicos.

2.1.1. Caos: conceitos básicos

Considera-se, inicialmente, um sistema dinâmico dissipativo determinístico, ou seja, um conjunto de equações cuja evolução temporal obedeça a leis motoras conhecidas que possam ser descritas segundo mapas discretos do tipo: $\vec{x}_{t+1} = \vec{F}_\mu(\vec{x}_t)$, em que μ é um parâmetro de controle. Este sistema se desenvolve para uma região de atração invariante, conhecida como atrator. Restringindo-se ao caso em que há apenas um atrator, este pode ser de quatro tipos:

- i. pontual, que é independente do tempo, caracterizado por uma solução única;
- ii. ciclo limite⁴, periódico no tempo, caracterizado por sua amplitude e período;
- iii. toro T^n , *quasi*-periódico, com n frequências fundamentais independentes⁵; e,
- iv. atratores estranhos, que apresentam sensibilidade às condições iniciais.

Na medida em que os atratores podem descrever o comportamento de sistemas no longo prazo, eles se relacionam intimamente com a noção de estabilidade. Segundo FIEDLER-FERRARA e PRADO (1995), sistemas determinísticos nos quais a dinâmica temporal conduz, no limite, a atratores estranhos, apresentam dinâmica caótica. A sua característica de sensibilidade às condições iniciais diz respeito à taxa de divergência de duas trajetórias inicialmente muito próximas. Em sistemas caóticos, estas trajetórias distanciam-se exponencialmente devido à presença de não-linearidades mesmo na completa ausência de ruídos ou choques exógenos.

No contexto da economia, tal situação implica em pelo menos dois corolários: em primeiro lugar, a previsão de convergência de rendas, proveniente de modelos clássicos de crescimento (SOLOW, 1956), pode falhar se os sistemas econômicos apresentarem um grau suficiente de não-linearidade⁶; em segundo lugar, como é bem argumentada por DAY (1982), esta dependência pode tornar impraticável o exercício de previsão ou simulação de variáveis econômicas, em razão dos desvios provenientes até mesmo de arredondamentos numéricos.

O primeiro destes corolários há algum tempo é defendido por economistas como KRUGMAN (1998, 1994, 1991), ARTHUR (1990) e DAVID (1985). Estes autores argumentam que não há razões para se esperar que o fenômeno da convergência absoluta de renda ocorra entre países, regiões, firmas, etc., em relação a qualquer variável analisada, como renda *per capita*, população, condições sociais, dentre outras. Ao contrário, a divergência é a tendência que tem sido observada nesse tipo de análise. Segundo esses autores, tal fenômeno pode ser fruto de alguma característica aparentemente desprezível, ou ínfima, mas que se acentua ao passar dos anos devido à presença de retornos crescentes e, ou, não-linearidades.

⁴ Tais atratores são característicos de modelos do tipo “presa e predador”. Para uma aplicação na economia, consultar Acemoglu (1995).

⁵ Um toro T^2 , por exemplo, é um espaço topológico homeomorfo ao produto de dois círculos, cuja forma é similar a um cilindro longo que tem suas extremidades conectadas.

⁶ Para um exemplo, consultar o modelo de ZHANG (2005).

Ao analisar, por exemplo, a distribuição das atividades produtivas num determinado espaço geográfico, KRUGMAN (1998, 1994, 1991) observa que a aglomeração da produção em algumas cidades depende de suas condições iniciais. Uma pequena vantagem de algumas regiões em relação a outras, em alguma variável, como o tamanho da população, pode resultar em transformações qualitativas substanciais e estas localidades se desenvolvem mais rapidamente do que outras, formando uma configuração do tipo centro-periferia. Essa formação ocorre porque uma vez que uma localidade receba algum tipo de investimento, há tendência a atrair novos investimentos, desencadeando um fenômeno denominado “*feedback positivo*” que acaba por concentrar atividades no mesmo local. Esta região torna-se pólo, exercendo influência sobre as localidades vizinhas, mas que exibem padrão diferente de desenvolvimento. Outro pólo somente surgirá a uma determinada distância geográfica, conformando o mesmo padrão de centro-periferia com localidades contíguas.

Um ponto essencial a que KRUGMAN (1994, p.415) chama atenção para sistemas não-lineares é que estes tendem a exibir algum tipo de padronização além de apresentarem dependência às condições iniciais, isto é:

“Furthermore, while there are many such equilibrium structures, they share strong similarities: all involve roughly equidistant city locations, with a fairly narrow range of typical distances between cities. (...) That is, there would be many possible outcomes, depending on initial conditions; (...)”

No trecho destacado, KRUGMAN (1994) defende que, dada a presença de não-linearidades, é até possível que algum modelo consiga teorizar acerca das possíveis soluções que um sistema real poderia assumir quanto à localização geográfica de sua atividade econômica. Mas, o desenlace que o sistema de fato assume é extremamente difícil de prever, pois há dependência às condições iniciais, que são, na maior parte das vezes, impossíveis de se determinar ou reproduzir.

ARTHUR (1990), utilizando dessa mesma linha de raciocínio, analisa dois tipos distintos de indústrias, que vão compor duas partes da economia, interrelacionadas, mas apresentando desempenhos muito diferentes. Uma delas denominada de tradicional, cuja tecnologia e produção já se encontram consolidadas, e gera retornos decrescentes. A outra parte se baseia em novas tecnologias, se encontra, portanto, em plena fase de inovação, exibindo retornos crescentes. Esta última cresce proporcionalmente mais do

que a primeira. Ele enfatiza que o mundo dos retornos crescentes não exhibe equilíbrio e nem convergência, mas imprevisibilidade, instabilidade dos mercados, resultados potenciais múltiplos, possibilidade de que produtos inferiores predominem devido ao fenômeno “*lock in*”⁷, além de lucros maiores para o “ganhador”.

Já DAVID (1985) discute a geração de retornos crescentes e, portanto, sistemas não-lineares, a partir da comparação entre duas tecnologias, onde há atuação do fenômeno “*lock in*”. No final do século XIX o sistema de teclado denominado QWERTY passou a dominar sobre outros e não mais conseguiu ser substituído por qualquer outro mais eficiente, em termos de velocidade de datilografia, porque os datilógrafos já dominavam o primeiro sistema e os custos de substituição tornaram-se muito grandes.

Para exemplificar a operação desses sistemas não-lineares em economia, podem-se citar casos reais de aglomerações de atividades em determinadas localidades⁸, contrariando os pressupostos dos modelos de convergência de rendas *per capita* e de equilíbrio no ponto ótimo. Localidades podem diferir umas das outras por razões contingenciais, acidentais, em que o papel da história é fundamental. Um caso clássico, bastante citado na literatura é o da região do Vale do Silício nos Estados Unidos da América (EUA), em que houve, naturalmente, a concentração de empresas relacionadas às tecnologias de informação e comunicação, as mais dinâmicas da atual fase do capitalismo, conferindo à localidade o papel de vanguarda em termos de geração de conhecimento e de inovação tecnológica⁹. Sua história está relacionada fortemente à proximidade de portos, o que permitiu o desenvolvimento de tecnologias de transmissão via rádio, e à presença da Universidade de Stanford.

No Brasil, pode-se identificar um caso que ilustra bem a presente discussão, que é o do Município de São Paulo. É difícil imaginar que algum observador econômico ao final do século XIX, por mais prodigioso que fosse, pudesse prever que esse município passasse de pequeno entreposto comercial, para o centro econômico e financeiro do país, com elevada concentração industrial, apenas algumas décadas depois¹⁰. Em 1890,

⁷ Tal fenômeno significa que uma vez que um elemento de um grupo, por exemplo, uma firma ou uma tecnologia, obtenha alguma vantagem em relação aos demais, a tendência é de que sua vantagem se amplie porque os consumidores, nesse caso, se acostumam a tal produto e não arriscam a comprar o produto alternativo.

⁸ A Geografia Econômica tornou-se uma área importante em economia que estuda esses fenômenos, sendo Paul Krugman o seu principal representante.

⁹ Ver, por exemplo, BRESNAHAN *et al.* (2001) e SAXENIAN e HSU (2001).

¹⁰ Sobre a história do Município de São Paulo ver, dentre outros, TOLEDO (2003). Sobre o desenvolvimento do Estado de São Paulo, ver LOVE (1982).

segundo dados do IBGE, São Paulo contava com cerca de 65 mil habitantes, enquanto o Município do Rio de Janeiro com mais de 500 mil. Em 1940, a população paulistana aumentara algo em torno de vinte vezes (pouco mais de 1,3 milhões), enquanto que a da então capital do país menos de quatro vezes (por volta de 1,7 milhões de habitantes). Da mesma forma que o caso do Vale do Silício, a pequena cidade de São Paulo se formou devido às vantagens geográficas iniciais que apresentava, quais sejam, a de estar situada num planalto e próxima do mar, de onde chegaram os primeiros exploradores e por onde a produção cafeeira, posteriormente, passou a ser comercializada.

Pode-se argumentar, assim, que a relação entre a região do vale do Silício, um centro de elevada produção e desenvolvimento de tecnologias localizado nos EUA, e São Paulo, o município com o maior PIB brasileiro, é o fato de que em ambas as localidades a explicação do fenômeno de seu rápido crescimento pode ser enriquecido pelo arcabouço teórico da teoria do caos e sua sensibilidade às condições iniciais.

Por sua vez, o segundo corolário tem implicações de políticas macroeconômicas na medida em que a possibilidade de ocorrência de caos em seus agregados torna difícil, ou mesmo impraticável, a previsão de cenários econômicos futuros. Mesmo erros de arredondamentos numéricos, bastante comuns nas rotinas computacionais, poderiam causar rápida divergência entre as previsões de um modelo e a realidade. Nas palavras de um proeminente autor desta escola de pensamento na economia (DAY, 1982, pag. 9):

“In spite of the simplicity of the basic model, therefore, we have here an introduction to a type of dynamics that seems likely to arise in a wide variety of economic contexts where nonlinearities are present. Although their relevance and full scope can only be revealed after much more detailed research, the implications for how we think about economic theory and policy may be profound”.

Com o intuito de esclarecer as conclusões de DAY (1982), imagina-se, inicialmente, uma situação de crise a ponto de se alastrarem elevadas incertezas sobre os agentes econômicos. A teoria keynesiana indica que, neste caso, a demanda agregada da economia se reprime pela redução dos investimentos e, ou, do consumo. Nesse sentido, é fácil perceber que em um cenário como este a produção pode ser afetada, ou seja, o lado da oferta na economia também pode se retrair e, na ausência de políticas

econômicas que forneçam sinais adequados aos agentes, intensificar as oscilações vigentes.

Como um exemplo adicional das consequências da não-linearidade na macroeconomia, considere, agora, o caso em que os consumidores de uma dada localidade obedeçam à hipótese da renda permanente de FRIEDMAN (1957) e HALL (1978). Tais autores defendem que, nesse ambiente, os agentes consumirão uma proporção de sua renda permanente, que nada mais é que uma média da renda corrente e futura, esta última prevista segundo os postulados das expectativas racionais. Em outras palavras, o consumo é, para esses autores, uma função da renda ao longo de todo o ciclo de vida dos indivíduos. Contudo, pode-se perceber que, conforme existam componentes não lineares na dinâmica dessa economia e, à medida que esses se acentuam, a capacidade de prever a trajetória da renda futura por parte dos agentes passa a ficar extremamente comprometida. De fato, se o sistema analisado atinge situações caóticas, tal previsão torna-se infactível. Nesse sentido, conforme defendem MÉDIO e GALLO (1992), é racional que estes agentes adotem regras de bolso para o consumo gastando, por exemplo, uma fração constante de suas rendas correntes.

Portanto, a presença de não-linearidades e caos dificultaria a previsão de cenários econômicos no longo-prazo e enfraqueceria as conclusões das teorias que se baseiam nesta hipótese. Entretanto, apesar dos argumentos expostos anteriormente acerca das implicações da teoria do caos e não linearidades sobre a macroeconomia favorecer a visão de que as políticas econômicas poderiam ser eficazes na determinação do produto agregado¹¹ deve-se ter em mente que a prudência na formulação destas políticas deve ser, ao contrário, muito mais elevada num contexto de oscilações caóticas em razão da sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Uma grande questão que emerge com a teoria da não linearidade e caos na economia vem a ser, então, o contraponto entre a possibilidade de se alterar a renda agregada por intermédio de políticas econômicas governamentais, porém sem ter base sustentável para prever se tais políticas levarão a um estado melhor ou pior que o vigente.

Deste modo, parece ser mais interessante aos governos que levam em conta esta questão estimular a criação de instituições sólidas que sirvam para tentar evitar tais

¹¹Se os agentes adotam a regra de bolso citada para o consumo, por exemplo, então as políticas fiscais e monetárias afetam o produto via multiplicador keynesiano.

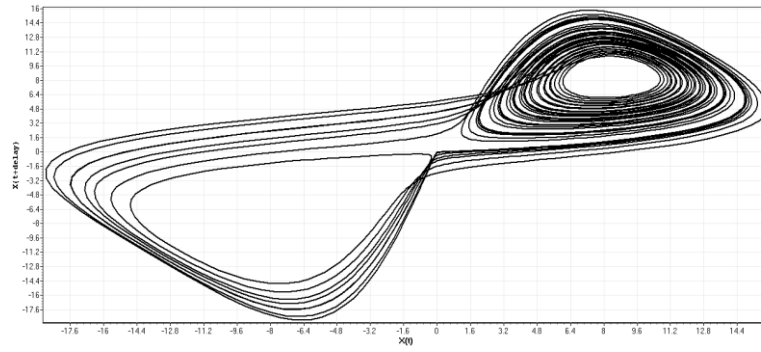
oscilações imprevistas, por exemplo, definindo regras para as políticas que minimizem a incerteza dos agentes quanto ao valor das variáveis no futuro. Entretanto, este é um tópico não explorado aqui que, não obstante, pode ser um campo de pesquisa promissor.

Retornando à discussão dos atratores, de maneira interessante, vários sistemas que produzem dinâmicas caóticas têm atratores estranhos com formas bastante peculiares, como pode ser visto na Figura 2.1.1 (a-c).

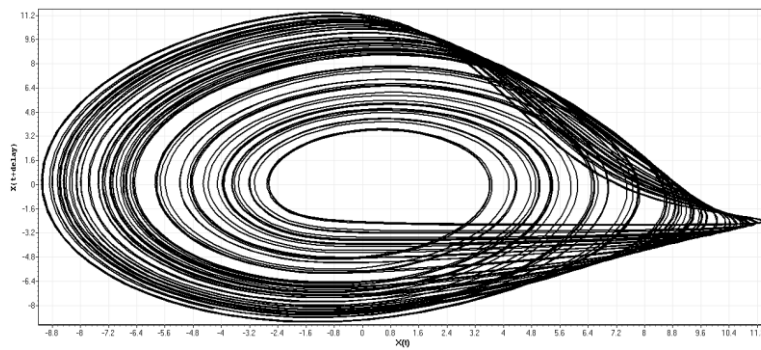
Na parte (a) da Figura 2.1.1 ilustra-se a dinâmica de longo-prazo do sistema desenvolvido por LORENZ (1963) que procurou analisar turbulências atmosféricas por intermédio de três equações diferenciais de primeira ordem. Conclui pela impraticidade das previsões, em razão da elevada divergência das soluções de seu sistema devidas a pequenas mudanças nas condições iniciais. Seu estudo foi, segundo MEDIO e GALLO (1992), fortemente facilitado pelos avanços computacionais, e ainda é bastante debatido e influente atualmente. Seu atrator ficou conhecido pela alcunha de “asas de borboleta”.

O sistema de RÖSSLER (1979) também obedece a três equações diferenciais e exhibe sensibilidade às condições iniciais; seu atrator está ilustrado na parte (b) da figura seguinte. Seu modelo pode ser derivado da cinética das reações químicas.

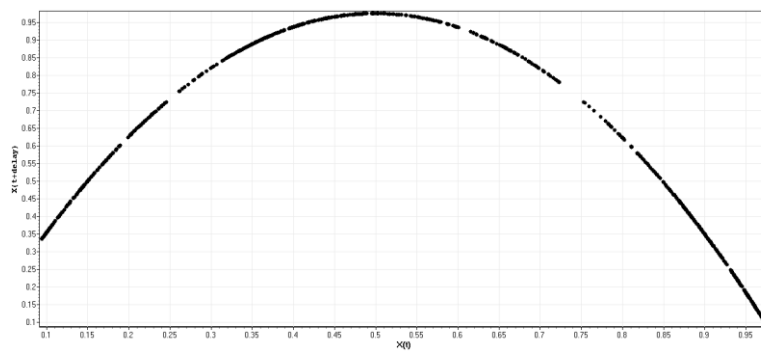
Por fim, na parte (c) da Figura 2.1.1 ilustra-se o atrator do mapa logístico quando este apresenta caos. A equação que rege este mapa é bastante simples, isto é, $n_{t+1} = n_t \mu (1 - n_t)$, em que n é uma variável qualquer e μ um parâmetro de controle. Sua aplicação é vasta na literatura, seja na biologia, no estudo de dinâmicas populacionais de insetos e plantas, por exemplo, seja na economia, como no modelo de crescimento econômico de HAAVELMO (1954) e DAY (1982), dentre outros. Está provado e, de certa forma, bem difundido nos meios especializados, que o mapa logístico exhibe comportamento caótico para valores do parâmetro de controle variando de aproximadamente 3,57 até quatro.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.1.1: Atratores estranhos dos mapas de (a) Lorenz, (b) Rössler, e (c) logístico.
Fonte: Elaboração própria.

