

MARCO AURÉLIO DO CARMO FLORENTINO

LIMITES GEOMÉTRICOS DOS CONJUNTOS CONNECTEDNESS
LOCUS E JULIA, ASSOCIADOS A FAMÍLIA DE FUNÇÕES RACIONAIS

$$R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Miranda Alves

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

F632I
2019 Florentino, Marco Aurélio do Carmo, 1993-
Limites geométricos dos conjuntos connectedness locus e
julia, associados a família de funções racionais $R_{n,c,a}(z) = \frac{z^{n+a}}{z^n+c}$ / Marco Aurélio do Carmo Florentino. – Viçosa, MG,
2019.

79f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: 78-79.

1. Dinâmica. 2. Funções (Matemática). 3. Funções de
variáveis complexas. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 515.39

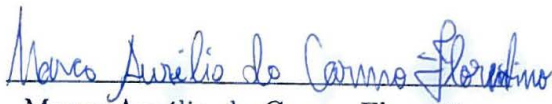
MARCO AURÉLIO DO CARMO FLORENTINO

LIMITES GEOMÉTRICOS DOS CONJUNTOS CONNECTEDNESS
LOCUS E JULIA, ASSOCIADOS A FAMÍLIA DE FUNÇÕES RACIONAIS

$$R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 09 de agosto de 2019.



Marco Aurélio do Carmo Florentino
Autor



Alexandre Miranda Alves
Orientador

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Walter e Milva.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me guiar até este momento.

Aos meus colegas de curso e de jornada pela amizade e companheirismo, pelos momentos de descontração e de estudos.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, pelo apoio e excelente serviços prestados. Em especial ao meu orientador Alexandre pelo conhecimento compartilhado e profissionalismo durante graduação e mestrado.

Aos meus pais Walter e Milva pelo apoio, a minha irmã por ser sempre presente me dando força, a minha noiva Jéssica pelo amor e carinho. E finalmente e não menos importante a minha vó Zita pela excelente educação. Por confiar em mim me apoiando sempre. E como esquecer daquele 5 de novembro de 2010, em que a senhora me deu tão preciosos 20 reais para eu fazer um lanche e não ficar com fome antes do ENEM, 20 reais estes o único dinheiro que a senhora tinha em casa naquela época. Nada disso seria possível se não fosse a senhora. Muito obrigado. Não poderia deixar de render homenagens a minhas madrinhas Izabel e Maria que sempre torceram por mim e me auxiliaram nesta jornada.

Por fim gostaria de agradecer a meu colega de mestrado Pedro por me auxiliar na instalação do programa Dynamics Explorer. E também gostaria de agradecer a Doutora Suzanne Hruska Boyd pelo pronto retorno a mensagem enviada a ela por meu orientador e eu.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

O aumento do conhecimento é como
uma esfera dilatando-se no espaço:
quanto maior a nossa compreensão,
maior o nosso contato com o
desconhecido.

Blaise Pascal

Resumo

FLORENTINO, Marco Aurélio do Carmo M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2019. **Limites Geométricos dos Conjuntos Connectedness Locus e Julia associados a família de funções racionais** $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$. Orientador: Alexandre Miranda Alves.

O campo da dinâmica complexa analítica tem sofrido um rápido desenvolvimento nos últimos 20 anos. Depois de um período de relativa dormência, o campo de estudo ressurgiu em 1980 devido a algumas imagens, bastante intrigantes, obtidas com o auxílio de computadores do conjunto de Mandelbrot ou Connectedness Locus (O Connectedness Locus M_n da família de polinômios de grau n consiste de todos os parâmetros c , tais que o conjunto de Julia de $P_c(z) = z^n + c$ é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico de $P_c(z)$ é limitada), assim como a novos avanços na matemática preconizados por Douady, Hubbard, Sullivan e outros. Neste trabalho estudamos algumas propriedades geométricas do Conjunto de Julia, Conjunto de Julia Cheio e do Connectedness Locus (Conjunto de Mandelbrot). Além disso, procuramos estabelecer os limites geométricos do Connectedness Locus e dos conjuntos de Julia associados a família de polinômios complexos $P_{n,c}(z) = z^n + c$ e da família $R_{n,a,c}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$, para isso utilizamos a métrica de Hausdorff. Por fim, estudamos também a reta real estendida como um conjunto de Julia que mostramos ser um conjunto caótico.

Palavras-chave: Dinâmica. Funções. Funções de variáveis complexas.

Abstract

FLORENTINO, Marco Aurélio do Carmo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2018. **Geometric Limits of the Connectedness Locus and Julia Sets associated with the family of rational functions** $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$. Adviser: Alexandre Miranda Alves.

The field of complex analytical dynamics has undergone rapid development over the last 20 years. After a period of relative numbness, the field of study resurfaced in 1980 due to some rather intriguing images obtained with the help of computers from the Mandelbrot or Connectedness Locus set (The Connectedness Locus M_n of the n -degree polynomial family consists of all the parameters c such that the Julia set of $P_c(z) = z^n + c$ is connected, or equivalently if the orbit of each critical point of $P_c(z)$ is limited), as well as to new advances in mathematics advocated by Douady, Hubbard, Sullivan and others. In this work we study some geometric properties of the Julia Set, Set of Julia Full and the Connectedness Locus (Mandelbrot Set). In addition, we seek to establish the geometric boundaries of the Connectedness Locus and the Julia sets associated with the family of complex polynomials $P_{n,c}(z) = z^n + c$ and of the family $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$, for this we use the Hausdorff metric. Finally, we also study the extended real line as a set of Julia that we show to be a chaotic set.

Key words: Dynamics. Functions. Complex Variable Functions.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	11
1.1 Noções em Variável Complexa	11
2 Conjuntos de Julia e de Fatou	31
2.1 Noções de Dinâmica Complexa	31
2.2 Conjuntos de Fatou e Julia	33
2.3 Propriedades dos Conjuntos de Fatou e Julia	37
3 Limites Geométricos dos Conjuntos de Mandelbrot e Julia com grau crescente	42
3.1 Resultados para a família $P_{n,c}$	44
3.1.1 Conjuntos de Julia	44
3.1.2 Limites Mandelbrot	48
3.2 A família $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$	50
3.2.1 O Conjunto de Mandelbrot para $c = 0$	53
3.2.2 Conjunto de Mandelbrot para $c \neq 0$	56
4 A reta real estendida como um conjunto de Julia	68
4.1 A família recursiva e suas propriedades	68
4.1.1 F_n como uma função racional real	75
Referências Bibliográficas	79

Introdução

Neste trabalho estudamos algumas propriedades geométricas e dinâmicas dos conjuntos de Julia, do conjunto de Julia Cheio e do Connectedness Locus.

No capítulo 1 introduzimos alguns conceitos de Análise Complexa como funções holomorfas, as condições de Cauchy-Riemann, Teorema Integral de Cauchy entre outros resultados de integração Complexa. Além disso apresentamos resultados importantes, como por exemplo, o Teorema de Rouchè.

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados gerais de dinâmica complexa, os conjuntos de Julia e de Fatou e as propriedades inerente a esses conjuntos.

No capítulo 3, para a família $P_{n,c}(z) = z^n + c$, mostramos que o limite geométrico dos conjuntos Mandelbrot $M_n(P)$ quando $n \rightarrow \infty$ existe e é o fecho do disco unitário e que o limite geométrico dos conjuntos de Julia $J(P_{n,c})$ quando n tende ao infinito é o círculo unitário, para $|c| \neq 1$. E por fim, apresentamos resultados semelhantes para algumas generalizações desta família, para a aplicação racional $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$.

No capítulo 4 introduzimos uma família de funções racionais $\{F_n\}$ definida recursivamente e mostramos que o conjunto de Julia de F_n é $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nós usamos dois métodos diferentes para calcular o conjunto de Julia de F_n , primeiro explorando a comutatividade desta família e, em segundo lugar, estabelecendo a conjugação desta família com outra conhecida família de funções. Finalmente, nós estudamos F_n como uma função real e apresentamos que é caótico em um subconjunto específico de \mathbb{R} .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados os espaços e as ferramentas necessárias para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Noções em Variável Complexa

Neste primeiro capítulo estamos interessados em apresentar alguns aspectos gerais da teoria de funções complexas

Definição 1.1. *Seja $f : G \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa, com $G \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Dizemos que f é derivável em z_0 se o limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, e o denotamos $f'(z_0)$. Se f for derivável em todo $z \in G$ dizemos que f é derivável em G ou ainda que f é holomorfa em G .

Exemplo 1.2. 1. $f(z) = a, \forall z \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ é holomorfa. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a - a}{z - z_0} = 0$$

Daí f é holomorfa e $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

2. $g(z) = z = a + ib$ é holomorfa. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1,$$

Daí f é holomorfa e $f'(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

3. $h(z) = \bar{z} = a - ib$ não é holomorfa. De fato, ao aproximar-se de $z_0 = x_0 + iy_0$ pela reta $z = (x + x_0) + iy_0$ com $x \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0) - iy_0 - (x_0 - iy_0)}{(x + x_0) - iy_0 - (x_0 - iy_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{x} = 1$$

Por outro lado ao aproximar-se de $z_0 = x_0 + iy_0$ pela reta $z = x_0 + i(y - y_0)$ com $y \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(x_0 - i(y + y_0)) - (x_0 - iy_0)}{(x_0 + i(y - y_0)) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

Portanto $h(z) = \bar{z}$ não é holomorfa.

4. $r(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ é holomorfa. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z) - r(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1}$$

Definição 1.3. Um domínio é um subconjunto de \mathbb{C} que é aberto e conexo.

Teorema 1.4. Se f for holomorfa em um domínio G então f é contínua em G .

Demonstração. Seja $z_0 \in G$, temos que mostrar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, $\forall z_0 \in G$. Como f é holomorfa temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, assim

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

e portanto segue o resultado. \square

A seguir veremos que para determinar se uma aplicação f é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, é suficiente analisarmos a parte real e imaginária de f , isto é, se a parte real e a parte imaginária de f admitem derivadas parciais de primeira ordem em $z_0 = (x_0, y_0)$, e se essas derivadas verificam as condições de Cauchy-Riemann que serão apresentadas abaixo, então seja $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sendo G um domínio, assim escrevemos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

sendo $u, v : G \mapsto \mathbb{R}$ as partes real e imaginária de f respectivamente.

Teorema 1.5. Seja $f : G \mapsto \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja derivável em z_0 é que u e v possuam derivadas parciais contínuas em (x_0, y_0) , satisfazendo as seguintes condições

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Além disso, se $f'(z_0)$ existe então

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

As condições (*) são chamadas esquações de Cauchy-Riemann.

Demonstração. Por definição

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Fazendo $z = x + iy_0$ obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Por outro lado fazendo $z = x_0 + iy$ obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Como o limite existe é único, tem-se que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y}$$

Daí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

E ainda temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

□

Agora supondo que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e são de classe C^1 , temos que existem funções ε_1 e ε_2 definidas em torno de $(0, 0)$ satisfazendo que, para todo $(r, s) \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno

$$u(x_0 + r, y_0 + s) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s)$$

$$v(x_0 + r, y_0 + s) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_2(r, s)$$

e

$$\lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_2(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = 0$$

Agora coloque $h = r + is$. Além disso, usando as equações de Cauchy-Riemann temos

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + r, y_0 + s) - v(x_0, y_0)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(r + is) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(r + is) + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) h + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} &\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \right] \\ &= \lim_{h=r+is \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_1(r, s)}{r + is} + i\frac{\varepsilon_2(r, s)}{r + is} \right] = 0. \end{aligned}$$

O que mostra que f é derivável em z_0 e

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Corolário 1.6. *Seja $f : G \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em um domínio G . Se $f'(z) = 0$ em G , então f é constante.*

Demonstração. De fato, como $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$ em G , temos pelas equações de Cauchy-Riemann que $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ em G . Logo $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ em G . Portanto u e v são constantes, uma vez que G é domínio. Daí f é constante. \square

Definição 1.7. Seja G um subconjunto aberto de \mathbb{C} , a um elemento de G e $f : G \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa. Se existir uma aplicação holomorfa $g : G \mapsto \mathbb{C}$, $g(a) \neq 0$ e um inteiro não negativo n tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ para todo z em $G \setminus \{a\}$, então a é denominado um pólo de f de ordem n .

Definição 1.8. Dizemos que uma aplicação f é meromorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$, se existe um conjunto discreto $\Gamma \subset U$ tal que f é holomorfa em $U \setminus \Gamma$ e os pontos de Γ são pólos de f .

