DÉBORA SANTOS RODRIGUES

PROJETIVO DE CURVATURA EM PONTOS DE UMA 3-VARIEDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T
R696p
2013

Rodrigues, Débora Santos, 1988-
Projetivo de curvatura em pontos de uma 3-variedade / Débora Santos Rodrigues. – Viçosa, MG, 2013.
xii, 79 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Simone Maria de Moraes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.77-78.

1. Curvatura. 2. Variedades (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.36

DÉBORA SANTOS RODRIGUES

PROJETIVO DE CURVATURA EM PONTOS DE UMA 3-VARIEDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de Julho de 2013.

Sueli I. Rodrigues Costa

Mercio Botelho Faria

Simone Maria de Moraes
(Orientadora)

As minhas duas Marias,
Maria Lúcia(mãe),
Maria Luiza (irmã), dedico.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus por estar sempre olhando por mim, me dando coragem e força para enfrentar as dificuldades da vida.

À minha mãe Maria Lúcia pelo carinho e pelos sacrifícios que fez para que suas filhas pudessem estudar, pela preocupação (as vezes exagerada), pelas orações e por estar sempre ao meu lado. À minha irmã Maria Luiza pelo carinho e torcida.

À professora Simone pela amizade, orientação e dedicação durante esses dois anos. Agradeço pelos ensinamemtos, pelas conversas que muito contribuiram para meu crescimento profissional e principalmente pessoal. Foi uma honra e um sonho realizado trabalhar com a senhora. Se hoje estou finalizando mais uma etapa da minha vida acadêmica, devo isso a professora Simone.

Aos meus professores e amigos da Universidade Estadual de Montes Claros. Em especial ao professor Rosivaldo Antonio Gonçalves, pelos ensinamentos, pela generosidade, pela oportunidade de ingressar em um programa de Pós Graduação, ao professor Sebastião Alves pelo carinho, pelos conselhos e ensinamentos, aos professores João Barbosa, Higino, Narciso, Guilherme Goulart (in memorian), Edson e a professora Dayse por toda contrubuição e participação na minha vida acadêmica.

Ao professor Ezequiel Barbosa pela amizade, pelas palavras de incetivo, principalmente nos momentos de desânimo.

Ao meu colega e amigo Guilherme, pela amizade, carinho e pelos grupos de estudo durante a graduação.

A todos os professores e funcionários do Departamemto de Matemática da Universidade Federal de Viçosa. Destaco os professores Enoch, Marinês e Catarina que ministraram disciplinas que cursei no mestrado. Os professores Diogo e Sônia pela orientação nas atividades do REUNI e os professores Valentín, Braz e Laerte pela oportunidade de trabalhar como tutora no curso de licenciatura em Matemática à distância, a todos o meu muito obrigada.

Ao professor Rogério por ter sido nos últimos meses o meu psicólogo para assuntos álgebricos.

Às minhas colegas de república, em especial, a Ludmila, Cínthya e Carolina pelos momentos de descontração que passamos juntas. Obrigada pelo carinho e respeito com que sempre me trataram. Agradeço pelas mudanças (boas, claro que sim), que propocionaram a mim durante esses dois anos de convívio.

Aos meus colegas de mestrado, em especial, Robledo Maks (estendo o meu agradecimento ao Paulo), Anna Paula Machado por receberem a mim e a minha mãe em Viçosa e por toda a ajuda durante o tempo que fomos colegas. Aos colegas Serginei, Luiz Henrique, Aline e Michely Oliveira pelas conversas e principalmente por estar ao meu lado nos momentos de dificuldade. Aos meus colegas de turma,

Victor, Michele Fidélis, e Maysa, pela amizade, pelos grupos de estudo, e pela conversas, é claro, que não poderia esquecer dos meus mais que especiais amigos e colegas, Samara Leandro e Guemael Lattanzi, foi um prazer conhecê-los e conviver durante esse tempo. Meu sincero afeto e agradecimento a todos.

Ao professor Mercio Botelho Faria (UFV) e à professora Sueli I. Rodrigues Costa (UNICAMP) por aceitarem fazer parte da Banca Examinadora, agradeço pela disponibilidade e pelo tempo dedicado a melhoria desse trabalho.

À Universidade de Federal de Viçosa e a cidade de Viçosa pelos hospitalidade.

À CAPES pelo auxilio financeiro.

Resumo

RODRIGUES, Débora Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Julho, 2013. **Projetivo de Curvatura em pontos de uma 3-Variedade**. Orientadora: Simone Maria de Moraes.

Neste trabalho fazemos um estudo do *projetivo de curvatura* em um ponto de uma 3-variedade imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, tendo como base a tese de de R. R. Binotto [1]. Analisamos os diferentes tipos de superfícies que descrevem o projetivo, mostramos que este pode ser descrito como um isomorfismo da superfície de Veronese de ordem 2 seguido de uma transformação linear e de uma translação. Também relacionamos os tipos de pontos da 3-variedade com a degenericidade do projetivo no espaço normal. Finalizamos o estudo analisando o locus de curvatura em pontos de uma n-variedade imersa em codimensão 2, de acordo com [14], apresentamos alguns exemplos, analisando algumas propriedades geométricas do locus de curvatura e comentamos alguns resultados relacionados à geometria de uma 3-variedade em codimensão 2.

Abstract

RODRIGUES, Débora Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Julho, 2013. **Projective Locus Plane at points of a 3-Manifolds**. Orientadora: Simone Maria de Moraes.

In this work we study of *the curvature projective plane* at a point of a 3-manifold immersed in $\mathbb{R}^n$ $n \geq 4$, based one the thesis of R. R. Binotto [1]. We analyzed the different types of surfaces that describe the projective. We show that it can to be described as an isomorphism of the Veronese's surface of order 2 followed by a linear transformation and a translation. We also relate the types of a point on a 3-manifold with the degenericity of projective in the normal space. We conclude this study by analyzing the curvature locus of points in a n-manifold immersed in codimension 2, according to [14]. We present some examples, analyzing a few geometric properties of the curvature locus and comment on some results related to the geometry of a 3-manifold in codimension 2.

Sumário

Introdução **1**

1 Elipse de Curvatura em Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ **3**
1.1 Superfícies Regulares 3
1.1.1 Plano Tangente 5
1.1.2 A Primeira Forma Fundamental 8
1.2 A Elipse de Curvatura em Superfícies Imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ 9
1.2.1 Vetor Curvatura Normal 9
1.2.2 Expressões para a Elipse de Curvatura 12
1.3 Alguns Resultados do Estudo da Elipse de Curvatura 18

2 Aplicação de Veronese e Superfícies de Steiner **24**
2.1 Preliminares 24
2.1.1 Imersões e Submersões 24
2.1.2 Espaço Projetivo Real de Ordem n $(\mathbb{P}^n)$ 25
2.2 Aplicação de Veronese $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{N(n)}$ de ordem k 25
2.3 A Superfície de Veronese Clássica de ordem 2 27
2.4 As Superfícies de Steiner 27
2.4.1 Superfície Romana de Steiner 28
2.4.2 Superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-Cap . . . 29
2.4.3 Superfície de Steiner de Tipo 5 31
2.4.4 Superfície de Steiner de Tipo 6: Superfície Cross-Cup . . . 32
2.5 A Superfície de Boy 34

3 Projetivo de Curvatura em pontos de uma $3-$variedade **35**
3.1 Projetivo de Curvatura 35
3.2 Expressões para o Projetivo de Curvatura 37
3.2.1 O Projetivo de Curvatura Via a Forma de Monge 39
3.2.2 Outras Expressões para o Projetivo de Curvatura 42
3.3 A 3-variedade de Veronese Clássica de Ordem 2 52
3.4 Interpretação Geométrica do Projetivo de Curvatura 55
3.5 Relação entre Projetivo de Curvatura e os pontos de $3-$variedade 57

4 Locus de Curvatura de uma Variedade Imersa em Codimensão 2 **67**
4.1 O Locus de Curvatura 67
4.2 Alguns resultados sobre o Locus de Curvatura 73

Conclusão **1**

Referêcias Bibliográficas **2**

Lista de Figuras

1.1 Parametrizações da esfera 5
1.2 Reparametrização de S 7
1.3 secção normal 9
1.4 Elipse de curvatura 10
1.5 Vetores da Elipse de Curvatura 13
1.6 $p \in S_3$ 20
1.7 $p \in S_2$ 20
1.8 $p \in S_2$ 21
1.9 $p \in S_1$ 21
1.10 $p \in S_1$ 22
1.11 $p \in S_0$ 23

2.1 Superfície Romana de Steiner 29
2.2 Superfície romana, intersecções e pontos singulares 29
2.3 Superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-cap 30
2.4 Superfície cross-cap, intersecções e pontos singulares 31
2.5 Superfície de Steiner de tipo 5 32
2.6 Superfície de Steiner de tipo 6: Superfície Cross-Cup 33
2.7 Superfície de Boy 34
2.8 Superfície de Boy 34

3.1 Superfície Romana de Steiner 62
3.2 Superfície de Steiner de Tipo 3: cross-cap 63
3.3 Superfície de Steiner de Tipo 5 63
3.4 Superfície de Steiner de Tipo 6: Cross-Cup 64
3.5 Região Elíptica 65
3.6 Região Triangular 65
3.7 Projeção planar de tipo 1 66
3.8 Projeção planar de tipo 2 66

4.1 Locus de Curvatura-triângulo degenerado 70
4.2 Locus de Curvatura-segmento 71
4.3 Envolvente Convexa 74
4.4 Locus de curvatura-triângulo 76
4.5 Região Triangular 77

Introdução

No estudo de imersões de superfícies em codimensão ≥ 2 surge um conceito muito interessante, a saber, a *elipse de curvatura*. Ela é descrita pelo lugar geométrico de todos os extremos dos vetores de curvatura das secções normais ao longo das direções tangentes à superfície no ponto considerado, ou seja, é a imagem no espaço normal do círculo unitário do plano tangente pela segunda forma fundamental.

O conceito de elipse de curvatura foi introduzido por *K. Kommerell* no artigo [9] e depois estudado por *J. Little* em [10] onde faz uma análise detalhada, caracterizando propriedades geométricas de superfícies em $\mathbb{R}^4$ em termos desta elipse e mostrando que a generalização desta para variedades é uma variedade de Veronese ou uma projeção de uma Veronese.

No trabalho de *S. M. Moraes*, *M. C. Romero Fuster* e *F. Sánchez Bringas* em [13] a elipse de curvatura é utilizada, como ferramenta básica, associada a técnicas da *Teoria de Singularidades*, para obter informações sobre a geometria local de superfícies imersas em espaços euclidianos em codimensão maior ou igual a 2.

Considerando que a elipse de curvatura esta diretamente relacionada com a segunda forma fundamental da superfície e que esta dá origem a importantes propriedades na geometria extrínseca de subvariedades imersas em espaços euclidianos relacionadas ao comportamento da parte quadrática das imersões, alguns autores buscaram generalizá-la, como citado acima encontramos a primeira generalização no trabalho de *Little* ([10]).

Recentemente encontramos trabalhos que generalizam o conceito de elipse de curvatura para variedades, a saber:

1. A tese *"Projetivo de Curvatura"* de *Rosane Binotto* ([1]) de 2008, trabalho em que é definido o projetivo de curvatura, mostrando que é uma superfície de Veronese, construindo exemplos, como o caso em que o projetivo é uma superfície de Steiner. Também são obtidos resultados quanto à geometria local da variedade em função do tipo de projetivo de curvatura.

2. O artigo *"Contact properties of codimension 2 submanifolds with flat normal bundle"*, de *Nuño Ballesteros* e *Romero Fuster* ([14]), de 2010, no qual é introduzido o conceito de locus de curvatura de uma variedade imersa em codimensão 2 e são obtidos resultados a partir da análise do locus de curvatura em pontos da variedade.

3. O artigo *"Curvature locus and principal configurations of submanifolds of Euclidean space"*, de *J. J. Nuño Ballesteros*, *M. C. Romero Fuster* e *F. Sánchez Bringas* ([15]), preprint de 2012, onde são estudadas relações entre propriedades do locus de curvatura de uma subvariedade imersa em um espaço euclidiano e a existência de campos normais umbílicos e campos normais quase-umbílicos.

Nesta dissertação estudamos o projetivo de curvatura em pontos de uma 3-variedades.

Assim, começamos o Capítulo 1 com os conceitos básicos de Geometria Diferencial e em seguida introduzimos o conceito de elipse de curvatura em uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, a expressão geral e alguns exemplos. Finalizamos o capítulo com um resultado que associa o tipo de ponto da superfície com a degenericidade ou não da elipse de curvatura neste ponto.

No Capítulo 2 estudamos detalhadamente a superfície de Veronese de ordem 2 e as superfícies de Steiner que serão utilizadas nos capítulos subsequentes.

O *projetivo de curvatura* em pontos de uma 3-variedade é introduzido no Capítulo 3, onde apresentamos as expressões deste projetivo em função do tipo de parametrização considerada. Mostramos que o projetivo de curvatura em um ponto de uma 3-variedade está relacionado com superfícies de Steiner e com a superfície de Veronese de ordem 2.

Finalizamos o trabalho com um capítulo destinado ao *locus de curvatura* em pontos de uma variedade imersa em codimensão 2, fazemos a mesma construção de [14], em seguida apresentamos alguns exemplos e analisamos algumas propriedades geométricas. Concluímos apresentando alguns resultados dos artigos [14] e [15].

Capítulo 1

Elipse de Curvatura em Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições e resultados de Geometria Diferencial que serão usados ao longo do trabalho. As principais referências e notações aqui utilizadas são [2], [10] e [13]. Iniciamos o capítulo com alguns conceitos preliminares de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$. Na seção 1.2 definimos a aplicação curvatura normal, apresentamos a construção do vetor curvatura e iniciamos o estudo da *elipse de curvatura* em um ponto de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, este estudo está baseado nos trabalhos de J. Little em [10] e S. M. Moraes em [13]. Finalizamos o capítulo apresentando alguns resultados geométricos obtidos pela análise da elipse de curvatura.

As figuras que aparecem neste capítulo foram reproduzidas com o auxílio dos software *Maple* e *Illustrator*.

1.1 Superfícies Regulares

De maneira intuitiva, uma superfície regular em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ é obtida tomando-se pedaços do plano deformando-os e colando-os entre si de tal modo que a figura resultante não apresente vértices, arestas ou auto-interseções. Mais precisamente temos:

Definição 1.1. *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, é uma* ***superfície regular*** *se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação $X : \mathcal{U} \longrightarrow V \cap S$, definida num aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que:*

1. *$X : \mathcal{U} \longrightarrow V \cap S$, $X(u,v) = \Big(x_1(u,v), x_2(u,v), \cdots, x_n(u,v)\Big)$ é diferenciável, de classe $\mathcal{C}^\infty$, isto é, as funções $x_1, x_2, \cdots, x_n : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em $\mathcal{U}$.*

2. *$X : \mathcal{U} \longrightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo, isto é, X é uma bijeção contínua cuja inversa $X^{-1} : V \cap S \longrightarrow \mathcal{U}$ é contínua.*

3. *Para todo $q \in \mathcal{U}$ temos $dX_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injetora.*

Observação: A aplicação X da definição de superfície regular é chamada uma **parametrização local**, ou mapa local, ou um sistema de coordenadas (locais) em S.

Exemplo: A esfera de centro na origem e raio 1,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

De fato, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} X_1^+ : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & X_1^+(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right) \end{array}$$

definida no aberto $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u^2 + v^2 < 1\}$, satisfaz as condições da definição 1.1, pois:

1. $X_1^+(\mathcal{U}) = \mathbb{S}^2 \cap V$, onde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z > 0\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^3$.
2. X_1^+ é diferenciável, pois $1 - (u^2 + v^2) > 0$ para todo $(u, v) \in \mathcal{U}$.
3. $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para todo $q \in \mathcal{U}$.
4. X_1^+ é um homeomorfismo, pois X_1^+ é uma bijeção contínua sobre $\mathbb{S}^2 \cap V$ e $(X_1^+)^{-1} = \pi|_{\mathbb{S}^2 \cap V}$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção sobre o plano xy dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Podemos cobrir a esfera com seis parametrizações parecidas a esta, basta considerarmos as aplicações

$$X_1^+, X_1^-, X_2^+, X_2^-, X_3^+, X_3^- : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dadas por:

$$\begin{aligned} X_1^{\pm}(u, v) &= (u, v, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}); \\ X_2^{\pm}(u, v) &= (u, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v); \\ X_3^{\pm}(u, v) &= (\pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v). \end{aligned}$$

De modo análogo ao feito para X_1^+, podemos provar que $X_2^{\pm}, X_3^{\pm}$ e X_1^- são parametrizações de $\mathbb{S}^2$ sobre $\mathbb{S}^2 \cap V_1^{\pm}$, $\mathbb{S}^2 \cap V_2^{\pm}$, $\mathbb{S}^2 \cap V_3^{\pm}$, respectivamente, com

$$\begin{aligned} V_1^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z > 0\}; \quad V_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z < 0\}, \\ V_2^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y > 0\}; \quad V_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y < 0\} \text{ e} \\ V_3^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x > 0\}; \quad V_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x < 0\} \end{aligned}$$

abertos de $\mathbb{R}^3$.

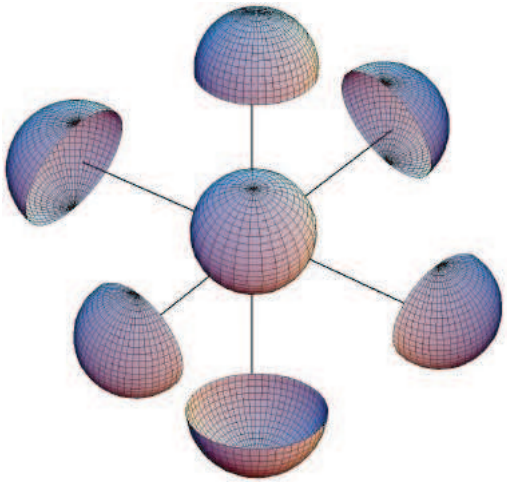


Figura 1.1: Parametrizações da esfera

Como

$$\begin{aligned} X_1^+ \cup X_1^- &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2;\ x^2+y^2=1 \text{ e } z=0\};\\ X_2^+ \cup X_2^- &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2;\ x^2+z^2=1 \text{ e } y=0\};\\ X_3^+ \cup X_3^- &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2;\ y^2+z^2=1 \text{ e } x=0\}. \end{aligned}$$

temos

$$\mathbb{S}^2 = X_1^+(\mathcal{U}) \cup X_1^-(\mathcal{U}) \cup X_2^+(\mathcal{U}) \cup X_2^-(\mathcal{U}) \cup X_3^+(\mathcal{U}) \cup X_3^-(\mathcal{U}).$$

Logo, $\mathbb{S}^2$ é uma superfície regular.

1.1.1 Plano Tangente

Seja S uma superfície regular, dada $\mathcal{C}$ uma curva em S, para cada ponto p no traço de $\mathcal{C}$ é possível utilizar uma parametrização local de S em p para parametrizar a curva $\mathcal{C}$, para isto, consideramos $\mathcal{U}_p$ aberto em S, com $p \in \mathcal{U}_p$, V_p aberto em $\mathbb{R}^2$ e $X : V_p \longrightarrow \mathcal{U}_p$ uma parametrização de S em p tal que X é homeomorfismo.

Tomando $X^{-1} : \mathcal{U}_p \cap \mathcal{C} \longrightarrow X^{-1}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{C}) \subset V_p$, temos $X^{-1}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{C})$ uma curva em $V_p \subset \mathbb{R}^2$, agora tomando

$$\begin{array}{rccc} \beta: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \beta(t) \end{array}$$

curva regular tal que $\beta(I) = X^{-1}(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{C})$ podemos então considerar

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & S \\ & t & \longmapsto & X(\beta(t)) = \alpha(t) \end{array}$$

cujo traço está em S.

Consideremos uma parametrização local de S

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathcal{U} & \longrightarrow & V \cap S \\ & (u,v) & \longmapsto & X(u,v) \end{array}$$

tal que $\alpha(I) \subset X(\mathcal{U})$, podemos parametrizar a curva α da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & S \\ & t & \longmapsto & \alpha(t) = X\Big(u(t), v(t)\Big). \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{d}{dt}\left(X\Big(u(t), v(t)\Big)\right) \\ &= u'(t)X_u\Big(u(t), v(t)\Big) + v'(t)X_v\Big(u(t), v(t)\Big) \end{aligned}$$

e em t_0 temos

$$\alpha'(t_0) = u'(t_0)X_u(q) + v'(t_0)X_v(q),$$

com $q = (u(t_0), v(t_0))$.

Como α é arbitrária concluímos que o vetor tangente em p a qualquer curva em S que passa por p é uma combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$, onde $p = X(u_0, v_0)$.

Assim, dizemos que o plano que passa por p com direções de $X_u(q)$ e $X_v(q)$ é o **plano tangente** a S em p, denotado por T_pS.

Para superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, a direção normal a S em p é dada pela direção do vetor unitário

$$N(p) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|},$$

com $p = X(p)$.

Observação: O plano tangente a S em p não depende da parametrização local da superfície.

De fato, dado

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & (\xi,\eta) & \longmapsto & h(\xi,\eta) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \end{array}$$

um difeomorfismo, h é uma função mudança de variável com $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ abertos e $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$, $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{V}$ tal que $h(\xi_0, \eta_0) = (u_0, v_0)$, então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} Y = X \circ h: & \mathcal{V} & \longrightarrow & X(\mathcal{U}) \subset S \subset \mathbb{R}^3 \\ & (\xi,\eta) & \longmapsto & Y(\xi,\eta) = X \circ h(\xi,\eta) = X(h(\xi,\eta)) = X(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)) \end{array}$$

é uma reparametrização de S definida localmente em p.

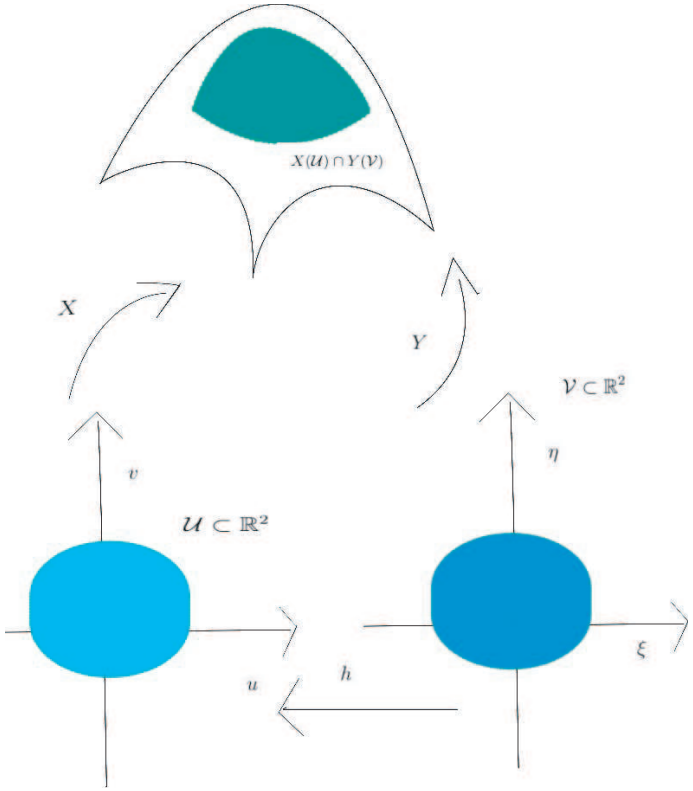


Figura 1.2: Reparametrização de S

Portanto, em (ξ_0, η_0) temos:

$$\begin{aligned} Y_\xi(\xi_0, \eta_0) &= \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) X_u(h(\xi_0, \eta_0)) + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) X_v(h(\xi_0, \eta_0)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) X_u(u_0, v_0) + \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0) X_v(u_0, v_0) \end{aligned}$$

e

$$Y_\eta(\xi_0, \eta_0) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) X_u(u_0, v_0) + \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) X_v(u_0, v_0).$$

Consequentemente $Y_\xi(\xi_0, \eta_0)$ e $Y_\eta(\xi_0, \eta_0)$ são combinações dos vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Por outro lado, observando que

$$Y_\xi \wedge Y_\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) X_u \wedge X_v \neq \vec{0}$$

pois $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \det Jh \neq 0$, já que h é um difeomorfismo e $X_u \wedge X_v \neq \vec{0}$ devido a independência linear desses vetores.