Atratores estranhos podem ser reconstruídos a partir de uma única série temporal, considerada como produto de algum sistema dado, como foi provado por TAKENS (1981). Tal resultado é importante na economia pela dificuldade de se conhecer com exatidão e *a priori* as equações que governam seus complexos sistemas. O método consiste em criar vetores m -dimensionais da série temporal original da seguinte forma:

$$\vec{\xi}_i = \{x(t_i), x(t_i + p), \dots, x(t_i + (m-1)p)\} \quad (2.1.1)$$

Em que m é a dimensão de imersão, p é o atraso de reconstrução e x é a série temporal original. Em termos de reconstrução do espaço de fases original, a dimensão de imersão define o tamanho dos vetores utilizados, isto é, se $m = 3$, os vetores serão constituídos de três elementos. Por sua vez, o atraso de reconstrução define o intervalo de tempo entre as observações subsequentes constantes nos vetores, ou seja, se $p = 1$ e os dados são, por exemplo, mensais, constroem-se vetores comparando os meses de janeiro com fevereiro, fevereiro com março, etc. Se, de outro modo, $p = 2$, os vetores são construídos comparando janeiro com março, fevereiro com abril, etc. Por fim, se $m = 3$ e $p = 2$, um dado vetor terá a seguinte forma: {janeiro do ano t , março do ano t , maio do ano t }. Embora os atratores reconstruídos dessa maneira não sejam idênticos aos originais, foi provado pelos autores citados que suas propriedades topológicas são semelhantes.

A escolha do passo de reconstrução e da dimensão de imersão apropriada é de suma importância na reconstrução de atratores com séries temporais experimentais. Se o p escolhido for pequeno em relação ao ideal, por exemplo, corre-se o risco de comprimir o atrator original ao longo da diagonal principal. Por outro lado, se o p for exageradamente grande, destrói-se o atrator, cobrindo-se todo o espaço de fases (MEDIO e GALLO, 1992).

O método da informação mútua (FRASER e SWINNEY, 1986), sistemático e bastante preciso, pode auxiliar a escolha do passo ideal de reconstrução. Segundo esse método, escolhe-se o atraso p , tendo-se $p \rightarrow \tau'$, com τ' sendo o intervalo de tempo que minimiza a informação mútua contida em vetores vizinhos. Isto garante a formação de vetores com menos informações redundantes, ou seja, quase linearmente independentes, mas ainda correlacionados.

Por sua vez, um método eficiente para o cálculo da dimensão de imersão ideal é o de falsos vizinhos próximos, sugerido inicialmente por KENNEL *et al.* (1992). Neste são contados falsos vizinhos de cada um dos pontos de atratores imersos em várias dimensões, por exemplo, de um a dez. A idéia básica defendida pelos autores é que quando o número de falsos vizinhos é zerado, o atrator está suficientemente desdobrado, sendo que, em análises empíricas de séries de tempo, escolhe-se a dimensão de imersão que minimiza o percentual de falsos vizinhos.

Atratores estranhos estão associados à sensibilidade às condições iniciais, característica de sistemas caóticos, como foi ressaltado anteriormente. Entretanto, apesar de aperiódico, modelos com caos apresentam padrões e repetências: suas oscilações podem ter amplitude de variação limitada e algum pseudo-período médio.

Uma medida é suficiente para caracterizar tal sensibilidade, ela é conhecida como expoentes característicos de Lyapunov e sua definição para mapas é desenvolvida a seguir. Seja o mapa unidimensional:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (2.1.2)$$

Consideram-se, agora, dois pontos iniciais, x_0 e y_0 , separados por uma pequena distância, isto é:

$$\delta = y_0 - x_0 \quad (2.1.3)$$

Admite-se, neste momento, que a distância após uma iteração no mapa de (2.1.2) seja dada por

$$\delta' = y_1 - x_1 \quad (2.1.4)$$

de modo que:

$$\delta' = e^L \delta \quad (2.1.5)$$

Desta maneira, L é a taxa exponencial de expansão da distância entre δ e δ' como resultado de uma única iteração. Entretanto, (2.1.4) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\delta' = F(y_0) - F(x_0) = F(x_0 + \delta) - F(x_0) \quad (2.1.6)$$

Na última igualdade de (2.1.6), utilizou-se (2.1.3). De (2.1.6) e (2.1.5) é fácil perceber que:

$$|F(x_0 + \delta) - F(x_0)| = |\delta|e^L \quad (2.1.7)$$

Iterando-se o mapa k vezes, tem-se que $|F^k(x_0 + \delta) - F^k(x_0)| = |\delta|e^{kL}$, com $F^k(x) = F(F(F...F(x)...))$, k vezes. A distância da k -ésima iterada do mapa de (2.1.2) pode ser rearranjada, isto é:

$$L = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{F^k(x_0 + \delta) - F^k(x_0)}{\delta} \right| \quad (2.1.8)$$

Considera-se, então, o caso em que a diferença inicial entre as trajetórias seja infinitesimal ($\delta \rightarrow 0$) e o número de iterações, k , tenda ao infinito. Isto leva (2.1.8) a assumir a seguinte formulação:

$$\lambda(x_0) \equiv L(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{dF^k(x_0)}{dx_0} \right| \quad (2.1.9)$$

A equação (2.1.9) é, por definição, o expoente de Lyapunov, constituindo-se em uma medida de divergência ou caos, caso $\lambda > 0$, ou de contração, caso $\lambda < 0$. Quando este assume o valor nulo ocorrem bifurcações no mapa. A título de ilustração, a Figura 2.1.2 mostra sucessivas iteradas do mapa logístico e o respectivo expoente característico à medida que o parâmetro de controle, μ , é alterado.

É pertinente, neste momento, contextualizar um pouco a figura citada. Ela mostra as soluções de um mapa que poderia representar a dinâmica de uma variável econômica¹², após ela ter sido retroalimentada diversas vezes.

Se o parâmetro de controle μ assumisse um valor menor que três, por exemplo, pode-se ver que a solução do sistema seria estável e única. Por outro lado, se μ assume o valor de 3,2, o sistema poderia ser solucionado em dois valores diferentes, como pode ser visto ao traçar uma linha vertical imaginária partindo deste valor na parte superior da Figura 2.1.2, em razão da bifurcação ocorrida no mapa quando $\mu = 3$. Assim, a variável em questão poderia assumir qualquer uma dessas duas soluções. Entretanto, para esses

¹² Ver seção 2.1.2, a seguir, para um exemplo de aplicação.

casos, ainda não há caos, como pode ser visto na parte inferior da figura, que exibe os expoentes de Lyapunov negativos.

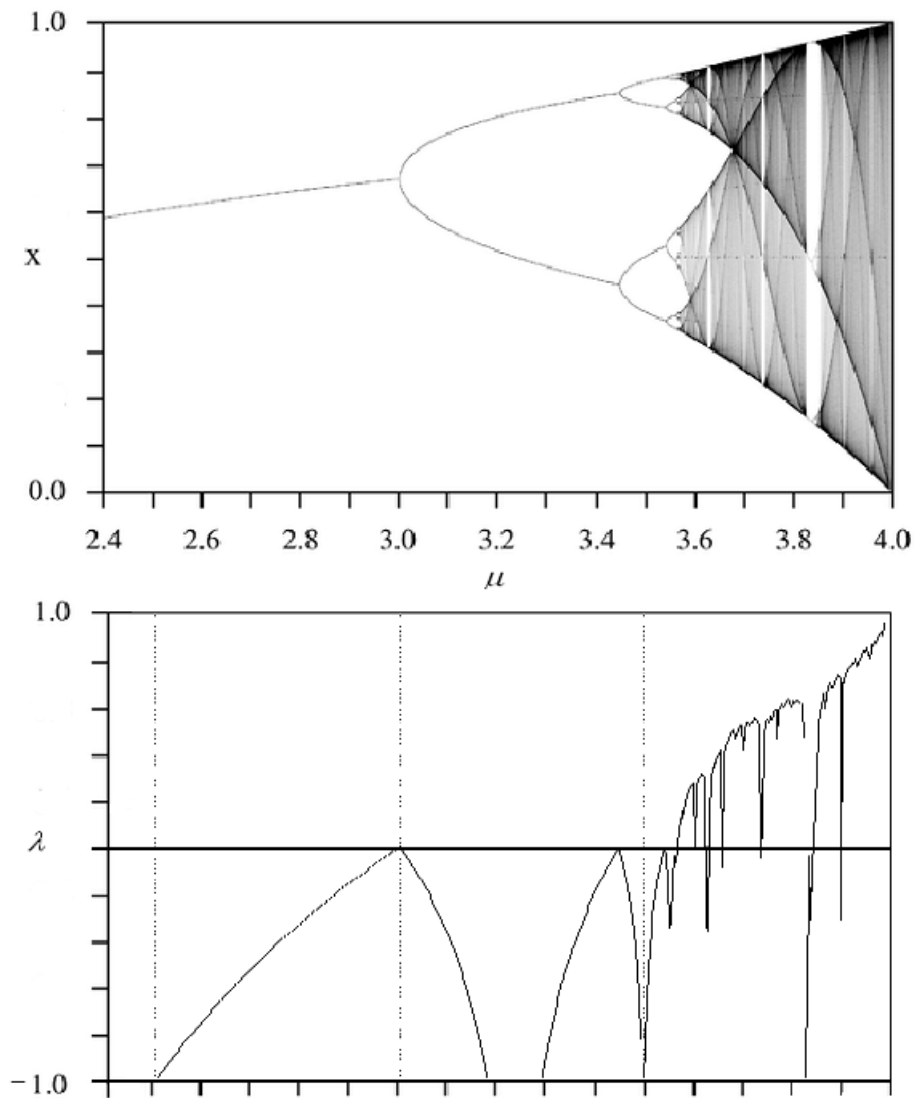


Figura 2.1.2: Dinâmica do mapa logístico à medida que o parâmetro de controle é variado. Percebem-se várias bifurcações neste; quando $\mu = 3$ ocorre a primeira. Entretanto, ainda não há caos, como pode ser visto no gráfico abaixo, pois os expoentes de Lyapunov, λ , são negativos. Somente para $3,57 \leq \mu \leq 4$ o diagrama superior ilustra caos com janelas de periodicidade no mapa, enquanto que o diagrama inferior mostra expoentes de Lyapunov positivos, característica de sistemas caóticos. Fonte: Elaboração própria.

À medida que o parâmetro de controle se eleva, atingindo valores superiores a 3,6, aproximadamente, o sistema passa a exibir comportamentos caóticos. Por exemplo, ao traçar uma linha vertical imaginária em $\mu = 3,7$ na parte superior da figura, percebe-se que existe uma infinidade de soluções possíveis para a dinâmica desta variável, de modo que a previsão da solução efetivamente alcançada torna-se impossível em razão

da sensibilidade às condições iniciais (nota-se, como era de se esperar, inclusive, o expoente de Lyapunov positivo na parte inferior da figura).

Entretanto, para certos valores de μ acima de 3,6, o mapa apresenta janelas de periodicidade que representam situações bastante peculiares. Elas ocorrem nos pequenos trechos em branco da parte superior da Figura 2.1.2 (quando $\mu \geq 3,6$), e representam padrões auto organizados surgidos de estados extremamente complexos. KRUGMAN (1994, p.415) chama atenção para este fenômeno¹³:

“The most provocative claim of the prophets of complexity is that complex systems often exhibit spontaneous properties of self-organization, in at least two senses: starting from disordered initial conditions they tend to move to highly ordered behavior, and at least in a statistical sense this behavior exhibits surprisingly simple regularities (e.g., a power-law distribution relating the sizes and frequencies of earth-quakes)”.

Vê-se, na parte inferior da Figura 2.1.2, que para $\mu \geq 3,6$ os expoentes de Lyapunov são positivos e crescentes, exceto nos casos em que este parâmetro atinge as citadas janelas de periodicidade, aonde, subitamente, seu valor chega a ser menor que zero. Deste modo, pode-se perceber porque a Figura 2.1.2 é tão difundida, ela ilustra muito bem a riqueza de soluções para a dinâmica de uma dada variável passível de existir somente em um contexto de não linearidade. Percebem-se casos de pontos fixos, de sucessivas bifurcações e, por fim, de caos que podem, eventualmente, evoluir para padrões extremamente organizados.

O algoritmo de WOLF *et al.* (1985) ainda é, atualmente, o que tem maior consolidação no cálculo de expoentes de Lyapunov de séries temporais reais. Seu cálculo fornece o maior expoente para, em seguida, computar o segundo maior, e, assim, sucessivamente. Entretanto, a complexidade dos cálculos amplia-se à medida que se calculam expoentes adicionais.

A lógica do algoritmo consiste em encontrar uma trajetória fiduciária, ou de confiança, e outra de teste, próxima à primeira, para então medir a taxa de divergência entre ambas. A reconstrução da trajetória fiduciária de sinais experimentais, quando não se conhece o sistema subjacente, não é direta. Ao contrário, para tal escolhem-se dois

¹³ O autor utilize-se neste trecho do termo “complexidade. Deve-se ter em mente, com isso, que a teoria do caos tenta, de fato, explicar o funcionamento de sistemas complexos. Caos e complexidade, assim, são intimamente relacionados.

pontos inicialmente tão próximos quanto for possível e novos pontos são adicionados à trajetória, desde que respeitem uma distância orbital média pré-determinada e, possivelmente, a mesma orientação do vetor original.

Porém, ao se trabalhar com dados experimentais, ou dados macroeconômicos e financeiros, deve-se ter em mente que a limitação de pontos amostrais pode levar a erros, tanto em razão de a mínima distância inicial ser muito grande ou em razão de distorções na orientação do vetor original. Portanto, para um dado tipo de atrator, a recuperação do expoente característico de Lyapunov pelo método citado anteriormente depende em muito da quantidade e qualidade dos dados e da habilidade do pesquisador.

Outro algoritmo, devido a ROSESTEIN *et al.* (1993), promete suplantiar essas dificuldades. Segundo esses autores, seu método supera os existentes em alguns pontos, pois o mesmo seria fácil e rápido de programar, e robusto às mudanças na dimensão de imersão, no tamanho da amostra, no atraso de reconstrução e no nível de ruído.

O método de estimativa de ROSESTEIN *et al.* (1993) inicia-se pela reconstrução da dinâmica do sistema por meio de uma série de tempo. A trajetória reconstruída, $\mathbf{X}$, pode ser expressa por uma matriz onde cada coluna é um vetor fase-espço, isto é:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_m]^T \quad (2.1.10)$$

Em que $\mathbf{X}_i$ é o estado do sistema no tempo i . Para uma série de tempo com N pontos, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cada $\mathbf{X}_i$ é dado por:

$$\mathbf{X}_i = [x_i \quad x_{i+p} \quad \dots \quad x_{i+(m-1)p}] \quad (2.1.11)$$

Em que, como anteriormente, p é a defasagem (*lag*) ou atraso de reconstrução (*reconstruction delay*), e m é a dimensão de imersão. Assim, $\mathbf{X}$ é uma matriz $M \times n$, e as constantes m , M , p , e N estão relacionadas da seguinte maneira: $M = N - (m - 1)p$. A dimensão de imersão é geralmente estimada de acordo com o teorema de Takens (1981), ou seja, $m > 2n$, embora o algoritmo também trabalhe de maneira satisfatória para menores dimensões. Caso não se conheça o sistema original, m pode ser calculada pelo método de falsos vizinhos. Para a defasagem, ROSESTEIN *et al.* (1993) sugerem como uma boa aproximação para p a defasagem na qual a função de autocorrelação cai

para $1 - 1/e$ do seu valor inicial. Entretanto, o critério de informação mútua também pode ser utilizado.

Após reconstruir a dinâmica, ou seja, a matriz, o algoritmo procura o vizinho mais próximo de cada ponto da trajetória. O vizinho mais próximo, $X_{\hat{p}}$, é encontrado pela procura do ponto que minimiza a distância a um particular ponto de referência, X_p . Em termos matemáticos:

$$d_p(0) = \min \|X_p - X_{\hat{p}}\| \quad (2.1.12)$$

Onde $d_p(0)$ é a norma euclidiana inicial do p -ésimo ponto ao seu vizinho mais próximo. Tais autores impuseram uma restrição adicional de que o vizinho mais próximo tenha uma separação temporal maior que o período médio da série de tempo: $|p - \hat{p}| > \text{período médio}$. Isto permite considerar cada par de condições iniciais contíguas para diferentes trajetórias.

O restante do método será descrito a seguir. Supondo que a taxa média de divergência definida por $d(t) = Ce^{\lambda_1 t}$, em que λ_1 é o maior expoente de Lyapunov; t o tempo; e C uma constante que normaliza a condição inicial, ROSESTEIN *et al.* (1993) assumem que o p -ésimo par de vizinhos mais próximos divergem, aproximadamente, à taxa dada pelo maior expoente de Lyapunov:

$$d_p(i) \approx C_p e^{\lambda_1(i.\Delta t)} \quad (2.1.13)$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados de (2.1.13), obtém-se:

$$\ln d_p(i) \approx \ln C_p + \lambda_1(i.\Delta t) \quad (2.1.14)$$

Equação (2.1.14) representa um conjunto de linhas aproximadamente paralelas, para $p = 1, 2, \dots, M$, cada qual com uma inclinação fortemente proporcional a λ_1 . Assim, o maior expoente de Lyapunov é fácil e corretamente estimado por meio de uma linha média de ajuste, por exemplo, pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO).