Definição 1.9. Uma aplicação meromorfa e injetora é dita aplicação univalente.

Exemplo 1.10. A função $f(z) = \frac{1}{z}$ é meromorfa. De fato, f possui um único pólo de ordem 1 em 0. Além disso f é injetora, logo univalente.

Definição 1.11. Uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ que tem a propriedade de preservar ângulo, isto é, para quaisquer duas curvas γ_1 e γ_2 de classe C^1 que se intersectam em um ponto z_0 e forma entre si um ângulo θ , ou seja, o ângulo formado pelas retas tangentes às curvas γ_1 e γ_2 em z_0 é igual a θ são transformadas em duas curvas Γ_1 e Γ_2 que se intersectam em w_0 e que formam entre si o mesmo ângulo θ . E além disso

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}$$

existe, é chamada de aplicação conforme. Se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$ para algum z então f é conforme em todo G

Definição 1.12. Uma função racional da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad-bc \neq 0$ é chamada transformação de Möbius.

Se f é uma transformação de Möbius então $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ também é uma transformação de Möbius, pois $ad-bc \neq 0$ e além disso

$$f(f^{-1}(z)) = f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) = \frac{a\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + b}{c\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + d} = \frac{adz - ab - bcz + ab}{cdz - cb - cdz + ad} =$$

$$\frac{(ad-bc)z}{(ad-bc)z} = z = f^{-1}(f(z))$$

Daí temos que $f^{-1}(z)$ é a inversa da aplicação f . Sejam

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad e \quad g(z) = \frac{rz+s}{tz+w}$$

transformações de Möbius, então

$$f \circ g(z) = f(g(z)) = \frac{(ar+bt)z + (as+bw)}{(cr+dt)z + (cs+dw)}$$

é uma transformação de Möbius, pois

$$(ar+bt)(cs+dw) - (as+bw)(cr+dt) = (ad-bc)(wr-st) \neq 0.$$

Portanto as transformações de Möbius tem estrutura de grupo.

Exemplo 1.13. A função $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ é uma transformação de Möbius.

A seguir apresentaremos alguns resultados sobre integração complexa

Definição 1.14. Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(t) = u(t) + iv(t)$. Definimos a integral complexa de f por :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \int_a^b iv(t)dt.$$

Propriedades :

Em cada item baixo considere $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(t) = u(t) + iv(t)$

i) $Re \left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b Re (f(t)) dt$

ii) $Im \left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b Im (f(t)) dt$

ii) $\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

iv) Se $c \in \mathbb{C}, c = a + ib$

$$c \int_a^b f(t)dt = (a + ib) \left(\int_a^b u(t)dt + \int_a^b iv(t)dt \right) = \int_a^b (au - bv)dt + i \int_a^b (bu + av)dt$$

e

$$\int_a^b cf(t)dt = \int_a^b (a + ib)(u + iv)dt = \int_a^b (au - bv)dt + i \int_a^b (bu + av)dt$$

Portanto

$$c \int_a^b f(t)dt = \int_a^b cf(t)dt.$$

Definição 1.15. Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável f de classe C^∞ e seu traço é o conjunto $\{f(t) : t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$.

Definição 1.16. Uma função $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de variação limitada se existe $M > 0$ tal que para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ temos que

$$\nu(\gamma, P) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

A variação total é definida por :

$$V(\gamma) = \sup \{ \nu(\gamma, P) : P \text{ uma partição de } [a, b] \}$$

Definição 1.17. Uma curva é retificável se ela é de variação limitada.

Definição 1.18. (*Integral de Riemann-Stieltjes*). O número

$$I = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(\gamma(t))d\gamma(t)$$

é dito a integral de f sobre γ . Onde $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(t) = u(t) + iv(t)$.

Proposição 1.19. Se $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é suave por partes em $[a, b]$ então γ é de variação limitada e

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Demonstração. Assuma γ suave. Vele lembrar que quando dizemos que γ é suave, então γ' é contínua. Dada $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ temos

$$\begin{aligned} \nu(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Consequentemente $V(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ e γ é de variação limitada.

Como γ' é contínua em $[a, b]$ que é compacto, γ' é uniformemente contínua. Deste modo dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que $|s - t| < \delta_1$ implica que $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \epsilon$. Agora escolhemos δ_2 tal que se $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ e $\|P\| = \max\{(t_k - t_{k-1}) : 1 \leq k \leq n\} < \delta_2$ então

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \sum_{k=1}^n |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \right| < \epsilon$$

onde τ_k é um ponto em $[t_k - t_{k-1}]$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \epsilon + \sum_{k=1}^n |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \\ &= \epsilon + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k) dt \right| \\ &\leq \epsilon + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)] dt \right| + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Se $\|P\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \epsilon$ para $t \in [t_k - t_{k-1}]$ e

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \epsilon + \epsilon(b-a) + \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &\leq \epsilon(1 + (b-a)) + \nu(\gamma; P) \\ &\leq \epsilon(1 + (b-a)) + V(\gamma). \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$ obtemos

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq V(\gamma).$$

E portanto segue o resultado. □

Definição 1.20. Dada f contínua em γ e γ de classe C^1 em $[a, b]$ definimos a integral de linha de f sob a curva γ por

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemplo 1.21. Seja $f(z) = \frac{1}{z}$ e $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ então

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} f(re^{it})(re^{it})' dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi.$$

Definição 1.22. Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, com G aberto e f contínua. Dizemos que $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ é uma primitiva para f se F é holomorfa e $F' = f$.

Proposição 1.23. Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ contínua em G , onde G é um domínio. Se F é uma primitiva de f , então $F + k$, também o é, mais ainda qualquer outra primitiva de f é da forma $F + k$, onde k é uma constante.

Demonstração. Seja H outra primitiva de f . então $H - F$ é holomorfa e

$$(H - F)' = H'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Então $H - F = k$, com k constante. □

Definição 1.24. Uma função $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita ser analítica se para todo a em G , existe $r > 0$ máximo tal que $B_r(a) \subset G$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in B_r(a).$$

Definição 1.25. $G \subset \mathbb{C}$ é dito ser simplesmente conexo, se G é aberto, conexo, e sem buracos, no sentido que qualquer curva fechada de G delimita uma região inteiramente contida em G que pode ser transformada em um ponto.

Teorema 1.26. Se $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, então f é holomorfa.

Demonstração. Como f é analítica temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in B_r(a).$$

para $R > 0$ qualquer.

Considere $a = 0$. Seja $g : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função dada por

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$$

Fixe $r > 0$, tal que $r < R$.

Para todo $z, w \in B_r(0)$ $w \neq z$, temos

$$g(z) - \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z - w} \right)$$

$$\begin{cases} nz^{n-1} = z^{n-1} + z^{n-1} + \dots + z^{n-1} \\ \frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + z^{n-3}w^2 + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1} \end{cases}$$

e subtraindo a segunda igualdade da primeira temos :

$$z^{n-2}(z - w) + z^{n-3}(z^2 - w^2) + \dots + z(z^{n-2} - w^{n-2}) + (z^{n-1} - w^{n-1})$$

$$= (z - w)((n - 1)z^{n-1} + (n - 2)zn - 3w + \dots + 2zw^{n-2} + w^{n-2}).$$

Logo,

$$\left| nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z - w} \right|$$

$$\leq |z - w|((n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1)r^{n-2}$$

$$= |z - w| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}.$$

e daí

$$\begin{aligned} \left| g(z) - \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z-w} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z-w} \right| \leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2} |a_n| r^{n-2}. \end{aligned}$$

Pelo teste da razão, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2} |a_n| r^{n-2}$ converge, uma vez que $r < R$.

Digamos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2} |a_n| r^{n-2} = A < \infty$, logo

$$\left| g(z) - \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \right| \leq |z-w|A.$$

E isso mostra que

$$\lim_{w \rightarrow z} \left| g(z) - \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \right| = 0.$$

Ou seja,

$$g(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} = f'(z).$$

Como r foi tomado arbitrariamente $f'(z) = g(z)$ em $B_R(0)$. O caso $a \neq 0$ é simples, não há nada de especial em $a = 0$, basta trocar z^n por $(z-a)^n$ nos cálculos acima. \square

Teorema 1.27. (Teorema Integral de Cauchy) *Se $f : G \mapsto \mathbb{C}$, com G simplesmente conexo, e f analítica. Então $\int_{\gamma} f = 0$ para toda curva γ de Jordan, regular, inteiramente contida em G .*

Obs 1.28. γ ser uma curva de Jordan significa que γ é uma curva fechada e simples, (ou seja, γ é uma curva sem auto-interseções, ou ainda injetora).

Demonstração. Ver referência [5] \square

Proposição 1.29. *Se $f : G \mapsto \mathbb{C}$ é analítica então f possui uma primitiva, mais ainda se γ é um caminho fechado em $B_r(a) \subset G$ então $\int_{\gamma} f = 0$.*

Demonstração. Dado $a \in G, \exists r > 0$ tal que $B_r(a) \subset G$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in B_r(a)$$

e considere $F : B_r(a) \mapsto \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

Sabemos que para n suficientemente grande: $\frac{|z-a|}{n+1} \leq \frac{r}{n+1} < 1$, então

$$\left| \frac{a_n(z-a)^{n+1}}{n+1} \right| = |a_n(z-a)^n| \left| \frac{z-a}{n+1} \right| \leq |a_n(z-a)^n|$$

Então F está bem definida (raio de convergência r) e $F' = f$. □

Teorema 1.30. *Dada $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e G um domínio simplesmente conexo, as seguintes afirmações são equivalentes :*

1. f possui uma primitiva ;
2. $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo caminho fechado $\gamma \subset G$;
3. $\int f dz$ só depende dos extremos z_1 e z_2 de qualquer caminho σ contido em G , que $\overset{\sigma}{\text{liga}} z_1$ a z_2 .

Demonstração. (1) \Rightarrow (3) : Sejam $\sigma(t) = x(t) + iy(t), t \in (a, b); f(z) = u + iv, F(z) = N + iM$ e $z_1 = \sigma(a) = x(a) + iy(a), \sigma(b) = x(b) + iy(b)$. Sabemos que $F' = f$ e

$$F' = \frac{\partial N}{\partial x} + i \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - i \frac{\partial N}{\partial y}$$

Então

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} = u = \frac{\partial M}{\partial y} \\ -\frac{\partial N}{\partial y} = v = \frac{\partial M}{\partial x} \end{cases} \quad (1.1)$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b (u(t)x'(t) - v(t)y'(t)) dt + i \int_a^b (u(t)y'(t) + v(t)x'(t)) dt \\
 &= \int_a^b \left(\frac{\partial N}{\partial x} x'(t) - \frac{\partial N}{\partial y} y'(t) \right) + i \int_a^b \left(\frac{\partial M}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial M}{\partial x} x'(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b \frac{d}{dt} (N(x(t), y(t))) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} (M(x(t), y(t))) dt \\
 &= N(x(t), y(t)) \Big|_a^b + iM(x(t), y(t)) \Big|_a^b \\
 &= N(x(b), y(b)) - N(x(a), y(a)) + iM(x(b), y(b)) - M(x(a), y(a)) \\
 &= (N(x(b), y(b)) + iM(x(b), y(b))) - (N(x(a), y(a)) + iM(x(a), y(a))) \\
 &= F(x(b) + iy(b)) - F(x(a) + iy(a)) \\
 &= F(z_2) - F(z_1).
 \end{aligned}$$

(1) \Rightarrow (2) : Tomando em (1) \Rightarrow (3) $z_1 = z_2$ segue o resultado.

(2) \Rightarrow (3) : Sejam z_1 e z_2 em G . Seja γ um caminho que liga z_1 a z_2 e σ um caminho que liga z_2 a z_1 ambos os caminhos definidos em G . Logo $\gamma - \sigma$ é um caminho fechado em G , que é simplesmente conexo, assim

$$\int_{\gamma - \sigma} f dz = \int_{\gamma} f dz - \int_{\sigma} f dz = 0,$$

então

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\sigma} f dz$$

(3) \Rightarrow (1) : Agora fixe $z_0 \in G$, e defina

$$\begin{aligned}
 F : G &\rightarrow \mathbb{C} \\
 z &\mapsto F(z)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

por $F(z) = \int_{\gamma} f dz$, onde γ é um caminho que liga z_0 a z . Perceba que F está bem definida por hipótese, pois a integral está bem definida.