Logo, Y_ξ eY_η são linearmente independentes e o plano que passa por $p = X(u_0, v_0) = X(h(\xi_0, \eta_0)) = Y(\xi_0, \eta_0)$ gerado por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ é o mesmo que passa por p e é gerado por $Y_\xi(\xi_0, \eta_0)$ e $Y_\eta(\xi_0, \eta_0)$.

Além disso, para S superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ temos que o normal a S em p pela parametrização Y a menos de sinal, é o mesmo dado pela parametrização X.

De fato:

$$\begin{aligned} N_Y(\xi_0,\eta_0) &= \frac{Y_\xi \wedge Y_\eta}{\|Y_\xi \wedge Y_\eta\|}(\xi_0,\eta_0) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)(\xi_0,\eta_0) X_u \wedge X_v(u_0,v_0)}{\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right| \|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \pm N_X(u_0,v_0). \end{aligned}$$

1.1.2 A Primeira Forma Fundamental

Sejam S uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, e p um ponto em S, o produto interno de $\mathbb{R}^n$ induz em T_pS uma forma quadrática chamada **primeira forma fundamental** de S em p que é denotada por I_p e dada por:

$$\begin{array}{rccc} I_p: & T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & I_p(w) = w \cdot w. \end{array}$$

Sendo,

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (u,v) & \longmapsto & X(u,v) \end{array}$$

uma parametrização de S definida localmente em p, com $q = (u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ e $X(q) = p$, pelo visto anteriormente, dado $\overrightarrow{w} \in T_pS$, existem a e b reais tais que $\overrightarrow{w} = aX_u(q) + bX_v(q)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= (aX_u(q) + bX_v(q)) \cdot (aX_u(q) + bX_v(q)) \\ &= a^2 X_u(q)X_u(q) + 2abX_u(q)X_v(q) + b^2 X_v(q)X_v(q), \end{aligned}$$

os números $X_u(q)\cdot X_u(q)$, $X_u(q)\cdot X_v(q)$ e $X_v(q)\cdot X_v(q)$ são chamados **coeficientes da 1ª forma fundamental** de S em p, são denotados por $E(q), F(q)$ e $G(q)$ respectivamente.

Assim,

$$I_p(w) = [a,b] \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2E(q) + 2abF(q) + b^2G(q).$$

Observação:

1. A primeira forma fundamental não depende da parametrização, porém os coeficientes dependem.

2. A primeira forma fundamental é utilizada para calcular comprimento de curvas e ângulos entre curvas em superfícies, assim como áreas de superfícies, ver [2].

1.2 A Elipse de Curvatura em Superfícies Imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$

O conceito de elipse de curvatura em um ponto p de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ foi introduzida por Kommerell em [9], este conceito foi estudado detalhamente por J. Little em [10] e para superfícies imersas em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, na tese [13] de S. M. Moraes.

A elipse de curvatura em um ponto p de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ é o lugar geométrico de todos os extremos dos vetores de curvatura das seções normais de S em p.

1.2.1 Vetor Curvatura Normal

Sejam S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, $p \in$ S e $\mathbb{S}^1_p \subset \mathrm{T}_p\mathrm{S}$, o círculo unitário centrado em p e contido $\mathrm{T}_p\mathrm{S}$, para cada direção tangente unitária $\nu_\theta \in \mathbb{S}^1_p$ consideremos $\mathbb{H}_{\nu_\theta} = \mathrm{N}_p\mathrm{S} \oplus \langle \nu_\theta \rangle$ um hiperplano gerado por $\mathrm{N}_p\mathrm{S}$ e a direção ν_θ.

A curva $\gamma_\theta = \mathbb{H}_\theta \cap$ S é chamada **secção normal** de S em p na direção ν_θ.

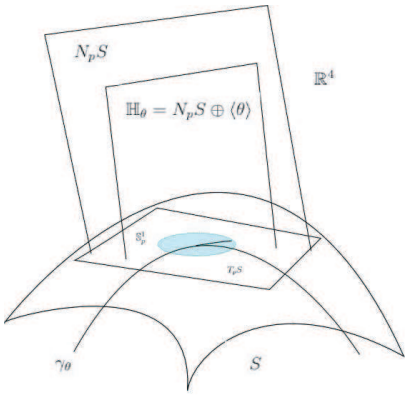


Figura 1.3: secção normal

Supondo que a curva γ_θ está parametrizada pelo comprimento de arco e

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p & = & \gamma_\theta(s_0) \\ \nu_\theta & = & \gamma'_\theta(s_0) \end{array} \right. , \text{ então } \gamma''_\theta(s_0) \in N_pS.$$

O vetor $\gamma''_\theta(s_0)$ é chamado **vetor curvatura normal** de S em p.

Definição 1.2. *Sejam S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e $p \in$ S, a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \eta_p : & \mathbb{S}^1_p & \longrightarrow & N_pS \\ & \nu_\theta & \longmapsto & \eta_p(\theta) = \pi^N(\gamma''_\theta). \end{array}$$

*é chamada **elipse de curvatura** de S em p.*

Nosso objetivo agora é dar uma expressão à aplicação $\eta_p(\theta)$ de maneira a justificar o nome a *elipse de curvatura*.

Para isso consideremos γ_θ uma curva de S, que passa por P com direção tangente ν_θ parametrizada pelo comprimento de arco, a decomposição

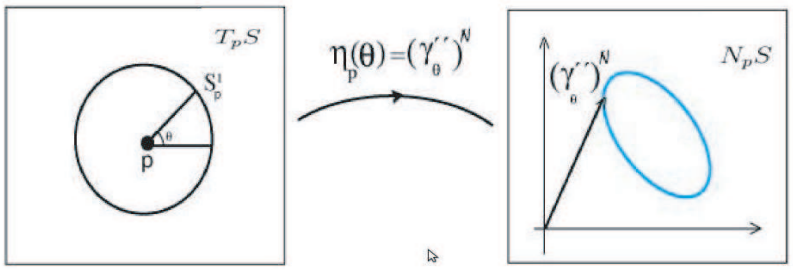


Figura 1.4: Elipse de curvatura

$\mathbb{R}^n \equiv T_pS \oplus N_pS$ e a projeção ortogonal:

$$\begin{array}{rccl} \pi^N: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & N_pS \\ & u & \longmapsto & \pi^N(u) = u - (u \cdot w_1(p))w_1(p) - (u \cdot w_2(p))w_2(p) \end{array}$$

com $\{w_1(p), w_2(p)\}$ uma base ortonormal de T_pS.

Suponhamos que a superfície S localmente em p está parametrizada por

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S \subset \mathbb{R}^n \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) \end{array},$$

então parametrizando γ_θ por :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_\theta: & I & \longrightarrow & S \subset \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \gamma_\theta(t) = \varphi(u(t), v(t)) \end{array}$$

temos

$$\gamma'_\theta(t) = u'(t)\varphi_u(u(t),v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t),v(t)), \text{ com } \left\{ \begin{array}{rcl} \gamma_\theta(s_0) & = & p \\ \gamma'_\theta(s_0) & = & \nu_\theta \end{array} \right.$$

e

$$\begin{array}{rcl} \gamma''_\theta(t) & = & u'(t)^2\varphi_{uu}(u(t),v(t)) + u''(t)\varphi_u(u(t),v(t)) + 2u'(t)v'(t)\varphi_{uv}(u(t),v(t)) \\ & + & v'(t)^2\varphi_{vv}(u(t),v(t)) + v''(t)\varphi_v(u(t),v(t)). \end{array}$$

Portanto, a projeção do vetor curvatura $\gamma''_\theta(t)$ no espaço normal N_pS é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \pi^N(\gamma''_\theta(t)) & = & u'(t)^2\varphi^N_{uu}(u(t),v(t))) + 2u'(t)v'(t)\varphi^N_{uv}(u(t),v(t)) \\ & + & v'(t)^2\varphi_{vv}(u(t),v(t)) \end{array} \quad (1.1)$$

Se $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$ é uma base ortonormal para o espaço tangente T_pS, então como γ_θ está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que $u'(t)^2 + v'(t)^2 = 1$, então podemos tomar θ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & \cos\theta \\ v'(t) & = & \sin\theta \end{array} \right.$$

em (1.1) teremos:

$$\pi^{\mathrm{N}}(\gamma_\theta''(t)) \;=\; \cos^2\theta\ \varphi_{uu}^N(p) + 2\cos\theta\ \sin\theta\varphi_{uv}^N(p) + \sin^2\theta\varphi_{vv}^N(p)$$

Usando relações trigonométricas básicas e fazendo as substituições devidas, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\eta_p(\theta) &= \pi^N(\gamma_\theta''(t_0)) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi_{uu}^N(p) + \varphi_{vv}^N(p)) + \frac{1}{2}(\varphi_{uu}^N(p) - \varphi_{vv}^N(p))\cos(2\theta)\varphi_{uv}^N(p)\sin(2\theta).\end{aligned}$$

Denotando:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{2}\left[\varphi_{uu}^N(p) + \varphi_{vv}^N(p)\right], \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2}\left[\varphi_{uu}^N(p) - \varphi_{vv}^N(p)\right], \\ \mathbf{C} &= \varphi_{uv}^N(p).\end{aligned}$$

Assim, a expressão da elipse de curvatura em superfícies imersas em $\mathbb{R}^4$, $n \geq 4$, é a seguinte:

$$\eta_p(\theta) \;=\; \mathbf{H} + \mathbf{B}\cos(2\theta) + \mathbf{C}\sin(2\theta).$$

Observações:

1. Ao percorrer o círculo unitário no plano tangente, a aplicação η_p percorre a elipse de curvatura duas vezes.

2. A aplicação que descreve a elipse de curvatura de S em p, para superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, corresponde à função vetor curvatura normal e a elipse de curvatura é um segmento da reta normal N_pS, que pode se degenerar em um ponto.

3. Se

$$\alpha: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & S \\ s & \longmapsto & \alpha(s) \end{array} \quad \text{e} \quad \beta: \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & S \\ t & \longmapsto & \beta(t) \end{array}$$

são curvas em S definidas localmente em p, parametrizadas pelo comprimento de arco, com

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha(s_0) &=& p \\ \alpha'(s_0) &=& \nu_\theta\end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcl}\beta(t_0) &=& p \\ \beta'(t_0) &=& \nu_\theta\end{array}\right.,$$

então $\pi^N\Big(\alpha''(s_0)\Big) = \Big(\pi^N(\beta''(t_0)\Big)$.

De fato:

Seja

$$X: \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & S \\ (u,v) & \longmapsto & X(u,v) \end{array}$$

uma parametrização de S definida localmente em p, digamos que $p = X(u_0, v_0)$, então temos localmente em p

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I & \longrightarrow & S \\ & s & \longmapsto & \alpha(s) = X(u(s), v(s)) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} \beta: & J & \longrightarrow & S \\ & t & \longmapsto & \beta(t) = X(u(t), v(t)) \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= (u'(s))^2 X_{uu}(u(s), v(s)) + u''(s) X_u(u(s), v(s)) + 2u'(s)v'(s) \\ & X_{uv}(u(s), v(s)) + (v'(s))^2 X_{vv}(u(s), v(s)) + v''(t) X_v(u(s), v(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta''(t) &= ((u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + u''(t) X_u(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t) \\ & X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t) X_v(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi^N(\alpha''(s_0)) &= (u'(s_0))^2 X^N_{uu}(u(s_0), v(s_0)) + 2u'(s_0)v'(s_0) X^N_{uv}(u(s_0), v(s_0)) \\ &+ (v'(s_0))^2 X_{vv}(u(s_0), v(s_0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^N(\beta''(t_0)) &= (u'(t_0))^2 X^N_{uu}(u(t_0), v(t_0)) + 2u'(t_0)v'(t_0) X^N_{uv}(u(t_0), v(t_0)) \\ &+ (v'(t_0))^2 X_{vv}(u(t_0), v(t_0)). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \alpha(s_0) &= X(u(s_0), v(s_0)) = X(u(t_0), v(t_0)) = \beta(t_0) \quad \text{e} \\ \alpha'(s_0) &= u'(s_0) X_u(u(s_0), v(s_0)) + v'(s_0) X_v(u(s_0), v(s_0)) \\ &= \beta'(t_0) = u'(t_0) X_u(u(t_0), v(t_0)) + v'(t_0) X_v(u(t_0), v(ts_0), \end{aligned}$$

temos $\pi^N(\alpha''(s_0)) = \pi^N(\beta''(t_0))$.

Da observação segue que podemos considerar na definição da elipse de curvatura de S em p qualquer curva que passe por p com direção tangente θ, para $\theta \in \mathbb{S}^1_p$. Na prática os cálculos são feitos para uma curva arbitrária que passa por p com direção ν_θ.

4. O vetor H é chamado vetor **curvatura média** que vamos considerar com origem no ponto p e extremo no centro da elipse de curvatura e os vetores B e C geram a elipse de curvatura.

1.2.2 Expressões para a Elipse de Curvatura

A Elipse de Curvatura Via a Forma de Monge

Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, dado $p \in S$ dizemos que uma imersão $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está localmente na **forma de Monge**, se φ está localmente

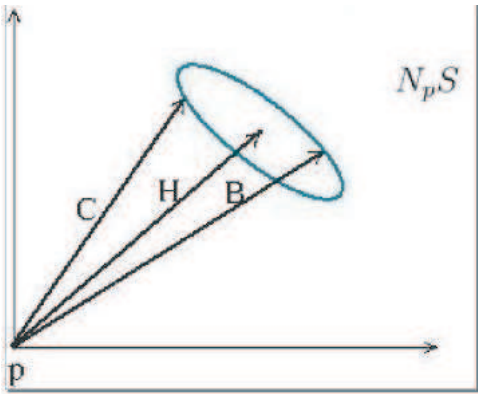


Figura 1.5: Vetores da Elipse de Curvatura

em $p \equiv (0,0)$ da seguinte forma:

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \Big(\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, (0,0)\Big) & \longrightarrow & \Big(\mathbb{R}^n, (0,0,\ldots,0)\Big) \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) \end{array},$$

com $\varphi(u,v) = \Big(u, v, \varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), ..., \varphi_{n-2}(u,v)\Big)$ e $\varphi_i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis para todo $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$, $\varphi(0,0) = (0,0,\ldots,0)$ e $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u}(0,0) = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial v}(0,0) = 0$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$.

Nesta parametrização temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) = (1,0,\ldots,0) \ \text{ e } \ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) = (0,1,\ldots,0)$$

que formam uma base ortonormal de T_pS.

Consequentemente os coeficientes da primeira forma fundamental em p são dados por:

$$E = \varphi_u(p) \cdot \varphi_u(p) = 1, \quad F = \varphi_u(p) \cdot \varphi_v(p) = 0 \ \text{ e } \ G = \varphi_v(p) \cdot \varphi_v(p) = 1.$$

Além disso, temos

$$\varphi^N_{uu}(p) = \varphi_{uu}(p), \quad \varphi^N_{uv}(p) = \varphi_{uv}(p) \quad \text{e} \quad \varphi^N_{vv}(p) = \varphi_{vv}(p).$$

Portanto, neste caso a elipse de curvatura em p é dada por:

$$\eta_p(\theta) = H + B\cos(2\theta) + C\sin(2\theta),$$

com $H = \dfrac{1}{2}\Big(\varphi_{uu}(p) + \varphi_{vv}(p)\Big)$, $\quad B = \dfrac{1}{2}\Big(\varphi_{uu}(p) - \varphi_{vv}(p)\Big)$ e $\quad C = \varphi_{uv}(p)$.

Exemplos:

1. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^5$ dada localmente em $p \equiv (0,0)$ na forma

de Monge por:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \Big(\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, (0,0)\Big) & \longrightarrow & \Big(\mathbb{R}^5, (0,0,\ldots,0)\Big) \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) = \Big(x, y, x^2+y^2, 0, 0, \Big) \end{array},$$

Temos

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(0,0) &= (0,0,2,0,0), \\ \varphi_{yy}(0,0) &= (0,0,2,0,0) \\ \varphi_{xy}(0,0) &= (0,0,0,0,0). \end{aligned}$$

Consequentemente, teremos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\big(\varphi_{xx}(p) + \varphi_{yy}(p)\big) = (0,0,2,0,0) \\ B &= \frac{1}{2}\big(\varphi_{xx}(p) - \varphi_{yy}(p)\big) = (0,0,0,0,0) \\ C &= (0,0,0,0,0). \end{aligned}$$

Portanto, a elipse de curvatura em $p \equiv 0$ se degenera no ponto $(0,0,2,0,0)$, que é distinto da origem de N_pS.

2. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^5$ dada localmente em $p \equiv (0,0)$ na forma de Monge por:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \Big(\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, (0,0)\Big) & \longrightarrow & \Big(\mathbb{R}^5, (0,0,\ldots,0)\Big) \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) = \Big(x, y, x^2, xy, y^2, \Big) \end{array},$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(0,0) &= (0,0,2,0,0) \\ \varphi_{yy}(0,0) &= (0,0,0,0,2) \\ \varphi_{xy}(0,0) &= (0,0,0,1,0) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\big(\varphi_{xx}(p) + \varphi_{yy}(p)\big) = (0,0,1,0,1) \\ B &= \frac{1}{2}\big(\varphi_{xx}(p) - \varphi_{yy}(p)\big) = (0,0,1,0,-1) \\ C &= (0,0,1,0,0) \end{aligned}$$

Portanto, a elipse de curvatura é uma elipse que não passa pela origem.

Expressão Geral

Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, dado $p \in S$, consideremos que a imersão de S em $\mathbb{R}^n$ é parametrizada localmente em p por :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (u.v) & \longmapsto & \varphi(u,v). \end{array}$$

Através de alguns cálculos envolvendo realizados em [13] (ver página 11) obtemos a expressão geral para a elipse de curvatura em um ponto p de S imersa em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$, para qualquer parametrização da imersão, dada por

$$\begin{aligned} \eta(\theta)_p &= \frac{1}{2E}\Big(\varphi^N_{uu} + \frac{1}{EG-F^2}(E^2\varphi^N_{vv} - 2EF\varphi^N_{uv} + F^2\varphi^N_{uu})\Big) + \\ &\quad \frac{1}{2E}\Big(\varphi^N_{uu} - \frac{1}{EG-F^2}(E^2\varphi^N_{vv} - 2EF\varphi^N_{uv} + F^2\varphi^N_{uu})\Big)\cos 2\theta + \\ &\quad \frac{1}{E\sqrt{EG-F^2}}(E\varphi^N_{uv} - F\varphi^N_{uu})\sin 2\theta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

com E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental.

Exemplos:

Apresentamos dois exemplos em que obtemos a elipse de curvatura através da expressão geral dada acima:

1. **Superfície de Veronese**

   Seja a aplicação de Veronese de ordem 2

   $$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz) \end{array},$$

   a imagem $\varphi(\mathbb{S}^2)$ é chamada **superfície de Veronese** e é uma superfície esférica em $\mathbb{R}^5$.

   De fato,

   $$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ & (x,y,z(x,y)) & \longmapsto & \Big(x^2, y^2, (z(x,y))^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz(x,y), \sqrt{2}yz(x,y)\Big), \end{array}$$

   com $z(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

   Notemos que:

   $$\begin{aligned} &x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = x^2(x^2+y^2+z^2) + \\ &y^2(x^2+y^2+z^2) + z^2(x^2+y^2+z^2) = 1 \end{aligned}$$

   Logo, $\varphi(S^2) \subset S^5$.

   Além disso, $\varphi(\mathbb{S}^2)$ está contida no hiperplano

   $$\mathbb{H} = \{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) \in \mathbb{R}^6; u_1+u_2+u_3 = 1\},$$

pois se $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \varphi(\mathbb{S}^2)$, então $x^2 = u_1$, $y^2 = u_2$ e $z^2 = u_3$, logo $u_1 + u_2 + u_3 = 1 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

Portanto,

$$\varphi(S^2) \subset \mathbb{H} \cap (S^2) = S^4(a, r) \subset \mathbb{R}^5.$$

A expressão da superfície de Veronese em $\mathbb{R}^5$ é dada por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & S^2 & \longrightarrow & S^4\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big) \\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y), \end{array}$$

com,

$$\varphi(x,y) = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}(3y^2-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2x^2-y^2), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz(x,y), \sqrt{2}yz(x,y)\Big)$$

Para obtermos a elipse de curvatura em pontos da superfície de Veronese $\varphi(S^2)$, seguiremos o desenvolvimento apresentado em [13] (ver página 33) para concluirmos que a elipse de curvatura na superfície de Veronese é a mesma em todos os pontos da superfície.

Determinaremos a elipse de curvatura no ponto $(0, 0, 1) \in S^2$, observamos que

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y,z) &= \Big(0, -2\sqrt{2}x, \sqrt{2}z(x,y) + \sqrt{2}xz_x(x,y), \sqrt{2}yz_x(x,y)\Big), \\ \varphi_y(x,y,z) &= \Big(\sqrt{6}y, -\sqrt{2}y, \sqrt{2}x, \sqrt{2}xz_y(x,y), \sqrt{2}z(x,y) + \sqrt{2}yz_y(x,y)\Big), \end{aligned}$$

em $(0, 0, 1)$ temos:

$$\varphi_x(0,0,1) = \Big(0,0,0,\sqrt{2},0\Big) \quad \text{e} \quad \varphi_y(0,0,1) = \Big(0,0,0,0,\sqrt{2}\Big).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície de Veronese em $(0, 0, 1)$ são:

$$E = \varphi_x \cdot \varphi_x = 2, \quad F = \varphi_x \cdot \varphi_y = 0 \quad \text{e} \quad G = \varphi_y \cdot \varphi_y = 2.$$

Observamos ainda que:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(x,y,z) &= \Big(0, -2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}z_x(x,y) + \sqrt{2}xz_{xx}(x,y), \sqrt{2}yz_{xx}(x,y)\Big), \\ \varphi_{yy}(x,y,z) &= \Big(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}xz_{yy}(x,y), 2\sqrt{2}z_y(x,y) + \sqrt{2}yz_{yy}(x,y)\Big), \\ \varphi_{xy}(x,y,z) &= \Big(0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}z_y(x,y) + \sqrt{2}xz_{xy}(x,y), \\ &\quad \sqrt{2}z_x(x,y) + \sqrt{2}yz_{xy}(x,y)\Big). \end{aligned}$$

Logo, em $(0,0,1)$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}(0,0,1) &= \Big(0,-2\sqrt{2},0,0,0\Big),\\ \varphi_{yy}(0,0,1) &= \Big(\sqrt{6},-\sqrt{2},0,0,0\Big),\\ \varphi_{xy}(0,0,1) &= \Big(0,0,\sqrt{2},0,0\Big).\end{aligned}$$

Podemos escolher o referencial ortonormal $\{w_1, w_2\}$ gerado pelos vetores $\varphi_x(0,0,1)$ e $\varphi_y(0,0,1)$, assim temos:

$$\begin{aligned}(\varphi_{xx}(0,0,1))^N &= \varphi_{xx}(0,0,1) = (0,-2\sqrt{2},0,0,0),\\ (\varphi_{yy}(0,0,1))^N &= \varphi_{yy}(0,0,1) = (\sqrt{6},-\sqrt{2},0,0,0),\\ (\varphi_{xy}(0,0,1))^N &= \varphi_{xy}(0,0,1) = (0,0,\sqrt{2},0,0).\end{aligned}$$

Para encontrarmos a elipse de curvatura da superfície de Veronese no ponto $p \equiv (0,0,1)$ usaremos a expressão geral (1.2). Segue que a elipse de curvatura é dada por:

$$\eta(\theta) = \frac{1}{4}(\sqrt{6},-3\sqrt{2},0,0,0) + \frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{2},0,0,0)\cos 2\theta + \frac{1}{2}(0,0,\sqrt{2},0,0)\sin 2\theta,$$

os vetores $\frac{1}{4}(-\sqrt{6},\sqrt{2},0,0,0)$ e $\frac{1}{2}(0,0,\sqrt{2},0,0)$ são vetores linearmente independentes e têm o mesmo comprimento.

Portanto, a elipse de curvatura em $(0,0,1)$ é a **circunferência**, de centro $H = \frac{1}{4}(\sqrt{6},-3\sqrt{2},0,0,0)$ e raio $r = \sqrt{2}$.