Os autores argumentam que a utilização do MQO é chave no processo de estimação de um valor confiável de λ_1 para séries pequenas e ruidosas. Eles testaram a desenvoltura do método para diversas amostras, algumas inclusive com apenas 100 pontos, e encontraram erros razoáveis quando comparados a outros métodos disponíveis na literatura, da ordem de $\pm 10\%$.

A Tabela 1, a seguir, mostra as estimativas do λ_1 e seu valor teórico para vários sistemas. Por exemplo, o valor teórico de λ_1 para o mapa logístico, dados os parâmetros selecionados, é de $0,693^{14}$. Como se pode ver, as estimativas são bastante próximas do valor real do parâmetro.

Tabela 1: Simulações de ROSENSTEIN *et al.* (1993), para sua estimativa do maior expoente de Lyapunov em vários sistemas

Sistema	N	p	m	λ_1 esperado	λ_1 calculado	% erro
Logístico	100	1	2	0,693	0,659	- 4,9
Hénon	100	1	2	0,418	0,426	1,9
Lorenz	1000	11	3	1,5	1,75	16,7
Rössler	1200	8	3	0,09	0,092	2,0

Fonte: ROSENSTEIN *et al.* (1993).

Outra interessante característica que permeia dinâmicas caóticas de longo-prazo é a dimensão fracionária dos atratores estranhos. Este conceito é conhecido como teoria dos fractais, denominação dada por MANDELBROT (1983).

Quando se trata de dimensões, normalmente se faz referências às dimensões euclidianas. Por exemplo, um conjunto finito de pontos tem dimensão zero; uma linha tem dimensão um; uma superfície, dimensão dois, etc. De uma maneira intuitiva, a noção de dimensão, no contexto da teoria de sistemas dinâmicos, está associada ao número de variáveis constantes no diagrama de fases (FIEDLER-FERRARA e PRADO, 1995; MEDIO e GALLO, 1992), sendo que, dinâmicas caóticas têm atratores que ocupam apenas uma fração do seu espaço de fases, isto é, eles têm dimensões não inteiras, ou fractais.

A teoria dos fractais é um dos mais instigantes ramos da matemática. Através dela podem ser geradas estruturas geométricas complexas, com uma beleza singular, e

¹⁴ ECKMANN, J. P., e RUELLE, D. "Ergodic theory of chaos and strange attractors". **Rev. Mod. Phys.** v.57, 1985.

que explicam fenômenos naturais. Estruturas cujos componentes são semelhantes à sua totalidade, que, por sua vez, são formados por sub-componentes também semelhantes ao todo. Essa auto-semelhança se estende por vários níveis. Pela teoria dos fractais é possível associar o delta de rios a relâmpagos e ao sistema circulatório dos seres vivos em sua dimensão, dentre outros exemplos.

Essa elevada padronização existente na natureza, que só foi possível perceber após o desenvolvimento da matemática dos fractais, entra em choque com a então visão vigente de que o meio ambiente e os seres vivos são constituídos por uma infinidade de formas.

Existem várias medidas de dimensão fractal e multifractal¹⁵, entre as quais se podem citar: a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (D) também conhecida como dimensão fractal ou capacidade; a dimensão de informação (D_i); a dimensão de correlação (ν); e a dimensão generalizada (D_q , $q = 0, 1, 2, 3, \dots$). É possível demonstrar que $D \geq D_i \geq \nu \geq \dots$ (HENTSCHEL e PROCACCIA, 1983). Entretanto, se vale a igualdade entre as diferentes dimensões, diz-se que o atrator é homogêneo e sua auto-similaridade pode ser completamente descrita por uma única lei.

A dimensão de correlação, ν , popularizou-se ultimamente por ter seu cálculo bem desenvolvido em GRASSBERGER e PROCACCIA (1983). Tais autores mostraram, ainda, que $\nu \approx D$ na maioria dos casos, e que ela possui informações mais relevantes sobre a dinâmica dos sistemas. Deste modo, ν é tanto um limite inferior como um valor aproximado da dimensão fractal, além de fornecer importantes informações.

Seu cálculo é mostrado a seguir. Considera-se, inicialmente, a probabilidade de que dois pontos próximos do atrator estejam separados por uma distância de tamanho máximo ε . Tomando-se agora todos os conjuntos de dois pontos passíveis de serem formados dessa maneira, tal probabilidade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx C(\varepsilon) \quad (2.1.15)$$

¹⁵ São conjuntos ainda mais complexos que os fractais. A caracterização completa destes exige o cálculo de infinitas dimensões.

Em que (2.1.15) é, aproximadamente, a probabilidade de que a distância entre dois pontos quaisquer seja menor que ε , N é o número total de pontos do atrator, e $C(\varepsilon)$ assume a seguinte formulação:

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1} \theta[\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|] \quad (2.1.16)$$

Em (2.1.16) deve-se ter $i \neq j$. $C(\varepsilon)$ é a chamada integral de correlação; $\vec{x}_i$ é o vetor associado ao i -ésimo ponto do atrator; e $\theta(z)$ é função Heaviside, que assume valor unitário se $z \geq 0$, e zero caso contrário. Em seguida, a dimensão de correlação é calculada como:

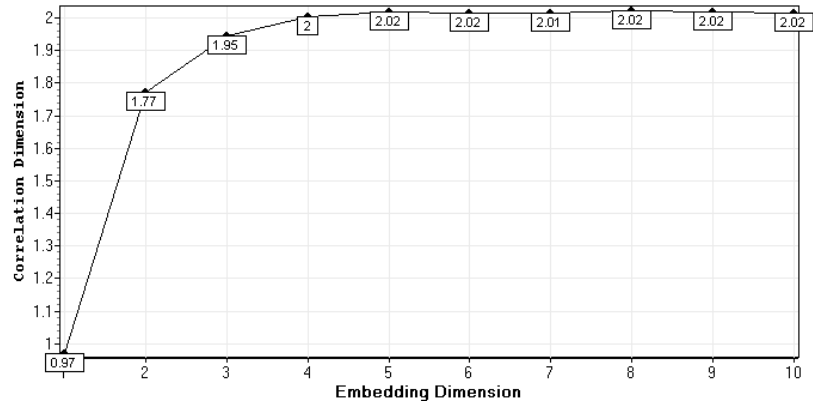
$$\nu \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2.1.17)$$

Na prática, com sinais experimentais, a série temporal original é substituída por sua série reconstruída, alterando (2.1.16) pelos vetores $\vec{\xi}_i$ de (2.1.1). Além disso, os pesquisadores, em geral, não conhecem a dimensão de imersão adequada à reconstrução do atrator. Para contornar este problema, plota-se a dimensão de correlação para vários valores de m . Esse gráfico se convergir, o faz para o valor de ν (ECKMANN e RUELLE, 1985).

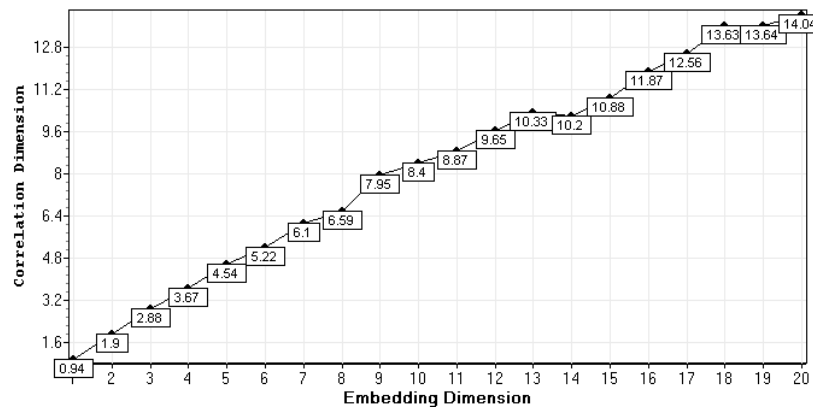
A título de ilustração, a Figura 2.1.3 traz duas aplicações desta metodologia de cálculo de ν : uma para o sistema de LORENZ (1963) e outra para um ruído branco. Percebe-se que no primeiro caso há uma estabilização de ν em torno do valor 2,02, o que é resultado da dinâmica caótica deste sistema, enquanto que, no segundo caso, a dimensão de correlação sobe praticamente junto da dimensão de imersão, o que é esperado de sinais puramente aleatórios.

Isto se deve ao fato de que, para sinais puramente aleatórios, não importa a dimensão em que a série é imersa, ela sempre preenche o espaço de fases completamente. Por outro lado, dinâmicas caóticas têm uma estrutura definida no espaço de fases, e sua correlação de dimensão satura em algum ponto, na medida em que a dimensão de imersão aumenta.

Ao final da década de 1980, foi desenvolvido um teste econométrico para distinguir se uma série é caótica ou aleatória. Ele é conhecido como teste BDS em homenagem aos seus propositores, BROCK, DECHERT e SCHEINKMAN (1987). Mais tarde, HSIEH (1991) atestou pela robustez deste e forneceu um passo a passo para a distinção de uma dinâmica caótica de outra puramente aleatória.



(a)



(b)

Figura 2.1.3: Dimensão de correlação do mapa de LORENZ (1961) (a); e de um processo ruído branco (b).

Fonte: Elaboração própria. Nota: Embedding dimension traduz-se para dimensão de imersão e correlation dimension traduz-se para dimensão de correlação.

O teste BDS é fundamentado na integral de correlação (equação 2.1.16) e fornece uma base formal para a seguinte decisão: sua hipótese nula é de que a série é gerada por uma dinâmica temporal independente e identicamente distribuída (*iid*), contra hipóteses alternativas de dependência linear, não-linear ou caos. Sua estatística de teste, a qual tem uma distribuição assintoticamente normal, mede, em termos mais intuitivos, a discrepância da integral de correlação entre os dados observados e aquela

de uma série com mesma média e variância, porém, gerada aleatoriamente. Em outras palavras, a estatística BDS mede os desvios de uma série observada de uma série *iid* (ou, equivalentemente, aleatória).

Assim, ao supor que a série em estudo é *iid* (o teste assim o faz porque essa é sua hipótese nula), e computar a integral de correlação para diversos casos, o método pode incorrer em erros de cálculos que serão, em seguida, avaliados pela estatística se estes são frutos de algum padrão de dependência entre os dados, ou resultados da amostra finita, por exemplo, sendo que, neste último caso, a hipótese nula não é rejeitada.

Segundo HSIEH (1991), no teste para caos deve-se, inicialmente, tornar a série analisada estacionária; uma diferenciação pode produzir esse resultado. A seguir, ajusta-se um modelo autorregressivo média móvel (ARMA, BOX e JENKINS, 1976) adequado, e realiza-se o teste BDS sobre seus resíduos. A rejeição da hipótese nula sugere a presença de dependência não-linear e, ou, caos na série. Continua-se, agora, ampliando o modelo ARMA, para um modelo não linear apropriado, normalmente esses modelos são do tipo GARCH (p, q) ou, menos restritivamente, um GARCH – M (p, q) com a variância condicional incluída na equação média¹⁶. Deste modo, ao captar as estruturas lineares e não-lineares com o modelo citado, a rejeição da hipótese nula de erros *iid* pelo teste BDS sobre os resíduos padronizados do processo de estimação indica não-linearidades compatíveis com caos determinístico na série analisada.

Entretanto, o teste BDS não suplantou um grave problema que permeia estudos empíricos econômicos dessa área, que é a presença de poucas observações nas séries; normalmente, estas não ultrapassam os duzentos pontos. A implementação deste teste em sinais de curta duração é inadequada em razão de sua estrutura de construção. Primeiramente, a estatística calculada tem distribuição assintoticamente normal padronizada, porém, a utilização de uma série de tempo pequena pode não garantir a convergência da distribuição observada para a assintótica. Adicionalmente, poucos pontos amostrais podem enfraquecer o cálculo das estatísticas BDS para dimensões de imersão superiores, consistindo num obstáculo ainda mais grave para os pesquisadores.

Pode-se contornar esta situação através da criação de distribuições empíricas das variáveis observadas da seguinte maneira: os dados originais devem ser embaralhados diversas vezes (10^n vezes, com n geralmente igual a 4 ou 5) e, em cada um desses processos calcula-se a estatística BDS. Por fim, compara-se a estatística dos dados

¹⁶ Para uma boa resenha sobre modelos de variância, consultar POON e GRANGER (2003).

originais com a distribuição gerada pelos dados embaralhados da mesma forma que se faz para a distribuição normal padronizada e conclui-se pela rejeição ou não da hipótese nula. Contudo, os resultados obtidos de séries curtas devem sempre ser interpretados com cuidado.

Esta seção mostrou algumas características de séries caóticas e de métodos de detectá-las. Por outro lado, existem muitos outros pontos não cobertos aqui. A literatura disponível sobre caos é vasta nas ciências naturais e tem crescido nas ciências econômicas. Este texto pretendeu ser apenas um guia introdutório ao leitor interessado.

Na próxima seção apresenta-se um modelo que pode exibir caos aplicados à economia. Neste, escolhas racionais dependentes da experiência podem gerar dinâmicas erráticas (caóticas). Pretende-se com isso fortalecer alguns conceitos aqui expostos.

2.1.2. Escolhas racionais e comportamentos erráticos

Esta seção se baseia no artigo de BENHABIB e DAY (1981) que, apesar de sua simplicidade de construção, leva a importantes conclusões sobre a possibilidade de ocorrência de movimentos erráticos, ou caóticos, em economia.

Os autores mostram que quando as preferências dos agentes possuem algum tipo de padrão cíclico, poderão existir sequências caóticas de escolhas racionais ao longo do tempo. A justificativa de um modelo desse tipo baseia-se no argumento de que, apesar da possibilidade de alterações dos hábitos individuais de consumo ser um fenômeno bastante comum, ela é, normalmente, desconsiderada em formulações que primam pela estabilidade de preços e renda. Por exemplo, um agente que sempre tira férias nas montanhas pode, subitamente, alterar seu hábito e preferir viajar ao litoral em algum período de tempo, para em seguida preferir voltar à sua escolha costumeira. Assim, escolhas erráticas e padrões cíclicos de preferências surgiriam endogenamente, isto é, como fruto das decisões dos agentes, ao contrário de estarem associadas a choques exógenos.

Portanto, inicia-se considerando a seguinte função utilidade:

$$U(x, y, \alpha) = x^\alpha y^{1-\alpha} \quad (2.1.18)$$

com x e y denotando dois bens quaisquer consumidos em dado período de tempo. Como padrão, assume-se que $0 < \alpha < 1$. A maximização da utilidade acima está sujeita à seguinte restrição orçamentária:

$$m = px + qy \quad (2.1.19)$$

em que m representa a renda, p o preço do bem x e q o preço do bem y , conduzindo às funções de demanda apresentadas abaixo,

$$x = \alpha \frac{m}{p}, \quad y = (1 - \alpha) \frac{m}{q} \quad (2.1.20)$$

Considera-se, agora, que o parâmetro relacionado às preferências na função de utilidade, α , esteja relacionado com as escolhas feitas no passado. A formulação sugerida por BENHABIB e DAY (1981) para captar tal conexão é:

$$\alpha_{t+1} = bx_t y_t \quad (2.1.21)$$

com b fixo e maior que zero. A função (2.1.21) representa que o consumo é *ex post* ponderado pela experiência das escolhas passadas. Ela implica que quanto maior o peso designado por b , tanto maior será a preferência pelo bem x .

A substituição de (2.1.21) em (2.1.20) com a utilização da restrição orçamentária e considerando $p = q = 1$, produz uma função de demanda dinâmica de curto-prazo para o bem x , ou seja,

$$x_{t+1} = bx_t (m - x_t) \quad (2.1.22)$$

Se, por simplicidade, a renda for normalizada para um, isto é, $m = 1$, tem-se que (2.1.22) assume a forma de uma função logística clássica e pode exibir caos para certas faixas de valores de b . A título de ilustração, considera-se uma situação em que $b = 2$ e o caso extremo em que $b = 4$, na Figura 2.1.4.

No primeiro caso, no vigésimo período de tempo há uma estabilização da demanda por x em 0,5 unidades. Este valor de equilíbrio pode ser encontrado com a

análise da estabilidade de (2.1.22) para $m = 1$, sendo calculado pela seguinte fórmula: $1 - 1/b$. Analiticamente, tal resultado indica que após alguns períodos o agente estabiliza sua demanda pelo bem em um valor fixo e assim permanece enquanto o ambiente econômico mantiver-se estável. Por outro, no segundo caso, a demanda por x é instável e imprevisível, além de exibir sensibilidade às condições iniciais, características de dinâmicas caóticas.

Se, por exemplo, os bens x e y representassem, respectivamente, lazer e uma cesta de consumo, a função utilidade (2.1.18) seria uma aproximação daquelas assumidas em modelos de ciclos reais de negócios (LONG e PLOSSER, 1983). Como consequência, a economia de “Robinson Crusoe” destes modelos seria passível de apresentar caos.