Afirmção : $F'(z) = f(z) \quad \forall \quad z \in G$

De fato, como G é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset G$ para $h \in \mathbb{C}$ com $|h| < r, z + h \in B_r(z) \subset G$. Mais ainda, temos que $\sigma(t) = z + th$ com $t \in [0, 1]$

está contido em $B_r(z) \subset G$, logo temos

$$\begin{aligned} F(z+h) &= \int_{\gamma+\sigma} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw + \int_{\sigma} f(w)dw \\ &= F(z) + \int_{\sigma} f(w)dw \end{aligned}$$

Então

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w)dw$$

Por outro lado,

$$\int_{\sigma} dw = \int_0^1 \sigma^1(t)dt = h$$

e daí temos

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w)dw - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{\sigma} f(w)dw - hf(z) \right] = \frac{1}{h} \left[\int_{\sigma} f(w)dw - f(z) \int_{\sigma} dw \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{\sigma} f(w)dw - \int_{\sigma} f(z)dw \right] = \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \end{aligned}$$

Como f é contínua dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|w - z| < \delta$ então $|f(w) - f(z)| < \epsilon$. Logo tomando $\bar{\delta} = \min\{r, \delta\}$ e se $h < \bar{\delta}$, temos $|f(w) - f(z)| < \epsilon$, assim dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} h < \bar{\delta} \Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \right| \leq \\ &\int_{\sigma} \frac{|f(w) - f(z)|}{|h|} |dw| < \frac{\epsilon}{|h|} \int_{\sigma} |dw| = \frac{\epsilon}{|h|} |h| = \epsilon \end{aligned}$$

Então $F'(z) = f(z)$. □

Nosso objetivo é mostrar com os próximos resultados que se $G \subset \mathbb{C}$ é um domínio simplesmente conexo e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, então existe uma representação de f ao longo de caminhos fechados contidos em G .

Teorema 1.31. Fórmula Integral de Cauchy : *Sejam $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio simplesmente conexo G e γ um caminho fechado qualquer contido em G . Para*

todo z no interior da região delimitada por γ , tem-se :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

Obs 1.32. A expressão 1.31 é denominada fórmula integral de Cauchy.

Demonstração. De fato, sendo G aberto, para cada z no interior de γ existe um disco fechado de centro z e raio $\rho > 0$ contido no interior de γ . Seja Γ a fronteira deste disco e suponhamos que γ e Γ sejam caminhos orientados no mesmo sentido. A função $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ é holomorfa em $G - I(\Gamma)$ (G menos o interior de Γ). Como anteriormente temos

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Considere uma representação paramétrica de Γ é dada por $\xi = z + \rho e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\xi + \rho e^{it}) dt$$

da qual obtem-se

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi + \rho e^{it}) - f(z)| dt$$

Sendo f contínua em G , por ser holomorfa, segue-se que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $|f(\xi + \rho e^{it}) - f(z)| < \epsilon$ para todo $\rho < \delta$. Resulta que a fórmula anterior implica na fórmula integral de Cauchy.

Como f é holomorfa em G e como $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua segue que

$$z \mapsto \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

é uma função contínua em $(G - \gamma)$. □

Observemos que a fórmula integral de Cauchy, nos diz que se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa no domínio simplesmente conexo G , então o seu valor $f(z)$ em todo z no interior da região delimitada por um caminho fechado γ qualquer contido em G , é obtido através do conhecimento de f sobre γ .

Teorema 1.33. *Seja $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, com G um domínio, então f é analítica, ou seja, dado $a \in G$, existe $B_r(a) \subset G$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n \quad \forall z \in B_r(a).$$

Demonstração. Dado $a \in G, \exists R > 0$ tal que $B_R(a) \subset G$. Considere r tal que $0 < r < R$, daí $B_r(a) \subset B_R(a)$ e f é holomorfa em $\overline{B_r(a)}$. Logo pela fórmula integral de Cauchy temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z}, \quad \gamma = \partial B_r(a) \quad \forall r \in B_r(a)$$

Agora perceba que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{(w-a)} \left(\frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \right)$$

Como $(z-a) < r$ e $|w-a|=r$ temos $|\frac{z-a}{w-a}| < 1$, assim

$$\frac{1}{w-a} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \quad \forall z \in B_r(a),$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \quad \forall z \in B_r(a)$$

daí

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Portanto f é analítica □

Obs 1.34. O teorema 1.26, junto com o teorema anterior nos diz que f é analítica, se e somente se, f é holomorfa .

Os seguintes resultados podem ser consultados em detalhes em [5] [12] [14].

Teorema 1.35. *Seja $f : (G - \gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

com φ contínua e holomorfa em $(G - \gamma)$, então a derivada é dada da seguinte forma

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}$$

Corolário 1.36. *Nas condições do teorema anterior, a função f definida por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

possui derivadas de todas as ordens, sendo a derivada de ordem n dada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

para todo $z \in (G - \gamma)$.

Teorema 1.37. (Teorema de Morera) *Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua no domínio simplesmente conexo G . Se*

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0$$

para todo caminho fechado contido em G , segue-se que f é holomorfa em G .

Demonstração. Como $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para todo caminho contido em G , temos que se $z_0 \in G$, a integral

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = 0$$

depende somente de z . daí

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = 0$$

está definida em G e é derivável, com $\varphi'(z) = f(z)$. Portanto, f é igual a derivada de uma função holomorfa, φ , logo holomorfa, e segue o teorema. \square

Teorema 1.38. (Teorema de Liouville) *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em todo \mathbb{C} . Se existe $K \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq K$ então f é constante.*

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} e $D(0, \rho)$ um disco aberto com centro na origem contendo z_0 em seu interior. Representamos por γ a fronteira de $D(0, \rho)$. Sendo

f holomorfa em \mathbb{C} ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0}$$

pela fórmula integral de Cauchy. Tem-se também,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi}$$

Assim,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|z_0| |f(\xi)| |d\xi|}{|\xi - z_0| |\xi|}$$

Como f é limitada em \mathbb{C} , existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| < K$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Consequentemente,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K |z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|d\xi|}{|\xi - z_0| |\xi|}$$

temos que $\xi \in \gamma$, logo $|\xi - z_0| \geq \rho - |z_0|$, portanto

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K |z_0|}{(\rho - |z_0|)}.$$

Sendo $K, |z_0|$ números independentes de ρ . Fazendo $\rho \rightarrow \infty$ na expressão anterior temos que para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = f(0)$ o que mostra que f é constante em \mathbb{C} . \square

Teorema 1.39. (Teorema do Módulo Máximo) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto conexo. Suponhamos que exista $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z numa vizinhança de z_0 . Então f é constante em U .*

Demonstração. Seja $z_0 \in U$, e suponhamos que $|f(z)| = |f(z_0)| e^{i\theta_0}$. Consideremos a função $g(z) = e^{-i\theta_0} f(z)$. Temos $|g(z)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = |g(z_0)|$ para todo z numa vizinhança de z_0 . Escrevamos $g(z) = u(z) + iv(z)$, onde $u = \text{Reg}$ e $v = \text{Img}$. Como $g(z_0) \in \mathbb{R}$ (pois $g(z_0) = e^{-i\theta_0} f(z_0) = e^{-i\theta_0} e^{i\theta_0} |f(z_0)|$), temos $u(z_0) = |f(z_0)|$ e $v(z_0) = 0$. Agora seja $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset U \subset \mathbb{C}$ e tomemos $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$. Pela fórmula integral de Cauchy podemos escrever

$$\begin{aligned} u(z_0) = g(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Igualando as partes reais, obtemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Afirmção : A hipótese do teorema e a igualdade acima implica que

$$u(z_0) = u(z_0 + re^{i\theta}) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

De fato, seja $h(\theta) = u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})$. Assim temos

$$u(z) \leq |u(z)| \leq |g(z)| \leq g(z) = u(z) \quad \forall z \in U$$

Obtemos que $h(\theta) \leq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Note que se $h(\theta_1) > 0$ para algum $\theta_1 \in [0, 2\pi]$, então teríamos $h(\theta) > 0$ para θ em um intervalo contendo θ_1 , pois h é contínua. O que implica

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})) d\theta \\ &= u(z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

o que gera uma contradição com a igualdade 1.1. Concluimos que $u(z_0 + re^{i\theta}) = u(z_0)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ e todo $r > 0$ tal que $D(r, z_0) \subset U \subset \mathbb{C}$. Daí obtemos que u é uma constante em um disco aberto $D \subset \mathbb{C}$, com centro em z_0 . Por outro lado as relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Portanto v é também constante em D , ou seja, $g = u + iv$ é constante em D . Como $f(z) = e^{i\theta_0} g(z)$, concluimos que f também é constante em D , logo constante em U , uma vez que U é conexo e f é analítica. \square

Corolário 1.40. *Seja G um domínio limitado de \mathbb{C} . Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em G e contínua no fecho \bar{G} . O máximo de $|f|$ é assumido em um ponto da fronteira de ∂G .*

Demonstração. Suponhamos que $|f|$ assume máximo no interior de G , digamos em $a \in \text{int}G$, assim

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

e assim temos

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(a)| d\theta = |f(a)|$$

Portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta = |f(a)|$$

e como

$$0 \leq |f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$$

daí

$$f(a + re^{i\theta}) = f(a) \quad \forall r \in [0, 2\pi]$$

Como $|f|$ é contínua, então temos que f é localmente constante, e do fato de G ser conexo e f contínua segue que f é constante, o que é um absurdo, logo o máximo de f não pode ocorrer no interior de G . \square

Suponha f holomorfa e com um zero de ordem m sobre $z = a$. Assim $f(z) = (z - a)^m g(z)$, onde $g(a) \neq 0$. Daí

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e g'/g é holomorfa sobre $z = a$, uma vez que $g(a) \neq 0$. Agora suponha que f tenha pólo de ordem m sobre $z = a$, isto é, $f(z) = (z - a)^{-m} g(z)$, onde g é holomorfa e $g(a) \neq 0$. Daí

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e g'/g é holomorfa sobre $z = a$.

Definição 1.41. Se γ é uma curva fechada retificável em \mathbb{C} , então

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

é denominado índice de γ com respeito ao ponto a . Deste modo $n(\gamma; a)$ é o número de voltas que se dá sob γ torno de a .

Teorema 1.42. Seja f meromorfa em um aberto G com pólos p_1, p_2, \dots, p_m e zeros z_1, z_2, \dots, z_n contando a multiplicidade. Se γ é uma curva retificável homotópica a zero e não passando por p_1, p_2, \dots, p_m e tampouco por z_1, z_2, \dots, z_n , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, p_j)$$

Teorema 1.43. (Teorema de Rouché.) Suponha f e g meromorfa em uma vizinhança de $B(a, R)$, sem zeros ou pólos no círculo $\gamma = \{z : |z - a| = R\}$. Se $Z_f, Z_g(P_f, P_g)$ são os números de zero (pólos) de f e g dentro γ e contando suas multiplicidades e se

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

sobre γ então

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

As demonstrações dos teoremas 1.42 e 1.43 podem ser encontradas na referência [5].

Capítulo 2

Conjuntos de Julia e de Fatou

2.1 Noções de Dinâmica Complexa

Nesta seção apresentaremos alguns resultados gerais de dinâmica complexa.

Definição 2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f : S \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S \subset \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação, onde $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a esfera de Riemann. Definimos a n -ésima iterada de f como a composição de f n -vezes consigo mesma*

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f.$$

Definição 2.2. *Um ponto w é um ponto periódico de uma aplicação f se ele é um ponto fixo de alguma iterada f^m , ou seja, $f^m(w) = w$.*

Definição 2.3. *Considere a órbita periódica:*

$$f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_{m-1} \mapsto z_m = z_0$$

para uma aplicação holomorfa $f : S \rightarrow S$. Se os pontos z_1, \dots, z_{m-1}, z_m são todos distintos então o inteiro $m \geq 1$ é chamado período.