2. **Superfície de Translação.**

Sejam α e β duas curvas dadas pelas seguintes parametrizações:

$$\begin{aligned}\alpha: \quad (0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^5\\ s &\longmapsto \alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta: \quad (0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^5\\ t &\longmapsto \beta(t) = (a\cos t, a\sin t, 1-a^2, 0, 0).\end{aligned}$$

Consideramos a **superfície de translação associada a** α **e** β como a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}\varphi: \quad (0,2\pi)\times(0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^5\\ (s,t) &\longmapsto \varphi(s,t) = \alpha(s) + \beta(t)\end{aligned}$$

com $\varphi(s,t) = (\cos s, \sin s, a\cos t, a\sin t, 1-a^2)$ e $0 < a < 1$.

Através da expressão da elipse de curvatura para uma parametrização qualquer de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, vamos encontrar a elipse de curvatura em um ponto qualquer da superfície de translação dada.

Observemos que:

$$\varphi_s(s,t) = (-\sin s, \cos s, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \varphi_t(s,t) = (0,0,-a\sin t, -a\cos t, 0).$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície de translação são:

$$E = 1, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2.$$

Sejam p um ponto na superfície de translação e $\left\{\varphi_s, \frac{1}{a}\varphi_t\right\}$ um referencial ortonormal tangente a essa superfície.

Logo,

$$\varphi_{ss}^N = \varphi_{ss} = (-\cos s, -\sin s, 0, 0, 0),$$
$$\varphi_{tt}^N = \varphi_{tt} = (0, 0, -a\cos t, -a\sin t, 0)$$
$$\text{e } \varphi_{st} = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Segue da expressão da elipse de curvatura dada em 1.2 que $C = (0, 0, 0, 0, 0)$. Portanto, a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta ou em um ponto e como $B = \frac{1}{2}\left(-\cos s, -\sin s, \frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{a}, 0\right)$, a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta.

1.3 Alguns Resultados do Estudo da Elipse de Curvatura

Nesta seção definimos os subespaços E_p, Aff_p e N_p^1S de N_pS e apresentamos alguns resultados que caracterizam os pontos de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^5$ e suas posições no espaço afim que contém a elipse de curvatura. Em certos pontos de S a elipse de curvatura pode se degenerar em um segmento, *pontos semiumbílicos*, ou se degenerar em um ponto, *pontos umbílicos*.

Definição 1.3. *Seja φ uma imersão de S em $\mathbb{R}^5$, dada localmente em $p \in S$ na forma de Monge, o* ***primeiro espaço normal*** *de S em p, denotado por N_p^1S, é o subespaço de N_pS gerado pelos vetores $\varphi_{uu}(p)$, $\varphi_{uv}(p)$ e $\varphi_{vv}(p)$, ou seja, $N_p^1 = \langle\varphi_{uu}(p),\ \varphi_{uv}(p),\ \varphi_{vv}(p)\rangle$.*

Definição 1.4. *O* ***subespaço afim*** *de S em p, denotado por Aff_p, é subespaço de menor dimensão que contém a elipse de curvatura.*

Definição 1.5. *O* ***subespaço vetorial*** *de S em p, denotado por E_p, é o subespaço linear de N_pS paralelo a Aff_p.*

Segue das definições 1.3 e 1.5 que E_p é subespaço linear de N_p^1S.

Observação:

$N_p^1S = \langle\varphi_{uu}(p), \varphi_{uv}(p), \varphi_{vv}(p)\rangle = \langle B, C, H\rangle$.

De fato:

Naturalmente, $\langle B, C, H\rangle \subset N_p^1S$.

Por outro lado, se $v \in N_p^1S$, então v se escreve como:

$$v = a\varphi_{uu}(p) + b\varphi_uv(p) + c\varphi_{vv}(p).$$

Observemos ainda que:

$$\begin{cases} H+B &= \varphi_{uu}(p) \\ H-B &= \varphi_{uu}(p) \\ C &= \varphi_{uv} \end{cases}$$

Logo,

$$v = (a+b)\ H + (a-b)\ B + c\ C.$$

Portanto,

$$N_p^1 S = \langle H, B, C \rangle.$$

Definição 1.6. *Sejam S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e $p \in S$, dizemos que:*

(i) *p é um ponto **umbílico** se a elipse de curvatura se degenera em um ponto. No caso em que a elipse de curvatura se degenera na origem de N_pS dizemos que p é um ponto **umbílico planar**.*

(ii) *p é um ponto **semiumbílico** se a elipse de curvatura se degenera em um segmento. No caso em que a elipse de curvatura de degenera em um segmento radial em N_pS dizemos que p é um ponto **semiumbílico radial** ou ponto de **inflexão**.*

Podemos classificar os pontos de S de acordo com o seguinte critério:

Definição 1.7. *Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$ $n \geq 5$, $p \in S_i$ ou p **é do tipo** S_i se, e somente se, dim $N_p^1 S = i$.*

Teorema 1.8. *Dada uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^n$ $n \geq 5$, temos:*

(i) *$p \in S_3$ se, e somente se, Aff_p é um plano que não passa pela origem p.*

(ii) *$p \in S_2$ e a elipse de curvatura não se degenera se, e somente se, Aff_p é um plano que passa pela origem p de N_pS.*

(iii) *$p \in S_2$ é um ponto semiumbílico se, e somente se, Aff_p é uma reta que não passa pela origem p de N_pS.*

(iv) *$p \in S_1$ é um ponto de inflexão se, e somente se, Aff_p é uma reta que passa pela origem p de N_pS.*

(v) *$p \in S_1$ é um ponto umbílico se, e somente se, Aff_p é um ponto distinto de p.*

vi) *$p \in S_0$ é um ponto umbílico planar se, e somente se, $Aff_p = \{p\}$.*

Demonstração:

(i) Se $p \in S_3$ então dim $N_p^1 S = 3$, como $N_p^1 S = \langle H, B, C \rangle$, segue que os vetores H, B e C são linearmente independentes, então Aff_p é um plano que contém a elipse não degenerada.

Além disso, o vetor H é o vetor com extremos na origem e no centro da elipse de curvatura, como H, B e C são L. I., então $H \notin Aff_p$ e $p \notin Aff_p$.

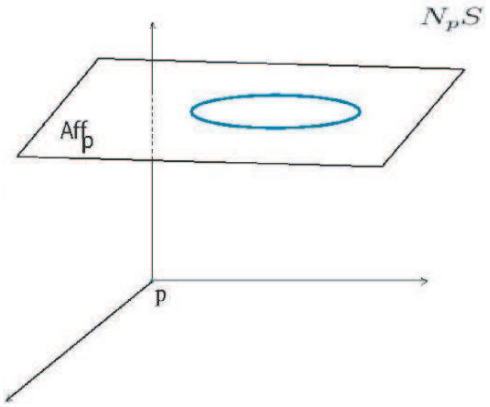


Figura 1.6: $p \in S_3$

Reciprocamente, se Aff_p é um plano tal que $p \notin Aff_p$, temos que a elipse de curvatura é não degenerada já que Aff_p é o espaço de menor dimensão que contém a elipse curvatura e $H \notin Aff_p$, logo os vetores H, B e C são L. I., o que mostra que $\dim N_p^1 S = 3$, então $p \in S_3$.

(ii) Se $p \in S_2$ e a elipse de curvatura é não degenerada, temos $\dim N_p^1 S = 2$ e B e C L. I., mas como $N_p^1 S = \langle H, B, C \rangle$ segue que os vetores H, B e C são L. D., portanto H está no plano gerado por B e C, isto significa que $E_p = Aff_p$.

Reciprocamente, se Aff_p é um plano e passa pela origem, temos que B e C são L.I., e como $p \in Aff_p$, $H \in Aff_p$, logo H, B e C são linearmente dependentes, por $i)$ $p \notin S_3$, portanto $p \in S_2$, pois se $p \in S_1$ ou $p \in S_0$ teríamos B e C linearmente dependentes, uma contradição.

Portanto, H, B e C são linearmente dependentes, $H \in Aff_p$ e $p \in Aff_p$.

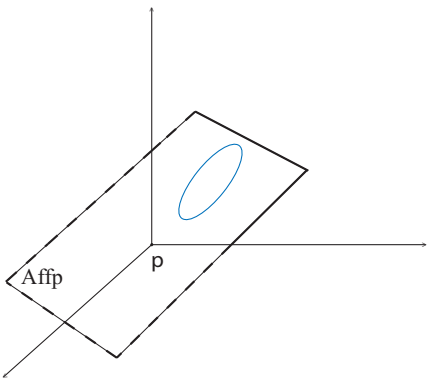


Figura 1.7: $p \in S_2$

(iii) Se $p \in S_2$ é um ponto semiumbílico, temos $\dim N_p^1 S = 2$ e Aff_p é uma reta que contém a elipse de curvatura degenerada num segmento de reta.

Além disso, este segmento é não radial, pois caso contrário, os vetores H, B e C seriam dois a dois L. D., e daí $\dim N_p^1 S \leq 1$, o que contradiz a hipótese.

Reciprocamente, se Aff_p é uma reta que não passa pela origem p, como Aff_p é o espaço de menor dimensão que contém a elipse de curvatura, temos que p é um ponto semiumbílico não radial, ou seja os vetores H, B são linearmente independentes se $C = 0$, ou vice e versa.

Assim, $\dim N_p^1 S \geq 2$, mas $\dim N_p^1 S \neq 3$, pois caso contrário a elipse seria não degenerada, logo $\dim N_p S = 2$, assim $p \in S_2$.

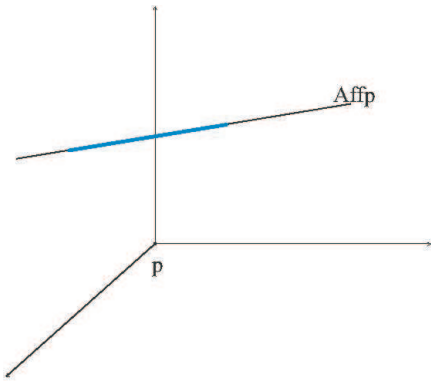


Figura 1.8: $p \in S_2$

(iv) Se $p \in S_1$ é um ponto de inflexão, então claramente Aff_p é uma reta que passa pela origem p de $N_p S$, assim H, B e C são dois a dois linearmente dependentes, logo $H \in Aff_p$, portanto $p \in Aff_p$.

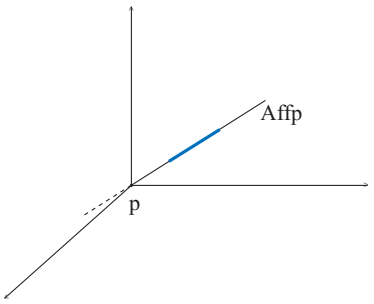


Figura 1.9: $p \in S_1$

Reciprocamente, se Aff_p é uma reta que passa pela origem p, então a elipse é um segmento de reta radial, daí que p é um ponto de inflexão, e ainda H, B e C são dois a dois L.D.

Logo $\dim N_p^1 S \geq 1$, se $\dim N_p^1 S = 2$ com p semiumbílico, segue por *iii)* $p \notin Aff_p$, uma contradição.

Se $\dim N_p^1 S = 3$, Aff_p é uma plano, contradição com a hipótese.

Portanto, $\dim N_p^1 S = 1$, o que mostra que $p \in S_1$.

(v) Se $p \in S_1$ é um ponto umbílico, então $\dim N_p^1 S = 1$ e a elipse de curvatura se degenera em um ponto, suponhamos que $Aff_p = \{p\}$, então $H = B = C = 0$, o que mostra que $\dim N_p^1 S = 0$, contradição.

Reciprocamente, se Aff_p é um ponto fora da origem, então a elipse de curvatura se degenera num ponto, daí $H \neq 0$ e $B = C = 0$, o que mostra que $\dim N_p^1 S = 1$, então $p \in S_1$.

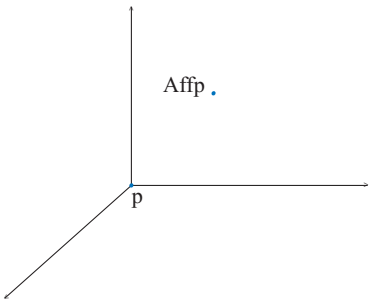


Figura 1.10: $p \in S_1$

vi) Se $p \in S_0$ é um ponto umbílico planar, temos $H = B = C = \vec{0}$, mas então a elipse de curvatura se degenera na origem, portanto $Aff_p = \{p\}$.

Reciprocamente, se $Aff_p = \{p\}$, então a elipse de curvatura se degenera na origem do espaço normal, daí p é um ponto umbílico planar e como $H = B = C = \vec{0}$, segue que $\dim N_p^1 S = 0$, daí que $p \in S_0$.

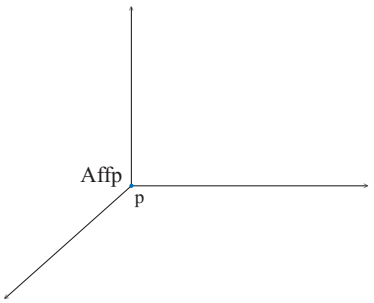


Figura 1.11: $p \in S_0$

■

Capítulo 2

Aplicação de Veronese e Superfícies de Steiner

O objetivo deste capítulo é definir a aplicação de Veronese de ordem 2, fazer um estudo da superfície de Veronese de ordem 2 e das superfícies de Steiner. As principais referências que utilizamos foram [3], [4], [5] e [7].

As figuras que aparecem neste capítulo foram reproduzidas com o auxílio dos *sofwares Maple*, *Illustrator*, *Superficies* disponível no endereço eletrônico http://www.uv.es/montesin/ e algumas figuras foram retiradas da página http://www.ipfw.edu/math/Coffman/steinersurface.html.

2.1 Preliminares

Intuitivamente, uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^m$, é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, que é localmente como um aberto de $\mathbb{R}^n$, deformado de "maneira regular". Mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ é uma n-**variedade diferenciável** se para cada $p \in M$ existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, com $q \in \mathcal{U}$, $\varphi(q) = p$ e uma aplicação $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \cap M$ tal que:*

(i) *$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \cap M$ é diferenciável.*

(ii) *$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \cap M$ é um homeomorfismo.*

(iii) *A diferencial $d_q\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é injetiva.*

2.1.1 Imersões e Submersões

Definição 2.2. *Seja $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável $\mathcal{C}^\infty$, definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, para cada $q \in \mathcal{U}$ seja $dF_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a respectiva diferencial em q, então:*

(i) *F é uma **imersão em q**, se dF_q é injetiva; F é uma **imersão** se dF_q é injetiva $\forall q \in \mathcal{U}$.*

(ii) *F é uma **submersão em q**, se dF_q é sobrejetiva; F é uma submersão se dF_q é sobrejetiva $\forall q \in \mathcal{U}$.*

(iii) *F é um **mergulho** se F é uma imersão injetiva que é também um homeomorfismo sobre a imagem $F(\mathcal{U})$.*

Observação: Segue da definição acima que se F é uma imersão então $n \leq m$ e se F é uma submersão então $n \geq m$.

2.1.2 Espaço Projetivo Real de Ordem n $(\mathbb{P}^n)$

Seja S^n a esfera unitária n-dimensional e dados X e Y em S^n, considere a relação de equivalência $\sim$ definida em $\mathbb{S}^n$:

$$X \sim Y \Longleftrightarrow \begin{cases} X = Y \\ \text{ou} \\ X = -Y \end{cases}.$$

O espaço quociente $\mathbb{S}^n \backslash \sim = \mathbb{P}^n$ é o **espaço projetivo de ordem** n.

Observamos ainda que o espaço projetivo de dimensão 2, $\mathbb{P}^2$, é o conjunto das classes de equivalências $[X]$ das retas do espaço $\mathbb{R}^3$ passando pela origem sem origem.

A **projeção canônica** de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{P}^n$ é a aplicação dada por:

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & & X & \longmapsto & \pi(X) = \overline{X} \end{array}.$$

2.2 Aplicação de Veronese $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{N(n)}$ de ordem k

A aplicação de Veronese de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{N(n)}$ de ordem k, é uma aplicação que associa cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a um elemento em $\mathbb{R}^{N(n)}$ cujas coordenadas envolvem todos os possíveis monômios de ordem k nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nesse trabalho vamos considerar a aplicação de Veronese de ordem 2 de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^6$.

Exemplos:

1. A Aplicação de Veronese de $\mathbb{R}^2$ de ordem 2, dada por

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) = (x^2, y^2, \sqrt{2}xy) \end{array}$$

   cuja restrição a $\mathbb{S}^1$ nos dará a variedade de Veronese de dimensão 1 e ordem 2.

   Observamos que

$$\varphi(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^2, \text{ onde } \mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3; \|X\| = 1\}.$$

De fato, para $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi(x,y)\| &= \sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)^2} \\ &= x^2+y^2 \\ &= \|(x,y)\|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{H}$ com $\mathbb{H} = \{(u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3; u_1+u_2 = 1\}$ plano em $\mathbb{R}^3$, pois se $(u_1, u_2, u_3) \in \varphi(\mathbb{S}^1)$, então $x^2 = u_1$, $y^2 = u_2$ e logo $u_1+u_2 = x^2+y^2 = 1$, com $(x, y) \in \mathbb{S}^1$.

Portanto, $\varphi(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{H}$ é uma circunferência.

2. A Aplicação de Veronese de $\mathbb{R}^3$ de ordem 2, dada de por

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz) \end{array}$$

e cuja restrição a $\mathbb{S}^2$, nos dará a variedade de Veronese de dimensão 2 e ordem 2.

Observemos que

$$\varphi(S^2) \subset S^5, \text{ onde } S^5 = \{X \in \mathbb{R}^6; \|X\| = 1\}.$$

De fato, para $(x, y, z) \in S^2$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi(x,y,z)\| &= \sqrt{x^4+y^4+z^2+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ &= x^2+y^2+z^2 \\ &= \|(x,y,z)\|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi(S^2) \subset \mathbb{H}$ com $\mathbb{H} = \left\{(u_1, u_2, \ldots, u_6) \in \mathbb{R}^6; u_1 + u_2 + u_3 = 1\right\}$ um hiperplano em $\mathbb{R}^6$.

De fato, pois se $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \varphi(\mathbb{S}^2)$, então $x^2 = u_1$, $y^2 = u_2$ e $z^2 = u_3$, logo $u_1 + u_2 + u_3 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

Portanto, $\varphi(S^2) \subset S^5 \cap \mathbb{H} = \mathbb{S}^4(a, r)$.

Como $\varphi(x, y, z) = \varphi(-x, -y, -z)$, podemos considerar a superfície de Veronese em $\mathbb{P}^2$, isto é,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{|_{\mathbb{P}^2}} & : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^5 \subset \mathbb{R}^6 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz). \end{array}$$

Assim considerando a projeção canônica

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & \mathbb{S}^5 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & & X & \longmapsto & \pi(X) = \overline{X} \end{array}$$

temos:

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi} & : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & & \overline{X} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{X}) = \pi \circ \varphi(\overline{X}) \end{array} .$$

2.3 A Superfície de Veronese Clássica de ordem 2

Denominamos a variedade de Veronese de dimensão 2 e ordem 2, simplesmente por **superfície de Veronese**, que se trata de um mergulho do plano projetivo real $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{P}^5$, ou se preferirmos, podemos dizer que a superfície de Veronese é um mergulho do plano projetivo real $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^6$.

Podemos obter mergulhos do espaço projetivo $\mathbb{P}^2$ no espaço $\mathbb{P}^3$. Para isso utilizamos a restrição da aplicação de Veronese $\overline{\varphi} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ dada acima e utilizando o desenvolvimento de Coffman feito em [3] da seguinte maneira:

1. Consideramos uma matriz $M_{6\times 4}$ e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Omega & : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & [u_1 : u_2 : u_3] & \longmapsto & \Omega[u_1 : u_2 : u_3] = \overline{\varphi}[u_1 : u_2 : u_3] \cdot M_{6\times 4} \end{array}$$

   com

$$\overline{\varphi}[u_1 : u_2 : u_3] = (u_1^2, u_1u_2, u_1u_3, u_2^2, u_2u_3, u_3^2),$$

   a matriz linha de ordem 1×6 e $\cdot$ o produto de matrizes.

2. Considerando $\pi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\} \longrightarrow \mathbb{P}^3$ a projeção canônica denotamos por ϕ a composição $\pi \circ \Omega : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^3$.

   Logo

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & & [u_1 : u_2 : u_3] & \longmapsto & \phi[u_1 : u_2 : u_3] = (\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4) \end{array} .$$

3. Tomando em $\mathbb{P}^2$ coordenadas homogêneas com $u_3 = 1$ obtemos a forma racional de ϕ dada por:

$$\overline{\phi}[u_1 : u_2 : u_3] = \left(\frac{\phi_1}{\phi_4},\ \frac{\phi_2}{\phi_4},\ \frac{\phi_3}{\phi_4}\right).$$

As **superfícies de Steiner** e de **Boy** podem ser obtidas seguindo esta construção, como veremos a seguir.

2.4 As Superfícies de Steiner

Utilizando o desenvolvimento mencionado acima, construímos nessa seção as superfícies de Steiner, a saber: **a Superfície Romana de Steiner**, a **superfície de Steiner tipo 3**: superfície Cross-cap, a **superfície de Steiner de tipo 5** e a **superfície de Steiner de tipo 6**: Superfície Cross-Cup.

As referências para esta seção são [1], [3] e [7].

2.4.1 Superfície Romana de Steiner

Consideremos uma matriz $M_{6\times 4}$ dada por:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Omega : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & [u_1 : u_2 : u_3] & \longmapsto & \Omega[u_1 : u_2 : u_3] = \overline{\varphi}([u_1 : u_2 : u_3]) \cdot M_1 \end{array}$$

temos

$$\phi[u_1 : u_2 : u_3] = (u_1u_2,\ u_1u_3,\ u_2u_3,\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

Tomando em $\mathbb{P}^2$ coordenadas homogêneas com $u_3 = 1$ obtemos a forma racional de ϕ dada por:

$$\overline{\phi}[u_1 : u_2 : u_3] = \left(\frac{u_1u_2}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \frac{u_1}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \frac{u_2}{1 + u_1^2 + u_2^2} \right).$$

A equação dessa superfície pode ser dada por:

$$f(x) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^3 - x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Se tomarmos $x_4 = 1$ e identificarmos $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, fazendo alguns cálculos concluímos que sua forma implícita é dada por:

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - xyz = 0.$$

Além disso, considerando a parametrização usual da esfera unitária obtemos a seguinte parametrização para a superfície Romana de Steiner em $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\Big(\sin^2(\phi)\sin(2\theta),\ \cos(\theta)\sin(2\phi),\ \sin(\theta)\sin(2\phi) \Big),$$

esta superfície é chamada **superfície Romana de Steiner** cuja imagem está descrita na figura 2.1.

A superfície **Romana de Steiner** é uma superfície com três retas de auto-intersecção. Cada reta termina em dois pontos singulares. As três retas de auto-intersecção se interceptam, por sua vez, em um ponto triplo.

Observamos que a superfície romana de Steiner contém segmentos de retas, como ilustrado na figura2.2.