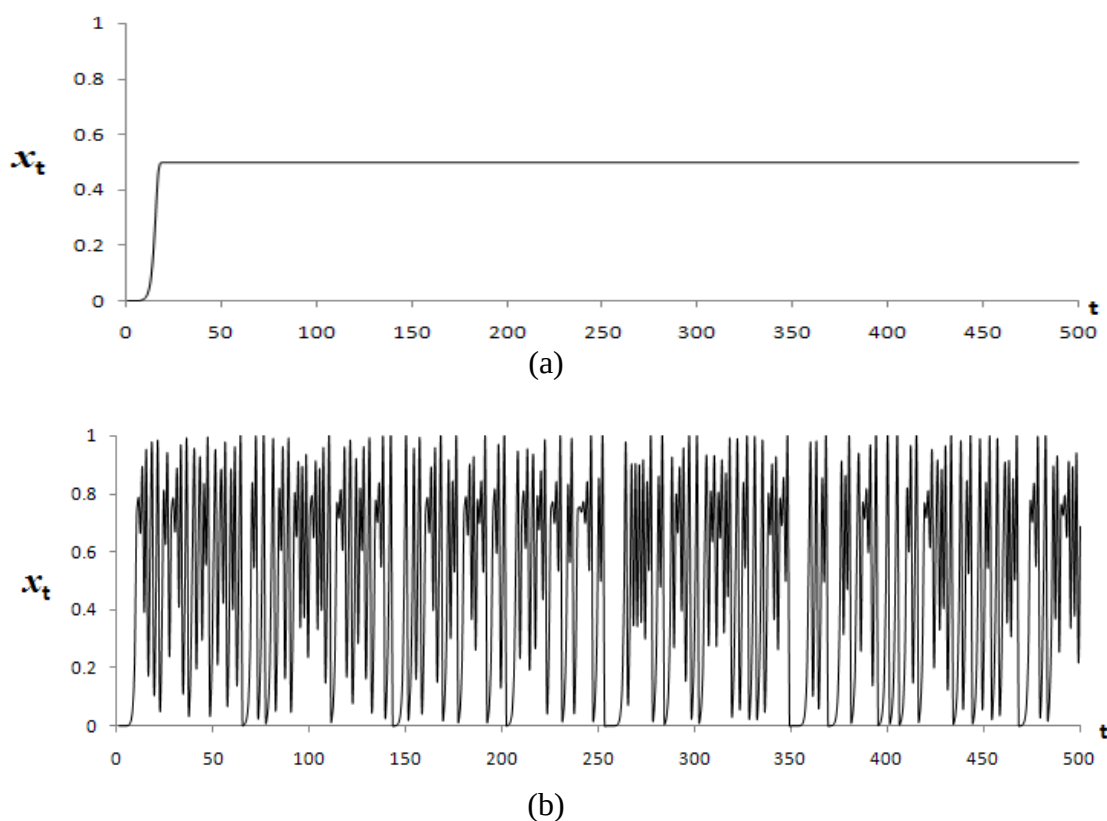


Figura 2.1.4: Dinâmica temporal de x_t para $t = 500$, $x(0) = 10^{-5}$: (a) Estabilidade para $b = 2$; e, (b) caos para $b = 4$.

Fonte: Elaboração própria.

Deste modo, apresentou-se nesta seção uma economia que pode apresentar ciclos de características essencialmente endógenas, advindas de escolhas erráticas de um agente maximizador. Apesar da simplicidade do modelo, ele fornece vários dos *insights* básicos disponíveis em outras formulações mais complexas. A seguir,

apresentam-se alguns estudos empíricos sobre a possibilidade de ocorrência de caos em séries temporais econômicas reais.

2.1.3. Evidências empíricas e considerações finais

Embora fosse teoricamente interessante verificar empiricamente algum nível de caos em variáveis macroeconômicas, tais séries estão longe de serem consideradas ideais para o cálculo dos indicadores essenciais a essa teoria. Isso ocorre, principalmente, por duas razões: a primeira é a pouca disponibilidade de dados, em que as séries são computadas, na melhor das hipóteses, mensalmente; a segunda diz respeito ao elevado nível de ruído presente em algumas das medições, principalmente naquelas que envolvem variáveis agregadas, tais como o produto interno bruto.

Foi nesse sentido que BROCK e SAYERS (1988) em um estudo empírico seminal, estudando várias séries macroeconômicas norte-americanas, não encontraram evidências convincentes de caos nestas, porém concluíram para a presença de fortes não-linearidades. Este estudo se baseou em medidas da correlação de dimensão, no maior expoente de Lyapunov e em estatísticas BDS.

Resultados similares foram obtidos por SCHEINKMAN e LEBARON (1989b), que estudaram séries do produto nacional bruto e da produção industrial dos Estados Unidos. Por outro lado, FRANK e STENGOS (1988) não encontraram evidências de não-linearidades em séries macroeconômicas canadenses. Entretanto, em razão da curta duração das séries analisadas (menos de 200 pontos), e dos algoritmos implementados, algo simplificados, MEDIO e GALLO (1992) argumentam que as evidências destes últimos autores estão longe de serem definitivas.

BARNETT e CHEN (1986) realizaram um estudo particularmente interessante detectando caos em séries monetárias norte-americanas. As variáveis por eles analisadas, de periodicidade semanal, são aproximações de segunda ordem da teoricamente exata agregação monetária (melhores que M1 e M2, por exemplo), chamados de agregados Divisia, sendo construídos como uma soma ponderada das taxas de crescimento de seus componentes, em que o peso relativo de cada um deles é dado por sua parcela no gasto total. BARNETT e CHEN (1986) defendem que, neste caso, os dados possuem uma qualidade pouco usual na economia, o que favorece o cálculo de indicadores de caos.

Possivelmente em razão disso, as suas estimativas da dimensão de correlação e expoentes de Lyapunov foram muito mais confiáveis e convergiram com maior robustez. Por exemplo, no que diz respeito à dimensão de correlação, encontraram-se valores aproximadamente iguais a 1,5 para quase todas as séries. Em geral, nos estudos citados anteriormente, o valor calculado para esta situava-se em torno de seis e sete, com uma convergência fraca. Por sua vez, os seus cálculos da taxa de divergência de trajetórias inicialmente próximas, resumidos pelo expoente de Lyapunov, resultaram em valores pequenos e positivos, porém com forte convergência, indicando sensibilidade às condições iniciais. Assim, com o estudo de BARNETT e CHEN (1986) reforça-se uma pré-condição necessária aos cálculos da teoria do caos, a saber, a boa qualidade dos dados.

Se com as séries macroeconômicas os resultados ainda são conflitantes, a análise das séries financeiras tem se mostrado promissora. Deve-se isso, provavelmente, à maior disponibilidade de dados e à sua qualidade superior. Por exemplo, SCHEINKMAN e LEBARON (1989a) estudaram séries diárias e semanais norte-americanas através da estatística BDS, encontrando fortes evidências a favor de não-linearidades e alguma evidência de caos. No caso dos dados semanais, a dimensão de correlação convergiu razoavelmente para um valor entre seis e sete, ou seja, o atrator deste sistema imerso em um espaço de fases com sete variáveis, ou direções, ocupa apenas uma fração deste, o que é evidência de comportamento caótico, porém de alta dimensionalidade¹⁷.

Estes autores também utilizaram uma metodologia alternativa que consiste em comparar os resíduos de um modelo autorregressivo apropriado com eles próprios “embaralhados”, ou permutados. Tal abordagem baseia-se no fato de que se os resíduos de uma autorregressão são caóticos, então a sua dimensão de correlação deve ser menor do que a gerada pelo processo de sua permuta, a qual tende a destruir o padrão de dependência da série original. Procedendo dessa forma, os referidos autores puderam observar que a dimensão de correlação dos resíduos permutados era sempre maior que a dos originais, podendo concluir, não somente por não-linearidades, mas também por caos nas séries analisadas.

¹⁷ O problema de se encontrar evidências empíricas de caos de alta dimensionalidade está na tentativa de se modelar seu sistema gerador. A exemplo de alguns fenômenos químicos e físicos é interessante que sistemas econômicos de baixa dimensão pudessem gerar caos para que pesquisadores conseguissem estudá-los com melhor acuidade.

Resultados similares foram obtidos por FRANK e STENGOS (1989) que investigaram séries referentes aos mercados de ouro e prata. Tais autores encontraram valores entre seis e sete para as dimensões de correlação calculadas dos resíduos originais, bem inferiores àsquelas dos permutados. Estes resultados e o discutido anteriormente evidenciam que as séries financeiras fornecem um campo de pesquisa mais promissor no estudo de caos em economia.

Em suma, a partir de diversos estudos empíricos, pode-se dizer que as variáveis econômicas, sejam macroeconômicas ou financeiras, podem exibir não-linearidades. Nas primeiras, a hipótese de caos não se mostrou contundente, porém, não pode ser descartada até que se desenvolvam algoritmos realmente eficientes na presença de ruídos e de poucas observações; para as últimas, a presença de caos foi confirmada, entretanto, para uma ampla aceitação da teoria do caos pela ciência econômica *mainstream* parece ser necessário que as evidências fortes não fiquem restritas aos mercados financeiros.

É pertinente ressaltar que, embora a disponibilidade atual de dados macroeconômicos não tenha favorecido ao surgimento de evidências conclusivas da verificação ou não de períodos caóticos na produção, no investimento ou no emprego, por exemplo, negar a probabilidade de ocorrência de movimentos erráticos em economias seria uma aposta demasiadamente confiante na capacidade de previsão e ação dos agentes econômicos.

3. Metodologia

Esta pesquisa analisa duas séries macroeconômicas brasileiras fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a saber: produção industrial, como *proxy* para a produção total; e produção de bens de capital como *proxy* para o investimento. Os dados são mensais, variando de janeiro de 1975 a novembro de 2009, com a média do ano de 2002 como base, perfazendo 419 pontos amostrais. Estes foram deflacionados para, em seguida, serem dessazonalizados com o filtro *Census X12*. Deste modo, os procedimentos descritos a seguir foram aplicados em todas as séries em questão.

No intuito de estudar os ciclos do crescimento econômico no Brasil, o ponto de partida aqui adotado no tratamento das séries é a extração de seus componentes cíclicos e irregulares. Um método largamente utilizado na literatura econômica para tal é o desenvolvido por HODRICK e PRESCOTT (1997) e conhecido como filtro HP, que obtém uma estimativa suave da tendência de longo-prazo da série temporal e deixa como resíduo os componentes cíclicos e irregulares.

RAVN e ULIGH (2002) afirmam que apesar de existirem métodos de filtragem mais sofisticados, como os de BAXTER e KING (1999) e CHRISTIANO e FRITZGERALD (1999), por exemplo, o filtro HP tem resistido aos seus críticos e se mostrado realmente capaz de se manter como um método padrão.

Basicamente, este filtro computa uma série suavizada, $\tilde{x}$, da série original, x , minimizando a variância desta última em torno da primeira, sujeito a uma restrição na segunda diferença de $\tilde{x}$; isto é, a série suave é escolhida de modo a minimizar:

$$\sum_{t=1}^T (x_t - \tilde{x}_t)^2 + \eta \sum_{t=2}^{T-1} [(\tilde{x}_{t+1} - \tilde{x}_t) - (\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1})]^2 \quad (3.1)$$

O parâmetro η controla a suavidade da série de desvios, de forma que quanto maior η , mais suave ela será. No limite, quando $\eta \rightarrow \infty$, $\tilde{x}$ se aproxima de uma tendência linear. Para dados mensais, o valor do parâmetro η sugerido por HODRICK e PRESCOTT (1997) é de 14400, que foi o adotado nesta pesquisa. Ele pode ser derivado da lei de potência de RAVN e ULIGH (2002), definido como o número de períodos por ano, dividido por quatro, elevado a uma potência e multiplicado por 1600. Ao utilizar a potência “2”, obtêm-se os valores de η originais utilizados por HODRICK e PRESCOTT (1997).

Na etapa seguinte de cálculos, utiliza-se o método proposto por HSIEH (1991). O primeiro passo deste é testar a estacionariedade dos dados. Caso ela seja verificada, ajusta-se um modelo autorregressivo, média móvel, com o número de defasagens escolhido, por exemplo, pelo critério de AKAIKE (1970)¹⁸. Em seguida, analisam-se os resíduos deste modelo econométrico com estatísticas BDS (descritas a seguir). Com efeito, a rejeição da hipótese nula neste caso indica a presença de não linearidades nos dados.

A seguir, o modelo linear é expandido para tentar computar as não linearidades. Como elas podem estar presentes tanto na equação média quanto na variância, espera-se que um modelo do tipo ARMA – GARCH–M, isto é, autorregressivo, média móvel com heterocedasticidade condicional generalizada na variância e na equação média, seja capaz de captar todas as relações lineares e não lineares da série, exceto pela caótica, se esta estiver presente.

Nesse sentido, ao estimar uma regressão minimamente bem especificada segundo o critério de AKAIKE (1970), pode-se, assim, eliminar as dependências lineares e não-lineares dos resíduos padronizados, de modo que estes se comportem como uma série *iid* produzindo, com isso, estatísticas BDS não significativas; caso contrário, conclui-se pela provável presença de caos nas séries.

Uma resenha completa de modelos de volatilidade estocástica aplicada a mercados financeiros é disponibilizada por POON e GRANGER (2003). Aqui se expõe

¹⁸ Normalmente, este critério é suficiente, a despeito da existência de outros.

somente o modelo básico utilizado como ponto de partida nesta pesquisa, o GARCH-M (p, q). Entretanto, em muitos estudos o modelo GARCH (1, 1) é suficiente. Para exemplos, consultar AKIGIRAY (1989), ANDERSEN e BOLLERSLEV (1998), ANDERSEN, *et al.* (2002), entre outros.

A análise de volatilidade foi introduzida por ENGLE (1982) numa classe de modelos conhecida como ARCH, que se traduz para heterocedasticidade condicional autorregressiva. Entre os objetivos iniciais desta metodologia podem-se listar os seguintes: analisar o risco de ativos financeiros ou o valor de opções; obter intervalos de confiança mais acurados para os parâmetros; ou melhorar a eficiência dos estimadores na presença da heterocedasticidade, entre outros. Em seguida BOLLERSLEV (1986) e TAYLOR (1986) generalizaram esta metodologia denominando-a de GARCH (ARCH - generalizado).

O modelo de não linear de partida é ilustrado a seguir. Seja $y_t (= x_t - \tilde{x}_t)$ a série cíclica a ser estimada. Então, um modelo GARCH-M (p, q) assume a seguinte formulação:

$$y_t = Y_t' \theta + \lambda \sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.3)$$

Na especificação descrita, (3.2) é conhecida como equação média; Y_t' é uma matriz de variáveis independentes podendo incluir termos autorregressivos e de média móvel de y , como é o caso desta pesquisa, e variáveis exógenas; θ é um vetor de parâmetros; σ_t^2 é a variância condicional generalizada, com seu respectivo parâmetro λ ; e, ε é o termo de erro.

Por sua vez, a variância do erro é modelada em (3.3). Ela contém um termo constante, c ; outro termo, conhecido como parcela ARCH, está relacionado às inovações sobre a volatilidade do período prévio incorporadas à estimação, ε_{t-1}^2 ; e, por fim, a parcela referente à previsão da variância do último período, σ_{t-j}^2 conhecido como parcela GARCH. Acima, β_j e α_i denotam os parâmetros referentes a cada variável inclusa na equação (3.3).

Para a variância ser estimada em um valor positivo, o somatório dos β_j e dos α_i deve ser sempre menor do que um. Entretanto, muitas vezes essa soma aproxima-se muito de um, o que faz com que os choques sofridos pelo modelo dissipem-se lentamente ao longo do tempo.

No caso da constatação estatística de que esses coeficientes somam a unidade, a variância condicional apresentará persistência infinita, que pode ser resultado de alguma tendência na variância, ou de uma mudança estrutural nesta tendência. Deste modo, o modelo mais adequado a ser estimado torna-se o conhecido como IGARCH, ou GARCH integrado, inicialmente desenvolvido por ENGLE e BOLLERSLEV (1986). Basicamente, a diferença deste para os modelos GARCH clássicos está na restrição inserida (de que os coeficientes somam um) e, por consequência disto, na retirada da constante da equação da variância.

Há evidências de que as séries econômicas brasileiras apresentam persistência a choques. Em MORAIS e PORTUGAL (1999), por exemplo, a série de retornos do Ibovespa, o índice da bolsa de valores de São Paulo, foi bem ajustada pelo modelo GARCH simples com a soma dos coeficientes chegando a 0,99.

Para completar a especificação do GARCH-M básico, resta fazer considerações acerca das possíveis distribuições do termo de erro ε . As suposições mais comuns, e normalmente empregadas, são as de distribuição Gaussiana, distribuição *t*-Student e a distribuição generalizada do erro (GED). A escolha da melhor distribuição, em geral, pode visar à minimização do desvio dos resíduos padronizados em relação à distribuição normal, pois em geral, resíduos GARCH possuem elevada curtose (são leptocúrticos). Escolhida a suposição acerca da distribuição dos resíduos, a estimação em modelos GARCH se dá por maximização da função de verossimilhança.

Nesta pesquisa, como é de praxe, a especificação da regressão (3.2) e da estimação da variância, (3.3), foi auxiliada pelo critério de informação de AKAIKE (1970).

A última etapa necessária aos cálculos desta pesquisa é testar se os resíduos padronizados da estimação não linear adequada são independentes e identicamente distribuídos (*iid*) pelo teste conhecido como BDS (BROCK *et al.*, 1987). Caso isso seja rejeitado, HSIEH (1991) indica que existem indícios de caos nas séries analisadas.