Definição 2.4. *Dado um ponto a e uma função f contínua, o conjunto de pontos $\{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \dots\}$ é denominado a órbita positiva de a e é denotado por $\mathcal{O}^+(f) = \{f^k(a); k \geq 0\}$. Se f é inversível, o conjunto de pontos $\{a, f^{-1}(a), f^{-2}(a), f^{-3}(a), \dots\}$ é denominado a órbita negativa de a e é denotada por $\mathcal{O}^-(f) = \{f^k(a); k \leq 0\}$. Além disso a órbita positiva de a , $\mathcal{O}^+(f)$, é chamada órbita periódica quando a é um ponto periódico de período n*

Definição 2.5. *Um ponto z_0 é pré-periódico, de período n , se z_0 não é periódico, mas existe um $n > 0$ tal que $f^{n+i}(z_0) = f^i(z_0)$, com $i > 0$, ou seja, $f^i(z_0)$ é periódico para $i > 0$, com i inteiro positivo.*

Definição 2.6. *Suponha z_0 um ponto periódico de período m , de uma função holomorfa f , isto é, $f^m(z_0) = z_0$, para algum $m \in \mathbb{N}$. O número $\lambda = (f^m)'(z_0) = f'(z_1)f'(z_2)\dots f'(z_m)$ é chamado multiplicador de f em z_0 , onde $z_i = f^i(z_0)$. O ponto periódico z_0 é classificado da seguinte forma:*

- z_0 é super-atrator se $|\lambda| = 0$;

- z_0 é atrator se $0 < |\lambda| < 1$;
- z_0 é repulsor se $|\lambda| > 1$;
- z_0 é indiferente se $|\lambda| = 1$.

Exemplo 2.7. Se $f(z) = z^2$ então f tem três pontos fixos, a saber: zero, a unidade e o infinito. Assim os multiplicadores são:

- $\lambda = |f'(0)| = 2 \cdot 0 = 0$, portanto 0 superatrator;
- $\lambda = |f'(1)| = 2 \cdot 1 = 2$, portanto 1 é repulsor;
- $\lambda = |f'(\infty)| = 2 \cdot \infty = \infty$, mas nesse caso especial ∞ é atrator, e não repulsor. De fato, a definição anterior dever ser vista com cautela no caso em que o ponto no infinito é periódico sobre uma aplicação racional, $f^m(\infty) = \infty$. Neste caso o multiplicador λ não é igual ao limite de $z \mapsto \infty$ da derivada de $f^m(z)$, mas o inverso deste número. Detalhes podem ser vistos na referência [13], página 45.

A seguir enunciaremos o teorema de linearização provado, por G. Koenigs em 1884, que nos dá uma forma de estudar o comportamento de uma função f qualquer a partir de uma aplicação conforme, ver a referência [4], página 31.

Teorema 2.8. Suponha que f tem um ponto fixo atrator em z_0 , com multiplicador λ satisfazendo $0 < |\lambda| < 1$. Então existe uma aplicação conforme $\xi = \varphi(z)$ de uma vizinhança de z_0 sobre uma vizinhança de 0 que conjuga $f(z)$ com a função linear $g(\xi) = \lambda\xi$. A conjugação é única, a menos de multiplicação por um fator constante não nulo.

Demonstração. Suponhamos $z_0 = 0$. Definamos $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z + b_{n+1} z^{n+1} \dots$, então φ_n satisfaz

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}$$

Assim se, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ então $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ e temos que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\xi$ e φ é uma conjugação. Mostaremos a convergência citada acima, ou seja, que $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Note que para $\delta > 0$ pequeno, temos

$$|f(z) - \lambda z| \leq C |z|^2, \quad |z| \leq \delta \text{ e } C > 0 \text{ constante.}$$

Assim

$$|f(z)| \leq |\lambda| |z| + C |z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta) |z|,$$

e por indução com $|\lambda| + C\delta < 1$,

$$|f^n(z)| \leq (\lambda + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Tome δ pequeno de forma que se $\rho = \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{\lambda} < 1$, obtemos

$$|\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C |f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C |z|^2}{\lambda}$$

para $|z| \leq \delta$. Desta forma $\varphi^n(z)$ converge uniformemente para $|z| \leq \delta$, e existe a conjugação.

Para provarmos a unicidade é suficiente mostrarmos que alguma conjugação de $f(z) = \lambda z$ sobre si mesma é uma constante multiplicada por z . De fato, suponhamos que $\varphi(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$ seja tal conjugação, então $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$. Fazendo as substituições temos $a_n\lambda^n = \lambda a_n$, daí obtemos que $a_n = 0$ se $n \geq 2$, portanto $\varphi(z) = a_1z$. \square

Definição 2.9. Um ponto periódico z_0 é chamado parabólico se o módulo do multiplicador λ em z_0 é igual a 1, desde que f^m não seja a aplicação identidade. Mais geralmente, se λ é uma raiz da unidade nenhuma iterada de f é a aplicação identidade.

Definição 2.10. Se \mathcal{O} é uma órbita periódica atratora de período m , definimos a bacia de atração dessa órbita como sendo o conjunto aberto $\mathcal{A} \subset S$ consistindo de todos os pontos $z \in S$ para os quais as sucessivas iteradas $f^m(z), f^{2m}(z), \dots$, convergem para algum ponto de \mathcal{O} .

2.2 Conjuntos de Fatou e Julia

Para estudarmos os conjuntos de Julia e de fatou precisamos primeiramente da definição de família normal.

Definição 2.11. Uma família \mathcal{F} de aplicações de um espaço métrico (X, d) sobre um espaço métrico (X_1, d_1) é equicontínua em x_0 se, e somente se, para todo ϵ positivo existe δ positivo tal que para todo x em X e para toda f em \mathcal{F}

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_1(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

A família \mathcal{F} é equicontínua em um subconjunto X_0 de X se é equicontínua em cada x_0 de X_0 .

Denotamos por $\mathcal{C}(U, V)$ como o conjunto de todas as aplicações contínuas de U em V , onde U e V são subconjuntos de \mathbb{C} .

Definição 2.12. Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, V)$ é normal se cada sequência em \mathcal{F} possui uma subsequência que ou converge uniformemente em cada compacto $K \subset U$ para f em $\mathcal{C}(U, V)$. Ou diverge localmente uniformemente de V , isto é, se para todo compacto $K \subset U$ e $K' \subset V$, tem-se $f_n(K) \cap K' = \emptyset$, para n suficientemente grande.

Teorema 2.13. (Teorema de Arzela-Ascoli) Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, V)$ é normal se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas :

- (i) Para cada $z \in U$, $\{f(z); f \in \mathcal{F}\}$ tem fecho compacto em V ;
- (ii) \mathcal{F} é equicontínua em cada ponto de U .

A demonstração com todos os detalhes pode ser encontrada em [5], página 148.

Teorema 2.14. Uma família \mathcal{F} de funções holomorfas em um domínio D limitada por alguma constante fixa é normal.

Demonstração. Pelo Teorema de Àrzela-Ascoli é suficiente provarmos a equicontinuidade dessa família. Seja C a fronteira de um disco fechado de raio r contido em D . Desta forma dado $\epsilon > 0$ tome $\delta < \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\epsilon r}{4M} \right\}$, onde M é uma constante fixa positiva. Se z, z_0 estão no interior de C , pela fórmula Integral de Cauchy temos

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)} d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{(\xi-z)} - \frac{1}{(\xi-z_0)} \right) f(\xi) d\xi = \frac{z-z_0}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)} d\xi.$$

Suponha que M seja a constante fixa que limita cada função $f \in \mathcal{F}$, isto é, $|f| \leq M$ em C . Se restringimos z e z_0 ao disco concêntrico menor de raio $\frac{r}{2}$, segue-se que

$$|f(z) - f(z_0)| = \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_C \frac{|f(\xi)|}{|(\xi-z)||(\xi-z_0)|} |d\xi|$$

$$\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \frac{4M}{r^2} \int_C |d\xi| = \frac{|z-z_0|}{2\pi} \frac{4M}{r^2} (2\pi r) = \frac{4M|z-z_0|}{r}$$

Logo

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{4M |z - z_0|}{r} < \epsilon.$$

e portanto a família é equicontínua. E por decorrência do Teorema de Àrzela-Ascoli é normal. \square

Definição 2.15. *Sejam R e S superfícies de Riemann. A aplicação holomorfa $P : R \rightarrow S$ é uma aplicação cobertura, se todo $w \in S$ está em algum disco coordenado U tal que cada componente conexa de $P^{-1}(U)$ é levada de maneira conforme por P em U . Definimos ainda S^∞ como a cobertura universal de S obtida por S em relação a todos os loops ao redor dos pontos não triviais de fronteira U .*

Teorema 2.16. (Teorema da Aplicação de Riemann) : *Se U um domínio simplesmente conexo em $\widehat{\mathbb{C}}$, cuja fronteira contém pelo menos dois pontos, existe uma aplicação conforme ψ do disco unitário aberto D para U . Podemos levar 0 em qualquer ponto fixo de U , por argumentos específicos sobre $\psi'(0)$ e então a aplicação de Riemann é única.*

Demonstração. Veja [1] página 229 \square

Lema 2.17. *Se $M = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$ é a esfera perfurada três vezes, então M^∞ é conformalmente equivalente ao disco unitário D .*

Demonstração. Como D é conformalmente equivalente à parte superior do plano $H = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(z) > 0\}$, é suficiente encontrar uma aplicação cobertura de H sobre M . Seja $E = \{z : 0 < \text{Re}(z) < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$. Então pelo teorema da aplicação de Riemann existe uma aplicação ψ de E para H fixando $0, 1, \infty$. Denote E^* a reflexão de E sobre o círculo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Pelo princípio de reflexão de Schwarz, extendemos ψ para uma aplicação conforme de $E \cup E^*$ para $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Extendendo ψ a todos

$\{0 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) > 0\}$ tomando os valores em $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$. Por reflexão das linhas verticais $\{\text{Re}(z) = n\}$ para n inteiro, extendemos ψ para todo H . Por construção temos que ψ é uma aplicação cobertura de H sobre M . \square

Teorema 2.18. (Teorema de Montel) *Seja U um domínio em $\widehat{\mathbb{C}}$ e \mathcal{F} uma família de aplicações de U para $\widehat{\mathbb{C}}$ que omite três diferentes valores. Isto é, existem valores distintos a, b, c em $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f(U) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ para toda f em \mathcal{F} . Então, a família \mathcal{F} é normal.*

Demonstração. Vamos assumir que U é um disco. Por composição com uma transformação de Möbius, assumimos que as funções f em \mathcal{F} não assumem os valores $0, 1, \infty$. Seja $S = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$. Pelo lema anterior, existe uma aplicação cobertura $\psi : D \rightarrow S$. Seja $\tilde{f} : U \rightarrow D$ um levantamento para f em \mathcal{F} , tal que $\psi \circ \tilde{f} = f$. Então pelo teorema 2.14 $\{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}\}$ é uma família normal. Deste modo \mathcal{F} é normal. \square

Definição 2.19. *Seja $\widehat{\mathbb{C}}$ a esfera de Riemann, que é uma superfície de Riemann compacta, e $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa e $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ a n -ésima iterada. O domínio de normalidade da coleção de iteradas f^n é chamado Conjunto de Fatou para f . O seu complementar é chamado de Conjunto de Julia.*

Notação : Usaremos $J(f)$ para conjunto de Julia e $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ ou $F(f)$ para o conjunto de Fatou.

Exemplo 2.20. *Considere $f(z) = z^2$, então $f^n(z) = z^{2^n}$. Como f^n converge para 0 em $\{|z| < 1\}$ e converge para ∞ em $\{|z| > 1\}$ o Conjunto de Julia de f é o círculo unitário $\{|z| = 1\}$, e seu complementar $F(f)$ é o conjunto de Fatou.*



Figura 2.1: Conjunto de Julia de $f(z) = z^2$

Exemplo 2.21. *Considere $f(z) = z^2 + 0.55i + 0.2$, então a figura abaixo representa o conjunto de Julia de f .*

Definição 2.22. *Seja $P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ um polinômio complexo mônico de grau $d \geq 2$. O Conjunto de Julia Cheio de P é definido por*

$$K(P) = \{z : P^n(z) \not\rightarrow \infty\}$$

Obs 2.23. *Com a definição de conjunto de Julia Cheio e com a definição do conjunto de Julia, observamos que o conjunto de Julia é o bordo topológico do conjunto de Julia Cheio.*

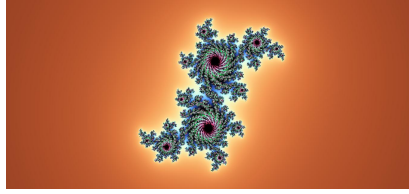


Figura 2.2: Conjunto de Julia de $f(z) = z^2 + 0.55i + 0.2$

Exemplo 2.24. Para o polinômio $P_0(z) = z^d$ o conjunto de Julia Cheio $K(P_0)$ é o disco unitário fechado, e o conjunto de Julia $J(P_0)$ é o círculo unitário.