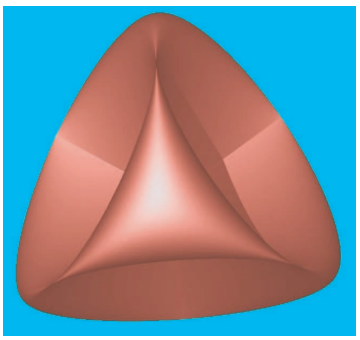


Figura 2.1: Superfície Romana de Steiner

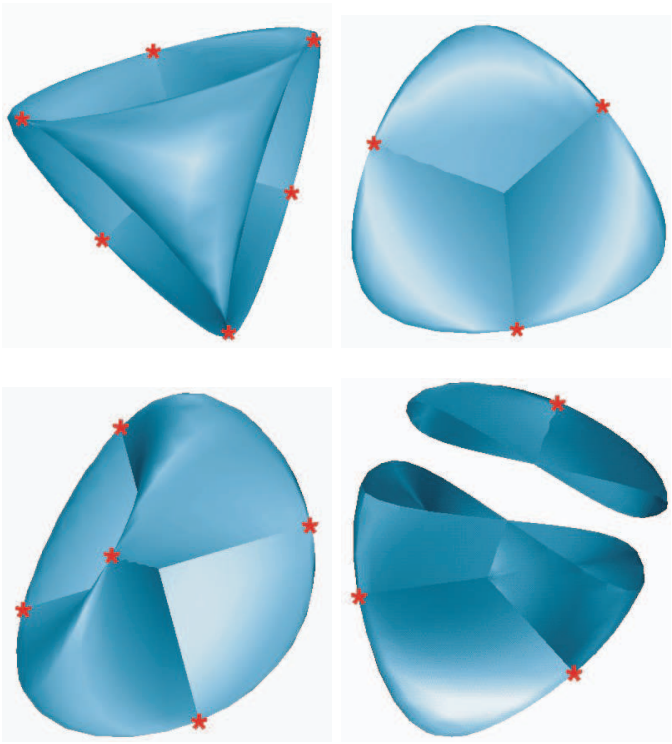


Figura 2.2: Superfície romana, intersecções e pontos singulares

2.4.2 Superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-Cap

Utilizando agora uma matriz $M_{6\times 4}$ dada por:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Omega : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & [u_1 : u_2 : u_3] & \longmapsto & \Omega[u_1 : u_2 : u_3] = \overline{\varphi}[u_1 : u_2 : u_3] \cdot M_{6\times 4} \end{array}$$

temos

$$\phi[u_1 : u_2 : u_3] = (u_1^2 + u_2^2,\ u_2^2 + u_3^2,\ u_1u_3, u_2u_3).$$

Tomando em $\mathbb{P}^2$ coordenadas homogêneas com $u_3 = 1$ obtemos a forma racional de ϕ dada por:

$$\overline{\phi}(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{u_1^2 + u_2^2}{1 + u_2^2}, \frac{u_1}{1 + u_2^2}, \frac{u_2}{1 + u_2^2}\right).$$

A equação dessa superfície pode ser dada por:

$$f(x) = x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) - x_1^2x_4^2 - (x_3^2 + x_4^2)^2 = 0.$$

Se tomarmos $x_4 = 1$ e identificarmos $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, fazendo alguns cálculos concluímos que sua forma implícita é dada por:

$$4x^2(x^2 + y^2 + z^2 + z) + y^2(y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

Além disso, considerando a parametrização usual da esfera unitária obtemos a seguinte parametrização para a superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-Cap em $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi(\theta, \phi) = \left(\frac{1}{2}\sin(\theta)\sin(2\phi),\ \sin^2(\phi)\sin(2\theta),\ \sin^2(\phi)\cos(2\theta)\right),$$

esta superfície é chamada **superfície de Steiner de Tipo 3: superfície Cross-cap** cuja imagem está descrita na figura abaixo.

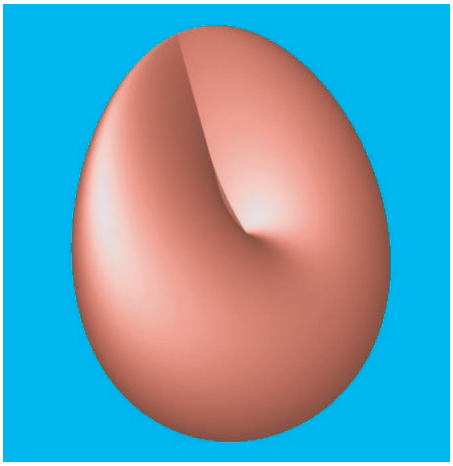


Figura 2.3: Superfície de Steiner de Tipo 3: Superfície Cross-cap

A **Steiner de tipo 3: Cross-cap** é uma superfície que possui uma reta de auto-intersecção, que termina em dois pontos singulares, os pontos *cross-cap*.

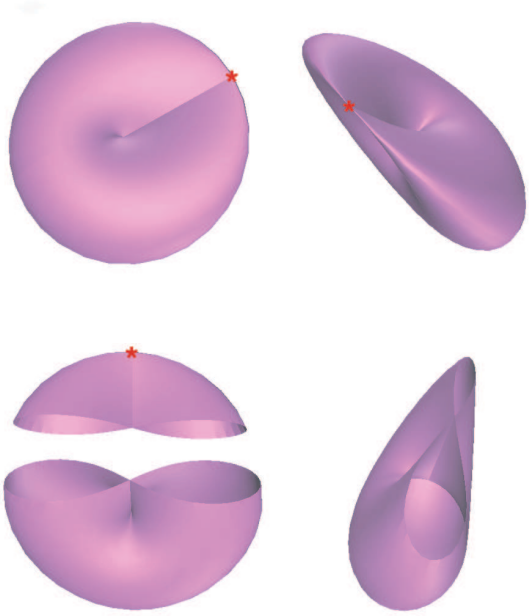


Figura 2.4: Superfície cross-cap, intersecções e pontos singulares

2.4.3 Superfície de Steiner de Tipo 5

Utilizando uma matriz $M_{6\times 4}$ dada por:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Omega \ : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & [u_1 : u_2 : u_3] & \longmapsto & \Omega[u_1 : u_2 : u_3] = \overline{\varphi}([u_1 : u_2 : u_3] \cdot M_{6\times 4} \end{array}$$

temos

$$\phi[u_1 : u_2 : u_3] = (u_1u_3 - u_2u_3,\ u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2).$$

Tomando em $\mathbb{P}^2$ coordenadas homogêneas com $u_3 = 1$ obtemos a forma racional de ϕ dada por:

$$\overline{\phi}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2,\ u_1^2,\ u_2^2).$$

A equação dessa superfície pode ser dada por:

$$f(x) = (x_1^2 - x_2^2x_4 - x_3x_4)^2 - 4x_2x_3x_4^2 = 0.$$

Se tomarmos $x_4 = 1$ e identificarmos $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, fazendo alguns

cálculos concluímos que sua forma implícita é dada por:

$$x^2(z^2-1)^2+y^2(y^2+z^2-1)=0.$$

Além disso, considerando a parametrização usual da esfera unitária obtemos a seguinte parametrização para a superfície de Steiner de Tipo 5 em $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi(\theta,\phi)=\Big(\sin^2(\phi)\sin(2\theta),\ \cos(\theta)\sin(2\phi),\ -\cos(2\phi)\Big),$$

esta superfície é chamada

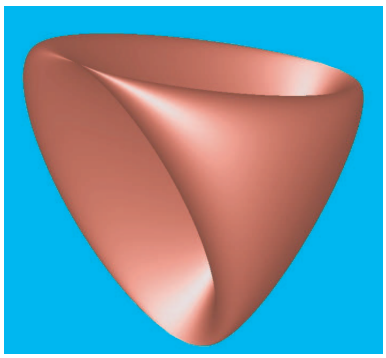


Figura 2.5: Superfície de Steiner de tipo 5

A superfície de Steiner de tipo 5: é uma superfície que possui duas linhas de auto-intersecção (das três da superfície romana de Steiner,) que coincidem formando uma linha de auto-intersecção, conhecida como linha *tacnodal*, ou "região T", dando origem a quatro pontos singulares nas extremidades do segmento.

2.4.4 Superfície de Steiner de Tipo 6: Superfície Cross-Cup

Utilizando uma matriz $M_{6\times4}$ dada por:

$$M_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

e a aplicação

$$\begin{array}{rccl}\Omega\ :&\mathbb{P}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^4\\&[u_1:u_2:u_3]&\longmapsto&\Omega[u_1:u_2:u_3]=\overline{\varphi}[u_1:u_2:u_3]\cdot M_{6\times4}\end{array}$$

temos

$$\phi[u_1:u_2:u_3]=(u_1^2,\ u_1u_3-u_2^2,\ u_2u_3,\ u_3^2).$$

Tomando em $\mathbb{P}^2$ coordenadas homogêneas com $u_3=1$ obtemos a forma

racional de ϕ dada por:

$$\overline{\phi}(u_1, u_2, u_3) = (u_1^2,\ u_1 - u_2^2,\ u_2).$$

A equação dessa superfície pode ser dada por:

$$f(x) = (x_2x_4 + x_3^2)^2 - x_1x_4^3 = 0.$$

Se tomarmos $x_4 = 1$ e identificarmos $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, fazendo alguns cálculos concluímos que sua forma implícita é dada por:

$$-\frac{5}{4}x^4 + 3x^3y - \frac{5}{2}x^2y^2 + xy^3 - \frac{1}{4}y^4 - 3x^2z^2 + 4xyz^2 - y^2z^2 - z^4 +$$

$$\frac{7}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2y + \frac{5}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^3 + 5xz^2 - 3yz^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{5}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 - 2z^2 + x = 0.$$

Além disso, considerando a parametrização usual da esfera unitária obtemos a seguinte parametrização para a superfície de Steiner de Tipo 6: Superfície Cross-Cup em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\varphi(\theta, \phi) \quad = \quad & \Big(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\sin^2(\theta),\ \sin^2(\phi)\big(\sin^2(\theta) + \sin(2\theta)\big), \\ & \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(2\phi)\big(\cos(\theta) + \sin(\theta)\big)\Big),\end{aligned}$$

esta superfície é chamada **superfície de Steiner de Tipo 6-Superfície Cross-Cup**.

A Superfície de Steiner de Tipo 6: Superfície Cross-Cup é uma superfície em que as três linhas de auto-intersecção da superfície romana de Steiner coincidem, formando uma linha *"osconodal"*, conhecida como *cross-cup* uma vez que se assemelha-se com a Cross-Cap mas com a linha de auto-intersecção tangente a superfície.

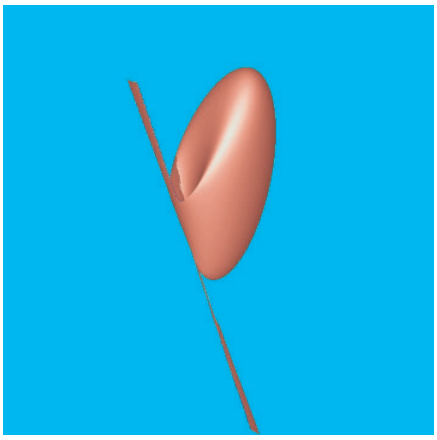


Figura 2.6: Superfície de Steiner de tipo 6: Superfície Cross-Cup

2.5 A Superfície de Boy

As referências para esta seção são [1] e [8].

A superfície de Boy foi descoberta em 1901 por *Werner Boy* (1879-1914) quando estudava um problema proposto por *David Hilbert* (1862 – 1943).

Hilbert lhe propôs a tarefa de verificar se existia ou não uma imersão do plano projetivo real $\mathbb{P}^2$ como uma superfície fechada em $\mathbb{R}^3$ sem singularidades. Boy mostrou que tal superfície existia se suas auto-intersecções fossem em curvas de pontos duplos que se interceptariam em um ponto triplo, porém não conseguiu encontrar as equações paramétricas de tal superfície, nem tampouco conseguiu visualizá-la.



Figura 2.7: Superfície de Boy

Em 1978 *Bernard Morin* descobriu a primeira parametrização da superfície de Boy, outras parametrizações foram encontradas depois, com destaque para a encontrada por *Fraçois Apéry*.

A superfície de Boy é uma realização do plano projetivo real $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^3$ sem singularidades, apenas com linhas de auto-intersecção e um ponto triplo.

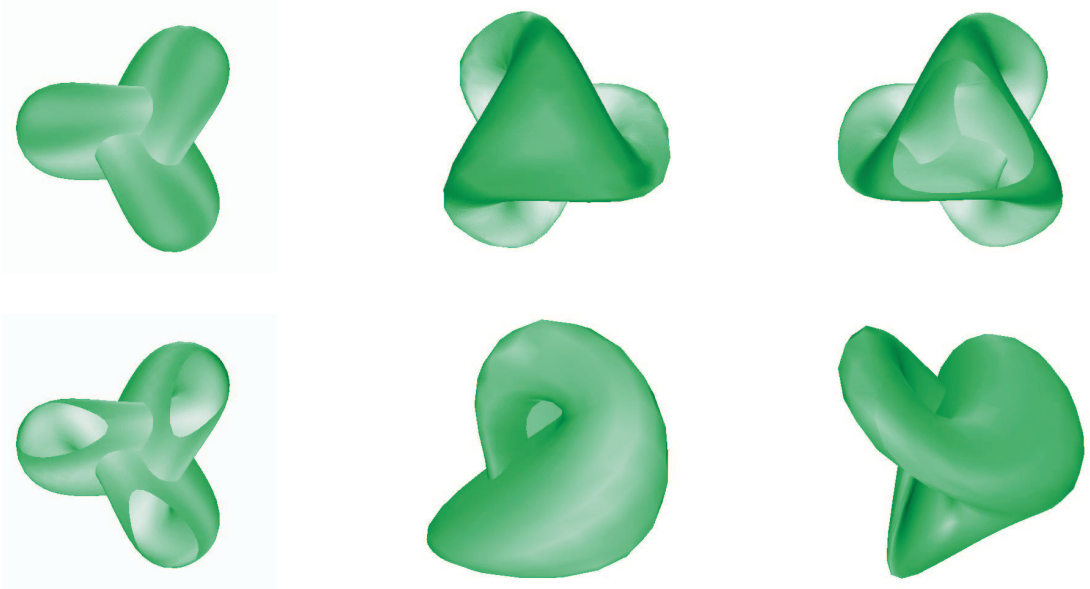


Figura 2.8: Superfície de Boy

Capítulo 3

Projetivo de Curvatura em pontos de uma $3-$variedade

Introduzimos o conceito de projetivo de curvatura normal em pontos de uma $3-$variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, que pode ser considerada a extensão para dimensão 3 do conceito de elipse de curvatura em um ponto de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$. De maneira similar à usada no capítulo 1, para a elipse de curvatura, escrevemos uma expressão para o projetivo de curvatura.

Mostramos que o projetivo de curvatura está relacionado com as superfícies de Steiner e a superfície de Veronese e que este pode ser obtido por um isomorfismo G da superfície de Veronese composta com uma transformação linear T e seguido por uma translação.

Finalizamos construindo exemplos e apresentando resultados quanto à geometria local da $3-$variedade em função do tipo de projetivo de curvatura.

As figuras que aparecem neste capítulo foram reproduzidas com o auxílio dos programas *Superficies* e *MapR2R2*, disponíveis na página do professor Ángel Montesinos Amilibia da Universidade de Valência, no endereço eletrônico http://www.uv.es/montesin/.

3.1 Projetivo de Curvatura

O projetivo de curvatura foi estudado detalhadamente na tese [1] de R. R. Binotto, que aqui nos serve de texto base.

A generalização deste conceito para imersões de uma variedade em espaços euclidianos é o *locus de curvatura* que veremos no próximo capítulo e que foi estudado, para o caso de imersões de variedades em codimensão 2, por J. J. Nuño Ballesteros e M. C. Romero Fuster em [14] e, mais recentemente, por estes autores em conjunto com F. Sánchez Bringas em [15].

Neste capítulo vamos trabalhar com o projetivo de curvatura segundo o texto [1], apresentamos a definição, expressões algébricas e a interpretação geométrica do projetivo de curvatura.

Definição 3.1. *Sejam M uma $3-$variedade imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e $p \in M$, para cada direção $\nu_{\theta\phi} = (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi) \in \mathbb{S}^2_{pp}M$, com $\mathbb{S}^2_p$ a esfera*

unitária, centrada em p e contida em T_pM, a curva obtida pela intersecção do $(n-2)$-espaço $\mathbb{H}_{\theta\phi} = N_pM \oplus \langle \nu_{\theta\phi} \rangle$ com M é chamada ***secção normal*** *de M em p na direção de $\nu_{\theta\phi}$.*

Supondo

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\theta\phi}: & I & \longrightarrow & M \\ & s & \longmapsto & \gamma_{\theta\phi}(s) \end{array},$$

curva regular em M parametrizada pelo comprimento de arco temos $\gamma''_{\theta\phi}(s_0) \in N_pM$, já que $\gamma'_{\theta\phi}(s_0)$ e $\nu_{\theta\phi}$ são paralelos, daí o nome secção normal, pois $\gamma''_{\theta\phi}$ não tem componente na direção tangente.

Neste caso, o vetor $\gamma''_{\theta\phi}(s_0)$ é chamado **vetor curvatura normal** de M em p.

Observação:

Analogamente ao caso de superfícies imersas em $\mathbb{R}^n$, dadas curvas regulares em M

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & M \\ & s & \longmapsto & \alpha(s) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \beta: & J & \longrightarrow & S \\ & t & \longmapsto & \beta(t) \end{array}$$

com

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha(s_0) & = & p \\ \alpha'(s_0) & = & \vec{w} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \beta(t_0) & = & p \\ \beta'(t_0) & = & \vec{w} \end{array} \right. ,$$

através de cálculos, análogos aos feitos para umas superfícies, concluímos que $\pi^N\big(\alpha''(s_0)\big) = \pi^N\big(\beta''(t_0)\big)$.

Daí que o vetor curvatura normal de M em p depende apenas do ponto p e da direção $\nu_{\theta\phi} \in T_pM$ escolhida.

Como no caso de superfícies, para um ponto p em M uma $3-$variedade, o **projetivo de curvatura** é o lugar geométrico dos vetores curvatura das secções normais de M em p, mais precisamente temos:

Definição 3.2. *Sejam M uma $3-$variedade imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e p um ponto em M, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \eta_p: & \mathbb{S}^2_p \subset T_pM & \longrightarrow & N_pS \\ & (\theta, \phi) & \longmapsto & \eta_p(\theta,\phi) = \gamma''_{\theta\phi}(s_0). \end{array}$$

é chamada ***projetivo de curvatura*** *de M em p, com $\gamma_{\theta\phi}$ a secção normal de M em p, parametrizada pelo comprimento de arco.*

Observações:

1. Se $\gamma_{\theta\phi}$ é uma curva em M parametrizada pelo comprimento de arco, com

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \gamma(s_0) & = & p \\ \gamma'_{\theta\phi}(s_0) & = & \nu_{\theta\phi} \end{array} \right. ,$$

   então o projetivo de curvatura de M em p é $\pi^N(\gamma''_{\theta\phi}(s_0))$, a projeção do vetor $\gamma''_{\theta\phi}(s_0)$ no espaço normal N_pM.

2. Se M é uma $3-$variedade imersa em $\mathbb{R}^4$, o projetivo de curvatura é um segmento reta ou se degenera em um ponto.

3. Para $n = 5$ o projetivo de curvatura é uma superfície plana, que pode se degenerá em um segmento de reta ou em um ponto.

4. Para $n \geq 6$, podemos ter o projetivo de curvatura, contido no espaço normal em p, sendo uma superfície ou se degenerando em regiões planas, ou em segmentos de retas ou em pontos.

3.2 Expressões para o Projetivo de Curvatura

Seja M uma 3-variedade imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, dado $p \in M$, consideremos

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\theta\phi}: & I & \longrightarrow & M \\ & s & \longmapsto & \gamma_{\theta\phi}(s) \end{array}$$

uma curva de M parametrizada pelo comprimento de arco com

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \gamma_{\theta\phi}(s_0) & = & p \\ \gamma_{\theta\phi}^{'}(s_0) & = & \nu_{\theta\phi} \end{array} \right. .$$

Suponhamos que M localmente em p está parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi(u,v,w) \end{array},$$

com $\varphi(u_0, v_0, w_0) = p$, então podemos parametrizar $\gamma_{\theta\phi}$, localmente em p, por:

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\theta\phi}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \gamma_{\theta\phi}(t) = \varphi\big(u(s), v(s), w(s)\big). \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \gamma'_{\theta\phi}(s) & = & u'(s)\varphi_u(u(s),v(s),w(s)) + v'(s)\varphi_v(u(s),v(s),w(s)) + \\ & & w'(s)\varphi_w(u(s),v(s),w(s)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \gamma''_{\theta\phi}(s) & = & u'(s)^2\varphi_{uu}(u(s),v(s),w(s))) + u''(t)\varphi_u(u(s),v(s),w(s)) + 2u'(s)v'(s) \\ & & \varphi_{uv}(u(s),v(s),w(s)) + 2u'(s)w'(s)\varphi_{uw}(u(s),v(s),w(s)) + v'(s)^2 \\ & & \varphi_{vv}(u(s),v(s),w(s)) + v''(s)\varphi_v(u(s),v(s),w(s)) + 2v'(s)w'(s) \\ & & \varphi_{vw}(u(s),v(s),w(s)) + w'(s)^2\varphi_{ww}(u(s),v(s),w(s)) + \\ & & w''(s)\varphi_w(u(s),v(s),w(s)). \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \pi^N(\gamma''_{\theta\phi}(s)) & = & u'(s)^2\varphi^N_{uu}(u(s),v(s),w(s))) + 2u'(s)v'(s)\varphi^N_{uv}(u(s),v(s),w(s)) + \\ & & 2u'(s)w'(s)\varphi^N_{uw}(u(s),v(s),w(s)) + v'(s)^2\varphi^N_{vv}(u(s),v(s),w(s)) + \\ & & 2v'(s)w'(s)\varphi^N_{vw}(u(s),v(s),w(s)) + w'(s)^2\varphi^N_{ww}(u(s),v(s),w(s)). \end{array}$$

Em s_0, suponhamos que $\{\varphi_u(s_0), \varphi_v(s_0), \varphi_w(s_0)\}$ é uma base ortonormal de T_pM, como $\nu_{\theta\phi} = u'(s_0)\varphi_u(s_0) + v'(s_0)\varphi_v(s_0) + w'(s_0)\varphi_w(s_0)$, segue que $(u'(s_0))^2 + (v'(s_0))^2 + (w'(s_0))^2 = 1$, assim podemos tomar

$$\begin{cases} u'(s_0) &= \sin\phi\cos\theta \\ v'(s_0) &= \sin\phi\sin\theta \\ w'(s_0) &= \cos\phi \end{cases}$$

e teremos:

$$\begin{aligned} \pi^{\mathrm{N}}(\gamma''_{\theta,\phi}(s_0)) &= \sin^2\phi\cos^2\theta\ \varphi^N_{uu}(p) + 2\sin^2(\phi)\cos\theta\sin\theta\ \varphi^N_{uv}(p) + \\ &\quad 2\sin\phi\cos\theta\cos\phi\ \varphi^N_{uw}(p) + 2\sin\phi\sin\theta\cos\phi\ \varphi^N_{vw}(p) + \\ &\quad \sin^2\phi\sin^2\theta\ \varphi^N_{vv}(p) + \cos^2\phi\ \varphi^N_{ww}(p). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Assim, para cada $p \in M$ temos:

$$\begin{aligned} \eta_p(\theta,\phi) &= \pi^{\mathrm{N}}(\gamma''_{\theta,\phi}(s_0)) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\varphi^N_{uu}(p) + \varphi^N_{vv}(p) + 2\varphi^N_{ww}(p)\Big) + \\ &\quad \frac{1}{4}\Big(\varphi^N_{uu}(p) - \varphi^N_{vv}(p)\Big)(1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) \\ &\quad \frac{1}{2}\varphi^N_{uv}(p)(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) + \\ &\quad \frac{1}{4}\Big(-\varphi^N_{uu}(p) - \varphi^N_{vv}(p) + 2\varphi^N_{ww}(p)\Big)\cos(2\phi) + \\ &\quad \varphi^N_{uw}(p)\ \sin(2\phi)\cos\theta + \varphi^N_{vw}(p)\ \sin(2\phi)\sin\theta, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \eta(\theta,\phi) &= \mathbf{H} + \mathbf{B}(1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) + \mathbf{C}(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) + \\ &\quad \mathbf{D}\cos(2\phi) + \mathbf{U}\sin(2\phi)\cos\theta + \mathbf{V}\sin(2\phi)\sin\theta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi^N_{uu}(p) + \varphi^N_{vv}(p) + 2\varphi^N_{ww}(p)\Big] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi^N_{uu}(p) - \varphi^N_{vv}(p)\Big] \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2}\varphi^N_{uv}(p) \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{4}\Big[-\varphi^N_{uu}(p) - \varphi^N_{vv}(p) + 2\varphi^N_{ww}(p)\Big] \\ \mathbf{U} &= \varphi^N_{uw}(p) \\ \mathbf{V} &= \varphi^N_{vw}(p). \end{aligned}$$

3.2.1 O Projetivo de Curvatura Via a Forma de Monge

Seja M uma 3-variedade imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, dado $p \in M$ dizemos que uma imersa $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está localmente na forma de Monge, se φ está escrita localmente em $p \equiv (0,0,0)$, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3, (0,0,0)) & \longrightarrow & \Big(\mathbb{R}^n, (0,0,0,\ldots,0)\Big) \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi(u,v,w) \end{array}$$

com $\varphi(u,v,w) = \Big(u,v,w,\varphi_1(u,v,w),\varphi_2(u,v,w),\ldots,\varphi_{n-3}(u,v,w)\Big)$, onde

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i: & (\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi_i(u,v,w) \end{array}$$

para $i = 1,2,\ldots,n-2$, são as funções diferenciáveis com

$$\varphi(0,0,0) = (0,0,0,\ldots,0)$$

e

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}(0,0,0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}(0,0,0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial w}(0,0,0); \quad i = 1,2,3,\ldots,n-3.$$

Como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0,0) = e_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0,0) = e_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w}(0,0,0) = e_3,$$

com $e_1,\ e_2,\ e_3$ os três primeiros vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$, segue que

$$E = \varphi_u(p)\cdot\varphi_u(p) = 1, \quad F = \varphi_u(p)\cdot\varphi_v(p) = 0, \quad G = \varphi_v(p)\cdot\varphi_v(p) = 1$$

$$I = \varphi_u(p)\cdot\varphi_w(p) = 0, \quad J = \varphi_v(p)\cdot\varphi_w(p) = 0, \quad K = \varphi_w(p)\cdot\varphi_w(p) = 1$$

E, F, G, I, J, K são os coeficientes da primeira forma fundamental de M em p.