O teste BDS, desenvolvido por BROCK *et al.* (1987) mede o grau de dependência em uma série. Em sua hipótese nula a série é *iid*, podendo ser testada contra uma variedade de alternativas, a saber: dependência linear, não-linear ou caos.

A idéia básica desta estatística é a seguinte: escolhida uma distância máxima de comparação de pontos ϵ , então, para quaisquer pares de pontos, se a série é realmente *iid*, a probabilidade da distância entre os pontos ser menor ou igual a ϵ será constante. Denota-se esta probabilidade por $c_1(\epsilon)$.

Constroem-se, agora, conjuntos de pares de pontos escolhidos através de observações consecutivas da amostra, isto é, dados os pontos z_t e z_s da série de resíduos padronizados do modelo não linear, o conjunto terá a seguinte forma:

$$\{\{z_s, z_t\}, \{z_{s+1}, z_{t+1}\}, \{z_{s+2}, z_{t+2}\}, \dots, \{z_{s+m-1}, z_{t+m-1}\}\}. \quad (3.4)$$

Em que m é o número de sucessivos pontos do conjunto, também conhecido como dimensão de imersão.

Denota-se, então, a probabilidade conjunta de todos os pares de pontos pertencentes ao conjunto satisfazerem a condição de ϵ por $c_m(\epsilon)$. Sob a suposição de independência, esta probabilidade será simplesmente o produto das probabilidades individuais de cada par de pontos, ou seja:

$$c_m(\epsilon) = c_1^m(\epsilon) \quad (3.5)$$

No caso de dados amostrais, $c_m(\epsilon)$ e $c_1(\epsilon)$ devem ser estimadas e, por isso, a equação (3.5) não é verificada exatamente, mas sim com algum erro. Quanto maior este erro, menor a probabilidade de que ele seja gerado por uma variação aleatória. Assim, a estatística BDS fornece uma base formal para o julgamento do tamanho desse erro.

Para estimar a probabilidade de uma dimensão em particular, coletam-se todos os possíveis grupos de uma dada duração (intervalo de tempo entre pontos) e observam-se quantos deles obedeceu à condição ϵ . A razão destes conjuntos pelo total de conjuntos possíveis de serem formados fornece a estimativa da probabilidade.

Dada a série de erros ε com n pontos amostrais, a formulação matemática desta probabilidade é:

$$c_{m,n}(\epsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=1}^{n-m+1} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} I_{\epsilon}(z_{s+j}, z_{t+j}) \quad (3.6)$$

em que I_{ϵ} é uma função indicador que assume o valor 1 se o módulo da distância entre dois pontos for menor ou igual a ϵ e zero, caso contrário. A estatística $c_{m,n}$ é conhecida como integral de correlação.

O teste de independência é construído da seguinte maneira:

$$b_{n,m}(\epsilon) = c_{n,m}(\epsilon) - c_{1,n-m+1}(\epsilon)^m \quad (3.7)$$

Sob a suposição de independência, BROCK *et al.* (1987) mostraram que $(\sqrt{n-m+1}) b_{n,m} / \sigma_{n,m}$ segue uma distribuição aproximadamente normal, com média zero e variância 1. Assim, o p-valor da hipótese nula pode ser calculado a partir das informações da distribuição normal padronizada. Entretanto, neste artigo também se analisam os p-valores empíricos gerados por 10^4 simulações *bootstrap*. A estatística para o cálculo de $\sigma_{m,n}^2$ pode ser consultada no artigo que baseia esta seção.

É conveniente agora, resumir os procedimentos listados nessa seção para um melhor entendimento. As séries macroeconômicas analisadas nesta pesquisa são, em um primeiro momento, decompostas em seus componentes estruturais, por intermédio do método de HODRICK e PRESCOTT (1997), donde se retém as parcelas cíclicas e irregulares destas. Esses componentes são, em seguida, ajustados em um modelo ARMA – GARCH-M com um intuito de se obter resíduos padronizados aparentemente ruídos brancos. Por fim, emprega-se o teste BDS sobre esses resíduos. Como defende HSIEH (1991), se são eliminadas dependências lineares e não-lineares dos dados por intermédio dos modelos estimados e não há evidências de quebras estruturais nestes, a ocorrência de estatísticas BDS significativas é um indicativo da presença de caos determinístico na dinâmica das séries temporais analisadas.

4. Resultados

4.1. Primeira hipótese: linearidade versus não linearidade nos ciclos econômicos brasileiros

A primeira parte desta seção focaliza-se na verificação de possíveis não linearidades nos ciclos econômicos brasileiros, através de análises da série da produção industrial total e da série da produção de bens de capital deste país. Inicia-se pela primeira delas, considerada como uma boa aproximação para a produção geral da economia brasileira. Esta série, de periodicidade mensal, é fornecida pelo IBGE e contém 419 pontos amostrais, variando de janeiro de 1975 até novembro de 2009. Em seguida, analisa-se a série da produção industrial de bens de capital, considerada como *proxy* para o investimento.

Primeiramente, a série da produção industrial total foi logaritmizada e, por não estar corrigida para os efeitos da sazonalidade, foi filtrada através do método *Census X12* multiplicativo, desenvolvido pelo *U. S. Census Bureau*. Os resultados podem ser vistos na Figura 4.1, a seguir, que indicam que o processo de dessazonalização foi satisfatório.

Porém, antes de prosseguir com os procedimentos descritos na Metodologia desta pesquisa, é interessante verificar o que a série do produto total diz a respeito dos ciclos econômicos brasileiros, de 1975 adiante, quanto à sua duração, intensidade, entre outros aspectos. De um modo geral, é fácil visualizar através da Figura 4.1 que no período analisado a economia brasileira passou por uma fase de crescimento, porém com momentos de maior ou menor instabilidade, que são caracterizados pela Tabela 2, a seguir.

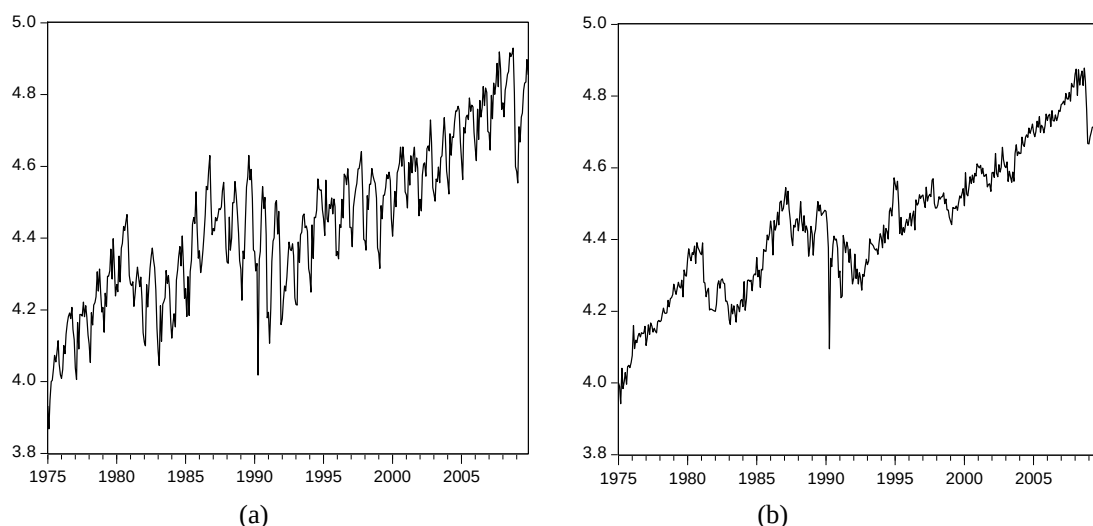


Figura 4.1: Logaritmo natural da produção industrial, indústria geral, índice quantum, média 2002 = 100 (a); série dessazonalizada, filtro *Census X12* (b).

Fonte: Resultados da pesquisa.

Nesta tabela, os períodos foram divididos em quinquênios para fins de facilitar a análise. Ademais, não se pretendeu com isso fixar, ou mesmo, estimar uma data para a amplitude das movimentações da série em questão. Suas segunda e a terceira colunas informam sobre a data trimestral em que ocorreram o pico e o vale da produção industrial em cada subdivisão de tempo, enquanto que, na coluna denominada “contração” consta a duração em meses de cada movimento entre um pico prévio e o vale do quinquênio em questão e; de maneira contrária, a coluna “expansão” mostra a duração em meses da passagem de um vale prévio até o pico do período analisado. As colunas “queda” e “crescimento” exibem, respectivamente, a variação percentual total da redução ou da alta do período e estas taxas em termos mensais. Por fim, a coluna “amplitude” traz o período em meses no qual a economia passa de um pico a outro, ou de um vale a outro.

É possível verificar, de acordo com a Tabela 2, que no período de 1975-79 houve um crescimento razoável da produção industrial, com o pico ocorrendo no último trimestre de 1979, face ao vale ocorrido no início de 1975. Com isso, este período pode ser classificado como de uma sustentada expansão da produção, a qual durou 56 meses, e com a taxa de crescimento média mensal alcançando o maior valor dentre todos os períodos aqui analisados. Esse período corresponde à implementação do II PND, etapa do processo de substituição de importações de bens intermediários e, parte, de bens de

capital, financiado pelos eurodólares, formado pelo aumento substancial do preço do petróleo¹⁹.

Em seguida a este período, a economia brasileira passou por forte crise da dívida externa que surtiu reflexos na produção industrial. O aumento da taxa de juros internacionais, com a alta da inflação, e o elevado grau de endividamento dos países denominados “em desenvolvimento” com o intuito de prosseguirem no processo de industrialização, produziu a incapacidade da maioria destes, incluindo o Brasil, de honrar suas dívidas. Com isso, os bancos estrangeiros credores cortaram drasticamente o aporte de capitais para essas economias. Com início no terceiro trimestre de 1980, a queda da atividade econômica na economia brasileira permaneceu até o fim de 1983, durando 35 meses, em que se verificou uma redução de quase 23% no índice de produção.

Há que se notar ainda, a grande duração das oscilações da economia brasileira neste início de período, ilustrada na coluna “amplitude” da tabela em questão. Por exemplo, para completar um ciclo do tipo “pico-pico”, isto é, o período em que a economia sai de um pico até alcançar o próximo, foram necessários quase dez anos, o que mostra que a produção brasileira entre 1975 e 1994 era bastante suscetível a choques e levava tempo para se restabelecer, dadas as incertezas produzidas por problemas estruturais de alto nível de inflação, déficit público e dívida externa.

Entre 1985 e 1989 houve outro período em que vigorou a expansão da atividade econômica com duração elevada, de 51 meses, porém, neste período a taxa de crescimento, de cerca de 24%, foi bem inferior à calculada para os anos anteriores compreendidos entre 1975 e 1979. Essa expansão, em grande parte, deve-se à filosofia do plano de estabilização implementado em 1986 (Plano Cruzado), que associava estabilização com crescimento. O congelamento de preços efetuado, sem controle do poder de compra, contudo, permitiram um vigoroso nível de atividade produtiva, mas com o agravamento da inflação à medida que essa política se tornava insustentável.

A possibilidade de hiperinflação produziu mais um plano (Plano Collor), que reduziu drasticamente os haveres monetários e não-monetários da economia, produzindo a partir dos anos de 1990, uma grave crise econômica que durou até 1992 (perfazendo 34 meses de recessão), sem, contudo, resolver o problema da inflação

¹⁹ Sobre a economia brasileira e a crise da dívida externa internacional ver, por exemplo, ABREU (1992), BAER (1994), GIAMBIAGI (2005) e MOFFIT (1984).

inercial, que retornou de forma ainda agressiva. Deve-se destacar que por um período de cinco meses entre os anos de 1990-91, sua produção industrial verificou uma queda de quase 38%.

Tabela 2: Características dos ciclos econômicos no Brasil

<i>Ciclos de Negócios</i>	<i>Pico</i>	<i>Vale</i>	<i>Contração*</i>	<i>Queda</i>	<i>Expansão*</i>	<i>Crescimento</i>	<i>Amplitude</i>	
	<i>Datas trimestrais</i>		<i>Pico prévio a este vale</i>	<i>(%; % a.m.)</i>	<i>Vale prévio a este pico</i>	<i>(%; % a.m.)</i>	<i>Pico-pico</i>	<i>Vale-vale</i>
1975-79	1979 .IV	1975 .I	---	---	56	37,44; 0,67	---	---
1980-84	1980 .III	1983 .III	35	22,35; 0,64	---	---	117	100
1985-89	1989 .II	1985 .II	---	---	51	23,87; 0,47	36	62
1990-91	1989 .IV	1990 .II	5	37,71; 7,54	---	---	---	---
1990-94	1989 .IV	1992 .III	34	22,22; 0,65	---	---	59	103
1995-99	1999 .IV	1995 .II	---	---	56	12,42; 0,22	57	58
2000-04	2004 .IV	2000 .I	---	---	60	18,83; 0,31	36	55
2005-09	2008 .III	2005 .I	---	---	44	17,67; 0,40	40	33
2008-09	2008 .III	2009 .I	4	20,36; 5,09	---	---	---	---
Média	---		34,5	22,29; 0,65	53,4	22,04; 0,41	57,5	68,5

Fonte: Resultados da pesquisa e dados do IBGE. Nota (*): as entradas das colunas destacadas com o asterisco representam a duração das contrações e expansões em meses.

Após os anos de 1994, com a implantação de um plano de estabilização bem-sucedido, o Plano Real, a economia brasileira registrou uma drástica redução na sua instabilidade característica dos períodos anteriores, apesar do período inicial ter apresentado baixas taxas de crescimento, devido à priorização da estabilidade econômica. Entre os anos de 1995 e 2008 a produção industrial cresceu, em média, a pequenas taxas mensais de 0,2%; entre 1995-1999; de 0,3% entre 2000-2004; e de 0,4% entre 2005 e 2009. Além disso, os ciclos brasileiros ficaram mais suaves, isto é, sua duração se reduziu a menos de 48 meses em média. Tal constância da economia só foi

realmente perturbada pela crise econômica e financeira mundial do fim do ano de 2008 que gerou uma redução de 20% na produção industrial do país em apenas quatro meses.

Com base na análise da Tabela 2, pretendeu-se mostrar que apesar da tendência de alta na produção industrial de todo o período para o Brasil, esta elevação, ao contrário de ser suave, apresentou ciclos contundentes, principalmente até o ano de 1994. Portanto, prossegue-se com a análise, aplicando o filtro HP sobre a série de dados.

A Figura 4.2, a seguir, ilustra as séries obtidas com o referido filtro. Na sua parte superior encontram-se a série original e a tendência de longo-prazo estimada utilizando o valor de 14400 para o parâmetro de controle de sua suavidade. Na parte inferior da figura, exibe-se a série cíclica da produção industrial brasileira, a qual é a de interesse nesta pesquisa, adicionada do seu componente irregular.

A série cíclica da produção industrial brasileira é bem centrada em zero, de fato, sua média se aproxima deste valor, porém, sua distribuição de frequência difere-se em muito de uma normal. Deve-se isto à sua elevada curtose, que foi de 7,97, e sua leve assimetria à esquerda, como pode ser visto pelo valor encontrado de -0,67 para esta estatística.

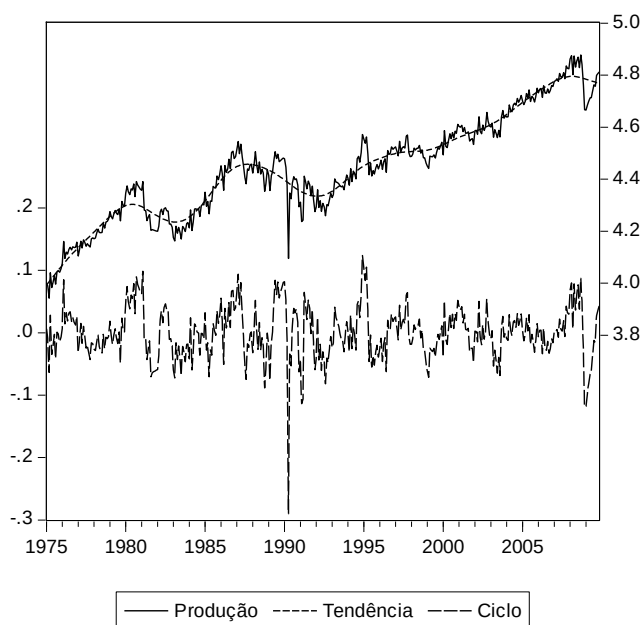


Figura 4.2: Resultado da aplicação do filtro HP na série da produção industrial brasileira, índice quantum, média 2002 = 100, 1975.1-2009.11.

Fonte: Resultados da pesquisa.

O maior desvio positivo em torno da tendência de longo-prazo ocorreu em dezembro de 1994, com o valor de 0,12. Por sua vez, a queda mais acentuada aconteceu em abril de 1990, com o valor de -0,29. A Tabela 3, a seguir, resume estes resultados e traz, ainda, as estatísticas descritivas para intervalos de valores.