De fato, como $P_0(z) = z^d$, então $P_0^n(z) = z^{d^n}$. Assim $P_0^n(z)$ converge para 0 em $\{|z| < 1\}$ e converge para ∞ em $\{|z| > 1\}$, portanto o Conjunto de Julia Cheio é o conjunto $\{z : |z| \leq 1\}$, e o conjunto de Julia é o círculo unitário $\{|z| = 1\}$.

Exemplo 2.25. Considere os polinômios de **Tchebychev** T_k definidos pela seguinte forma de recorrência

$$T_{k+1} = zT_k(z) - T_{k-1}(z), k = 1, 2, \dots$$

e $T_0(z) = 2, T_1(z) = z$, daí segue que

$$\begin{aligned} T_2(z) &= z^2 - 2 \\ T_3(z) &= z^3 - 3z \\ T_4(z) &= z^4 - 4z^2 + 2 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

O conjunto de Julia Cheio $K(T_k)$ é o intervalo $[-2, 2]$. Desta forma $K(T_k) = J(T_k)$, e daí o conjunto de Julia Cheio tem interior vazio ver referência (veja [3])

Definição 2.26. O *Connectedness Locus* M_n de uma família de polinômios de grau n consiste de todos os parâmetros c , tais que o conjunto de Julia cheio de $P_c(z)$ é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico de $P_c(z)$ é limitada.

Obs 2.27. A demonstração da equivalência da definição acima encontra-se na referência [7] nas páginas 313 e 314.

No próximo exemplo apresentaremos o Connectedness Locus de algumas famílias de polinômios

Exemplo 2.28. Considere $P_c(z) = z^n + c$, então o *Connectedness Locus* é o conjunto representado como na figura abaixo:

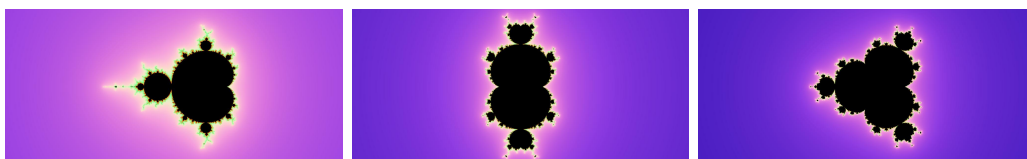


Figura 2.3: Connectedness Locus para $n = 2, n = 3$ e $n = 4$, respectivamente.

2.3 Propriedades dos Conjuntos de Fatou e Julia

Nesta seção apresentaremos uma série de propriedades dos conjuntos de Fatou e de Julia, com o objetivo de compreender o comportamento dinâmico de uma aplicação holomorfa. Porém, antes de apresentar tais propriedades dos Conjuntos de Fatou e Julia, precisamos do seguinte teorema que pode ser encontrado em ([13])

Teorema 2.29. *Seja $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ uma função racional, onde P e Q não possuem raízes comuns. Coloque $k = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$. Valem as seguintes propriedades*

- i) *Para todo $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ a equação $f(z) = z_0$ possui k soluções, contadas com multiplicidade;*
- ii) *Existe um subconjunto finito $C(f) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ com no máximo $2k - 2$ elementos, tal que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus C(f) = \{z_0 : f(z) = z_0 \text{ possui } k \text{ soluções distintas}\}$;*
- iii) *O conjunto $C(f)$ é vazio se, e somente se, $k = 1$.*

Assim k é o grau de f e $C(f)$ é o conjunto de valores críticos de f , além disso um ponto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus C(f)$ é chamado valor regular de f .

E agora de posse do resultado acima seguem algumas propriedades dos conjuntos de Fatou e Julia

Teorema 2.30. (Lema da invariância) : *O conjunto de Julia $J(f)$ de uma aplicação holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é completamente invariante sobre f . Isto é, z pertence a $J(f)$ se, e somente se, $f(z)$ pertence a $J(f)$. O mesmo vale para o conjunto de Fatou.*

Demonstração. Primeiramente note que $f^{-1}(F(f)) \subseteq F(f)$, pois f é holomorfa e $F(f)$ é aberto. Agora suponha que $z_0 \in F(f)$, e que uma subsequencia $f^{n_j+1} = f^{n_j} \circ f$ converge uniformemente em uma vizinhança de z_0 . Como f é analítica, ela aplica uma vizinhança de z_0 em uma vizinhança de $f(z_0)$. E além disso, f^{n_j} converge uniformemente em uma vizinhança de $f(z_0)$, pois $z_0 \in F(f)$. Segue que $f(z_0) \in F(f)$, e daí $f(F) \subseteq F$, portanto F é completamente invariante. Como $\widehat{\mathbb{C}} = F(f) \cup J(f)$. tem-se que $J(f)$ também é completamente invariante. \square

Lema 2.31. (Lema da Iteração) *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa . Para todo $k > 0$, o Conjunto de Julia $J(f^k)$ da k -ésima iterada coincide com o Conjunto de Julia $J(f)$.*

Demonstração. O conjunto de Julia de f coincide com o conjunto de Julia de f^k , pois se f^k é normal sobre um conjunto aberto U então f^{nk} também é normal sobre U . Por outro lado se f^{nk} é normal sobre U então f^k também é normal sobre U , e daí segue o resultado. \square

Lema 2.32. *Cada órbita periódica atratora está contida no Conjunto de Fatou $F(f)$. De fato, toda bacia de atração A para uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou. Além disso, cada órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia.*

Demonstração. Primeiro considere um ponto fixo z_0 com multiplicador λ . Se $|\lambda| > 1$, então nenhuma sequência de iteradas de f pode convergir uniformemente próximo de z_0 . Como a primeira derivada de f^n em z_0 é λ^n , temos que f tende ao infinito quando $n \rightarrow \infty$. Se $|\lambda| < 1$ e escolhendo c tal que $|\lambda| < c < 1$ temos pela expansão de Taylor que

$$|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|,$$

para z suficientemente próximo de z_0 . Desta forma as sucessivas iteradas de f restritas a uma vizinhança de z_0 convergem uniformemente para a função constante $z \rightarrow z_0$. Portanto como um ponto periódico de f é um ponto fixo de alguma iteração f^n segue o resultado. \square

Corolário 2.33. *As órbitas periódicas repulsoras são densas no Conjunto de Julia.*

Demonstração. Vale lembrar que o conjunto de Julia $J(f)$ não possui pontos isolados. Assim podemos excluir um quantos pontos de $J(f)$ quisermos, sem afetar o argumento. Seja z_0 um ponto qualquer de $J(f)$ que não seja ponto fixo nem valor crítico. Por outras palavras assumimos que existem d pré-imagens z_1, z_2, \dots, z_d que são distintas umas das outras e de z_0 , onde $d \geq 2$ é o grau de f . Pelo Teorema da Função Inversa, podemos encontrar d funções holomorfas $z \rightarrow \phi_j(z)$ que são definidas em alguma vizinhança N de z_0 , e que satisfazem $f(\phi_j(z)) = z$, em que $\phi_j(z_0) = z_j$. Para algum $n > 0$ e para algum $z \in N$ a função $f^n(z)$ deve assumir um dos três valores $z, \phi_1(z)$ ou $\phi_2(z)$. Caso contrário a família das funções holomorfas

$$g_n(z) = \frac{(f^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z))}{(f^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z))}$$

em N evitaria os valores 0, 1 e ∞ , e assim seria uma família normal. Logo $\{f^n|N\}$ também seria uma família normal, contradizendo a hipótese de que N intersepta o conjunto de Julia. \square

Lema 2.34. *Cada ponto periódico parabólico pertence ao Conjunto de Julia.*

Demonstração. Seja w um parâmetro local de uniformização com $w = 0$ correspondendo ao ponto periódico. Assim, alguma iterada f^n corresponde a uma transformação local do w -plano com uma série de potências da forma $w \rightarrow w + a_q w^q + a_{q+1} w^{q+1} + \dots$, onde $q \leq 2$, $a_q \neq 0$. Daí a derivada de ordem q de f^{mk} em 0 é igual a $q! k a_q$ que tende a infinito a medida que $k \rightarrow \infty$. Pelo Teorema da Convergência Uniforme de Weierstrass, segue que nenhuma subsequência de f^{mk_j} pode convergir localmente de forma uniforme a medida que $k_j \rightarrow \infty$. \square

Antes de apresentarmos o próximo teorema precisamos da definição de grande órbita

Definição 2.35. *Chamamos grande órbita de um ponto z sob $f : S \rightarrow S$, ao conjunto $GO(z, f)$ consistindo de todos os pontos $z' \in S$ cuja órbita em algum momento intercepta*

a órbita de z . Assim z e z' tem a mesma grande órbita se, e somente se, $f^m(z) = f^n(z')$ para alguma escolha de $m \geq 0$ e $n \geq 0$. Um ponto $z \in S$ será chamado grande órbita finita ou excepcional sobre f se sua grande órbita $GO(z, f) \subset S$ é um conjunto finito.

Definição 2.36. O conjunto dos pontos de $\widehat{\mathbb{C}}$ que tem grande órbita finita será denotado por $\varepsilon(f)$

Teorema 2.37. (Transitividade) Seja z_1 um ponto arbitrário do conjunto de Julia $J \subset \widehat{\mathbb{C}}$ e seja N uma vizinhança arbitrária de z_1 . Então a união U de imagens futuras $f^n(N)$ contém todo o conjunto de Julia, e contém todos os pontos de $\widehat{\mathbb{C}}$; à exceção de, no máximo dois pontos

Demonstração. Primeiramente note que o conjunto complementar $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ pode conter no máximo dois pontos, pois se $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ contém mais de dois pontos, usando que $f(U) \subset U$, obtemos pelo Teorema de Montel 2.2 que U deve estar contido no conjunto de Fatou, que é impossível, pois $z_1 \in U \cap J$. Novamente usando que $f(U) \subset U$, temos que alguma pré-imagem de um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ deve pertencer ao conjunto finito $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Seguindo com este argumento, que alguma pré-imagem de iterada z é periódica, concluímos que z é ele mesmo periódico e com grande órbita finita. Assim o conjunto $\varepsilon(f)$ de grande órbita finita é disjunta de J , segue que $J \subset U$. Finalmente, se N é pequeno o suficiente então $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$, segue que $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$. \square

Lema 2.38. Se f é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então o Conjunto de Julia $J(f)$ é não vazio.

Demonstração. Suponha que $J(f) = \emptyset$, então f^n é uma família normal sobre todo $\widehat{\mathbb{C}}$, e então existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $f^{n_j}(z) \rightarrow g(z)$ para alguma função analítica g de $\widehat{\mathbb{C}}$ para $\widehat{\mathbb{C}}$. Se g é constante então a imagem de f^{n_j} está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, o que é impossível, pois f^n converge em $\widehat{\mathbb{C}}$. Se g é não constante então f^{n_j} tem o mesmo número de zeros de g , o que é impossível já que f^n tem grau d^n . \square

Corolário 2.39. Se o Conjunto de Julia contém um ponto interior, então ele deve ser igual a toda a esfera de Riemann.

Demonstração. Se $J(f)$ tem um ponto interior z_1 , então escolhendo uma vizinhança $N \subset J(f)$ de z_1 a união $U \subset J(f)$ de imagens futuras de N é densa em $J(f)$, portanto $\overline{U} = \widehat{\mathbb{C}}$, e como $J(f)$ é fechado segue que $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$. \square

Corolário 2.40. Se $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é a bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, então o bordo topológico $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$ é igual a todo o Conjunto de Julia. Cada componente do Conjunto de Fatou F ou coincide com alguma componente conexa da bacia \mathcal{A} ou é disjunta de \mathcal{A} .

Demonstração. Se N é uma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia, então pelo teorema da transitividade 2.3 $f^n(N)$ intercepta \mathcal{A} , e daí o próprio N intercepta \mathcal{A} , e assim temos que $J(f) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Mas $J(f)$ é disjunta de \mathcal{A} então $J(f) \subset \partial\mathcal{A}$. Por outro lado, se N é uma vizinhança de um ponto de $\partial\mathcal{A}$ então alguma iterada $f^n|_N$ deve

ter uma descontinuidade entre \mathcal{A} e $\partial\mathcal{A}$, e assim $\partial\mathcal{A} \subset J(f)$. Finalmente, note que alguma componente conexa do conjunto de Fatou intercepta \mathcal{A} , uma vez que não pode interceptar o bordo de \mathcal{A} , deve coincidir com alguma componente de \mathcal{A} . Portanto segue o resultado. \square

Corolário 2.41. *Se z_0 é um algum ponto do conjunto de Julia $J = J(f)$, então o conjunto*

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}}; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z_0)$$

é denso em $J(f)$.