Se uma imersão de M em $\mathbb{R}^n$ é dada localmente em p na forma de Monge, então temos:

$$\varphi^N_{uu}(p) = \varphi_{uu}(p), \quad \varphi^N_{vv}(p) = \varphi_{vv}(p), \quad \varphi^N_{ww}(p) = \varphi_{ww}(p)$$

$$\varphi^N_{uv}(p) = \varphi_{uv}(p), \quad \varphi^N_{vw}(p) = \varphi_{vw}(p), \quad \varphi^N_{uw}(p) = \varphi_{uw}(p).$$

Na expressão 3.1 temos:

$$\begin{aligned} \pi^{\mathrm{N}}(\gamma''_{\theta,\phi}(s_0)) \;=\; & \sin^2\phi\cos^2\theta\ \varphi_{uu}(p) + 2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\ \varphi_{uv}(p) + \\ & 2\sin\phi\cos\theta\cos\phi\ \varphi_{uw}(p) + 2\sin\phi\sin\theta\cos\phi\ \varphi_{vw}(p) + \\ & \sin^2\phi\sin^2\theta\ \varphi_{vv}(p) + \cos^2\phi\ \varphi_{ww}(p). \end{aligned}$$

Portanto, o projetivo de curvatura no ponto p, associado à imersão φ de M

dada localmente em p na forma de Monge, é:

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) &= \frac{1}{4}\Big(\varphi_{uu}(p)+\varphi_{vv}(p)+2\varphi_{ww}(p)\Big)+\\ &\quad \frac{1}{4}\Big(\varphi_{uu}(p)-\varphi_{vv}(p)\Big)(1-\cos(2\phi))\cos(2\theta)+\\ &\quad \frac{1}{2}\varphi_{uv}(p)(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta)+\\ &\quad \frac{1}{4}\Big(-\varphi_{uu}(p)-\varphi_{vv}(p)+2\varphi_{ww}(p)\Big)\cos(2\phi)+\\ &\quad \varphi_{uw}(p)\ \sin(2\phi)\cos\theta+\varphi_{vw}(p)\ \sin(2\phi)\sin\theta \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) &= \mathbf{H}+\mathbf{B}(1-\cos(2\phi))\cos(2\theta)+\mathbf{C}(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta)+\\ &\quad \mathbf{D}\cos(2\phi)+\mathbf{U}\sin(2\phi)\cos\theta+\mathbf{V}\sin(2\phi)\sin\theta,\end{aligned} \qquad (3.4)$$

com

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi_{uu}(p)+\varphi_{vv}(p)+2\varphi_{ww}(p)\Big]\\ \mathbf{B} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi_{uu}(p)-\varphi_{vv}(p)\Big]\\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2}\varphi_{uv}(p)\\ \mathbf{D} &= \frac{1}{4}\Big[-\varphi_{uu}(p)-\varphi_{vv}(p)+2\varphi_{ww}(p)\Big]\\ \mathbf{U} &= \varphi_{uw}(p)\\ \mathbf{V} &= \varphi_{vw}(p).\end{aligned}$$

Exemplos:

1. Seja M uma 3-variedade imersa em $\mathbb{R}^4$ dada localmente em $p\equiv(0,0,0)$ na forma de Monge por:

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & (\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3,(0,0,0)) & \longrightarrow & \Big(\mathbb{R}^4,(0,0,0,0)\Big)\\ & (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z)=(x,y,z,x^2+y^2+z^2)\end{array}.$$

   Temos:

$$\begin{aligned}&\varphi_{xx}=(0,0,0,2),\quad \varphi_{yy}=(0,0,0,2),\quad \varphi_{zz}(0,0,0,2)\\ &\varphi_{xy}=(0,0,0,0),\quad \varphi_{xz}=(0,0,0,0),\quad \varphi_{yz}(0,0,0,0).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi_{xx}(p)+\varphi_{yy}(p)+2\varphi_{zz}(p)\Big] = (0,0,0,\frac{3}{2}),\\
\mathbf{B} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi_{xx}(p)-\varphi_{yy}(p)\Big] = (0,0,0,0),\\
\mathbf{C} &= \frac{1}{2}\varphi_{xy}(p) = (0,0,0,0),\\
\mathbf{D} &= \frac{1}{4}\Big[-\varphi_{xx}(p)-\varphi_{yy}(p)+2\varphi_{zz}(p)\Big] = (0,0,0,0),\\
\mathbf{U} &= \varphi_{xz}(p) = (0,0,0,0),\\
\mathbf{V} &= \varphi_{yz}(p) = (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, o projetivo de curvatura

$$\begin{array}{rccl}
\eta_p: & \mathbb{S}^2_p \subset T_pM & \longrightarrow & N_pS\\
& (\theta,\phi) & \longmapsto & \eta_p(\theta,\phi) = \Big(0,0,0,\dfrac{3}{2}\Big).
\end{array}$$

em $p \equiv (0,0,0)$ se degenera no ponto $\left(0,0,0,\dfrac{3}{2}\right)$, que é distinto da origem de $\mathbb{R}^4$.

2. Seja M uma 3-variedade imersa em $\mathbb{R}^4$ dada localmente em $p \equiv (0,0,0)$ na forma de Monge por:

$$\begin{array}{rccl}
\varphi: & (\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3,(0,0,0)) & \longrightarrow & \Big(\mathbb{R}^4,(0,0,0,0\Big)\\
& (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z) = (x,y,z,z^2).
\end{array}$$

Observamos que

$$\varphi_{xx} = (0,0,0,0), \quad \varphi_{yy} = (0,0,0,0), \quad \varphi_{zz}(0,0,0,2),$$

$$\varphi_{xy} = (0,0,0,0), \quad \varphi_{xz} = (0,0,0,0), \quad \varphi_{yz}(0,0,0,0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi_{xx}(p)+\varphi_{yy}(p)+2\varphi_{zz}(p)\Big] = (0,0,0,\frac{1}{2})\\
\mathbf{B} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi_{xx}(p)-\varphi_{yy}(p)\Big] = (0,0,0,0)\\
\mathbf{C} &= \frac{1}{2}\varphi_{xy}(p) = (0,0,0,0)\\
\mathbf{D} &= \frac{1}{4}\Big[-\varphi_{xx}(p)-\varphi_{yy}(p)+2\varphi_{zz}(p)\Big] = (0,0,0,1)\\
\mathbf{U} &= \varphi_{xz}(p) = (0,0,0,0)\\
\mathbf{V} &= \varphi_{yz}(p) = (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Portanto, o projetivo de curvatura é dado por:

$$\begin{array}{rccl} \eta_p: & \mathbb{S}^2_p \subset T_pM & \longrightarrow & N_pS \\ & (\theta,\phi) & \longmapsto & \eta_p(\theta,\phi) = \left(0,0,0,\dfrac{1}{2}+\cos(2\phi)\right). \end{array}$$

que é um segmento não radial.

3.2.2 Outras Expressões para o Projetivo de Curvatura

Seja M uma 3-variedade regular imersa em $\mathbb{R}^n$, dado todo $p \in M$, o **espaço tangente a** M em p, T_pM, é um 3−espaço e o **espaço normal** a M em p, N_pM, é o complemento ortogonal de T_pM em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_pM$.

Se

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & M \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi(u,v,w) \end{array}$$

é uma parametrização de M definida localmente em p, com $\varphi(q) = p$ e $q = (u_0, v_0, w_0)$, então T_pM é o 3-espaço gerado pelos vetores $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(q)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(q)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}(q)$, ou seja,

$$T_pM = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(q), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(q), \frac{\partial\varphi}{\partial w}(q) \right\rangle.$$

O conjunto de todos os espaços tangentes a M em p é chamado **fibrado tangente** de M, denotado por TM, assim $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$. Analogamente, o **fibrado normal** a M é a união dos espaços normais a M, denotado por NM, e portanto $NM = \bigcup_{p\in M} N_pM$.

Um **campo tangente** definido em M é uma aplicação

$$\begin{array}{rccl} X: & M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & X(p) \in T_pM \end{array}$$

que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente a M, se X é diferenciável para todo $p \in M$ dizemos que o campo é diferenciável. Analogamente, um **campo normal** definido em M é uma aplicação

$$\begin{array}{rccl} N: & M & \longrightarrow & NM \\ & p & \longmapsto & N(p) \in T_pM, \end{array}$$

que associa a cada p um vetor $N(p)$ normal a M em p.

O espaço de todos os campos tangentes diferenciáveis em M é denotado por $\mathcal{X}(M)$ e o espaço de todos os campos normais diferenciáveis a M é denotado por $\mathcal{N}(M)$.

Definição 3.3. *Sejam M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^{n+k}$ e $p \in M$, uma* ***métrica riemanniana*** *em M, denotada por g, é um produto interno $g(p)$*

definido em T_PM:

$$\begin{array}{rccl} g_p: & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X_p, Y_p) & \longmapsto & g_p(X_p, Y_p) =< X, Y >_p, \end{array}$$

dizemos que (M, g) é uma ***variedade riemanniana****.*

Definição 3.4. *Uma* ***conexão*** *em uma variedade diferenciável M, denotada por ∇, é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \nabla: & \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

tal que para quaisquer campos tangentes diferenciáveis X, Y e Z, e quaisquer funções diferenciáveis, f e g, de M valem:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

A conexão $\nabla_X Y$ também é chamada ***derivada covariante*** *de Y na direção de X.*

Dizemos que a conexão ∇ é compatível com a métrica Riemanniana g se satisfaz a seguinte propriedade:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Seja M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^{n+k}$, consideremos em M a métrica riemanniana induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{n+k}$, dado $p \in M$ temos a decomposição

$$\mathbb{R}^{n+k} = T_pM \oplus N_pM.$$

Definição 3.5. *Sejam X e Y campos de vetores tangentes de M, definidos localmente ao longo de M, a* ***conexão riemanniana em M*** *é dada por:*

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^{\top},$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais X e Y em $\mathbb{R}^{n+k}$, $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^{n+k}$ e a $\top$ denota a projeção na componente tangente de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$.

Definição 3.6. *Seja M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^{n+k}$, a* ***segunda forma fundamental*** *em M, denotada por α, é dada por:*

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{N}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y, \end{array}$$

ou seja, $\alpha(X, Y)$ é a projeção normal de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$.

A aplicação α é bilinear, que para cada $p \in M$ e $\nu \in N_PM$ induz uma forma bilinear H_ν dada por:

$$\begin{array}{rccl} H_\nu: & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X(p), Y(p)) & \longmapsto & H_\nu(X(p), Y(p)) = \alpha(X(p), Y(p)) \cdot \nu. \end{array}$$

A forma bilinear H_ν induz uma forma quadrática

$$\begin{array}{rccl} II_\nu: & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X(p) & \longmapsto & II_\nu(X(p)) = H_\nu(X(p)) = \alpha(X(p), X(p))(p)\cdot\nu \end{array}$$

chamada **segunda forma fundamental** de M em p na **direção de** ν.

Observação:

Se M é uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ temos apenas uma segunda forma fundamental, pois N_pM é uma reta.

Se

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) \end{array}$$

é uma parametrização de M, definida localmente em algum $p\in M$, com $p=\varphi(q)$ e $q\in\mathcal{U}$, então para $X(p)=a\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(q)+b\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(q)$ o vetor tangente e $\nu=\dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(q)\wedge\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(q)}{\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(q)\wedge\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(q)\right\|}\in N_pM$ temos:

$$II_\nu(X(p)) = \alpha(X(p),X(p))\cdot\nu = \left[\overline{\nabla}_{\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial u}(q)+b\frac{\partial\varphi}{\partial v}(q)\right)}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial u}(q)+b\frac{\partial\varphi}{\partial v}(q)\right)\right]^N\cdot\nu$$

$$= \left[a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(q)+2ab\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(q)+b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(q)\right]^N\cdot\nu$$

$$= \left[a^2\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(q)\cdot\nu\Big)\nu+2ab\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(q)\cdot\nu\Big)\nu+b^2\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(q)\cdot\nu\Big)\nu\right]\cdot\nu$$

$$= a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(q)\cdot\nu+2ab\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(q)\cdot\nu+b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(q)\cdot\nu.$$

Portanto,

$$II_\nu(X(p)) = [a,b]\begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix}.$$

Dado ν um campo normal em M, a segunda forma fundamental induz um operador de forma, definido em T_pM, denotado por A_ν, e dado por:

$$\begin{array}{rccl} A_\nu: & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & X & \longmapsto & A_\nu(X) = -\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nu}\right)^\top \end{array}$$

com $\overline{\nu}$ a extensão local de ν definida em uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^n$ e $\top$ denotando

a componente tangente da conexão $\overline{\nabla}$, este operador é auto-adjunto, depende apenas do valor do vetor ν em p e satisfaz a seguinte equação (veja [14]):

$$A_\nu(X)\cdot Y = \alpha(X,Y)\cdot\nu, \text{ o que implica que } \alpha(X,X)\cdot\nu = A_\nu(X)\cdot X.$$

Logo,

$$II_\nu(X) \;=\; A_\nu(X)\cdot X. \tag{3.5}$$

Observações:

Para superfícies em $\mathbb{R}^3$ a expressão 3.5 nos diz que podemos encontrar os coeficientes da segunda forma fundamental de duas maneiras:

1. Através das projeções das derivadas dos vetores normais no plano tangente.
2. Através das projeções das derivadas dos vetores tangentes na reta normal.
3. Se S é uma superfície orientável imersa em $\mathbb{R}^3$ o correspondente, em $p\in S$, à aplicação A_ν é a diferencial da aplicação normal de Gauss, que da Geometria Diferencial sabemos que é auto-adjunta (veja [2] página 166).

Seja $p\in M$ consideremos

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & M\\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi(u,v,w)\end{array}$$

uma parametrização de M definida localmente em p, consideremos $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ um referencial ortonormal tangente a M em p dado por:

$$\nu_1(q)=\frac{\varphi_u(q)}{\sqrt{E}},\quad \nu_2=\frac{E\varphi_v(q)-F\varphi_u(q)}{\sqrt{E(EG-F^2)}}\quad \text{e}$$

$$\nu_3=\frac{(EG-F^2)\varphi_w(q)+(FI-EJ)\varphi_v(q)+(FJ-GI)\varphi_u(q)}{\sqrt{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}},$$

com $E,\ F,\ G,\ I,\ J$ e K calculados em $q=(u_0,v_0,w_0)$ e dados por:

$$E(q)=\varphi_u(q)\cdot\varphi_u(q),\quad F(q)=\varphi_u(q)\cdot\varphi_v(q),\quad G(q)=\varphi_v(q)\cdot\varphi_v(q)$$

$$I(q)=\varphi_u(q)\cdot\varphi_w(q),\quad J(q)=\varphi_v(q)\cdot\varphi_w(q) \text{ e } K(q)=\varphi_w(q)\cdot\varphi_w(q),$$

os coeficientes da primeira forma fundamental associados a M em q, onde $\varphi(q)=p$.

Além disso, dado $\nu(q)\in\mathcal{X}(M)$, temos $\nu(q)=\lambda_1\nu_1(q)+\lambda_2\nu_2(q)+\lambda_3\nu_3(q)$.

Efetuando alguns cálculos com $\alpha(\nu_i(q),\nu_i(q))$, com $1\leq i,j\leq 3$ temos:

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N &= \frac{1}{E}\varphi^N_{uu},\\
\Big(\nabla_{\nu_1\nu_2}\Big)^N &= \frac{1}{E\sqrt{EG-F^2}}(E\varphi^N_{uv}-F\varphi^N_{uu}),\\
\Big(\nabla_{\nu_1\nu_3}\Big)^N &= \frac{(EG-F^2)\varphi^N_{uw}+(FI-EJ)\varphi^N_{uv}+(FJ-GI)\varphi^N_{uu}}{\sqrt{E}\sqrt{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}},\\
\Big(\nabla_{\nu_2\nu_2}\Big)^N &= \frac{1}{E(EG-F^2)}\Big(E^2\varphi^N_{vv}-2EF\varphi^N_{uv}+F^2\varphi^N_{uu}\Big)\\
\Big(\nabla_{\nu_2\nu_3}\Big)^N &= \frac{(EG-F^2)(E\varphi^N_{vw}-F\varphi_{uw}N)+(FI-EJ)(E\varphi^N_{vv}-F\varphi^N_{uv})}{(EG-F^2)\sqrt{E\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}}\\
&+ \frac{(FJ-GI)(E\varphi^N_{uv}-F\varphi^N_{uu})}{(EG-F^2)\sqrt{E\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla_{\nu_3\nu_3}\Big)^N &= \frac{(FJ-GI)^2\varphi^N_{uu}+2(FI-EJ)(FJ-GI)\varphi^N_{uv}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}\\
&+ \frac{2(FJ-GI)(EG-F^2)\varphi^N_{uw}+(FI-EJ)^2\varphi^N_{vv}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}\\
&+ \frac{2(EG-F^2)(FI-EG)\varphi^N_{vw}+(EG-F^2)^2\varphi^N_{ww}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}.
\end{aligned}$$

Podemos agora, definir os coeficientes da segunda forma fundamental de $\varphi(q)=p\in M$ segundo o vetor normal ω.

Definição 3.7. *Seja M uma 3-variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n\geq 4$, dados $p\in M$ e ω um vetor normal em N_pM, os* ***coeficientes da segunda forma fundamental*** *ω são dados por:*

$$\tilde{e}_\omega = \alpha(\nu_1,\nu_1)\cdot\omega=\Big(\frac{1}{E}\varphi^N_{xx}\Big)\cdot\omega,$$

$$\tilde{f}_\omega = \alpha(\nu_1,\nu_2)\cdot\omega=\Big(\frac{E\varphi^N_{xy}-F\varphi^N_{xx}}{E\sqrt{EG-F^2}}\Big)\cdot\omega,$$

$$\tilde{g}_\omega = \alpha(\nu_2,\nu_2)\cdot\omega=\Big(\frac{E\varphi^N_{xy}-2EF\varphi^N_{xy}-F^2\varphi^N_{xx}}{E(EG-F^2)}\Big)\cdot\omega,$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{i}_\omega &= \alpha(\nu_1,\nu_3)\cdot\omega \\
&= \left(\frac{(EG-F^2)\varphi^N_{xz}+(FI-EJ)\varphi^N_{xy}+(FJ-GI)\varphi^N_{xx}}{\sqrt{E}\sqrt{(EG-F^2)(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)}}\right)\cdot\omega,\\
\tilde{j}_\omega &= \alpha(\nu_2,\nu_3)\cdot\omega \\
&= \left(\frac{(EG-F^2)(E\varphi^N_{yz}-F\varphi^N_{xz})+(FI-EJ)(E\varphi^N_{yy}-F\varphi^N_{xy})}{(EG-F^2)\sqrt{E\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}}+\right.\\
&\qquad \left.\frac{(FJ-GI)(E\varphi^N_{xy}-F\varphi^N_{xx})}{(EG-F^2)\sqrt{E\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)}}\right)\cdot\omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{k}_\omega &= \alpha(\nu_3,\nu_3)\cdot\omega \\
&= \left(\frac{(FJ-GI)^2\varphi^N_{xx}+2(FI-EJ)(FJ-GI)\varphi^N_{xy}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FG-GI)+J(FI-EJ)\Big)}\right.\\
&\qquad \frac{2(FJ-GI)(EG-F^2)\varphi^N_{xz}+(FI-EJ)^2\varphi^N_{yy}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FG-GI)+J(FI-EJ)\Big)}\\
&\qquad \left.\frac{2(FI-EJ)(EG-F^2)\varphi^N_{yz}+(EG-F^2)^2\varphi^N_{zz}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FG-GI)+J(FI-EJ)\Big)}\right)\cdot\omega.
\end{aligned}
$$

Consideremos a imersão

$$\varphi : (M,p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,\varphi(p))$$

escrita localmente na forma de Monge é dada por:

$$
\begin{array}{rccl}
\varphi: & (\mathbb{R}^3,(0,0,0)) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n,(0,\ldots,0)) \\
& (x,y,z) & \longmapsto & x\omega_1+y\omega_2+z\omega_3+\varphi_1(z,y,z)\omega_4\cdots+\varphi_{n-3}(z,y,z)\omega_n
\end{array}
$$

com $p\in M$ identificado com $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$, com $\varphi(0,0,0)=(0,0,\ldots,0)$.

Além disso a aplicação φ tem componentes $\varphi_i, 1\le i\le n-3$, que são funções reais diferenciáveis satisfazendo $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}(0,0,0)=\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y}(0,0,0)=\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial z}(0,0,0)=0$, para todo $i\in\{1,\cdots,n-3\}$.

Notemos que

$$e_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0,0)\quad e_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0,0)\quad e_3=\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0,0,0)\quad\forall\quad i=1,2,\ldots,n-3.$$

Em $(0,0,0)$ temos $E\equiv G\equiv K\equiv 1$ e $F\equiv I\equiv J\equiv 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha(\nu_1,\nu_1)_{p=(0,0,0)} &= \varphi^N_{xx}(p) = \varphi_{xx}(p)\\
\alpha(\nu_1,\nu_2)_{p=(0,0,0)} &= \varphi^N_{xy}(p) = \varphi_{xy}(p)\\
\alpha(\nu_1,\nu_3)_{p=(0,0,0)} &= \varphi^N_{xz}(p) = \varphi_{xz}(p)\\
\alpha(\nu_2,\nu_2)_{p=(0,0,0)} &= \varphi^N_{yy}(p) = \varphi_{yy}(p)\\
\alpha(\nu_2,\nu_3)_{p=(0,0,0)} &= \varphi^N_{yz}(p) = \varphi_{yz}(p)\\
\alpha(\nu_3,\nu_3)_{p=(0,0,0)} &= \varphi^N_{zz}(p) = \varphi_{zz}(p). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Desta forma, os coeficientes da segunda forma fundamental em $p \equiv (0,0,0)$ segundo os vetores de um referencial normal $\{e_4, e_5, e_6, \ldots, e_n\}$ são dados por:

$$\tilde{e}_{e_{i+3}} = \varphi_{xx}(p) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}(p), \quad \tilde{f}_{e_{i+3}} = \varphi_{xy}(p) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial xy}(p), \quad \tilde{g}_{e_{i+3}} = \varphi_{yy}(p) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}(p),$$
$$\tilde{i}_{e_{i+3}} = \varphi_{xz}(p) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial xz}(p), \quad \tilde{j}_{e_{i+3}} = \varphi_{yz}(p) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial yz}(p), \quad \tilde{k}_{e_{i+3}} = \varphi_{zz}(p) = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}(p), \qquad (3.7)$$

denotados por a_i, b_i, c_i, d_i, r_i e s_i respectivamente.