Tabela 3: Estatísticas descritivas da série cíclica do produto brasileiro 1975-2009

Ciclos – categorias	Média	Máx.	Mín.	Desv. padrão	Assimetria	Curtose	Observa ções
[-0,3; -0,2)	-0,29	-0,29	-0,29	---	---	---	1
[-0,2; -0,1)	-0,11	-0,11	-0,12	0,01	0,72	1,90	4
[-0,1; 0)	-0,03	0,00	-0,10	0,02	-0,86	3,04	209
[0; 0,1)	0,03	0,10	0,00	0,02	0,77	2,71	202
[0,1; 0,2)	0,11	0,12	0,10	0,01	0,68	1,50	3
Todos	0,00	0,12	-0,29	0,04	-0,67	7,97	419

Fonte: Resultados da pesquisa.

Como dito anteriormente, há uma leve predominância de valores negativos para a série cíclica, pois a soma das ocorrências para o intervalo de valores compreendidos entre [-0,3; 0) é igual a 214, enquanto que para o intervalo de [0; 0,2) é de 205. Adicionalmente, a grande maioria dos desvios em torno da tendência de longo-prazo encontram-se entre [-0,1; 0,1) somando-se 411 observações as quais equivalem a 98% do total.

Um pré-requisito para a modelagem de regressões do tipo ARMA – GARCH é testar para a estacionariedade da série cíclica da produção, o que é feito na Tabela 4. Todos os testes efetuados, a saber, Dickey-Fuller aumentado (ADF), Phillips-Perron e KPSS, foram unânimes quanto à rejeição da raiz unitária em nível, mostrando que a série cíclica do produto industrial brasileiro é estacionária. Tal característica da série é estatisticamente desejável, no sentido de que evita sua diferenciação, reduzindo a amostra, e a torna passível de ser estimada sem maiores problemas.

Tabela 4: Testes de estacionariedade da série cíclica do produto brasileiro em nível

Teste	Hipótese nula	Termos inclusos	Estatística calculada	Estatística tabelada (5%)	Conclusão
ADF	Raiz unitária	Nenhum	-5,11	-1,94	Estacionária
ADF	Raiz unitária	Constante	-5,10	-2,87	Estacionária
ADF	Raiz unitária	Tendência e constante	-5,10	-3,42	Estacionária
Phillips-Perron	Raiz unitária	Nenhum	-10,84	-1,94	Estacionária
Phillips-Perron	Raiz unitária	Tendência e constante	-10,82	-3,42	Estacionária
KPSS	Estacionariedade	Tendência e constante	0,017	0,146	Estacionária

Fonte: Resultados da pesquisa.

Testa-se, agora, a hipótese de linearidade nos ciclos da produção industrial total brasileira. Para tal, ajusta-se um modelo ARMA (p, q) adequado, em que as parcelas AR e MA são selecionadas pelo critério de bom ajustamento de AKAIKE (1970), de maneira que os resíduos desta regressão não apresentem sinais de dependência temporal, para então analisá-los com a estatística BDS.

Ao proceder da maneira descrita, encontraram-se quatro defasagens para ambos os termos AR e MA como minimizadores do critério Akaike, entretanto, esta regressão obteve estatísticas F significativas no teste de autocorrelação do multiplicador de Lagrange para defasagens superiores a doze períodos, o que indicou a presença de padrões de dependência temporal remanescentes. Para solucionar esta dificuldade, adicionaram-se defasagens de ordens superiores, múltiplas de doze, com o intuito de remover esta dependência temporal. Adicionalmente, esta regressão apresentou heterocedasticidade pelo teste ARCH, com um F calculado de 13,6 para um e 380 graus de liberdade no numerador e denominador, respectivamente. Portanto, o estimador da covariância dos coeficientes listados a seguir, na Tabela 5, são os da ponderação de White.

O modelo obteve um bom ajustamento, evidenciado pelo coeficiente de determinação de 50%, e sua significância global é atestada pela estatística F de 33,5 e seu p-valor associado inferior a 1%. Em adição, todas as raízes inversas dos termos ARMA encontraram-se dentro do círculo unitário o que garante sua estabilidade e inversibilidade.

A estatística de Durbin-Watson, próxima a dois, indica que não há autocorrelação na regressão, entretanto este teste não é o mais adequado aqui. Os testes do multiplicador de Lagrange para 12, 24, 36, 48 e 60 defasagens confirmam, contudo, essa ausência de autocorrelação nos resíduos. O modelo estimado encontra-se ilustrado a seguir, na Tabela 5.

Tabela 5: Saídas da estimação do modelo linear – produção geral

Variável	Coefficiente	Erro-padrão	P-valor
Constante	0,000	0,002	0,914
AR(1)	0,247	0,157	0,117
AR(2)	-0,156	0,061	0,011
AR(3)	0,544	0,052	0,000
AR(4)	-0,304	0,142	0,033
AR(12)	-0,200	0,051	0,000
AR(24)	-0,188	0,047	0,000
AR(36)	-0,218	0,052	0,000
MA(1)	0,281	0,157	0,075
MA(2)	0,503	0,122	0,000
MA(3)	-0,242	0,129	0,061
MA(4)	0,195	0,079	0,014
$R^2 = 50\%$	$F_{\text{calc}} = 33,5$	Akaike = -4,08	$SQ_{\text{res}} = 0,36$
$R^2_{\text{ajust}} = 48\%$	$F_{\text{prob}} = 0,00$	$DW_{\text{calc}} = 1,98$	Observações = 383

Fonte: Resultados da pesquisa.

Resta saber, agora, se o modelo linear é o mais adequado para explicar seus movimentos cíclicos da produção industrial total brasileira. Para tal, analisam-se os resíduos do processo de estimação evidenciado na Tabela 5. Apesar de obter uma média centrada em zero, estes apresentaram uma forte assimetria à esquerda, de -1,75, e elevada curtose, de 19, o que fez sua distribuição se distanciar consideravelmente da normal. A hipótese de que esta série tenha sido gerada por um mecanismo *iid*, é testada a seguir, na Tabela 6, que traz os resultados do teste BDS.

Nesta última tabela citada, calcularam-se as estatísticas BDS para distâncias de separação variando de 0,5 a 2 desvios-padrão (dado que o desvio-padrão calculado para a série foi de 0,03). Assim, para separações iguais ou superiores a 0,015, as quais implicam $\epsilon \geq 0,5$ D.P., a hipótese de erros *iid* foi rejeitada ao nível de 1% de significância para a grande maioria dos casos calculados.

Tal fato fornece indicativos suficientes para constatar que, a despeito do teste multiplicador de Lagrange terem indicado resíduos independentes, ainda há resquícios

de algum elo entre eles, evidenciado pelo elevado número de estatísticas BDS significativas.

No contexto da discussão em questão, este resultado fornece provas fortes de que a série cíclica do produto total brasileiro exhibe componentes não-lineares que deveriam ser considerados em pesquisas empíricas e teóricas que tratam deste tema. Tal resultado fora encontrado anteriormente por outros autores como BROCK e SAYERS (1988) que evidenciaram a presença de não-linearidades nas séries de emprego, desemprego, produção industrial e de ferro-gusa norte-americanas, e SCHEINKMAN e LEBARON (1989a) que obtiveram resultados similares ao analisar séries financeiras diárias e semanais desse país.

Tabela 6: Teste de independência dos resíduos do modelo linear* - produção geral

Dimensão	$\epsilon = 0,5 \text{ DP}$			$\epsilon = 1 \text{ DV}$		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	0,007	0,000	0,008	0,015	0,000	0,001
3	0,006	0,000	0,006	0,024	0,000	0,000
4	0,004	0,000	0,008	0,024	0,000	0,000
5	0,002	0,000	0,025	0,023	0,000	0,001
6	0,001	0,000	0,031	0,021	0,000	0,001
Dimensão	$\epsilon = 1,5 \text{ DV}$			$\epsilon = 2 \text{ DV}$		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	0,014	0,000	0,001	0,009	0,000	0,004
3	0,030	0,000	0,000	0,021	0,000	0,001
4	0,039	0,000	0,000	0,029	0,000	0,001
5	0,047	0,000	0,000	0,038	0,000	0,000
6	0,052	0,000	0,000	0,047	0,000	0,000

Fonte: Resultados da pesquisa. Nota (*): probabilidades *bootstrap* calculadas com 10^4 simulações.

Passa-se, neste momento, para a verificação da hipótese da linearidade nos ciclos do investimento brasileiro. Para tal, utiliza-se como *proxy* a série de produção de bens de capital, de periodicidade mensal e variando entre janeiro de 1975 e novembro de 2009. Considera-se que ela seja uma boa aproximação para a série de investimento, variável macroeconômica que, classicamente, apresenta ser bastante instável. A Figura 4.2, a seguir, traz a série original logaritmizada, e sua versão dessazonalizada com o filtro *Census X12* multiplicativo, utilizado anteriormente.

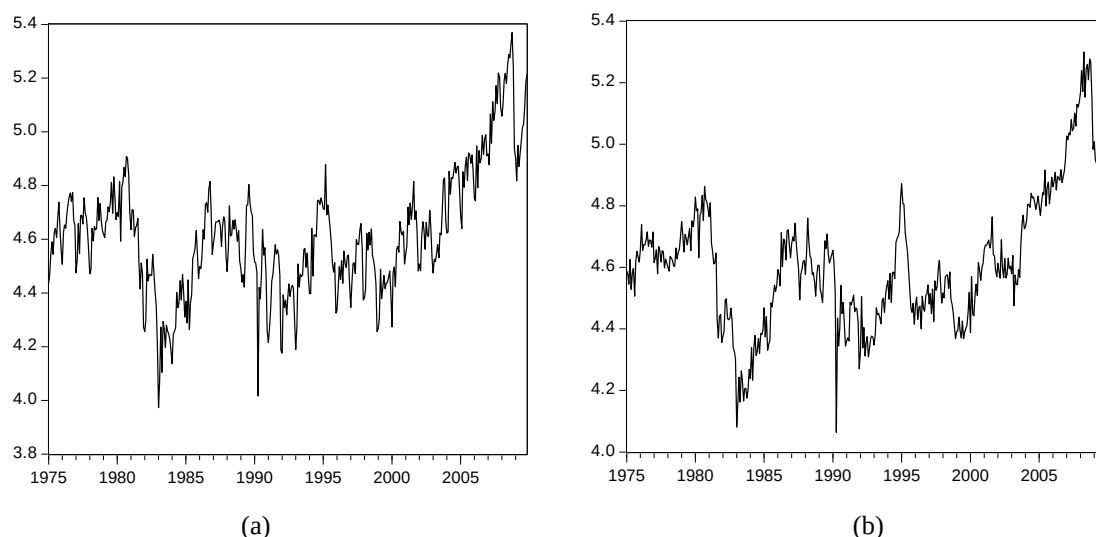


Figura 4.2: Logaritmo natural da produção industrial de bens de capital, índice quantum, média 2002 = 100 (a); série dessazonalizada, filtro *Census X12* (b).
Fonte: Resultados da pesquisa.

Pode-se observar que a série da produção de bens de capital mostrou-se mais instável do que a da produção geral, pois entre os anos de 1975 e 2000 não há uma tendência clara de crescimento desta. Tal fato é bem ilustrado pela Tabela 7, a seguir, que compara o coeficiente de variação da média (CV) destas duas séries.

De acordo com esta tabela, pode-se ver que somente entre 1990 e 1994 houve uma igualdade da, por assim dizer, volatilidade da série de produção em relação à série do investimento. Isto pode ser reflexo do efeito depressivo das políticas macroeconômicas efetuadas neste período e destacadas anteriormente sobre a atividade industrial como um todo. Nos outros anos, ao contrário, os desvios em torno da média foram mais acentuados na *proxy* do investimento em relação à *proxy* do produto, porém, em geral, as oscilações aconteceram no mesmo sentido em ambas as séries. Isto indica que, apesar dos ciclos nestes agregados responderem na mesma direção aos choques recebidos, entretanto, a série do investimento apresenta maior sensibilidade a estas perturbações do que a série do produto.

Tabela 7: Comparação dos desvios em torno da média das séries cíclicas do produto e investimento no Brasil entre 1975 e 2009

Período (anos)	1975-79	1980-84	1985-89	1990-94	1995-99	2000-04	2005-09
CV – produção (a)	-19,4	-0,3	25,7	-11,6	-7,6	9,9	0,2
CV – investimento (b)	-21,5	-1,1	30,9	-11,6	-8,0	14,0	-2,8
Relação (b)/(a)	10,7	247,4	20,5	0,0	5,6	40,7	-1306,7

Fonte: Resultados da pesquisa.

Ao analisar a série da produção de bens de capital período a período, percebe-se que na fase de crescimento econômico entre 1975 e 1980, houve pequeno crescimento na produção de máquinas e equipamentos, em torno de 8,5%, face aos 37% de aumento da produção industrial geral. Por outro lado, no quinquênio seguinte, no qual a economia brasileira passou por forte crise, a queda da atividade da indústria de bens de capital chegou a 21%.

Após o final do ano de 1984, a série se recupera até os níveis anteriores, sofrendo, entretanto, nova forte queda influenciada pela crise dos anos de 1990 e 1991, período no qual a produção de bens de capital atingiu seu mínimo global, em abril de 1990, caindo aproximadamente 16% em apenas seis meses.

Após os anos de 1994, mesmo com a implantação do Plano Real, a série continua oscilante, alcançando um pico em março de 1995, no entanto, aumentando mais consistentemente apenas ao início do ano 2000, como pode ser visto na Figura 4.2, anteriormente.

Prossegue-se, neste momento, com o filtro HP para extrair a série cíclica da produção de bens de capital. Utilizam-se os mesmos parâmetros sugeridos pela literatura especializada, obtendo-se a decomposição ilustrada pela Figura 4.3, a seguir. A série cíclica em seus anos iniciais é bastante similar àquela em nível, exceto por um suave componente de tendência que, a partir do ano 2000, torna-se mais inclinado.

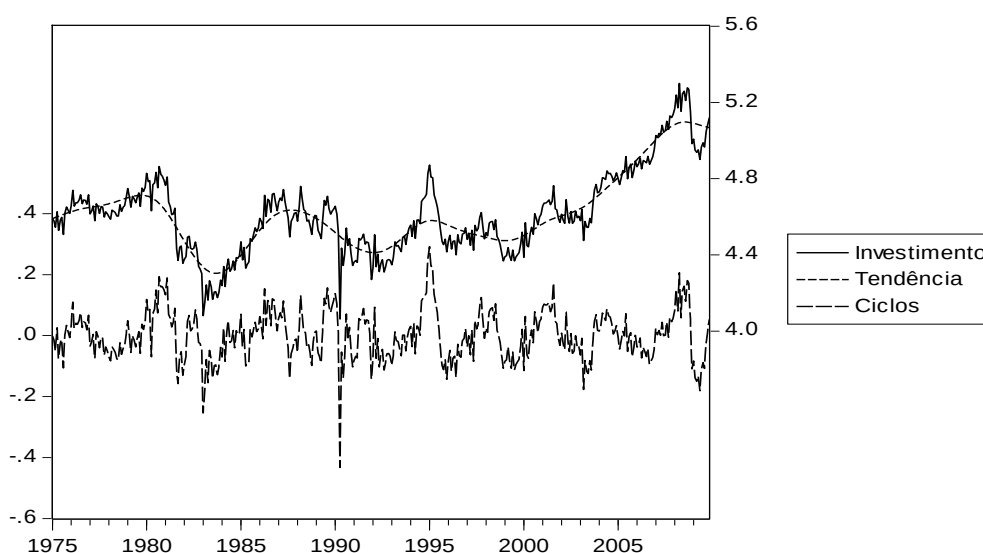


Figura 4.3: Resultado da aplicação do filtro HP na série da produção de bens de capital brasileira, índice quantum, média 2002 = 100, 1975.1-2009.11.
Fonte: Resultados da pesquisa.

As estatísticas descritivas da série anterior encontram-se na Tabela 8. Como pode ser visto, existiram duas quedas mais acentuadas nesta série, uma de 25%, em janeiro de 1983, e outra de 43%, em abril de 1990. Neste primeiro ano destacado, inclusive, ocorreram sucessivas quedas na produção de bens de capital brasileira de elevada magnitude. Por outro lado, a maior elevação na produção, de 29%, aconteceu em janeiro de 1995, e de julho de 1994 à julho de 1995 a série da produção de bens de capital esteve consistentemente acima de sua tendência de longo-prazo, o que refletiu em vários desvios positivos.

Sua assimetria foi razoável, levemente concentrada na cauda esquerda, com um valor de -0,03, porém, a curtose foi elevada, sendo calculada em 4,77, o que a desviou da distribuição normal. Isto porque os desvios em torno da tendência, em sua maioria, encontraram-se concentrado entre [-0,2; 0,2).

Tabela 8: Estatísticas descritivas da série cíclica da produção de bens de capital brasileira

Ciclos - categorias	Média	Máx.	Mín.	Desv. Padrão	Assimetria	Curtose	Observa- ções
[-0,6; -0,4)	-0,43	-0,43	-0,43	---	---	---	1
[-0,4; -0,2)	-0,25	-0,25	-0,25	---	---	---	1
[-0,2; 0)	-0,06	0,00	-0,18	0,04	-0,57	2,89	207
[0; 0,2)	0,06	0,19	0,00	0,05	0,84	2,98	205
[0,2; 0,4)	0,24	0,29	0,21	0,03	0,81	2,40	5
Todos	0,00	0,29	-0,43	0,08	-0,03	4,77	419

Fonte: Resultados da pesquisa.

Averigua-se, neste momento, a hipótese de linearidade da série cíclica da produção de bens de capital no Brasil. A metodologia segue a lógica de seção anterior, isto é, verifica-se a presença ou não de raiz unitária na série para, em seguida, ajustar uma regressão linear ARMA (p, q) e, então, analisar os seus resíduos.