Demonstração. Primeiramente note que $z_0 \notin \varepsilon(f)$, pois $z_0 \in J(f)$. Pelo teorema 2.3 temos que, se $z_1 \in J(f)$ então ele pode ser aproximado por fechados arbitrários que contém z que pertence ao conjunto formado pelas órbitas passadas de z_0 . \square

Corolário 2.42. *Se f é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então $J(f)$ não tem pontos isolados.*

Demonstração. Seja $z_0 \in J(f)$ e U uma vizinhança aberta de z_0 . Assumiremos que z_0 não é periódico e escolhemos z_1 com $f(z_1) = z_0$, então $f^n(z_0) \neq z_1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Desde que $z_1 \in J(f)$, as iteradas passadas de z_1 são densas em J , então existe um $\xi \in U$ com $f^n(\xi) = z_1$, assim $\xi \in J(f) \cap U$ e $\xi \neq z_0$, logo z_0 não é isolado. Agora suponha $f^n(z_0) = z_0$ para algum n minimal. Se z_0 é a única solução de $f^n(z_0) = z_0$ então z_0 deveria ser um ponto fixo superatrator de f^n contradizendo que $z_0 \in J(f)$. Portanto existe $z_1 \neq z_0$ com $f^n(z_1) = z_0$, além disso $f^j(z_0) \neq z_1$ para $0 \leq j \leq n$, pois caso contrário isto asseguraria que $0 \leq j \leq n$ e daí $f^j(z_0) = f^{n+j}(z_0) = f^n(z_1) = z_0$ contradizendo a minimalidade de n . Assim como anteriormente, z_1 dever ter uma pré-imagem em $U \cap J(f)$ que não pode ser z_0 . \square

Corolário 2.43. *Para toda aplicação racional de grau 2 ou mais, o Conjunto de Julia $J(f)$ ou é conexo ou tem uma quantidade não enumerável de componentes conexas.*

Teorema 2.44. *Para uma escolha qualquer de um ponto $z \in J(f)$, a órbita futura*

$$\{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

é densa em $J(f)$.

Demonstração. Para cada $j > 0$ podemos cobrir $J(f)$ por um número finito de conjuntos abertos N_{j_k} de diâmetro menor do que $\frac{1}{j}$ usando a métrica esférica. Para cada N_{j_k} seja U_{j_k} a união das pré-imagens de iteradas de $f^{-n}(N_{j_k})$. Segue do corolário 2.3 que o fechado $\overline{U_{j_k} \cap J(f)}$ é igual a todo o conjunto de Julia, em outras palavras, $U_{j_k} \cap J(f)$ é um subconjunto denso do conjunto de Julia. Agora se z pertence a interseção desses conjuntos, então a órbita de z intercepta cada N_{j_k} e por isso é denso em $J(f)$. \square

Teorema 2.45. *Seja f uma aplicação racional de grau maior ou igual 2, e seja E um subconjunto compacto da esfera de Riemann com a propriedade que para todo $z \in F(f)$, a sequência $\{f^n(z) : n \geq 1\}$ não acumula em nenhum ponto de E . Então dado algum conjunto aberto U que contém $J(f)$ temos que $f^{-n}(E) \subset U$ para n suficientemente grande.*

Demonstração. Suponhamos que a conclusão seja falsa, ou seja, existe alguma vizinhança aberta U de $J(f)$, tal que para n em alguma sequência $\{n_1, n_2, \dots\}$ os pontos $z_n \in f^{-n}(E)$ mas não pertence a U . Sem perda de generalidade, supomos que $z_n \rightarrow w$, como U é aberto e $w \notin U$, temos que $w \in F$ pois $J(f) \subset U$. Agora seja $\epsilon > 0$ positivo, existe $\delta > 0$ tal que se $|z_n - w| < \delta$ implica que $|f^n(z_n) - f^n(w)| < \delta$ e como $f^n(z_n) \in E$, assim mostramos que $f^n(w)$ se acumula em E contradizendo a hipótese. \square

Capítulo 3

Limites Geométricos dos Conjuntos de Mandelbrot e Julia com grau crescente

Neste capítulo consideraremos a família de polinômios

$$P_{n,c}(z) = z^n + c,$$

onde $n \geq 2$ é um inteiro e c é parâmetro complexo.

Daqui em diante usaremos $K(P_{n,c})$ e $M_n(P)$ para nos referirmos ao conjunto de Julia cheio e o conjunto de Mandelbrot respectivamente, onde $K(P_{n,c}) = \left\{ z : \left\{ P_{n,c}^m(z) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ é limitada} \right\}$ e $M_n(P_{n,c}) = \left\{ c : \left\{ P_{n,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ é limitada} \right\}$, para cada $n \geq 2$. Além disso o conjunto de Julia é o bordo topológico $J(P_{n,c}) = \partial K(P_{n,c})$.

Definição 3.1. A **Métrica de Hausdorff** $d_{\mathcal{H}}(A, B)$ para dois conjuntos A e B de um espaço métrico (X, d) é definida por

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\} = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}.$$

Assim, a distância Hausdorff entre dois conjuntos A e B pode ser considerada como a distância máxima de A à B e a distância máxima de B à A . Note que de fato $d_{\mathcal{H}}(A, B)$ é uma métrica em (X, d) .

Sejam A, B e C conjuntos distintos em (X, d) . Note que

$$i) \quad d_{\mathcal{H}}(A, A) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, A), \sup_{a \in A} d(a, A) \right\} = 0$$

Além disso $d_{\mathcal{H}}(A, B) > 0$, uma vez que $\sup_{a \in A} d(a, B) > 0$, onde $a \notin B$ e $\sup_{b \in B} d(b, A) > 0$, onde $b \notin A$.

$$ii) \quad d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

$$= \max \left\{ \sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B) \right\} = d_{\mathcal{H}}(B, A).$$

Afirmação 3.2. *Seja (X, d) espaço métrico e A, B, C subconjuntos não vazios e distintos de X . Então*

$$\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B),$$

Onde

$$\rho(A, B) = \sup \{d(a, B) : a \in A\} = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

e

$$\rho(B, A) = \sup \{d(b, A) : b \in B\} = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b).$$

Demonstração. Seja $a \in A$ e $c \in C$. Como $|d(a, B) - d(c, B)| \leq d(a, c)$ temos, $d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B)$, segue que $d(a, B)$ é uma cota inferior do conjunto $\{d(a, c) + d(c, B) : c \in C\}$. Então,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \inf \{d(a, c) + d(c, B) : c \in C\} \\ &\leq \inf \{d(a, c) : c \in C\} + \inf \{d(c, B) : c \in C\} \\ &\leq d(a, C) + \sup \{d(c, B) : c \in C\} \leq \rho(A, C) + \rho(C, B). \end{aligned}$$

Como a é arbitrário segue que $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$ □

Usando a afirmação acima temos :

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad d_{\mathcal{H}}(A, B) &= \max \{\rho(A, B), \rho(B, A)\} \\ &\leq \max \{\rho(A, C) + \rho(B, C) + \rho(C, A)\} \\ &\leq \max \{\rho(A, C) + \rho(C, A)\} + \max \{\rho(C, B) + \rho(B, C)\} \\ &= d_{\mathcal{H}}(A, C) + d_{\mathcal{H}}(C, B). \end{aligned}$$

Portanto $d_{\mathcal{H}}(A, B)$ é de fato uma métrica.

Considere o seguinte exemplo :

Exemplo 3.3. *Seja $A = S^1$ e $B = \overline{\mathbb{D}}$. Note que $d(a, \overline{\mathbb{D}}) = 0$, uma vez que $S^1 \subset \overline{\mathbb{D}}$. Note que $0 \in \overline{\mathbb{D}}$ e $d(0, S^1) = 1$, além disso para qualquer $0 \neq x \in \overline{\mathbb{D}}$ segue que $d(x, S^1) < 1$. Deste modo $d_{\mathcal{H}}(S^1, \overline{\mathbb{D}}) = 1$.*

Notação: Para qualquer $0 \leq r < R$, definimos o anel aberto de raio interno r e raio externo R por

$$\mathbb{A}(r, R) = \{z : r < |z| < R\}$$

Notação: Denotaremos a ϵ -vizinhança de um conjunto S por $\mathcal{N}_{\epsilon}(S)$, e a bola aberta de centro em z e raio ϵ por $B(z, \epsilon)$.

3.1 Resultados para a família $P_{n,c}$

Nessa seção apresentamos uma série de lemas sobre os conjuntos de Julia para associados a família $P_{n,c}(z) = z^n + c$, e então provaremos dois resultados.

Vamos distinguir os casos (1) e (2) do Teorema 3.14 pela dicotomia fundamental da dinâmica polinomial (veja [3]).

Teorema 3.4. (A Dicotomia Fundamental) *Como $P_{n,c}$ é unicrítico (possui um único ponto crítico), para qualquer n e c , ou*

- (a) *A órbita de 0 escapa, nesse caso $K(P_{n,c}) = J(P_{n,c})$ é um conjunto de Cantor, ou*
- (b) *A órbita de 0 é limitada, nesse caso $K(P_{n,c})$ é conexo.*

Caso (1). Suponha $|c| > 1$. Nós mostraremos que para n suficientemente grande, $0 \notin K(P_{n,c})$, Daí segue por (a) que $c \notin M_n$.

Caso (2). Por outro lado, suponha $|c| < 1$. Mostraremos que para n grande, $0 \in K(P_{n,c})$, daí segue por (b) que $c \in M_n$.

3.1.1 Conjuntos de Julia

Primeiro estabeleceremos metade do cálculo da distância para cada caso para $|c|$. Para isso vamos calcular a distância de cada ponto dos conjuntos de Julia e dos conjuntos de Julia cheio para S^1 ou $\overline{\mathbb{D}}$, apropriadamente em cada caso.

Note que, independentemente do valor de c , a bacia imediata de infinito do $P_{n,c}$ engloba todo o exterior do disco unitário quando $n \rightarrow \infty$:

Lema 3.5. *Para qualquer $c \in \mathbb{C}$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe $N > 2$ tal que para todo $n \geq N$, temos $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\epsilon}$.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_{1+\epsilon}$. Coloque $B > \max\{1, |c|\}$ e $N \geq 2$ tal que $|z|^N > 2B$ e $B^{N-2} > 2$. Seja $n \geq N$. Afirmamos que $|P_{n,c}^m(z)| > B^m$ para todo $m \geq 1$.

De fato, note que :

$$|P_{n,c}(z)| = |z^n + c| \geq |z|^n - |c| > 2B - B = B.$$

Agora suponha $m \geq 1$ tal que $|P_{n,c}^m(z)| > B^m$. Então

$$\begin{aligned} |P_{n,c}^{m+1}(z)| &= |(P_{n,c}^m(z))^n + c| \geq |P_{n,c}^m(z)|^n - |c| \\ &> B^{mn} - B > B^{mn-m+1} - B = B^{m+1} (B^{m(n-2)} - B^{-m}) \\ &> B^{m+1} (2^m - B^{-m}) > B^{m+1} (2^m - 1) \geq B^{m+1}. \end{aligned}$$

Portanto $|P_{n,c}^m(z)| > B^m$ para todo $m \geq 1$. Como $B > 1$, a órbita de z sobre $P_{n,c}$ escapa para o infinito, ou seja, $z \notin K(P_{n,c})$. Logo $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\epsilon}$.

□

Obs 3.6. Como $B > 1$, temos $B^{m-1} \geq 1$ e daí, $\frac{1}{B^{m-1}} \leq 1$. Portanto, $B^{mn-m+1} \leq B^{mn}$.

Lema 3.7. Seja $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e seja $\epsilon = |c| - 1$. Então, para $\eta \in (0, \epsilon]$, existe $N \geq 2$ onde $\mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}} \subset \mathbb{C} \setminus K(P_{n,c})$ para todo $n \geq N$.