Portanto, a matriz $[\alpha_\psi]$ da segunda forma fundamental em p segundo este referencial é dada por:

$$[\alpha_\psi] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & r_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & r_2 & s_2 \\ & & & \vdots & & \\ a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & d_{n-3} & r_{n-3} & s_{n-3} \end{bmatrix}.$$

A matriz da segunda forma fundamental é uma matriz de ordem $(n-3)\times 6$, portanto no caso de uma imersão de M em $\mathbb{R}^9$ a matriz $[\alpha_\psi]$ é uma matriz quadrada. Usando os coeficientes da segunda forma definidos em 3.3 obtemos uma nova expressão para o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$

$$\begin{aligned}
\eta(\theta,\phi) &= \sum_{i=1}^{n-3}\Big[\frac{1}{4}(a_i + c_i + 2s_i)e_{i+3} + \frac{1}{4}(a_i - c_i)e_{i+3}(1-\cos(2\phi))\cos(2\theta)\\
&+ \frac{1}{2}b_i e_{i+3}(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) + \frac{1}{4}(-a_i - c_i + 2s_i)ie_{i+3}\cos(2\phi)\\
&+ d_i e_{i+3}\cos(\theta)\sin(2\phi) + r_i e_{i+3}\sin(\theta)\sin(2\phi)\Big] \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

com $\{e_4, e_5, \ldots, e_n\}$ é um referencial normal de M em p.

Outra maneira de escrever a expressão do projetivo de curvatura em um ponto que é utilizando a parametrização usual da esfera, dada por

$$r(\theta,\phi) = (u,v,w)$$

onde

$$\begin{cases} u &= \sin\phi\cos\theta \\ v &= \sin\phi\sin\theta \\ w &= \cos\phi \end{cases}$$

com $u^2+v^2+w^2=1$.

Assim, dado $(u,v,w)\in\mathbb{S}^2_p$ parametrizamos o projetivo de curvatura por::

$$\eta(u,v,w) = H+2(u^2-v^2)B+4uvC+(2w^2-1)D+2uwU+2vwV. \tag{3.9}$$

A Expressão Geral do Projetivo de Curvatura

Apresentaremos uma expressão geral para o projetivo de curvatura em um ponto p de uma $3-$variedade M imersa em $\mathbb{R}^n$, $n\geq 4$, para qualquer parametrização da imersão.

Sejam M uma 3-variedade imersa em $\mathbb{R}^n, n\geq 4$, $p\in M$,

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I & \longrightarrow & M \\ & s & \longmapsto & \gamma(s), \end{array}$$

uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\{\nu_1(p),\nu_2(p),\nu_3(p)\}$ um referencial ortonormal para T_pM.

O vetor curvatura normal de γ em termos da conexão Riemanniana é denotado por $\pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma'(s_0))$, este vetor depende apenas do ponto p e da direção $\gamma'(s_0)$.

Consideremos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & M \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi(u,v,w). \end{array}$$

uma parametrização de M em p.

Podemos então parametrizar γ por:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & I & \longrightarrow & M \\ & s & \longmapsto & \gamma(s)=\varphi\Big(u(s),v(s),w(s)\Big), \end{array}$$

com $\gamma(s_0)=\varphi(u(s_0),v(s_0),w(s_0))=p$ e $\gamma'(s_0)=\nu_{\theta\phi}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= u'(s)\varphi_u(u(s),v(s),w(s))+v'(s)\varphi_v(u(s),v(s),w(s))+ \\ &\quad w'(s)\varphi_w(u(s),v(s),w(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= u''(s)\varphi_u(u(s),v(s),w(s))+v''(s)\varphi_v(u(s),v(s),w(s))+ \\ &\quad w''(s)\varphi_w(u(s),v(s),w(s))+(u'(s))^2\varphi_{uu}(u(s),v(s),w(s))+ \\ &\quad (v'(s))^2\varphi_{vv}(u(s),v(s),w(s))+(w'(s))^2\varphi_{ww}(u(s),v(s),w(s))+ \\ &\quad 2u'(s)v'(s)\varphi_{uv}(u(s),v(s),w(s))+2u'(s)w'(s)\varphi_{uw}(u(s),v(s),w(s))+ \\ &\quad 2v'(s)w'(s)\varphi_{vw}(u(s),v(s),w(s)). \end{aligned}$$

A componente normal deste vetor é dada por:

$$\begin{aligned}\pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma'(s_0)) &= (u'(s_0))^2\varphi^N_{uu}(u(s_0),v(s_0),w(s_0)) + \\ &\quad 2u'(s_0)v'(s_0)\varphi^N_{uv}(u(s_0),v(s_0),w(s_0)) + \\ &\quad 2u'(s_0)w'(s)\varphi^N_{uw}(u(s_0),v(s_0),w(s_0)) \\ &\quad (v'(s))^2\varphi^N_{vv}(u(s_0),v(s_0),w(s_0)) + \\ &\quad 2v'(s_0)w'(s_0)\varphi^N_{vw}(u(s_0),v(s_0),w(s_0)) + \\ &\quad (w'(s_0))^2\varphi^N_{ww}(u(s_0),v(s_0),w(s_0))\end{aligned}$$

que depende apenas da direção tangente e do ponto p considerados.

Por definição o projetivo de curvatura em p é a projeção normal da derivada covariante do vetor $\nu(\theta,\phi)$ na direção $\nu(\theta,\phi)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\eta: \quad \mathbb{S}^2_p \subset T_pM &\longrightarrow N_pM \\ (\theta,\phi) &\longmapsto \eta(\theta,\phi) = \nabla_{\nu(\theta,\phi)}\nu(\theta,\phi),\end{aligned}$$

considerando $\nu(\theta,\phi) = \sin\phi\cos\theta\nu_1 + \sin\phi\sin\theta\nu_2 + \cos\phi\nu_3$ podemos apresentar a expressão geral do projetivo de curvatura da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) &= \pi^N\big(\nabla_{\gamma'}\gamma'(s_0)\big) \\ &= \pi^N\Big((\sin(\phi)\cos(\theta))^2\nabla_{\nu_1}\nu_1 + (\sin(\phi))^2\cos(\theta)\sin(\theta)\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_2 + \nabla_{\nu_2}\nu_1\Big) + \\ &\quad \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_3 + \nabla_{\nu_3}\nu_1\Big) + (\sin(\phi)\sin(\theta))^2\nabla_{\nu_2}\nu_2 + \\ &\quad \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\Big(\nabla_{\nu_2}\nu_3 + \nabla_{\nu_3}\nu_2\Big) + (\cos(\phi))^2\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big) \\ &= (\sin(\phi)\cos(\theta))^2\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N + (\sin(\phi))^2\sin(2\theta)\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_2\Big)^N + \\ &\quad \sin(2\phi)\cos(\theta)\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_3\Big)^N + (\sin(\phi)\sin(\theta))^2\Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N + \\ &\quad \sin(2\phi)\sin(\theta)\Big(\nabla_{\nu_2}\nu_3\Big)^N + (\cos(\phi))^2\Big(\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big)^N \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos(2\phi))\Big[\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N + \sin(2\theta)\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_2\Big)^N + \\ &\quad \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N\Big] + \frac{1}{2}(1+\cos(2\phi))\Big(\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big)^N + \\ &\quad \sin(2\phi)\cos(\theta)\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_3\Big)^N \sin(2\phi)\sin(\theta)\Big(\nabla_{\nu_2}\nu_3\Big)^N \\ &= \frac{1}{4}\Big[\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N + \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N + 2\Big(\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big)^N\Big] + \\ &\quad \frac{1}{4}\Big[\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N + \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N\Big](1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) + \\ &\quad \frac{1}{2}\Big(\nabla_{\nu_1\nu_2}\Big)^N(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) \\ &\quad \frac{1}{4}\Big[-\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N - \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N + 2\Big(\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big)^N\Big]\cos(2\phi) + \\ &\quad \Big(\nabla_{\nu_1}\nu_3\Big)^N\sin(2\phi)\cos\theta + \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_3\Big)^N\sin(2\phi)\sin\theta. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) &= H + B(1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) + C(1-\cos(2\phi))\sin(2\theta)\\ &+ D\cos(2\phi) + U\sin(2\phi)\cos\theta + V\sin(2\phi)\sin\theta,\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{4}\Big[\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N + \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N + 2\Big(\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big)^N\Big],\\ B &= \frac{1}{4}\Big[\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N - \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2}\Big(\nabla_{\nu_1\nu_2}\Big)^N,\\ D &= \frac{1}{4}\Big[-\Big(\nabla_{\nu_1\nu_1}\Big)^N - \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_2\Big)^N + 2\Big(\nabla_{\nu_3}\nu_3\Big)^N\Big],\\ U &= \Big(\nabla_{\nu_1}\nu_3\Big)^N \text{ e } \quad V = \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_3\Big)^N,\end{aligned}$$

pois $\Big(\nabla_{\nu_1\nu_2}\Big)^N = \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_1\Big)^N$, $\quad \Big(\nabla_{\nu_2}\nu_3\Big)^N = \Big(\nabla_{\nu_3}\nu_2\Big)^N \quad$ e $\Big(\nabla_{\nu_1}\nu_3\Big)^N = \Big(\nabla_{\nu_3}\nu_1\Big)^N$, ou ainda,

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{E}\Big(\varphi^N_{uu} + \frac{1}{EG-F^2}(E^2\varphi^N_{vv} - 2EF\varphi^N_{uv} + F^2\varphi^N_{uu})\Big) + \right.\\ &\quad 2\Big(\frac{(FJ-GI)^2\varphi^N_{uu} + 2(FI-EJ)(FJ-GI)\varphi^N_{uv}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2) + I(FJ-GI) + J(FI-EJ)\Big)} +\\ &\quad \frac{2(FJ-GI)(EG-F^2)\varphi^N_{uw} + (FI-EJ)^2\varphi^N_{vv}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2) + I(FJ-GI) + J(FI-EJ)\Big)} +\\ &\quad \left.\frac{2(EG-F^2)(FI-EG)\varphi^N_{vw} + (EG-F^2)^2\varphi^N_{ww}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2) + I(FJ-GI) + J(FI-EJ)\Big)}\Big)\right] +\\ &\quad \frac{1}{4E}\left[\Big(\varphi^N_{uu} + \frac{1}{EG-F^2}(E^2\varphi^N_{vv} - 2EF\varphi^N_{uv} + F^2\varphi^N_{uu})\Big)\right]\\ &\quad (1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) + \frac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}}(E\varphi^N_{uv} - F\varphi^N_{uu})\\ &\quad (1-\cos(2\phi))\sin 2\theta + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{E}\Big(\varphi^N_{uu} + \frac{1}{EG-F^2}\right.\\ &\quad \left.(E^2\varphi^N_{vv} - 2EF\varphi^N_{uv} + F^2\varphi^N_{uu})\Big) +\\ &\quad 2\left(\frac{(FJ-GI)^2\varphi^N_{uu} + 2(FI-EJ)(FJ-GI)\varphi^N_{uv}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2) + I(FJ-GI) + J(FI-EJ)\Big)} +\right.\end{aligned}$$

$$\frac{2(FJ-GI)(EG-F^2)\varphi^N_{uw}+(FI-EJ)^2\varphi^N_{vv}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}+$$
$$\frac{2(EG-F^2)(FI-EG)\varphi^N_{vw}+(EG-F^2)^2\varphi^N_{ww}}{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}\Bigg)\Bigg]\cos(2\phi)+$$
$$\left[\frac{(EG-F^2)\varphi^N_{uw}+(FI-EJ)\varphi^N_{uv}+(FJ-GI)\varphi^N_{uu}}{\sqrt{E}\sqrt{(EG-F^2)\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}}\right]$$
$$\cos(\theta)\sin(2\phi)+$$

$$\left[\frac{(EG-F^2)(E\varphi^N_{vw}-F\varphi^N_{uw})+(FI-EJ)(E\varphi^N_{vv}-F\varphi^N_{uv})}{(EG-F^2)\sqrt{E\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}}+\right.$$
$$\left.\frac{(FJ-GI)(E\varphi^N_{uv}-F\varphi^N_{uu})}{(EG-F^2)\sqrt{E\Big(K(EG-F^2)+I(FJ-GI)+J(FI-EJ)\Big)}}\right]$$
$$\sin(\theta)\sin(2\phi).$$

3.3 A 3-variedade de Veronese Clássica de Ordem 2

Seja a aplicação de Veronese de ordem 2

$$\begin{array}{rccc}\varphi & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{10}\\ & & (x,y,z,t) & \longmapsto & \varphi(x,y,z,t)\end{array}$$

com $\varphi(x,y,z,t)=\Big(x^2,y^2,z^2,t^2,\sqrt{2}xy,\sqrt{2}xz,\sqrt{2}xt,\sqrt{2}yz,\sqrt{2}yt,\sqrt{2}zt\Big)$.

A imagem $\varphi(\mathbb{S}^3)$ é chamada **variedade de Veronese clássica de ordem 2 e dimensão 3** e é uma variedade esférica em $\mathbb{R}^9$.

De fato,

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{10}\\ & (x,y,z,t(x,y,z)) & \longmapsto & \varphi(x,y,z,t(x,y,z)),\end{array}$$

com

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,t) &= \Big(x^2,y^2,z^2,(t(x,y,z))^2,\sqrt{2}xy,\sqrt{2}xz,\sqrt{2}xt(x,y,z)\\ &\quad \sqrt{2}yz,\sqrt{2}yt(x,y,z),\sqrt{2}zt(x,y,z)\Big),\end{aligned}$$

com $t(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

Notemos que:

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2x^2t^2+2y^2z^2+2y^2t^2+2z^2t^2 =$$
$$x^2(x^2+y^2+z^2+t^2)+y^2(x^2+y^2+z^2+t^2)+$$
$$z^2(x^2+y^2+z^2+t^2)+t^2(x^2+y^2+z^2+t^2)=1.$$

Logo, $\varphi(\mathbb{S}^3)\subset\mathbb{S}^9$.

Além disso, $\varphi(\mathbb{S}^3)$ está contida no hiperplano

$$\mathbb{H}=\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9)\in\mathbb{R}^9;\ u_1+u_2+u_3+u_4=1\},$$

pois se $(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9)\in\varphi(\mathbb{S}^3)$, então $u_1=x^2$, $u_2=y^2$, $u_3=z^2$ e $u_4=t^2$.

Logo, $u_1+u_2+u_3+u_4=x^2+y^2+z^2+t^2=1$, pois $(x,y,z,t)\in\mathbb{S}^3$.

Portanto, $\varphi(\mathbb{S}^3)\subset\mathbb{H}\cap(\mathbb{S}^9)=\mathbb{S}^8(\Big(a,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\subset\mathbb{R}^9$.

A expressão da superfície de Veronese em $\mathbb{R}^9$ é dada por:

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^8\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & \varphi(x,y,z,t),\end{array}$$

com

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,t) &= \Big(\frac{\sqrt{3}}{6}(4y^2-1),\frac{\sqrt{6}}{6}(3z^2+y^2-1),\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2x^2-y^2-z^2),\sqrt{2}xy,\\ &\quad \sqrt{2}xz,\sqrt{2}yz,\sqrt{2}xt(x,y,z),\sqrt{2}yt(x,y,z),\sqrt{2}zt(x,y,z)\Big),\end{aligned}$$

com $t(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

Determinamos o projetivo de curvatura no ponto $q=(0,0,0,1)\in\mathbb{S}^3$.

Como

$$\begin{aligned}\varphi_x(x,y,z,t) &= \Big(0,0,-2\sqrt{2}x,\sqrt{2}y,\sqrt{2}z,0,\sqrt{2}t(x,y,z)+\sqrt{2}xt_x(x,y,z),\\ &\quad \sqrt{2}yt_x(x,y,z),\sqrt{2}zt_x(x,y,z)\Big),\\ \varphi_y(x,y,z,t) &= \Big(\frac{4\sqrt{3}y}{3},\frac{\sqrt{6}y}{3},-\sqrt{2}y,\sqrt{2}x,0,\sqrt{2}z,\sqrt{2}xt_y(x,y,z),\\ &\quad \sqrt{2}t(x,y,z)+\sqrt{2}yt_y(x,y,z),\sqrt{2}zt_y(x,y,z)\Big),\\ \varphi_z(x,y,z,t) &= \Big(0,\sqrt{6}z,-\sqrt{2}z,0,\sqrt{2}x,\sqrt{2}y,\sqrt{2}xt_z(x,y,z),\sqrt{2}yt_z(x,y,z),\\ &\quad \sqrt{2}t(x,y,z)+\sqrt{2}zt_z(x,y,z)\Big),\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
\varphi_x(0,0,0,1) &= \Big(0,0,0,0,0,0,\sqrt{2},0,0\Big),\\
\varphi_y(0,0,0,1) &= \Big(0,0,0,0,0,0,0,\sqrt{2},0\Big),\\
\varphi_z(0,0,0,1) &= \Big(0,0,0,0,0,0,0,0,\sqrt{2}\Big),
\end{aligned}$$

daí os coeficientes da primeira forma fundamental da variedade de Veronese em $q \equiv (0,0,0,1)$ são:

$$\begin{aligned}
E(q) &= \varphi_x(q)\cdot\varphi_x(q) = 2, \quad F(q) = \varphi_x(q)\cdot\varphi_y(q) = 0 \quad G(q) = \varphi_y(q)\cdot\varphi_y(q) = 2\\
I(q) &= \varphi_x(q)\cdot\varphi_z(q) = 0, \quad J(q) = \varphi_y(q)\cdot\varphi_z(q) = 0 \text{ e } K(q) = \varphi_z(q)\cdot\varphi_z = 2.
\end{aligned}$$

Se M é uma 3-variedade, dada pela imersão $\varphi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^9$ então o espaço normal N_pM é um $6-$ espaço com base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_6\}$, com e_i o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^9$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi^N_{xx}(q) &= \Big(0,0,-2\sqrt{2},0,0,0,0,0,0\Big),\\
\varphi^N_{yy}(q) &= \Big(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},-\sqrt{2},0,0,0,0,0,0\Big),\\
\varphi^N_{xy}(q) &= \Big(0,0,0,\sqrt{2},0,0,0,0,0\Big),\\
\varphi^N_{xz}(q) &= \Big(0,0,0,0,\sqrt{2},0,0,0,0\Big),\\
\varphi^N_{yz}(q) &= \Big(0,0,0,0,0,\sqrt{2},0,0,0\Big).
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi^N_{xx}(p)+\varphi^N_{yy}(p)+2\varphi^N_{zz}(p)\Big],\\
\mathbf{B} &= \frac{1}{4}\Big[\varphi^N_{xx}(p)-\varphi^N_{yy}(p)\Big],\\
\mathbf{C} &= \frac{1}{2}\varphi^N_{xy}(p)\\
\mathbf{D} &= \frac{1}{4}\Big[-\varphi^N_{xx}(p)-\varphi^N_{yy}(p)+2\varphi^N_{zz}(p)\Big],\\
\mathbf{U} &= \varphi^N_{xz}(p),\\
\mathbf{V} &= \varphi^N_{yz}(p)
\end{aligned}$$

e usando a expressão do projetivo de curvatura dada em 3.9 temos:

$$\eta(u,v,w) = \Big(\frac{2\sqrt{3}}{3}u^2,-\frac{\sqrt{6}}{6}(v^2+3w^2),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+u^2),\sqrt{2}uv,\sqrt{2}uw,\sqrt{2}vw,0,0,0\Big),$$

que projetado em $\mathbb{R}^6 \equiv N_pM$ é a aplicação:

$$\eta(u,v,w) = \Big(\frac{2\sqrt{3}}{3}u^2,-\frac{\sqrt{6}}{6}(v^2+3w^2),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+u^2),\sqrt{2}uv,\sqrt{2}uw,\sqrt{2}vw\Big).$$

Observemos que

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & N_pM \equiv \mathbb{R}^6 \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \eta(u,v,w) \end{array}$$

é uma aplicação de Veronese de ordem 2 cuja imagem da restrição a $\mathbb{P}^2$ é uma superfície de Veronese.

3.4 Interpretação Geométrica do Projetivo de Curvatura

Nesta seção faremos uma breve interpretação do projetivo de curvatura. Para isto, consideremos a expressão da superfície de Veronese clássica de ordem 2 em $\mathbb{R}^5$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & N_pM \equiv \mathbb{R}^5 \\ & (u,v,w) & \longmapsto & \varphi(u,v,w), \end{array}$$

com

$$\varphi(u,v,w) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(3v^2-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2u^2-v^2), \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw\right),$$

que podemos ainda expressar da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(u,v,w) & = & \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right) + \\ & & \left(\frac{3}{\sqrt{6}}v^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(-2u^2-v^2), \sqrt{2}uv, \sqrt{2}uw, \sqrt{2}vw\right) \\ & = & H + \widetilde{\varphi}(u,v,w), \end{array}$$

uma transformação afim.

Tomando:

$$[W] = \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \\ uw \\ vw \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\widetilde{\varphi}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}_{[u^2,v^2,uv,uw,vw]},$$

temos:

$$\widetilde{\varphi}(u,v,w) = [\widetilde{\varphi}]\,[W].$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(u,v,w) & = & H + \widetilde{\varphi}(u,v,w) \\ & = & H + [\widetilde{\varphi}]\,[W], \end{array}$$

para todo $(u,v,w) \in \mathbb{S}^2$, consideremos agora o projetivo de curvatura em $p \in M$,

dado pela expressão 3.8 e tomando $H_2 = H + D$, temos:

$$\begin{array}{rccl} \eta_p & : & \mathbb{S}^2 \subset T_pM & \longrightarrow & N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3} \\ & & (u,v,w) & \mapsto & \eta(u,v,w), \quad \text{com} \end{array}$$

$$\eta(u,v,w) = H_2 + 2(u^2 - v^2)B + 4uvC + 2(-u^2 - v^2)D + 2uwU + 2vwV.$$

Agora, considerando

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\eta}_p & : & S^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & & (u,v,w) & \longmapsto & \widetilde{\eta}(u,v,w) \end{array}$$

com $\widetilde{\eta}(u,v,w) = (2u^2 - 2v^2, -2u^2 - 2v^2, 4uv, 2uw, 2vw)$ e tomando a base canônica de $\mathbb{R}^5$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\eta}(u,v,w) & = & (2u^2 - 2v^2)e_1 + (-2u^2 - 2v^2)e_2 + (4uv)e_3 \\ & + & (2uw)e_4 + (2vw)e_5. \end{array}$$

Tomando

$$[\widetilde{\eta}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{[u^2, v^2, uv, uw, vw]},$$

temos uma matriz invertível e podemos definir a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow N_pM, \quad \text{dada por}$$

$$T(e_1) = B, \quad T(e_2) = D, \quad T(e_3) = C, \quad T(e_4) = U, \quad T(e_5) = V,$$

com $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base canônica de $\mathbb{R}^5$.

Logo,

$$\begin{array}{rccl} T \circ \widetilde{\eta} & : & S^2 \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & N_pM \\ & & (u,v,w) & \longmapsto & T \circ \widetilde{\eta}(u,v,w) \end{array}$$

com

$$\begin{array}{rcl} T \circ \widetilde{\eta}(u,v,w) & = & T\left((2u^2 - 2v^2)e_1 + (-2u^2 - 2v^2)e_2 + (4uv)e_3\right) \\ & + & T\,(2uw)e_4 + (2vw)e_5) \\ & = & 2(u^2 - v^2)B + 4uvC + (2w^2 - 1)D + 2uwU + 2vwV. \end{array}$$

Portanto,

$$\eta(u,v,w) = H_2 + T \circ \widetilde{\eta}(u,v,w).$$

Agora, usamos as matrizes $[\widetilde{\eta}]_{5\times5}$ e $[\widetilde{\varphi}]_{5\times5}$ para encontrar a solução da equação matricial $[\widetilde{\eta}] = [X] \cdot [\widetilde{\varphi}]_{5\times5}$, com $[X]_{5\times5}$.

Tomando

$$[X] = [\widetilde{\eta}] \cdot [\widetilde{\varphi}]^{-1}$$

obtemos a solução que também é invertível.

Denotando por [G] a matriz [X] temos:

$$[\widetilde{\eta}] = [G] \cdot [\widetilde{\varphi}],$$

e consequentemente

$$\eta(u, v, w) = H_2 + T \circ G \circ \widetilde{\varphi}.$$

Do desenvolvimento acima segue que que $[G]$ é um isomorfismo da Veronese de ordem 2 em $\mathbb{R}^5$, pois $[G] = [\eta] \circ [\widetilde{\varphi}]^{-1} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ e

$$\begin{aligned} \eta(u, v, w) &= H_2 + T \circ \widetilde{\eta}(u, v, w) \\ &= H_2 + [T] \cdot [\widetilde{\eta}] \cdot [W] \\ &= H_2 + [T] \cdot [G] \cdot [\widetilde{\varphi}] \cdot [W] \\ &= H_2 + T \circ G \circ \widetilde{\varphi}(u, v, w), \end{aligned}$$

assim o projetivo de curvatura pode ser descrito como um isomorfismo da Veronese seguido de uma transformação linear T e uma translação $\mathcal{T}_{H_2}$.