Para tanto, na Tabela 9, a seguir, ilustram-se os resultados dos testes de raízes unitárias. Como anteriormente, todos os testes indicaram estacionariedade, o que possibilita a modelagem das regressões sem maiores operações.

Tabela 9: Testes de estacionariedade da série cíclica da produção de bens de capital brasileira em nível

Teste	Hipótese nula	Termos inclusos	Estatística calculada	Estatística tabelada (5%)	Conclusão
ADF	Raiz unitária	Nenhum	-6,78	-1,94	Estacionária
ADF	Raiz unitária	Constante	-6,78	-2,87	Estacionária
ADF	Raiz unitária	Tendência e constante	-6,77	-3,42	Estacionária
Phillips-Perron	Raiz unitária	Nenhum	-9,71	-1,94	Estacionária
Phillips-Perron	Raiz unitária	Tendência e constante	-9,69	-3,42	Estacionária
KPSS	Estacionariedade	Tendência e constante	0,017	0,146	Estacionária

Fonte: Resultados da pesquisa.

A seguir, apresentam-se as saídas da estimação do modelo linear, na Tabela 10. Provavelmente por exibir maior sensibilidade a choques, a série de produção de bens de capital necessitou de mais defasagens para que fosse eliminada a autocorrelação dos resíduos segundo o teste multiplicador de Lagrange, para 12, 24, 48, e 60 *lags*. Estimou-se, assim, uma regressão ARMA (4, 4), selecionada pelo critério de Akaike (1970), adicionada dos termos autorregressivos de ordem superior.

A matriz de covariância dos coeficientes foi ponderada pelo método de White, devido ao teste de heterocedasticidade ARCH ter indicado a presença desta através da estatística F calculada de 5,26, para um e 368 graus de liberdade no numerador e denominador, respectivamente, que obteve um p-valor de 2,2%.

Quanto à qualidade do ajuste, esta foi satisfatória, com o coeficiente de determinação atingindo 59%, e o teste F, que mede a significância global do modelo, sendo significativo mesmo a um α de 1%.

Tabela 10: Saídas da estimação do modelo linear para a produção de bens de capital

Variável	Coefficiente	Erro-padrão	P-valor
Constante	0.001	0.004	0.879
AR(1)	0.163	0.152	0.282
AR(2)	-0.035	0.079	0.658
AR(3)	0.420	0.086	0.000
AR(4)	-0.054	0.129	0.674
AR(12)	-0.197	0.040	0.000
AR(24)	-0.328	0.069	0.000
MA(36)	-0.181	0.061	0.003
MA(48)	-0.178	0.081	0.029
MA(1)	0.334	0.152	0.029
MA(2)	0.449	0.121	0.000
MA(3)	-0.083	0.129	0.517
MA(4)	0.032	0.068	0.637
$R^2 = 58\%$	$F_{calc} = 41,03$	Akaike = -2,89	$SQ_{res} = 1,13$
$R^2_{ajust} = 56\%$	$F_{prob} = 0,00$	DW _{calc} = 2,00	Observações = 371

Fonte: Resultados da pesquisa.

Deve-se, agora, analisar a independência dos resíduos do modelo linear para a produção de bens de capital. A Tabela 11 traz as estatísticas BDS para esta hipótese. Ao analisar as probabilidades *bootstrap*, mais confiáveis neste caso, percebe-se que a 1% de significância a hipótese de erros *iid* é rejeitada em 12 dos 20 casos. Adicionalmente, para 95% de confiança não se rejeita a ocorrência de não linearidade em 19 dos 20 cálculos efetuados. Em suma, estes resultados indicam a modelagem não linear para o investimento como mais apropriada.

Em modelos de ciclos econômicos não-lineares, crises e *booms* podem surgir internamente, podendo se agravar através de processos retroalimentadores que aumentam o grau de incerteza dos agentes. Adicionalmente, não linearidade implica a possibilidade de múltiplos equilíbrios e mudanças qualitativas na dinâmica das economias.

Pode-se citar como exemplo, o modelo de KALDOR (1940), em que poupança e investimento são considerados como funções do nível da atividade econômica. Se suas formas funcionais são lineares, há a possibilidade de apenas um ponto de equilíbrio estável no sistema, mas, por outro lado, se alguma destas variáveis (ou as duas) assume forma funcional não linear podem existir duas situações estáveis, uma com baixo e outra com alto nível de atividade. Além disso, à medida que a economia evolui, essas posições de equilíbrio tornam-se instáveis e entram em cena ciclos econômicos.

Como dito anteriormente, esta característica de sistemas não lineares na economia implica que o fenômeno da convergência absoluta de renda seja falho. Duas localidades inicialmente próximas podem se estabilizar numa situação de pobreza ou de riqueza e, adicionalmente, elas podem ter ciclos econômicos com volatilidade bastante distinta, incitando a necessidade de políticas econômicas diferenciadas para cada caso.

Tabela 11: Teste de independência dos resíduos do modelo linear* - produção de bens de capital

Dimensão	€ = 0,5 DP			€ = 1 DV		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	0,011	0,000	0,000	0,018	0,000	0,001
3	0,007	0,000	0,001	0,021	0,000	0,002
4	0,004	0,000	0,002	0,022	0,000	0,002
5	0,002	0,000	0,013	0,019	0,000	0,004
6	0,000	0,015	0,118	0,014	0,001	0,010
Dimensão	€ = 1,5 DV			€ = 2 DV		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	0,014	0,001	0,003	0,008	0,004	0,021
3	0,022	0,002	0,005	0,017	0,002	0,011
4	0,030	0,002	0,003	0,024	0,003	0,012
5	0,032	0,003	0,007	0,029	0,007	0,017
6	0,030	0,008	0,013	0,031	0,014	0,028

Fonte: Resultados da pesquisa. Nota (*): probabilidades *bootstrap* calculadas com 10^4 simulações.

A seguir, a hipótese de não linearidade é testada contra a hipótese de períodos caóticos nas variáveis aqui analisadas.

4.2. Segunda hipótese: não linearidade associada à heterocedasticidade condicional generalizada versus caos nos ciclos econômicos brasileiros

Trata-se agora da possibilidade de períodos caóticos na produção e investimento brasileiro. Para tal, ajustam-se modelos GARCH-M nas séries em questão e analisam-se seus resíduos padronizados ($z_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$).

Para continuar com a estrutura da pesquisa, a série da produção industrial total é avaliada primeiramente. O modelo foi selecionado pelo critério de AKAIKE (1970) e constitui-se de uma expansão da equação linear previamente estimada, com a adição de

uma parcela GARCH-M (2, 1), em que a variância condicional é adicionada à equação média e que foi estimado pelo algoritmo de BERNDT, *et al.* (1974).

Não houve necessidade de estimar um IGARCH, pois, segundo o teste de Wald, rejeita-se a hipótese de que a soma dos coeficientes da equação da variância seja igual a um pela estatística F calculada de 9,86, p-valor de 1%, a 1 e 366 graus de liberdade no numerador e denominador, respectivamente. Em adição, o teste ARCH indicou boa especificação do modelo, não rejeitando sua hipótese nula de acordo com o p-valor de 92% (F = 0,01, com 1 e 380 graus de liberdade no numerador e denominador). Assim, a Tabela 12, resume as saídas da estimação não linear efetuada para a produção total.

Tabela 12: Saídas da estimação do modelo ARMA – GARCH-M, distribuição Gaussiana, produção geral

Variável	Coefficiente	Erro-padrão	P-valor
<i>Equação média</i>			
<i>Garch</i>	-0,424	0,584	0,467
<i>Constante</i>	0,007	0,003	0,017
<i>ar(1)</i>	0,248	0,106	0,020
<i>ar(2)</i>	-0,102	0,048	0,033
<i>ar(3)</i>	0,697	0,051	0,000
<i>ar(4)</i>	-0,199	0,090	0,027
<i>ar(12)</i>	-0,152	0,027	0,000
<i>ar(24)</i>	-0,184	0,032	0,000
<i>ar(36)</i>	-0,126	0,035	0,000
<i>ma(1)</i>	0,299	0,110	0,007
<i>ma(2)</i>	0,556	0,112	0,000
<i>ma(3)</i>	-0,238	0,109	0,029
<i>ma(4)</i>	0,173	0,005	0,000
<i>Equação da variância</i>			
<i>Constante</i>	0,000	0,000	0,000
<i>Resíduo(-1)²</i>	0,633	0,086	0,000
<i>Garch(-1)</i>	0,225	0,064	0,000
<i>Garch(-2)</i>	-0,130	0,037	0,001
$R^2 = 45\%$	$F_{\text{calc}} = 18,58$	Akaike = -4,29	$SQ_{\text{res}} = 0,33$
$R^2_{\text{ajust}} = 42\%$	$F_{\text{prob}} = 0,00$	$DW_{\text{calc}} = 1,94$	Observações = 383

Fonte: Resultados da pesquisa.

Os resultados dos testes BDS sobre os resíduos padronizados do modelo GARCH-M encontram-se resumidos na Tabela 13, a seguir. Ao analisar os p-valores não significativos para praticamente todos os casos calculados, pode-se rejeitar a hipótese de elos temporais remanescentes nos resíduos padronizados da série cíclica da

produção industrial total brasileira, o que indica que, apesar de não lineares, estes não apresentam sinais de dinâmicas caóticas no período. Tal resultado mostra que as não linearidades da produção são mais bem modeladas por modelos de heterocedasticidade generalizada do que com sistemas caóticos.

Tabela 13: Teste de independência dos resíduos padronizados da estimação GARCH-M* - produção geral

Dimensão	$\epsilon = 0,5 \text{ DP}$			$\epsilon = 1 \text{ DV}$		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	-0,002	0,244	0,299	-0,005	0,168	0,199
3	-0,002	0,048	0,077	-0,007	0,102	0,114
4	-0,001	0,076	0,137	-0,008	0,066	0,075
5	0,000	0,705	0,850	-0,005	0,183	0,213
6	0,000	0,301	0,473	-0,002	0,411	0,492
Dimensão	$\epsilon = 1,5 \text{ DV}$			$\epsilon = 2 \text{ DV}$		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	-0,004	0,244	0,289	-0,002	0,336	0,402
3	-0,006	0,312	0,371	-0,002	0,592	0,680
4	-0,011	0,143	0,182	-0,007	0,329	0,408
5	-0,008	0,341	0,412	-0,005	0,548	0,656
6	-0,004	0,612	0,705	-0,002	0,808	0,924

Fonte: Resultados da pesquisa. Nota (*): probabilidades *bootstrap* calculadas com 10^4 simulações.

Prossegue-se para a análise da produção de bens de capital, neste momento. A seleção do modelo seguiu, como de praxe, o critério de AKAIKE (1970). A equação estimada encontra-se a seguir, na Tabela 14.

Neste caso, na equação média, o critério de bom ajustamento indicou a redução do número de defasagens presentes e, na equação da variância, este último sugeriu o modelo GARCH-M (2, 2), integrado em razão do teste de Wald ter indicado a soma dos coeficientes próxima de 1, com a estatística F calculada de 0,73, p-valor de 0,39, com 1 e 378 graus de liberdade no numerador e denominador. Ademais, o teste ARCH obteve sua estatística não significativa mesmo com $\alpha = 10\%$ ($F_{\text{calc}}(1, 392) = 0,09$), mostrando a boa especificação dos termos não lineares.

Interessantemente, a produção de bens de capital mostrou grande persistência aos choques sofridos, ao contrário da produção total, e, além disso, sua volatilidade defasada em dois períodos apresentou o maior coeficiente e, neste caso, peso, do que a defasada em um período, em se tratando da determinação da volatilidade corrente. Isto

pode ser reflexo da comentada sensibilidade do investimento aos movimentos da economia brasileira.

Tabela 14: Saídas da estimação do modelo ARMA – GARCH-M, distribuição Gaussiana, produção de bens de capital

Variável	Coefficiente	Erro-padrão	P-valor
<i>Equação média</i>			
<i>Garch</i>	-0,224	0,889	0,801
<i>Constante</i>	-0,011	0,004	0,003
<i>ar(1)</i>	0,352	0,088	0,000
<i>ar(2)</i>	-0,089	0,040	0,026
<i>ar(3)</i>	0,693	0,047	0,000
<i>ar(4)</i>	-0,423	0,067	0,000
<i>ar(12)</i>	-0,115	0,033	0,001
<i>ar(24)</i>	-0,208	0,035	0,000
<i>ma(1)</i>	0,096	0,092	0,293
<i>ma(2)</i>	0,445	0,086	0,000
<i>ma(3)</i>	-0,393	0,082	0,000
<i>ma(4)</i>	0,305	0,045	0,000
<i>Equação da variância</i>			
<i>Resíduo(-1)²</i>	0,065	0,015	0,000
<i>Resíduo(-2)²</i>	0,079	0,015	0,000
<i>Garch(-1)</i>	-0,047	0,021	0,027
<i>Garch(-2)</i>	0,904	0,026	0,000
$R^2 = 55\%$	$F_{\text{calc}} = 32,74$	Akaike = -2,88	$SQ_{\text{res}} = 0,06$
$R^2_{\text{ajust}} = 53\%$	$F_{\text{prob}} = 0,00$	DW _{calc} = 1,87	Observações = 395

Fonte: Resultados da pesquisa.

Por fim, analisam-se os resíduos padronizados da última estimação realizada por estatísticas BDS na Tabela 15. De maneira interessante, há uma grande presença de estatísticas significativas a 5 e 10%, o que mostra alguma evidência de ciclos econômicos caóticos no investimento brasileiro.

Quando se relacionam as Tabelas 13 e 15, percebe-se que há uma clara distinção entre as séries analisadas, isto é, enquanto que no caso do produto agregado o modelo não linear de heterocedasticidade generalizada consegue captar todo o padrão de dependência temporal, no caso do investimento, por outro lado, parecem existir dinâmicas determinísticas remanescentes compatíveis com caos.

O resultado anterior é bastante consistente com o postulado keynesiano de imprevisibilidade do investimento no longo prazo. Para KEYNES (1964), esta é a variável chave na determinação dos ciclos econômicos, na medida em que ela é

determinada pelas expectativas dos empresários em relação aos seus negócios no futuro. Em situações de crise, a base estável da tomada de decisão dos agentes econômicos é abalada, deprimindo a demanda agregada, causando desemprego e acentuando os efeitos das oscilações. Os resultados da Tabela 15 são, com isso, uma razoável confirmação empírica deste fenômeno.

Entretanto, a possibilidade de caos nos ciclos do investimento brasileiro levanta outra questão importante, isto é, na medida em que este resultado implica sensibilidade às condições iniciais para esta variável, resta-se argumentar sobre quais políticas seriam mais eficazes na estabilização da economia brasileira.

Pode ser razoável que, no curto prazo, se utilizem dos instrumentos convencionais monetários e fiscais para intervir nas movimentações da economia, tendo em mente, entretanto, que os resultados obtidos serão extremamente sensíveis à política adotada. No longo prazo, contudo, parece ser mais sensato criar mecanismos ou, em outras palavras, instituições que favoreçam a redução da volatilidade desta variável macroeconômica, ou seja, mudanças de caráter mais estrutural do que conjuntural.

Tabela 15: Teste de independência dos resíduos padronizados da estimação GARCH-M* - produção de bens de capital

Dimensão	$\epsilon = 0,5 \text{ DP}$			$\epsilon = 1 \text{ DV}$		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	0,007	0,000	0,003	0,014	0,001	0,002
3	0,005	0,001	0,012	0,017	0,001	0,006
4	0,003	0,000	0,012	0,017	0,002	0,008
5	0,001	0,001	0,031	0,012	0,009	0,024
6	0,000	0,016	0,110	0,009	0,016	0,040
Dimensão	$\epsilon = 1,5 \text{ DV}$			$\epsilon = 2 \text{ DV}$		
	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>	BDS	P. Normal	P. <i>Bootstrap</i>
2	0,008	0,043	0,060	0,003	0,313	0,317
3	0,013	0,041	0,055	0,007	0,182	0,207
4	0,016	0,061	0,079	0,010	0,161	0,183
5	0,015	0,122	0,133	0,010	0,264	0,261
6	0,014	0,173	0,171	0,010	0,359	0,339

Fonte: Resultados da pesquisa. Nota (*): probabilidades *bootstrap* calculadas com 10^4 simulações.

Outra questão que é levantada com os resultados apresentados acima é a de que se as dinâmicas caóticas estão presentes na economia brasileira, elas são muito mais prováveis de acontecerem no investimento (bens de capital) do que na produção geral.

Além disso, essas oscilações irregulares, mas não aleatórias, podem ser mais comuns em períodos de crise do que em expansões, pois, neste último caso, mesmo que não se consiga prever o nível da atividade econômica no futuro, os agentes podem, por outro lado, supor que ela melhorará.

Por fim, a Figura 4.4 mostra as dimensões de correlação para os resíduos padronizados da estimação GARCH-M do investimento efetuada anteriormente, e para uma versão embaralhada destes (*shuffled resids*), pelo método de bootstrap. Em ambos os casos, o método da informação mútua indicou uma defasagem como a escolha ótima e a dimensão de imersão variou de 1 a 10. Pode-se notar com esta figura, que para os resíduos padronizados originais a dimensão de correlação foi sempre menor do que para aqueles gerados pelo processo de permutação e, além disso, enquanto que nos primeiros a dimensão de correlação exibiu certa convergência para um valor entre 3,5 e 4,5, no segundo caso ela tendeu a aumentar junto com a dimensão de imersão. Tal fato corrobora a possível presença de elementos caóticos na dinâmica do investimento brasileiro.