Demonstração. Escolha N_1 adequado tal que para todo $n \geq N_1$, pelo Lema 3.5 $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\frac{\eta}{2}}$. Agora seja $|z| < 1 - \frac{\eta}{2}$ e coloque $N > N_1$ tal que $|z|^N < \frac{\eta}{2}$. Então para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |P_{n,c}(z)| &= |z^n + c| \geq |c| - |z|^n \\ &= 1 + \epsilon - |z|^n \geq 1 + \eta - |z|^n \\ &\geq 1 + \eta - \frac{\eta}{2} = 1 + \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

E pelo Lema 3.5, $P_{n,c}(z) \notin K(P_{n,c})$ e z também não. □

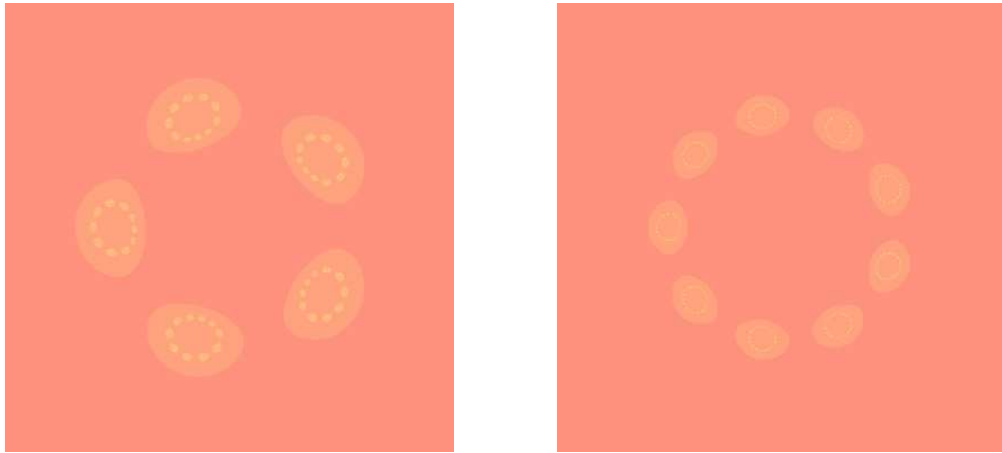


Figura 3.1: $K(P_{n,c})$ para $c = 2, n = 5$ e $n = 9$.

Corolário 3.8. Seja $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e seja $\epsilon = |c| - 1$. Então, para cada $\eta \in (0, \epsilon]$, existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, temos $J(P_{n,c}) = K(P_{n,c}) \subset \mathbb{A}(1 - \frac{\eta}{2}, 1 + \frac{\eta}{2})$.

Demonstração. Basta combinar os lemas 3.5 e 3.7 □

Lema 3.9. Seja $c \in \mathbb{D}$, $\epsilon = 1 - |c|$. Para cada $\eta \in (0, \epsilon]$ existe $N \geq 2$ tal que $\mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}} \subset K(P_{n,c})^\circ$ para todo $n \geq N$.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}}$. Tome $|z|^n < \eta/2$. Para tal n

$$|P_{n,c}(z)| \leq |z|^n + |c| < \frac{\eta}{2} + 1 - \epsilon \leq \frac{\eta}{2} + 1 - \eta = 1 - \frac{\eta}{2}.$$

Assim $P_{n,c}(\mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}}) \subsetneq \mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}}$ e daí $\mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}} \subset K(P_{n,c})^\circ$. □

Obs 3.10. Aqui $K(P_{n,c})^\circ$ é o interior de $K(P_{n,c})$, isto é, $K(P_{n,c}) \setminus J(P_{n,c})$ para todo $n \geq N$.

Corolário 3.11. Seja $c \in \mathbb{D}$ e coloque $\epsilon = 1 - |c|$. Para cada $\eta \in (0, \epsilon]$, existe um $N \geq 2$ tal que para $n \geq N$ temos $J(P_{n,c}) \subset \mathbb{A}(1 - \frac{\eta}{2}, 1 + \frac{\eta}{2})$ e $\mathbb{D}_{1-\frac{\eta}{2}} \subset K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\frac{\eta}{2}}$.

Demonstração. Basta combinar os lemas 3.5 e 3.9 □

Lema 3.12. Seja $z \in J(P_{n,c})$. Se ω é uma n -ésima raiz primitiva da unidade, então $\omega z \in J(P_{n,c})$.

Demonstração. Seja ω uma n -ésima raiz primitiva da unidade e suponha $z \in J(P_{n,c})$. Então

$$P_{n,c}(\omega z) = (\omega z)^n + c = \omega^n z^n + c = z^n + c.$$

Como $J(P_{n,c})$ é totalmente invariante, ωz também pertence a $J(P_{n,c})$. □

Lema 3.13. Seja $c \in \mathbb{C} \setminus S^1$, coloque $\epsilon = |1 - |c||$ e seja $\eta \in (0, \epsilon]$. Então existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$ e para $e^{i\theta} \in S^1$, $B(e^{i\theta}, \eta) \cap J(P_{n,c}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Pelos corolários 3.8 e 3.11, existe $N_1 \geq 2$ onde $J(P_n, c) \subset \mathbb{A}(1 - \frac{\eta}{2}, 1 + \frac{\eta}{2})$ para todo $n \geq N_1$.

Seja $e^{i\theta} \in S^1$ e seja $\alpha > 0$ o ângulo tal que

$$U = \{re^{i\tau} | r > 0, \theta - \alpha < \tau < \theta + \alpha\} \cap \mathbb{A}\left(1 - \frac{\eta}{2}, 1 + \frac{\eta}{2}\right)$$

está contido em $B(e^{i\theta}, \eta)$. Note que o mesmo α funciona para cada θ diferente.

Seja $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ para n . Escolha $N \geq N_1$ tal que $2\pi/N < \alpha$, assim $2\pi/n < \alpha$ para todo $n \geq N$. Novamente, note que N é independente de θ , isto é, o mesmo N funciona para todo θ .

Como para cada n , $J(P_{n,c})$ é não vazio (veja [3] página 67), assim $z_n \in J(P_{n,c})$ para cada $n \geq N$. Então para algum $j_n \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ temos $\omega_n^{j_n} z_n \in U \subset B(e^{i\theta}, \eta)$. Desta forma para todo $n \geq N$, $B(e^{i\theta}, \eta) \cap J(P_{n,c}) \neq \emptyset$. □

Teorema 3.14. Seja $c \in \mathbb{C}$.

(1) Se $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(P_{n,c}) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(P_{n,c}) = S^1;$$

(2) Se $c \in \mathbb{D}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(P_{n,c}) = S^1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K(P_{n,c}) = \overline{\mathbb{D}};$$

(3) Se $c \in S^1$, então se $\lim_{n \rightarrow \infty} J(P_{n,c})$ e/ou $\lim_{n \rightarrow \infty} K(P_{n,c})$ (e/ou qualquer liminf ou limsup) existe, ele está contido em $\overline{\mathbb{D}}$.

Obs 3.15. O caso de $c \in S^1$ é o mais delicado. Para qualquer dado $c \in S^1$, podemos ter $c \in M_n$ para alguns valores de n , mas não para outros.

Demonstração. Caso (1). Seja $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Pelo Corolário 3.8, $J(P_{n,c}) = K(P_{n,c})$ para n suficientemente grande, escreveremos somente $J(P_{n,c})$. Seja $\epsilon > 0$ e assumamos $\epsilon < |c| - 1$. Pelo Corolário 3.8 existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$, $J(P_{n,c}) \subset \mathbb{A}(1 - \frac{\eta}{2}, 1 + \frac{\eta}{2})$, e daí para todo $z \in J(P_{n,c})$,

$$d(z, S^1) = \inf_{s \in S^1} |z - s| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo Lema 3.13, existe $N_2 \geq N_1$ tal que para todo $n \geq N_2$ e para $s \in S^1$,

$$d(s, J(P_{n,c})) = \inf_{z \in J(P_{n,c})} |z - s| < \epsilon.$$

Deste modo

$$d_{\mathcal{H}}(S^1, J(P_{n,c})) = \max \left\{ \sup_{z \in J(P_{n,c})} d(z, S^1), \sup_{s \in S^1} d(s, J(P_{n,c})) \right\} < \max \left\{ \frac{\epsilon}{2}, \epsilon \right\} = \epsilon.$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} J(P_{n,c}) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(P_{n,c}) = S^1$.

Caso(2). Suponha $c \in \mathbb{D}$. Seja $\epsilon > 0$ e assumamos $\epsilon < 1 - |c|$. Pelo Corolário 3.11, existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$, temos $J(P_{n,c}) \subset \mathbb{A}(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 + \frac{\epsilon}{2})$ e $\mathbb{D}_{1-\frac{\epsilon}{2}} \subset K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\frac{\epsilon}{2}}$. Usaremos de argumentos semelhante ao caso anterior.

Primeiramente note que para todo $w \in K(P_{n,c})$

$$d(w, \overline{\mathbb{D}}) = \inf_{y \in \overline{\mathbb{D}}} |w - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora considere $y \in \overline{\mathbb{D}}$. Se $y \in \mathbb{D}_{1-\frac{\epsilon}{2}}$ então $y \in K(P_{n,c})$, segue que $d(y, K(P_{n,c})) = 0$. Se $1 - \frac{\epsilon}{2} \leq |y| \leq 1$, então $d(y, \mathbb{D}_{1-\frac{\epsilon}{2}}) < \epsilon/2$ e como esse disco está contido em $K(P_{n,c})$, temos $d(y, K(P_{n,c})) \leq \epsilon/2$.

Assim, para $y \in \overline{\mathbb{D}}$ temos

$$d(y, K(P_{n,c})) = \inf_{w \in K(P_{n,c})} |w - y| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Portanto,

$$d_{\mathcal{H}}(K(P_{n,c}), \overline{\mathbb{D}}) < \epsilon \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K(P_{n,c}) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Agora voltamos para $J(P_{n,c})$. Pela escolha de N_1 sabemos que para todo $z \in J(P_{n,c})$,

$$d(z, S^1) = \inf_{s \in S^1} |z - s| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pela Lema 3.13, existe $N_2 > N_1$ tal que para todo $n \geq N_2$ e para $s = e^{i\theta} \in S^1$,

$$d(s, J(P_{n,c})) = \inf_{z \in J(P_{n,c})} |z - s| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então

$$d_{\mathcal{H}}(J(P_{n,c}), S^1) < \epsilon/2 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(P_{n,c}) = S^1.$$

Caso(3). Este caso segue diretamente do Lema 3.5 .

De fato,

Para $\epsilon = 1$ temos $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+1}$ e para $\epsilon = \frac{1}{2}$ temos $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\frac{1}{2}}$. Seguindo com este raciocínio temos que para $\epsilon = \frac{1}{n}$ $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\frac{1}{n}}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} K(P_{n,c}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. \square

3.1.2 Limites Mandelbrot

Nesta seção nos voltamos a atenção para os limites do Mandelbrot. A Figura abaixo ilustra como o $M_n(P_{n,c})$ parece tender para o disco unitário fechado quando n cresce, e sugere que o componente hiperbólico central (a famosa cardióide do Conjunto de Mandelbrot) tende para o disco unitário inteiro quando n cresce (que está de acordo com o lema 3.9).

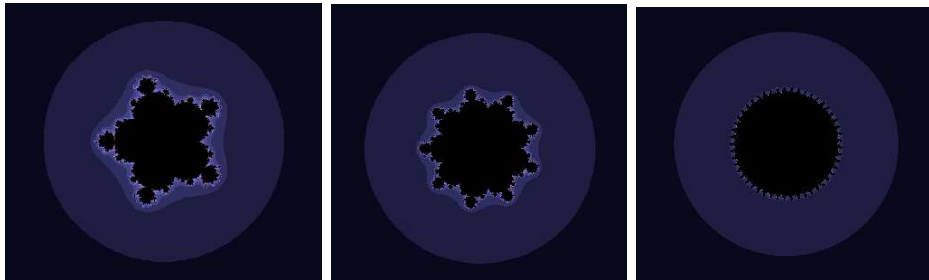


Figura 3.2: Connectedness Locus para $n = 6, n = 10$ e $n = 50$, respectivamente.

Corolário 3.16. Para todo $\epsilon \in (0, 1)$ existe $N \geq 2$ tal que $\overline{\mathbb{D}}_{1-\epsilon} \subset M_n(P_{n,c})$ para todo $n \geq N$.