Do desenvolvimento acima, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.8. *Sejam M uma 3−variedade de classe $\mathcal{C}^2$ imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e $p \in M$. O projetivo de curvatura é obtido por um isomorfismo da Veronese seguido de uma transformação linear T e uma translação $\mathcal{T}_{H_2}$.*

A natureza geométrica da imagem $\eta(\mathbb{S}^2)$ do projetivo de curvatura está diretamente relacionada à imagem da aplicação $T \circ G \circ \widetilde{\varphi}(\mathbb{S}^2)$, como $G \circ \widetilde{\varphi}(\mathbb{S}^2)$ é isomorfa a superfície de Veronese de ordem 2, esta estrutura geométrica dependerá da aplicação linear T, já que $posto(T) = dim\langle B, C, D, U, V\rangle$, então basta analisar o grau de independência linear desses últimos cinco vetores.

3.5 Relação entre Projetivo de Curvatura e os pontos de 3−variedade

Nesta seção vamos considerar uma transformação linear $\widetilde{T} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow N_pM$ definida de maneira análoga à transformação linear T da seção anterior, agora vamos tomar:

$$\widetilde{T}(e_1) = B, \quad \widetilde{T}(e_2) = C, \quad \widetilde{T}(e_3) = D, \quad \widetilde{T}(e_4) = U, \quad \widetilde{T}(e_5) = V,$$

está transformação será utilizada para analisar os tipos de projetivo de curvatura, pois vamos considerar

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\eta}_p & : & \mathbb{S}^2 \subset T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & & (\theta, \phi) & \mapsto & \widetilde{\eta}(\theta, \phi), \end{array}$$

tal que $\eta(\theta, \phi) = \widetilde{T} \circ \widetilde{\eta}(\theta, \phi)$, ou seja, da expressão 3.2 temos,

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}(\theta, \phi) &= \Big((1 - \cos(2\phi))\cos(2\theta), (1 - \cos(2\phi))\sin(2\theta), \cos(2\phi), \\ &\quad \sin(2\phi)\cos\theta, \sin(2\phi)\sin\theta\Big). \end{aligned}$$

É claro que a matriz da transformação linear $\widetilde{T}$ é a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores B, C, D, U, V, respectivamente.

Considerando $[\widetilde{W}]$ a matriz que representa $\widetilde{\eta}$ dada por

$$[\widetilde{W}] = \begin{bmatrix} \big(1-\cos(2\phi)\big)\cos(2\theta) \\ \big(1-\cos(2\phi)\big)\sin(2\theta) \\ \cos(2\phi) \\ \sin(2\phi)\cos\theta \\ \sin(2\phi)\sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\widetilde{W}] = \begin{bmatrix} 2(u^2-v) \\ 4uv \\ 2w^2-1 \\ 2uw \\ 2vw \end{bmatrix}$$

temos:

$$\eta(\theta,\phi) = [\widetilde{T}][\widetilde{W}].$$

Agora vamos introduzir os espaços afim e linear associados ao projetivo de curvatura de uma 3−variedade M no ponto p.

Definição 3.9. *Seja M uma 3−variedade imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, dado $p \in M$ o **primeiro espaço normal** de M em p, denotado por $N_p^1 M$, é subespaço de N_pM gerado pelos vetores H, B, C, D, U e V.*

*O **subespaço linear** de $N_p^1 M$ gerado pelos vetores B, C, D, U e V é denotado por E_p, ou seja, $E_p = \langle B, C, D, U, V\rangle$.*

*O **subespaço afim** de N_pM de menor dimensão que contém o projetivo de curvatura é denotado por Aff_p, portanto Aff_p é paralelo ao subespaço linear E_p.*

Observação:

Segue do desenvolvimento acima que:

$$\eta(\mathbb{S}^2) = H_2 + T \circ G \circ \widetilde{\varphi}(\mathbb{S}^2) \subset Aff_p \subset N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3},$$

e é claro que $Aff_p = H_2 + E_p$.

Proposição 3.10. *Sejam M uma 3-variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e $p \in M$. O projetivo de curvatura é substancial no subespaço $Aff_p \subset N_pM$ e $dim E_p = dim Aff_p = posto([T])$, onde T é a transformação linear definida em 3.11.*

Além disso, geometricamente temos:

(i) *Se $posto([T]) = 5$, o projetivo de curvatura em p é isomorfo à superfície de Veronese clássica de ordem 2. Neste caso, diremos que o **projetivo de curvatura é nçao degenerado**.*

(ii) *Se $posto([T]) = 4$, o projetivo de curvatura em p é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no 4-espaço Aff_p.*

(iii) *Se $posto([T]) = 3$, o projetivo de curvatura em p é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no 3-espaço Aff_p.*

(iv) *Se $posto([T]) = 2$, o projetivo de curvatura em p é isomorfo à uma projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 no 2-espaço Aff_p.*

(v) *Se $posto([T]) = 1$, o projetivo de curvatura é um segmento de reta em Aff_p.*

(vi) *O projetivo de curvatura é um ponto se, e somente se, $posto([T]) = 0$*

Uma noção estabelecida em um ponto de uma 3−variedade e associada à dimensão do subespaço E_p é a noção de umbilicidade, veremos abaixo que quanto menor a dimensão de E_p maior será o "grau" de umbilicidade do ponto da 3−variedade.

Mais precisamente temos a definição dada em [1]:

Definição 3.11. *Sejam M uma 3-variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, e $p \in M$. Dizemos que:*

(i) *p é **quase-quase-umbílico** se $dim E_p = 4$, isto é, se o projetivo de curvatura em p se degenera em uma superfície em um 4-espaço. Se o vetor $H \in E_p$, p é denominado **quase-quase-umbílico linear**. Caso contrário, ele é denominado **quase-quase-umbílico não linear**.*

(ii) *p é **semi-quase-umbílico** se $dim E_p = 3$, isto é, se o projetivo de curvatura em p se degenera em uma superfície em um 3-espaço. Se o vetor $H \in E_p$, p é denominado **semi-quase-umbílico linear**. Caso contrário, ele é denominado **semi-quase-umbílico não linear**.*

(iii) *p é **quase-umbílico** se $dim E_p = 2$, isto é, se o projetivo de curvatura em p se degenera em uma região plana. Se o vetor $H \in E_p$, p é denominado **quase-umbílico linear**. Caso contrário, ele é denominado **quase-umbílico não linear**.*

(iv) *p é **semi-umbílico** se $dim E_p = 1$, isto é, se o projetivo de curvatura em p se degenera em um segmento de reta neste ponto. Se este segmento é de tipo radial, dizemos que p é ponto **semi-umbílico radial** ou **ponto de inflexão**.*

(v) *p se degenera em um ponto, dizemos que p é **umbílico**; no caso em que o projetivo de curvatura coincide com a origem de N_pM o ponto p é **umbílico planar**.*

Proposição 3.12. *Seja M uma 3-variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 7$. Se $p \in M$ é **ponto quase-quase-umbílico linear**, o projetivo de curvatura em p é uma superfície isomorfa à composição da superfície de Veronese de ordem 2 com uma transformação linear dada por uma das matrizes $[\widetilde{T}_i]$ abaixo. Esta superfície está em um 4-espaço $E_p \subset N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3}, n \geq 7$, podendo ser ou não um mergulho de $\mathbb{P}^2$ neste subespaço.*

Demonstração: Suponhamos que $p \in M$ seja ponto quase-quase-umbílico linear, então $posto([\widetilde{T}]) = 4$, logo o projetivo de curvatura em p é uma superfície substancial em Aff_p.

Podemos supor sem perda de generalidade que $n = 7$, pois $dim E_p = 4$. Considerando todas as combinações dos vetores B, C, D, U e V, quatro a quatro linearmente independentes na matriz $[\widetilde{T}]$, obtemos as seguintes matrizes na forma

escolanada:

$$\left[\widetilde{T_1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[\widetilde{T_2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T_3}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[\widetilde{T_4}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\left[\widetilde{T_5}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} \end{bmatrix}.$$

Assumindo

$$[\widetilde{W}] = \begin{bmatrix} 2(u^2 - v^2) \\ 4uv \\ 2w^2 - 1 \\ 2uw \\ 2vw \end{bmatrix},$$

listaremos agora as equações para os projetivos de curvatura em p e que podem induzir um mergulho do plano projetivo real $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^4$ ou podem ter singularidades.

Tipo 1: matriz $[\widetilde{T_1}]$

- O projetivo de curvatura em p é dado por:
  $\eta(u, v, w) = (4uv, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$

Tipo 2: matriz $[\widetilde{T_2}]$

- $(0, 0, 0, 0) \Rightarrow \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$
- $(1, 0, 0, 0) \Rightarrow \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 4uv, 2w^2 - 1, 2uw, 2vw)$

Tipo 3: matriz $[\widetilde{T_3}]$

- **i)** $(0, 0, 0, 0) \Rightarrow \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2, 4uv, 2uw, 2vw)$, este é o mergulho clássico do plano projetivo $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^4$, que também pode ser visto como a projeção da superfície de Veronese clássica de ordem 2 em $\mathbb{R}^4$.
- **ii)** $(a_{13}, a_{23}, 0, 0) \Rightarrow \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 2a_{13}w^2 - a_{13}, 2a_{23}w^2 + 4uv - a_{23}, 2uw, 2vw)$, com a_{13} e a_{23} não simultaneamente nulos.

Tipo 4: matriz $[\widetilde{T_4}]$

- **i)** $(a_{14}, a_{24}, a_{34}, 0) \Rightarrow \eta(u, v, w) = (2u^2 - 2v^2 + 2a_{14}uw, 4uv + 2a_{24}uw, 2w^2 + 2a_{34}uw - 1, 2vw)$ com $a_{14}, a_{24}, a_{34} \in \mathbb{R}$.

Tipo 5: matriz $[\widetilde{T_5}]$

- $(a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\eta(u,v,w) &= (2u^2 - 2v^2 + 2a_{15}vw, 4uv + 2a_{25}vw,\\ &\quad 2w^2 + 2a_{35}vw - 1, 2uw + 2a_{45}vw),\end{aligned}$$

com $a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45} \in \mathbb{R}$.

■

A próxima proposição nós dará os projetivos de curvatura para **pontos semi-quase-umbílicos lineares** da 3-variedade, que são realizações, como superfícies, do plano projetivo real $\mathbb{P}^2$ em 3-espaços.

Proposição 3.13. *Seja M uma 3-variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 6$. Se $p \in M$ é **ponto semi-quase-umbílico linear**, o projetivo de curvatura em p é uma superfície isomorfa à uma projeção da superfície de Veronese clássica, dada por uma das matrizes $[\widetilde{T}_i]$, $1 \leq i \leq 10$, abaixo.*

*Dependendo dos valores a_{ij} poderá ser isomorfa à uma das seguintes superfícies: **superfície Romana de Steiner, Cross-cap, superfície de Steiner de Tipo 5 ou Cross-cup**, ou estará contida nas **quádricas: elipsóide ou cone**.*

Demonstração: Suponhamos que p seja ponto semi-quase-umbílico linear, então posto$([\widetilde{T}]) = 3$ e o projetivo de curvatura em p é uma superfície substancial no 3-espaço Aff_p contido em $N_pM \equiv \mathbb{R}^{n-3}, n \geq 6$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $n = 6$. Consideramos novamente todas as combinações dos vetores B, C, D, U e V, três a três linearmente independentes na matriz $[\widetilde{T}]$ obtemos:

$$\left[\widetilde{T}_1\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T}_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a_{13} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\widetilde{T}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T}_4\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_{14} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T}_5\right] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T}_6\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & a_{15}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{25}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T}_7\right] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & a_{15}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{25}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T}_8\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0\\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T}_9\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15}\\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} \end{bmatrix} \text{ e } \quad \left[\widetilde{T_{10}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15}\\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25}\\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}.$$

Superfícies quádricas

1. **Elipsóide**:

   Se considerarmos a matriz $[\widetilde{T}_1]$, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

   $$\eta(\theta,\phi) = \Big(\cos(2\phi), \cos\theta\sin(2\phi), \sin\theta\sin(2\phi)\Big),$$

   com $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$, cuja imagem é a esfera unitária $\mathbb{S}^2$.

2. **Projetivo de curvatura contido em um cone**:

   Na matriz$[\widetilde{T_{10}}]$ tomamos $a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = 0$.

   Logo o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

   $$\eta(\theta,\phi) = \Big(\Big(1-\cos(2\phi)\Big)\cos(2\theta), \Big(1-\cos(2\phi)\Big)\sin(2\phi), \cos(2\phi)\Big).$$

Superfícies de Steiner

1. **Superfície Romana de Steiner**:

   Na matriz $[\widetilde{T}_2]$ consideramos $a_{13} = 0$.

   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

   $$\eta(\theta,\phi) = \Big(2(\sin(\phi))^2\sin(2\theta), \cos\theta\sin(2\phi), \sin\theta\sin(2\phi)\Big),$$

   a superfície Romana de Steiner.

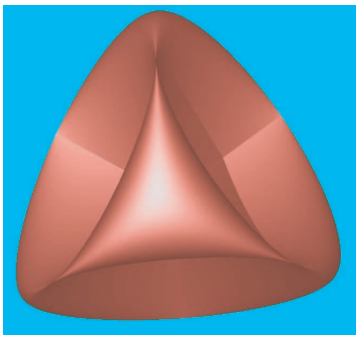


Figura 3.1: Superfície Romana de Steiner

2. **Superfície de Tipo 3: Cross-Cap**:

   Na matriz $[\widetilde{T}_8]$ consideramos $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$.

   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

   $$\eta(\theta,\phi) = \Big(2(\sin(\phi))^2\cos(2\theta), 2(\sin(\phi))^2 sin(2\theta), \sin\theta\sin(2\phi)\Big).$$

   Esta superfície é considerada o modelo mais simples de realização de $\mathbb{P}^2$, que é basicamente uma semi-esfera com o bordo "costurado".

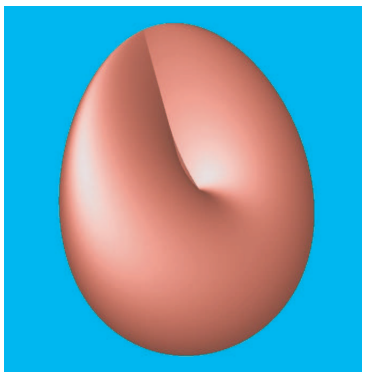


Figura 3.2: Superfície de Steiner de Tipo 3: cross-cap

3. **Superfície de Steiner de Tipo 5**:
   Na matriz $[\widetilde{T}_6]$ consideramos $a_{15} = a_{25} = a_{35} = 0$.
   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

$$\eta(\theta,\phi) = \Big(2(\sin(\phi))^2 \sin(2\theta), \cos(2\phi), \cos\theta \sin(2\phi)\Big).$$

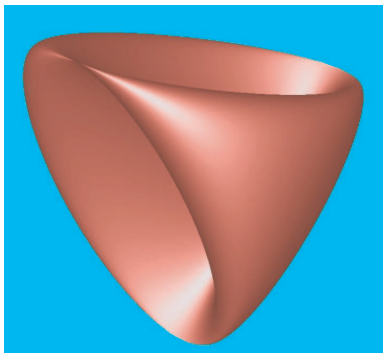


Figura 3.3: Superfície de Steiner de Tipo 5

4. **Superfície de Tipo 6: Cross-Cup**:
   Na matriz $[\widetilde{T}_5]$ consideramos $a_{12} = a_{24} = 0$ e $a_{14} = 1$.
   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) &= \Big((1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) + \cos(\theta)\sin(2\phi), \cos(2\phi),\\ &\quad \sin(\theta)\sin(2\phi)\Big).\end{aligned}$$

■

Proposição 3.14. *Seja M uma 3-variedade de classe C^2 imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$. Se $p \in M$ é **ponto quase-umbílico linear**, os projetivos de curvatura em p são regiões planas isomorfas à regiões que incluem **região triangular, região elíptica, cone planar e algumas projeções planares da superfície de Veronese**.*

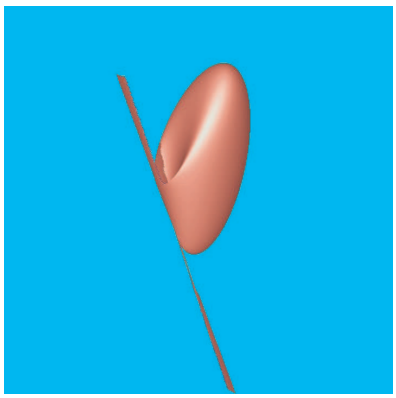


Figura 3.4: Superfície de Steiner de Tipo 6: Cross-Cup

Demonstração: Suponhamos que p seja ponto quase-umbílico linear, então o posto$([\widetilde{T}]) = 2$ e o projetivo de curvatura em p é uma região plana contida em Aff_p.

Podemos supor sem perda de generalidade que $n = 5$, assim consideramos novamente todas as combinações dos vetores B, C, D, U e V, dois a dois linearmente independentes na matriz $[\widetilde{T}]$:

$$\left[\widetilde{T_1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T_2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T_3}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T_4}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T_5}\right] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T_6}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T_7}\right] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} \end{bmatrix}, \quad \left[\widetilde{T_8}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$\left[\widetilde{T_9}\right] = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \text{ e } \quad \left[\widetilde{T_{10}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

1. **Região elíptica**:

   Na matriz $[\widetilde{T_{10}}]$ tomando $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{25} = 0$.

   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0, 0, 0)$ é dado por:

   $$\eta(\theta, \phi) = \Big((1 - \cos(2\phi))\cos(2\theta), (1 - \cos(2\phi))\sin(2\theta)\Big).$$

   cuja imagem é uma região elíptica, que neste caso, é uma região circular.

2. **Região triangular**:

   Na matriz $[\widetilde{T_8}]$ tomando $a_{14} = a_{24} = a_{15} = a_{25} = 0$.

   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0, 0, 0)$ é dado por:

   $$\eta(\theta, \phi) = \Big((1 - \cos(2\phi))\sin(2\theta), \cos(2\phi)\Big).$$

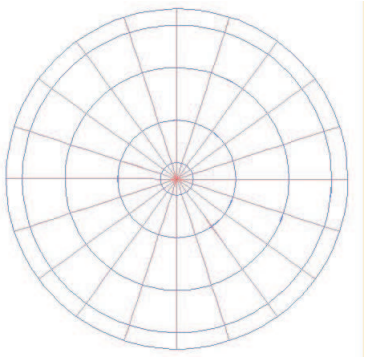


Figura 3.5: Região Elíptica

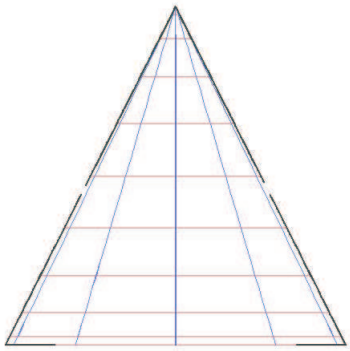


Figura 3.6: Região Triangular

3. **Cone planar**:
   Na matriz $[\widetilde{T}_7]$ tomando $a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{25} = 0$.
   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

$$\eta(\theta,\phi) = \Big((1-\cos(2\phi))\cos(2\theta), \cos\theta\sin(2\phi)\Big).$$

4. **Projeção planar de tipo 1**: Na matriz $[\widetilde{T}_8]$ tomando $a_{15} = 1 e a_{14} = a_{24} = a_{25} = 0$.
   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

$$\eta(\theta,\phi) = \Big((1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) + \sin\theta\sin(2\phi), \cos(2\phi)\Big).$$

5. **Projeção planar de tipo 2**:
   Na matriz $[\widetilde{T}_7]$ tomando $a_{12} = a_{13} = 1$ e $a_{15} = a_{25} = 0$.
   Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\eta(\theta,\phi) \;=\; &\Big((1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) + (1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) + \\ &\cos(2\phi), \cos\theta\sin(2\phi)\Big).\end{aligned}$$

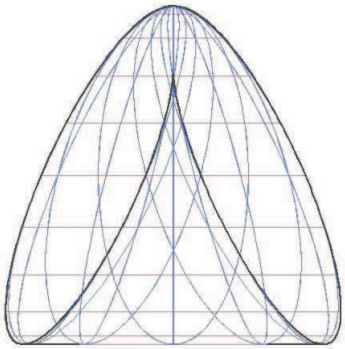


Figura 3.7: Projeção planar de tipo 1

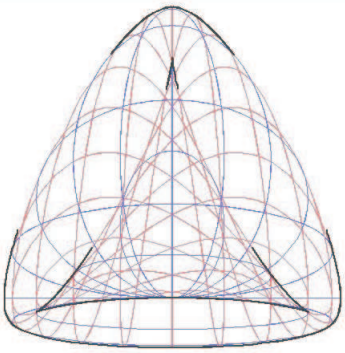


Figura 3.8: Projeção planar de tipo 2

■

Capítulo 4

Locus de Curvatura de uma Variedade Imersa em Codimensão 2

Neste capítulo, temos como objetivo introduzir o conceito de Locus de Curvatura e obtê-lo analiticamente a partir dos invariantes da 2ª forma fundamental, este conceito está diretamente relacionado com a elipse de curvatura e o projetivo de curvatura.

Através da expressão da segunda forma fundamental em uma direção normal dada pela expressão 3.5 definimos o locus de curvatura para uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^{n+2}$

Fazemos alguns cálculos e exibimos alguns resultados relacionados à sua geometria.

Os textos aqui utilizados foram [14] e [15].

4.1 O Locus de Curvatura

Definição 4.1. *Sejam M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^m$, $p \in M$ e $\mathbb{S}_p$ a n-esfera unitária em T_pM, o* ***locus de curvatura*** *de M em p, denotado por η_p, é o conjunto das imagens da aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \eta & : & \mathbb{S}_p & \longrightarrow & N_pM \\ & & X & \longmapsto & \eta(X) = \alpha(X, X). \end{array}$$

Observação: A elipse de curvatura dada na definição 1.2 e o projetivo de curvatura definido em 3.2 são exatamente o locus de curvatura no caso em que M é uma superfície e em que M é uma 3-variedade, respectivamente.

Definição 4.2. *A* ***codimensão*** *de M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^m$ é o número $k = m - n$. Neste caso dizemos que M está imersa em codimensão k.*

Nesta seção vamos considerar M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^m$ em codimensão 2, ou seja, $m - n = 2$, e portanto N_pM o espaço normal de M em p é um plano.

Assim, vamos considerar $\{\nu_1, \nu_2\}$ e $\{X_1, \cdots, X_n\}$ bases ortonormais de N_pM e T_pM, respectivamente, com a última uma base de autovetores, cuja existência é garantida pelo fato de que assumimos que

$$A_{\nu_1}(X_i) = \sum_j a_{ij}X_j, \qquad A_{\nu_2}(X_i) = \sum_j b_{ij}X_j.$$

Logo, para todo $p \in M$ dado $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}_p$, podemos escrever $X = x_1X_1 + \cdots + x_nX_n$ com $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, daí que

$$\begin{aligned} \eta(X) &= s(X,X) = \langle A_{\nu_1}(X), X\rangle\nu_1 + \langle A_{\nu_2}(X), X\rangle\nu_2 \\ &= \Big(\sum_j a_{ij}x_ix_j\Big)\nu_1 + \Big(\sum_j b_{ij}x_ix_j\Big)\nu_2. \end{aligned}$$

Exemplos:

1. Sejam M uma $5-$variedade imersa em $\mathbb{R}^7$ e $g : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ a imersão dada por:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^7 \\ & (x,y,z,t,u) & \longmapsto & g(x,y,z,t,u) \end{array}.$$

   com $g(x,y,z,t,u) = (x,y,z,t,u,2x^2 - 2z^2 + u^2, -x^2 + 2y^2 - z^2 + t^2 + tu)$.