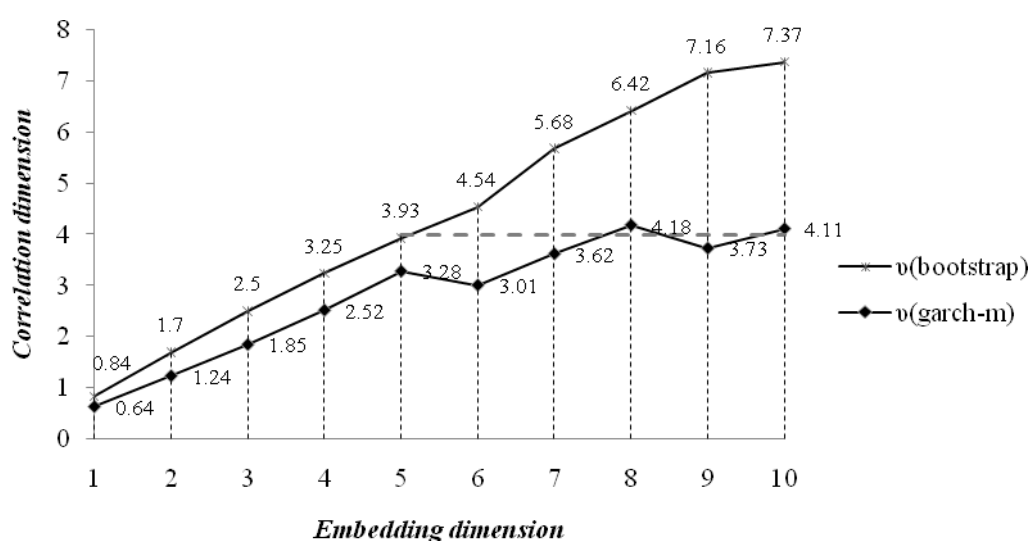


Figura 4.4: Comparação da dimensão de correlação dos resíduos do modelo GARCH-M, investimento, e desta série “embaralhada”.

Fonte: Resultados da pesquisa.

5. Conclusões

Esta pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de ocorrência de caos determinístico nas séries macroeconômicas da produção industrial geral e da produção de bens de capital, utilizadas como *proxies* para, respectivamente, a produção total e o investimento no Brasil, entre 1975 e 2009. Em outras palavras, averiguou-se se os ciclos econômicos no país podem ser relacionados, pelo menos em parte, por mecanismos relacionados à teoria do caos.

Os cálculos efetuados basearam-se na extração de componentes lineares e não-lineares dos componentes cíclicos e irregulares das séries citadas, para então avaliar sua independência temporal por intermédio de estatísticas BDS.

Os resultados mostraram que em ambas as séries foram encontradas fortes evidências de não linearidades, porém, no caso da produção total estas não são compatíveis com caos determinístico. Por outro lado, ao nível de significância empírico de 5% para o teste BDS bicaudal, o investimento brasileiro apresentou evidências de períodos de oscilações caóticas, resultado corroborado pela análise da dimensão de correlação dos resíduos GARCH-M padronizados e de sua versão embaralhada.

A presença de caos em séries brasileiras não é uma novidade explorada por este artigo, pois este já fora detectado anteriormente para dados diários do índice da Bolsa de Valores de São Paulo (BUENO, 2002). Mas, caos em séries macroeconômicas seja para o Brasil ou para outros países é, com algum peso, difícil de ser detectado em razão, principalmente, da curta duração e do alto nível de ruído dos dados disponíveis.

Nesse sentido, os resultados aqui apresentados parecem ser de alguma relevância, em razão de serem evidências iniciais que podem ter, contudo, impacto sobre a formulação de políticas públicas à medida que estudos adicionais sejam

desenvolvidos. Por exemplo, se situações caóticas se instalam, os agentes econômicos perdem gradualmente seu poder de previsão do futuro e, se esta dinâmica caótica se insere num contexto de crise, o investimento poderia ser reprimido devido às incertezas que surgiriam (aos moldes de Keynes), o que sugere políticas de estabilização para manter a demanda agregada em um patamar relativamente estável. Se esta pode ser a política adequada no curto prazo, contudo, no longo prazo as políticas escolhidas “hoje” terão impacto relevante no futuro, isto é, os resultados aqui apresentados indicam que a economia brasileira está sujeita ao fenômeno de *path dependence*, ou, em outras palavras, a história é importante. Talvez por isso, seja mais interessante aos formuladores de políticas estimularem a criação de mecanismos institucionais que favoreçam a redução da instabilidade do investimento privado brasileiro no futuro, como garantias efetivas de propriedade privada, sistemas judiciários, fiscais e políticos eficientes, entre outras medidas, para que se possa assegurar o crescimento sustentável do país.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, M. P. “**A Ordem do Progresso – cem anos de política econômica republicana 1889-1989**”. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1992.
- ACEMOGLU, D. “Reward Structure and the Allocation of Talent”. **European Economic Review**, 39, p.5-23, jan 1995.
- AKAIKE, H. “Statistical Predictor Identification”. **Ann. Statis. Math.** v.22, p.203-217, 1970.
- AKIGIRAY, V. “Conditional Heteroskedasticity in Time Series os Stock Returns: Evidence and Forecasts”. **Journal of Business**, v.62, p.33-55, 1989.
- ANDERSEN, T; e BOLLERSLEV, T. “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecast”. **International Economic Review**, v.39, n.4, p885-905, 1998.
- ANDERSEN, T; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X.; e LABYS, P. “**Modeling and Forecasting Realized Volatility**”. Working Paper, North Western University, Duke University, e University of Pennsylvania, 2002.
- ARROW, K.J. “The Economic Implications of Learning by Doing”. **The Review of Economic Studies** V.29, p.155-173, 1962.
- ARTHUR, B. “Positive Feedbacks in the Economy”. **Scientific American**, v.262, p.92-99, feb 1990.
- BAER, W. “**A economia brasileira**”. São Paulo: Nobel, 2004.
- BARNETT, W., e CHEN, P. “The aggregation theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors”. In: Barnett, W., Berndt, E., e White, H. (eds.), **Dynamic Econometric Modelling**, 199-246. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- BAXTER, M.; e KING, R. “Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series”. **The Review of Economic and Statistics**, v.81, n.4, p573-593, 1999.

- BEN-DAVID, D. **“Convergence Clubs and Diverging Economies”**. Working paper 922, Centre for Economic Policy Research, London, 1994.
- BENHABIB, J.; e DAY, R.H. “Rational Choice and Erratic Behaviour”. **The Review of Economic Studies**, v.48, n.3, p.459-471, jul 1981.
- BERNDT, E.K.; HALL, B.H; HALL, R. E.; e HAUSMAN, J.A. **“Estimation and inference in nonlinear structural models”**. Annals of Economic and Social Measurement 4, p.653-665, 1974.
- BIRKHOFF, G. D. “Sur le problème restreint des trois corps”. **Ann. Sup. Norm. Sup.** Pisa 4, 267, 1935.
- BOLLERSLEV, T. “Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity”. **Journal of Econometrics**, v.31, p.307-28, 1986.
- BOX, G.E.P.; e JENKINS G.M. **“Time Series Analysis: Forecasting and Control”**. San Francisco. CA: Holden-Day (1970), revised edition, 1976. 575 p.
- BRESNAHAN, T.; GAMBARDELLA, A.; e SAXENIAN, A. “Old economy’ inputs for ‘new economy’ outcomes: cluster formation in the new Silicon Valleys”. **Industrial and Corporate Change**, v. 10, n. 4, p. 835-860, 2001.
- BROCK, W.A.; DECHERT, W; e SCHEINKMAN, J. **“A Test for Independence Based on the Correlation Dimension”**. Working paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston, and University of Chicago, 1987.
- BROCK, W.A.; e SAYERS, C. L. “Is the Business Cycles Characterized by Deterministic Chaos?” **Journal of Monetary Economics**, v.22, p.71-90, 1988.
- BUENO, N.P. “Algumas Evidências da Presença de Não Linearidades Compatíveis com Caos Determinístico no IBOVESPA na Década de 1990”. **Revista de Economia Aplicada**, São Paulo, v.6, n.3, p.555-576, 2002.
- BUENO, N.P. “Visitando Vizinhos - Uma Análise da Série Histórica de Produção de Bens de Capital no Brasil Utilizando Diagramas de Recorrência”. **Economia e Sociedade** (UNICAMP. Impresso), v.18, p.399-416, 2009.

- CHRISTIANO, L.J.; e FITZGERALD, T.J. “**The Band Pass Filter**”. Northwestern University manuscript, 1999.
- DAVID, P. “Clio and the Economics of QWERTY”. **American Economic Review**, v.75, p.332-337, 1985.
- DAY, R.H. “Irregular growth cycles”. **American Economic Review**, v.72, p.406-414, 1982.
- ECKMANN, J. P., e RUELLE, D. “Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors”. **Rev. Mod. Phys.** v.57, 1985.
- ENGLE, R.F. “Autorregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”. **Econometrica**, v.50, n.4, p.987-1007, 1982.
- ENGLE, R.F.; e BOLLERSLEV, T. “Modelling the Persistence of Conditional Variances”. **Econometrics Review**, v.5, p.1-50, 1986.
- FIEDLER-FERRARA, N.; e PRADO, C.P.C. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1995. 402 p.
- FRANK, M.Z., e STENGOS, T. “Some evidence concerning macroeconomic chaos”. **Journal of Monetary Economics**, v.22, p.423-438, 1988.
- FRANK, M.Z., e STENGOS, T. “Measuring the strangeness of gold and silver rates of return”. **Review of Economic Studies**, v.56, p.553-567, 1989.
- FRASER, A.M.; e SWINNEY, H.L. “Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information. **Physical Review A**, v.33, n.2, 1986.
- FRIEDMAN, M. **A Theory of the Consumption Function**. Princeton, 1957.
- GIAMBIAGI, F. VILLELA, A. “**Economia Brasileira Contemporânea**”. Rio de Janeiro: Campus, 2005.
- GOODWIN, R.M. “The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles”. **Econometrica**, v.19, p.1-17, 1951.
- GRANDMONT, J.M. On “Endogenous Competitive Business Cycles”. **Econometrica**, v.53, n.5, p.995-1045, set. 1985.

- GRASSBERGER, P.; e PROCACCIA, I. “Measuring the Strangeness of Strange Attractors”. **Physica**, 9D, p.189-208, 1983.
- HAAVELMO, T. “**A Theory of Economic Evolution**”. Amsterdam: North-Holland, 1954. 114 p.
- HALL, R.E. “Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence”. **Journal of Political Economy**, v.86, n.6, p. 971-987, 1978.
- HENTSCHEL, H.G.E.; e PROCACCIA, I. “Fractal Nature of Turbulence as Manifested in Turbulent Diffusion”. **Phys. Rev. A** v.27, p1266–1269, 1983.
- HODRICK, R.J.; e PRESCOTT, E.C. “Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation”. **Journal of Money, Credit and Banking**, v.29, n.1, p.1-16, 1997.
- HSIEH, D. “Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets. **The Journal of Finance**, v.XLVI, n.5, dec 1991.
- INSTITUTO BRASILEIRO de GEOGRAFIA e ESTATÍSTICA, IBGE. “Pesquisa Industrial Mensal”. Disponível em <http://www.ibge.gov.br>.
- KALDOR, N. “A Model of the Trade Cycle”. **Economic Journal**, v.50, p.78-92, 1940.
- KENNEL, M.B; BROWN, R.; e ABARBANEL, H.D.I. “Determining Embedding Dimension for Phase-Space Reconstruction Using a Geometrical Construction”. **Phys. Rev. A** v.45, p.3403–3411, 1992.
- KEYNES, J.M. “The General Theory of Employment, Interest and Money”. New York: Harcourt Brace, 1964.
- KRUGMAN, P. “Space: The Final Frontier”. **The Journal of Economic Perspectives**, v.12, n.2, p. 161-174, 1998.
- KRUGMAN, P. “Complex Landscapes in Economic Geography”. **The American Economic Review**, v.84, n.2, p.412-416, may 1994.
- KRUGMAN, P. “Increasing returns and economic geography”. **Journal of Political Economy**, v.99, n.3, p.483-499, 1991.
- KYDLAND, F.E.; e PRESCOTT, E.C. “Time to Build and Aggregate Fluctuations”. **Econometrica**, v.50, n.6, 1982.

- LONG, J.B., Jr; e PLOSSER, C.I., 1983. “Real Business Cycles”. **Journal of Political Economy**, University of Chicago Press, v.91, n.1, p.39-69, feb 1983.
- LORENZ, E.N. “Deterministic Nonperiodic Flow”. **J. Atmospheric Sci.** 20, 130, 1963.
- LOVE, J. “**A locomotiva**”. São Paulo: Paz e Terra, 1982. 471 p.
- LUCAS, R.E., Jr. “Expectations and the Neutrality of Money”. **Journal of Economic Theory**, v.4, p.103-124, 1972.
- LUCAS, R.E., Jr. “On the Mechanics of Economic Development”. **Journal of Monetary Economics**, v.22, p.3-42, 1988.
- MEDIO, A., e GALLO, G. “**Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics**”. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 344 p.
- MANDELBROT, B. “**The fractal geometry of nature**”. W. H. Freeman: San Francisco, 1983.
- MOFFIT, M. “**O dinheiro do mundo – de Bretton Woods à beira da insolvência**”. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1984.
- MORAIS, I.A.C; e PORTUGAL, M.S. “Modelagem e previsão de volatilidade determinística e estocástica para a série do Ibovespa”. **Estudos Econômicos**, São Paulo, v.29, n.3, p.303-341, 1999.
- ONOZAKI, T.; SIEG, G.; e YOKOO, M. “Complex Dynamics in a Cobweb Model with Adaptive Production Adjustment”. **Journal of Economic Behavior & Organization**, v.41, p.101-115, 2000.
- PINHEIRO, A.C.; GIAMBIAGI, F; MOREIRA, M.M. “**O Brasil na Década de 90: Uma Transição Bem-Sucedida?**” Texto Para Discussão nº 91. Rio de Janeiro, BNDES, nov. 2001.
- PLOSSER, C. “Understanding Real Business Cycles”. **Journal of Economic Perspectives**, v.3, n.3, Summer, 1989.
- POON, S.H.; e GRANGER, C.W.J. “Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. **Journal of Economic Literature**, v. 41, n.2, 2003.

- PROKHOROV, A.B. “**Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Economics: a Historical Perspective**”. Michigan State University, E.C. 186, dec 2001.
- RAVN, M.O.; UHLIG, H. “On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations”. **Review of Economics and Statistics**, v.84, n.2, p.371-376, may 2002.
- ROSENSTEIN, M. T., COLLINS, J.J., e De LUCA, C. J. “A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets”. **Phys. D**, v.65, p.117-134, 1993.
- RÖSSLER, O.E. “An Equation for Continuous Chaos”. **Physics Letters 57A**, v.5, p. 397–398, 1979.
- RUELLE, D., e TAKENS, F. “On the Nature of Turbulence”. **Commun. Math. Phys.** 20, 167 (addendum 21, p. 21); 23, 343, 1971.
- SARGENT, T.J.; e WALLACE, N. "Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule," **Journal of Political Economy**, n. 83, p.241-254, 1975.
- SAXENIAN, A.; e HSU, J.K. “The Silicon Valley-Ssinchu connection: technical communities and industrial upgrading”. **Industrial and Corporate Change**, v.10, n.4, p.893-920, 2001.
- SCHEIKMAN, J.A. “Nonlinearities in Economic Dynamics”. **Economic Journal**, 100, Supplement, 1990.
- SCHEINKMAN, J. A., e LEBARON, B. “Nonlinear Dynamics and Stock Returns”. **Journal of Business**, v.62, p.311-337, 1989a.
- SCHEINKMAN, J. A., e LEBARON, B. “Nonlinear Dynamics and GNP Data”. In: Burnett, W., Gewerke, J., e Shell, K. (eds.), **Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity**, 213-231. Cambridge: Cambridge University Press, 1989b.

- SHONE, R. “**Economic Dynamics: Phase Diagram and Their Economics Application**”. New York: Cambridge University Press. 2nd Ed, 2002. 708 p.
- SOLOW, R.M. “A Contribution to the Theory of Economic Growth”. **Q.J.E.** v.70, p.65-94, 1956.
- TAKENS, F.” Detecting Strange Attractors in Turbulence”. **Lect. Notes in Math.** 898: 266-281, 1981.
- TAYLOR, S. “**Modelling Financial Time Series**”. New York: Wiley, 1986.
- TOLEDO, R. P. “**A capital da solidão: uma história de São Paulo das origens a 1900**”. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003. 558 p.
- UZAWA, H. “Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth”. **International Economic Review** v.6, p.18-31, 1965.
- WOLF, A., SWIFT, J.B., SWINNEY, H.L., e VASTANO, J.A. “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”. **Phys, D** v.16, p.285-317, 1985.
- ZHANG, W.B. “Path-Dependent Economic Evolution with Capital Accumulation and Education”. **Non-linear Dynamics Psychol. Life Sci.** Jul: v.9, n.3, p.335-57, 2005.