   Encontremos o locus de curvatura de M no ponto $p = (0,0,0,0,0)$, fazendo os cálculos das derivadas parciais de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z,t,u) &= (1,0,0,0,0,4x,-2x) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0,0,0) &= (1,0,0,0,0,0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z,t,u) &= (0,1,0,0,0,0,4y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0,0,0) &= (0,1,0,0,0,0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z,t,u) &= (0,0,1,0,0,-4z,-2z) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0,0,0) &= (0,0,1,0,0,0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial t}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,1,0,0,2t+u) \\ \frac{\partial g}{\partial t}(0,0,0,0,0) &= (0,0,0,1,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,1,2u,t) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(0,0,0,0,0) &= (0,0,0,0,1,0,0) \end{aligned}$$

observamos que o conjunto de vetores

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(p)=e_1,\frac{\partial g}{\partial y}(p)=e_2,\frac{\partial g}{\partial z}(p)=e_3,\frac{\partial g}{\partial t}(p)=e_4,\frac{\partial g}{\partial u}(p)=e_5\right\}$$

é base para T_pM, consideramos o conjunto $\{\nu_1,\nu_2\}=\{e_6,e_7\}$ como base de vetores de N_pM, com e_i, para $i\in\{1,\ldots,7\}$, vetores da base canônica de $\mathbb{R}^7$. Calculando as derivadas de segunda ordem obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,0,4,-2)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,0,0,4)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,0,-4,-2)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,0,0,2)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,0,2,0)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial t}(x,y,z,t,u) &= (0,0,0,0,0,0,1),
\end{aligned}\tag{4.1}$$

com

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial u}=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial u}=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial t}=\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial t}=\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial u}=\vec{0}$$

e escrevendo os vetores de 4.2 em relação aos vetores ν_1 e ν_2 temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z,t,u) &= 4\nu_1-2\nu_2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z,t,u) &= 0\nu_1+4\nu_2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z,t,u) &= -4\nu_1-2\nu_2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,y,z,t,u) &= 0\nu_1+2\nu_2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x,y,z,t,u) &= 2\nu_1+0\nu_2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial t}(x,y,z,t,u) &= 0\nu_1+\nu_2,
\end{aligned}\tag{4.2}$$

consequentemente as matrizes $A_{\nu 1}$ e $A_{\nu 2}$ são dadas por:

$$[A_{\nu_1}]=\begin{bmatrix}4&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&-4&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}\qquad\text{e}\qquad[A_{\nu_2}]=\begin{bmatrix}-2&0&0&0&0\\0&4&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Agora, podemos calcular $A_{\nu_1}(X_i)$ e $A_{\nu_2}(X_i)$, onde $X_i = e_i$ para $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

$$A_{\nu_1}(X_1) = 4X_1, \quad A_{\nu_1}(X_2) = 0, \quad A_{\nu_1}(X_3) = -4X_3, \quad A_{\nu_1}(X_4) = 0,$$

$$A_{\nu_1}(X_5) = 2X_5, \quad A_{\nu_2}(X_1) = -2X_1, \quad A_{\nu_2}(X_2) = 4X_2, \quad A_{\nu_2}(X_3) = -2X_3,$$
$$A_{\nu_2}(X_4) = 2X_4 + X_5 \quad \text{e} \quad A_{\nu_2}(X_5) = X_4,$$

fazendo os cálculos de $\eta(X_i)$, para $i \in \{1, \ldots, 5\}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \eta(X_1) &= \langle A_{\nu_1}(X_1), X_1\rangle\nu_1 + \langle A_{\nu_2}(X_1), X_1\rangle\nu_2 \\ \eta(X_1) &= \langle 4X_1, X_1\rangle\nu_1 + \langle -2X_1, X_1\rangle\nu_2 \\ \eta(X_1) &= 4\nu_1 - 2\nu_2. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \eta(X_2) &= 0\nu_1 + 4\nu_2 \\ \eta(X_3) &= -4\nu_1 - 2\nu_2 \\ \eta(X_4) &= 0\nu_1 + 2\nu_2 \\ \eta(X_5) &= 2\nu_1 + 0\nu_2. \end{aligned}$$

Considerando os pontos $(2,-1), (0,2), (-2,-1), (0,1), (1,0)$ em N_pM, o locus de curvatura η_p é um triângulo com vértices $(2,-1), (0,2)$ e $(-2,-1)$. A restrição de η_p no plano resulta em uma elipse não degenerada contida no triângulo.

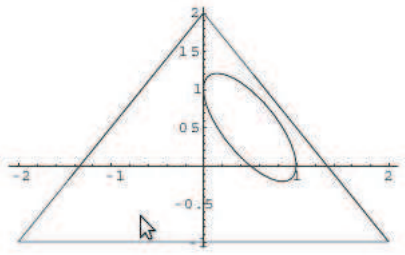


Figura 4.1: Locus de Curvatura-triângulo degenerado

Neste exemplo, o espaço normal a variedade é um plano e o locus de curvatura é dado pelo conjunto de vértices, resultante da união dos pontos, que são imagens da aplicação η pelas coordenadas do plano gerado pelos vetores ν_1 e ν_2.

2. Seja a imersão na forma de Monge dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z) &\longmapsto \varphi(x,y,z) = \left(x, y, z, \frac{x^2+y^2+z^2}{2}, x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right), \end{aligned}$$

e que parametriza localmente uma 3−variedade M. Como veremos o locus de curvatura no ponto $p = (0, 0, 0)$ é um segmento no plano normal N_pM.

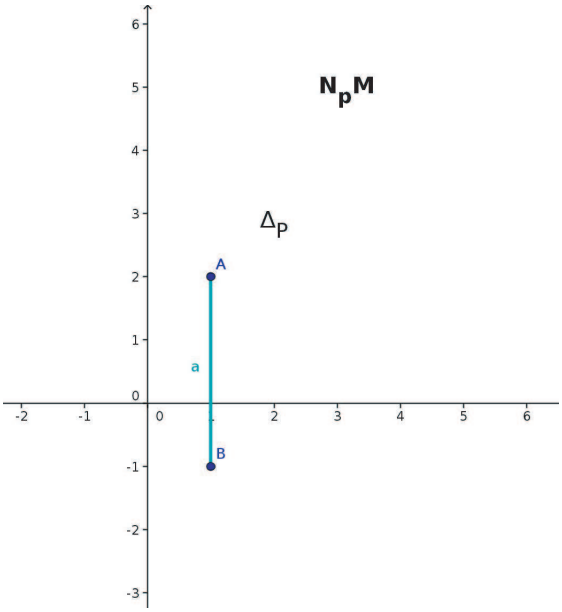


Figura 4.2: Locus de Curvatura-segmento

De maneira similar ao que fizemos no exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) &= (1, 0, 0, x, 2x) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= (0, 1, 0, y, -y) \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= (0, 0, 1, z, -z),
\end{aligned}$$

em $p = (0, 0, 0)$ $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p), \frac{\partial g}{\partial y}(p), \frac{\partial g}{\partial z}(p)\right\}$ é base para T_pM, considerando $\{\nu_1, \nu_2\}$ base para N_pM e fazendo os cálculos abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(p) &= (0, 0, 0, 1, 2) = \nu_1 + 2\nu_2 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(p) &= (0, 0, 0, 1, -1) = \nu_1 - \nu_2 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(p) &= (0, 0, 0, 1, -1) = \nu_1 - \nu_2
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(p) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}(p) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Logo,

$$[A_{\nu_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [A_{\nu_2}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, podemos calcular $A_{\nu_1}(X_i)$ e $A_{\nu_2}(X_i)$, onde $X_i = e_i$ para $i \in \{1, \ldots, 3\}$.

$$A_{\nu_1}(X_1) = X_1, \quad A_{\nu_1}(X_2) = X_2, \quad \text{e} \quad A_{\nu_1}(X_3) = X_3,$$

$$A_{\nu_2}(X_1) = 2X_1, \quad A_{\nu_2}(X_2) = -X_2 \quad \text{e} \quad A_{\nu_2}(X_3) = -X_3,$$

Realizando os cálculos para $\eta(X_i)$ para $i \in \{1, \ldots, 3\}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \eta(X_1) &= \langle A_{\nu_1}(X_1), X_1\rangle\nu_1 + \langle A_{\nu_2}(X_1), X_1\rangle\nu_2 \\ \eta(X_1) &= \langle X_1, X_1\rangle\nu_1 + \langle 2X_1, X_1\rangle\nu_2 \\ \eta(X_1) &= 1\nu_1 + 2\nu_2. \end{aligned}$$

e

$$\eta(X_2) = \nu_1 - \nu_2 \qquad \text{e} \qquad \eta(X_3) = 0\nu_1 - \nu_2.$$

Portanto, o locus de curvatura η_p é um segmento no plano normal N_pM.

Observação: No último exemplo o locus de curvatura é o projetivo de curvatura definido em 3.2, que neste caso se degenerou em um segmento.

Curvatura normal

Sejam M uma n-variedade imersa em $\mathbb{R}^{n+k}$ e ∇ a conexão riemanniana de M induzida de $\overline{\nabla}$ conexão riemanniana de $\mathbb{R}^{n+k}$. Dados $X \in T_PM$ e $\nu \in N_pM$, denotamos por $D_X\nu = \left(\nabla_X\nu\right)^{\perp}$ com $\perp$ a projeção normal de $\nabla_X\nu$.

Definição 4.3. *A **curvatura normal** de M em p, denotada por R_D, é a aplicação*

$$\begin{aligned} R_D : \ T_pM \times T_pM \times N_pM &\longrightarrow N_pM \\ (X, Y, \nu) &\longmapsto D_X(D_Y\nu) - D_Y(D_X\nu) - D_{[X,Y]}\nu \end{aligned}.$$

Observação:
Se S é uma superfície regular, o valor da segunda forma fundamental em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a $v \in T_pS$, isto é, a curvatura no ponto $\alpha(t)$ de uma curva regular contida em S, cuja tangente nesse ponto é o vetor $\alpha'(t)$, é igual ao valor que obtemos aplicando a segunda forma fundamental $II_{\alpha(t)}$ em $\alpha'(t)$. A curvatura normal de uma superfície é a medida escalar da taxa de variação da direção do vetor normal em torno da superfície.

Considerando que $\mathbb{R}^{n+k}$ tem curvatura nula temos a **equação Ricci** (veja [14] e [15]) é dado por:

$$\langle \xi, R_D(X, Y)\nu\rangle = \langle X, (A_\xi \circ A_\nu - A_\nu \circ A_\xi)Y\rangle$$

para todo X, $Y \in T_PM$ e todo ξ, $\nu \in N_pM$.

Em alguns resultados envolvendo o locus de curvatura, precisaremos que a curvatura normal no ponto $p \in M$, $R_D(p)$, seja nula. Essa afirmação equivale a um resultado muito importante, a saber:

Proposição 4.4. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $R_D(p) = 0$.

(ii) $A_\nu \circ A_\xi = A_\xi \circ A_\nu$ *para quaisquer* ν *e* $\xi \in N_pM$.

(iii) *Para todo* $\nu \in N_pM$ *existe uma base ortonormal* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *de* T_pM *formada de* $\nu-$*direções principais.*

Definição 4.5. *Seja* $\nu \in N_pM$ *um vetor normal, os autovetores da aplicação auto-adjunta* $A_\nu : T_pM \longrightarrow T_pM$, $\mu_1, \cdots, \mu_n$ *de* A_ν, *são chamados* ***curvaturas principais*** *de* M *em* p *na direção de* ν, *ou simplesmente* ν-***curvaturas principais***.

Dizemos que $X \in T_pM$ é uma ν-**direção principal** se é X é um autovetor de A_ν. Sabemos que para todo $\nu \in N_pM$ podemos escolher uma base ortonormal $\{X_1, \cdots, X_n\}$ para T_pM com $\nu-$ direções principais, isto é, de tal modo que,

$$A_\nu(X_i) = \mu_i X_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Um ponto $p \in M$ é $\nu-$**umbílico** se existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $A_\nu = \mu Id$, ou equivale a dizer que as $\nu-$direções curvaturas são iguais. Dizemos que p é **umbílico** se é $\nu-$umbílico para todo $\nu \in N_pM$. Dizemos que p é **semiumbílico** se é $\nu-$umbílico para algum $\nu \neq 0$, $\nu \in N_pM$.

4.2 Alguns resultados sobre o Locus de Curvatura

Nesta seção apresentaremos alguns resultados encontrados em [14] e [15] para o estudo do locus de curvatura.

Teorema 4.6. *Sejam* M *uma* $3-$*variedade imersa em codimensão* 2 *e* $p \in M$. *Então* $R_D(p) = 0$ *se, e somente se, existe uma base ortornormal* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *de* T_pM *formada por direções assintóticas.*

Teorema 4.7. *Seja* $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *uma subvariedade e seja* $p \in M$. *Então* $R_D(p) = 0$ *se, e somente se, existem* $X_1, \cdots, X_n$ *tal que para todo* $i \neq j$, X_i, X_j, *gera um plano* $\pi_{ij} \subset T_pM$ *e* $\eta(\mathbb{S}_p \cap \pi_{ij})$ *é o segmento* $\overline{\eta(X_i)\eta(X_j)}$.

Observação:
O teorema acima é uma generalização do resultado mostrado em [12] que afirma que em uma superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ um ponto p é semiumbílico, ponto em que a elipse de curvatura se degenera em segmento, se, e somente se, existem duas direções assintóticas ortogonais. ção

Corolário 4.8. *Sejam* $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *uma subvariedade e* $mp \in M$, *tal que* $R_D(p) = 0$. *Se* $\{\nu_1, \nu_2\}$ *e* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *são bases ortonormais de* N_pM *e* T_pM, *respectivamente, tais que*

$$A_{\nu_1}(X_i) = \lambda_i X_i \qquad e \qquad A_{\nu_2}(X_i) = \mu_i X_i,$$

então η_p *é uma* ***envolvente convexa*** *de* $P_1, \cdots, P_n$, *onde* $P_i = \eta(X_i) = \lambda_i\nu_1 + \mu_i\nu_2$.

Demonstração:

Dado $X \in \mathbb{S}_p$, temos $X = x_iX_1 + \ldots + x_nX_n$ com $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Então,

$$\eta(X) = \left(\sum_i \lambda_i x_i^2\right)\nu_1 + \left(\sum_i \mu_i x_i^2\right)\nu_2 = \sum_i x_i^2 P_i.$$

■

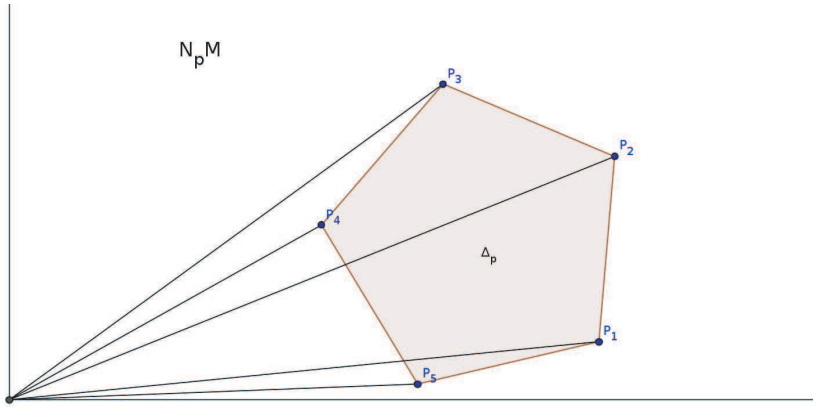


Figura 4.3: Envolvente Convexa

Observação: A recíproca do corolário é falsa.

No exemplo da página 71 temos a curvatura $R_D \neq 0$, pois as matrizes

$$[A_{\nu_1}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [A_{\nu_2}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não satisfazem a condição $A_{\nu_1} \circ A_{\nu_2} = A_{\nu_2} \circ A_{\nu_1}$.

Exemplo:

1. Seja M uma $3-$variedade imersa em $\mathbb{R}^5$. Considerando a imersão g dada por:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = (x,y,z,x^3-y^3,y^3-z^3) \end{array}.$$

Encontremos o locus de curvatura de M no ponto $p = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= (1, 0, 0, 3x^2, 0), \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= (0, 1, 0, -3y^2, 3y^2), \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= (0, 0, 1, 0, -3z^2),
\end{aligned}$$

em p temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(p) = (1, 0, 0, 3, 0), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(p) = (0, 1, 0, -3, 3), \quad \frac{\partial g}{\partial z}(p) = (0, 0, 1, 0, 3),$$

o conjunto de vetores

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(p) = e_1, \frac{\partial g}{\partial y}(p) = e_2, \frac{\partial g}{\partial z}(p) = e_3 \right\}$$

é base para T_pM.

Consideramos o conjunto $\{\nu_1, \nu_2\} = \{e_4, e_5\}$ como base de vetores de N_pM, com e_i para $i \in \{1, \ldots, 5\}$ vetores da base canônica de $\mathbb{R}^5$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p) &= (0, 0, 0, 6, 0) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p) &= (0, 0, 0, -6, 6) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(p) &= (0, 0, 0, 0, -6) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Com $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \vec{0}$ e escrevendo os vetores de 4.3 em relação aos vetores ν_1 e ν_2 obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p) &= 6\nu_1 - 0\nu_2 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p) &= -6\nu_1 + 6\nu_2 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(p) &= 0\nu_1 - 6\nu_2 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(p) &= 0\nu_1 + 0\nu_2 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(p) &= 0\nu_1 + 0\nu_2 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(p) &= 0\nu_1 + 0\nu_2 \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

então,

$$[A_{\nu_1}] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 1cme \qquad [A_{\nu_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Assim podemos calcular $A_{\nu_1}(X_i)$ e $A_{\nu_2}(X_i)$, onde X_i para $i \in \{1, \ldots, 3\}$, obtendo:

$$A_{\nu_1}(X_1) = 6X_1, \quad A_{\nu_1}(X_2) = -6X_2 \quad \text{e} \quad A_{\nu_1}(X_3) = 0X_3$$

$$A_{\nu_2}(X_1) = 0X_1 \quad A_{\nu_2}(X_2) = 6X_2 \quad \text{e} \quad A_{\nu_2}(X_3) = -6X_3$$

Fazendo os cálculos de $\eta(X_i)$, $i = 1, \ldots, 3$ temos:

$$\begin{aligned} \eta(X_1) &= \langle A_{\nu_1}(X_1), X_1\rangle\nu_1 + \langle A_{\nu_2}(X_1), X_1\rangle\nu_2 \\ \eta(X_1) &= \langle 6X_1, X_1\rangle\nu_1 + \langle 0X_1, X_1\rangle\nu_2 \\ \eta(X_1) &= 6\nu_1 + 0\nu_2 \end{aligned}$$

e

$$\eta(X_2) = -6\nu_1 + 6\nu_2 \quad \text{e} \quad \eta(X_3) = 0\nu_1 - 6\nu_2.$$

Considerando os pontos $(6, 0)$, $(-6, 6)$ e $(0, 6)$ em N_pM.

O locus de curvatura Δ_p é o triângulo com vértices $(6, 0)$, $(-6, 6)$ e $(0, 6)$.

Observemos que,

$$A_{\nu_1} \circ A_{\nu_2} = A_{\nu_2} \circ A_{\nu_1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

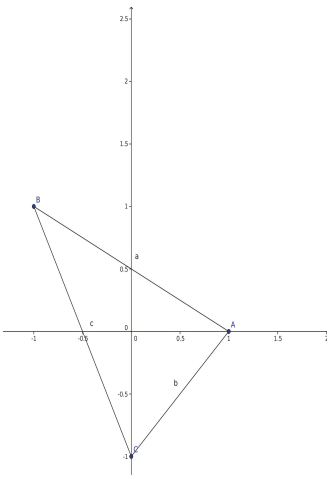


Figura 4.4: Locus de curvatura-triângulo

Proposição 4.9. *Seja M uma 3-variedade em codimensão 2. Suponha $R_D(p) = 0$. Se p é um ponto **quase umbílico linear**, o locus de curvatura Δ_p é um triângulo.*

Observamos que o resultado da proposição acima se refere ao resultado apresentado no capítulo anterior, na proposição 3.12, ou seja se $p \in M$ é um ponto quase umbílico, o projetivo de curvatura são regiões planas, dentre elas, a região triangular. Na matriz

$$\left[\widetilde{T}_8\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

tomando $a_{14} = a_{24} = a_{15} = a_{25} = 0$ e

$$[\widetilde{W}] = \begin{bmatrix} (1-\cos(2\phi))\cos(2\theta) \\ (1-\cos(2\phi))\sin(2\theta) \\ \cos(2\phi) \\ \sin(2\phi)\cos\theta \\ \sin(2\phi)\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Logo, o projetivo de curvatura em $p \equiv (0,0,0)$ é dado por: $[\widetilde{T}][\widetilde{W}] = \eta(\theta,\phi) = ((1-\cos(2\phi))\sin(2\theta), \cos(2\phi))$ Para mostrar que a imagem de η descreve uma região triangular, tomemos $t = \cos(2\phi)$ e $s = \sin(2\theta)$ obtendo:

$$\eta(s,t) = \Big((1-t)s, t)\Big), \quad -1 \leq t, \quad s \geq 1$$

Se $s = 1$ obtemos $\eta(1,t) = (1-t,t)$ que descreve um dos lados do triângulo. Os outros dois lados são dados por:

$$\eta(-1,t) = (t-1,t) \quad \eta(s,-1) = (2s,-1).$$

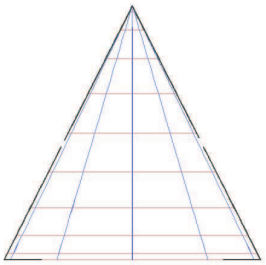


Figura 4.5: Região Triangular

Conclusão

Através do projetivo de curvatura foi possível observar algumas características geométricas de $3-$variedades, sobretudo a respeito do grau de umbilicidade do seus pontos.

Introduzimos o conceito de locus de curvatura baseados no estudo da elipse de curvatura para superficies imersas em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ e do projetivo de curvatura de $3-$variedades imersas em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$. Por meio de exemplos foi possível contextualizar o estudo do locus de curvatura, com a elipse de curvatura e o projetivo de curvatura, ressaltando informações geométricas semelhantes entre eles.

Nossa perspectiva é que por meio do estudo do locus de curvatura possamos observar outras características geométricas em variedades em codimensão maior que 2.

Referências Bibliográficas

[1] R. R. Binotto, **Projetivos de Curvatura**. Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, 2008.

[2] M. P. Carmo, **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Textos Universitários, *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2008.

[3] A. Coffman, A. J. Schwartz and C. Stanton, **The algebra and geometry of Steiner and other quadratically parametrizable surfaces**, *Computer Aided Geometric Design* 13, 257-286, 1996.

[4] A. Coffman, Steiner Surfaces, *S. Fort Wayne: Purdue University*, `http://www.ipfw.edu/math/Coffman/steinersurface.html`, 2007.

[5] S. I. R. Costa, S. M. Moraes e M. C. Romero Fuster, **Geometric Contacts of Surfaces Immersed in** $\mathbb{R}^n$ $n \geq 5$, *Differential Geometry and its Applications* 27, 442-454, 2009.

[6] S. I. R. Costa **Aplicações não singulares de ordem p**. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1982.

[7] Cromwell, Peter R. e Marar, W. L., ***Semiregular surfaces with a single triple-point***, *Geom.Dedicata* 52, nº 2, p.p 143-153, 1994.

[8] G. K. Francis, **A Topological Picturebooks**, *Springer*, 2007.

[9] K. Kommerell, **Riemannsche Flächen in ebenen Raum von vier Dimensionen**. *Math. Ann.,* 60, 546-596, 1905.

[10] J. Little, **On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean space**, *Annali Mat. Pura et Appl.*, serie 4A, 83, $261 - 336$, 1969.

[11] J. A. Montaldi, **Contact with application to submanifolds**, PhD Thesis, *University of Liverpool*, 1983.

[12] D. K. H. Mochida, M. C. Romero Fuster and M. A. S. Ruas, **Osculating Hyperplanes and Asymptotic Directions of Codimension 2 Submanifolds of Euclidean Spaces**, *Geometriae Dedicata*, 305-315, 1999.

[13] S. M. Moraes, **Elipses de Curvatura no Estudo de Superfícies Imersas em** $\mathbb{R}^n$ $n \geq 5$. Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, 2002.

[14] J. J. Nuño Ballesteros e M. C. Romero Fuster, **Contact properties of codimension 2 submanifolds with flat normal bundle**. *Rev. Mat. Iberoamericana* 26, nº3, 799 − 824, 2010.

[15] J. J. Nuño Ballesteros, M. C. Romero Fuster e F. Sánchez Bringas **Curvature locus and principal configurations of submanifolds of Euclidean space**, preprint, 2012.

[16] M.C. Romero-Fuster e F. Sánchez- Bringas, **Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in** $\mathbb{R}^4$. *Differential Geom. Appl.*16, 213 − 224, 2002.