Demonstração. Primeiramente note que $c = 0 \in M_n(P_{n,c})$ para todo $n \geq 2$. Agora dado $\epsilon \in (0, 1)$, seja $c \in \overline{\mathbb{D}}_{1-\epsilon} \setminus \{0\}$. Então, neste caso $|c| \leq 1 - \epsilon$. Seja $\epsilon' = 1 - |c|$, assim $0 < \epsilon \leq \epsilon'$. Pelo lema 3.9, com $\eta = \epsilon'$, existe $N \geq 2$ tal que, para todo $n \geq N$, temos $0 \in \mathbb{D}_{1-\epsilon'/2} \subset K(P_{n,c})$. Portanto $c \in M_n(P_{n,c})$. \square

Corolário 3.17. Para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \geq 2$ tal que, $M_n(P_{n,c}) \subset \overline{\mathbb{D}}_{1+\epsilon}$ para todo $n \geq N$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e suponha $|c| > 1 + \epsilon$. Então, pelo lema 3.5, existe $N \geq 2$ tal que, para todo $n \geq N$ $K(P_{n,c}) \subset \mathbb{D}_{1+\epsilon}$, mas $P_{n,c}(0) = c \notin \mathbb{D}_{1+\epsilon}$. Assim $c \notin K(P_{n,c})$, ou seja, $c \notin M_n(P_{n,c})$. \square

Teorema 3.18. Seja $CS(\widehat{\mathbb{C}})$ a coleção de todos os subconjuntos compactos de $\widehat{\mathbb{C}}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(P_{n,c}) = \overline{\mathbb{D}}$$

sob a métrica de Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$ em $CS(\widehat{\mathbb{C}})$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Pelos corolários 3.16 e 3.17 existem inteiros positivos N^+ e N^- tais que, $M_n(P_{n,c}) \subset \overline{\mathbb{D}}_{1+\epsilon/2}$ para $n \geq N^+$ e $\overline{\mathbb{D}}_{1-\epsilon/2} \subset M_n(P_{n,c})$ para $n \geq N^-$. Seja $N = \max\{N^+, N^-\}$. Então para todo $n \geq N$ e para $c \in M_n(P_{n,c})$ temos

$$d(c, \overline{\mathbb{D}}) = \inf_{y \in \overline{\mathbb{D}}} |c - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere $y \in \overline{\mathbb{D}}$. Se $|y| \leq 1 - \epsilon/2$, então $y \in M_n(P_{n,c})$, onde $d(y, M_n(P_{n,c})) = 0$. Se $1 - \epsilon < |y| \leq 1$, então $d(y, \overline{\mathbb{D}}_{1-\epsilon/2}) < \epsilon/2$, e como $\overline{\mathbb{D}}_{1-\epsilon/2} \subset M_n(P_{n,c})$, temos $d(y, M_n(P_{n,c})) < \epsilon/2$. Assim para $y \in \overline{\mathbb{D}}$, temos

$$d(y, M_n(P_{n,c})) = \inf_{c \in M_n(P_{n,c})} |c - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Deste modo

$$d_{\mathcal{H}}(\overline{\mathbb{D}}, M_n(P_{n,c})) < \frac{\epsilon}{2} \text{ e assim } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(P_{n,c}) = \overline{\mathbb{D}}.$$

□

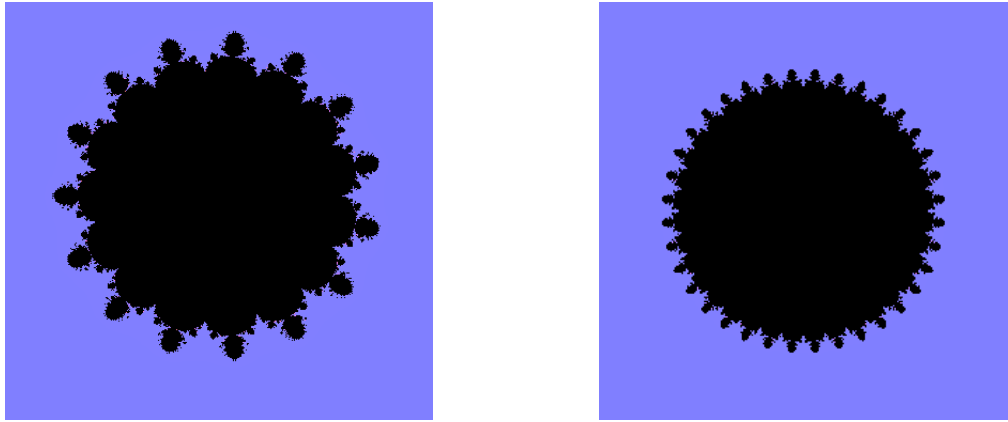


Figura 3.3: $K(P_{n,c})$ para $n = 16, c = -0.9$ (conexo) e $n = 37, c = -0.9i$ (Cantor)

Daremos uma prova alternativa para o Teorema 3.18, mas antes da prova precisamos do seguinte lema:

Lema 3.19. *Existe um conjunto denso $Q \subset S^1$, otal que para $N \geq 2$,*

$$Q \subset \left(\bigcup_{n \geq N} M_n(P_{n,c}) \right) =: A_N$$

Demonstração. Seja $n \geq 2$. O conjunto solução de $c^n + c = 0$ é $Q_n \cup \{0\}$, onde $Q_n = \{z; z \text{ é uma } (n-1)\text{-ésima raiz de } -1\}$. Se $c \in Q_n$, então a órbita de $P_{n,c}(0)$ é $\{0, c, 0, c, \dots\}$ e assim é limitado, logo $c \in M_n(P)$.

Coloque $Q = \{e^{2\pi i q} : q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)\}$ e seja $c \in Q$. Então, existe n tal que, para todo $k \geq 1$, $c \in Q_{k(n-1)+1} \subset M_{k(n-1)+1}$. Assim $c \in A_N$, para todo $N \geq 2$. Como $Q \subset A_N$ para todo $N \geq 2$, segue que Q é denso em S^1 . \square

Teorema 3.20. *O conjunto de acumulação da sequência $\{M_n(P)\}$ é o fecho do disco unitário, isto é,*

$$\overline{\mathbb{D}} = \left(\bigcap_{N \geq 2} \overline{\bigcup_{n \geq N} M_n(P_{n,c})} \right) =: A$$

Demonstração. ($\overline{\mathbb{D}} \subset A$). Seja $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Pelo corolário 3.16, existe um N tal que $z \in M_n(P_{n,c})$ para todo $n \geq N$, assim $z \in A$. Se $z \in \partial \overline{\mathbb{D}} = S^1$, e como Q é denso em S^1 pelo lema 3.19, $S^1 \subset \overline{A_N}$ para todo $N \geq 2$, e daí $A = \bigcap_{N \geq 2} \overline{A_N}$, $z \in A$ e $\overline{\mathbb{D}} \subset A$.

($A \subset \overline{\mathbb{D}}$). Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Pelo corolário 3.17, existe $N \geq 2$ onde $z \notin M_n(P_{n,c})$ para todo $n \geq N$. Assim $z \notin A$. Portanto contrapositivamente $A \subset \overline{\mathbb{D}}$. \square

3.2 A família $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$

Nesta seção procuramos estender os resultados da família de polinômios $P_{n,c} = z^n + c$ para a família racional

$$R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$$

Essas aplicações possuem mais pontos críticos que $P_{n,c}$: o infinito é ponto crítico e fixo, zero é crítico e é levado no infinito, e há também pontos críticos que são as $2n$ raízes de a : $a^{1/2n}$. Note que os $2n$ pontos críticos $a^{1/2n}$ geram dois valores críticos $v^\pm = c \pm 2\sqrt{a}$. Começamos com lemas restringindo a localização do Julia à um anel tendendo a S^1 quando $n \rightarrow \infty$.

Lema 3.21. *Para qualquer $c \in \mathbb{C}$ e qualquer $a \in \mathbb{C}$, dado $\epsilon > 0$, existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, temos $K(R_{n,c,a}) \subset \mathbb{D}_{1+\epsilon}$.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_{1+\epsilon}$. Seja $B > \max\{1, |c|, |a|\}$ e escolha $N \geq 2$ tal que $|z|^N > 3B$ e $B^{n-2} > 2^2$. Seja $n \geq N$. Afirmamos que $|R_{n,c,a}^m(z)| \geq B^m$ para todo $m \geq 1$. De fato, para $m = 1$ temos:

$$\begin{aligned} |R_{n,c,a}(z)| &= \left| z^n + \frac{a}{z^n} + c \right| \geq |z|^n - |c| - \frac{|a|}{|z|^n} > 3B - B - \frac{|a|}{3B} \\ &= 2B - \frac{|a|}{3B} = B + \left(B - \frac{|a|}{3B} \right) > B. \end{aligned}$$

Agora suponha que para $m \geq 1$, $|R_{n,c,a}^m(z)| \geq B^m$. Então

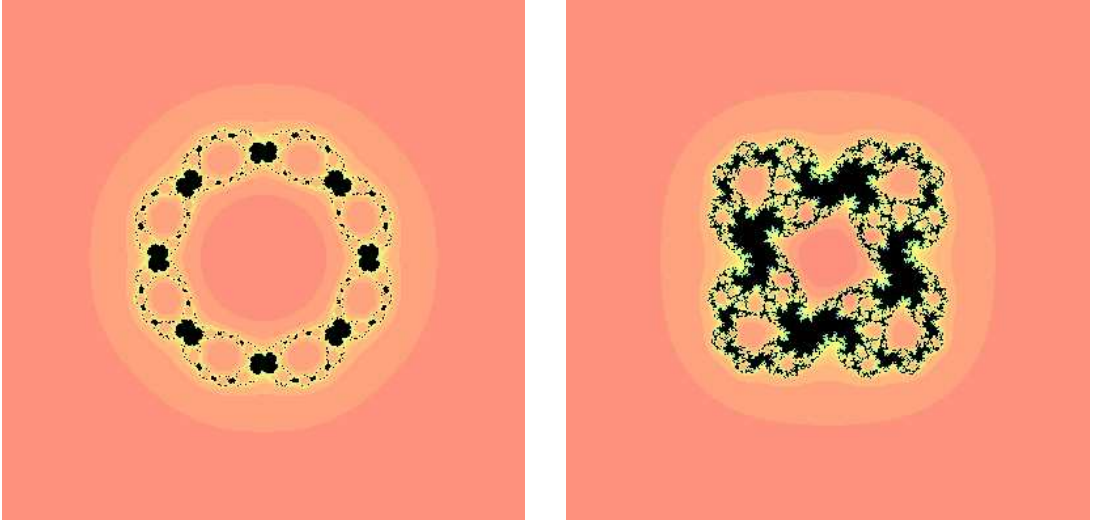


Figura 3.4: $K(R_{n,c,a})$, para $n = 4, c = 0, a = 1.855 + 0.65499i$ e $n = 4, c = 0.5, a = 0.65499 + 1.995i$

$$\begin{aligned}
 |R_{n,c,a}^{m+1}(z)| &= |R_{n,c,a}(R_{n,c,a}^m(z))| \\
 &= \left| (R_{n,c,a}^m(z))^n + c + \frac{a}{(R_{n,c,a}^m(z))^n} \right| \\
 &\geq |R_{n,c,a}^m(z)|^n - |c| - \frac{|a|}{|R_{n,c,a}^m(z)|^n} > B^{mn} - B - \frac{|a|}{B^{mn}} \\
 &\stackrel{3.22}{>} B^{mn-m+1} - B - \frac{|a|}{B^{mn}} = B^{m+1} \left(B^{m(n-2)} - \frac{|a|}{B^{mn+m+1}} - B^{-m} \right) \\
 &\stackrel{3.23}{\geq} B^{m+1} (2^{2m} - 1 - 1) \geq B^{m+1}
 \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução finita $|R_{n,c,a}^m| \geq B^m$ para todo $m \geq 1$ e como $B > 1$ a órbita de z sobre $R_{n,c,a}$ escapa para o infinito, conseqüentemente $z \notin K(R_{n,c,a})$. \square

Obs 3.22. Como $B^m > B$ temos, $1 > B^{-m}B$ e multiplicando por B^{mn} em ambos os lados segue que $B^{mn} > B^{mn}B^{-m}B = B^{mn-m+1}$.

Obs 3.23. Como $B > |a|$ e $B^{mn+m+1} > B$ segue que $B^{mn+m+1} > |a|$ e daí $\frac{|a|}{B^{mn+m+1}} < 1$ e logo $-\frac{|a|}{B^{mn+m+1}} > -1$. Analogamente como $B^m > 1$ temos $-B^{-m} > -1$.

Lema 3.24. Para qualquer $c \in \mathbb{C}$ e qualquer $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \geq 2$ tal que para todo $n > N$, temos $\mathbb{D}_{1-\epsilon} \subset \mathbb{C} \setminus K(R_{n,c,a})$.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{D}_{1-\epsilon}$. Seja N_1 dado pelo lema 3.21 para a, c, ϵ , tal que para todo $n \geq N_1$ temos $K(R_{n,c,a}) \subset \mathbb{D}_{1+\epsilon}$. Agora, como $|z| < 1$, escolha $N > N_1$ tal que $|z|^N \leq |a|/(2 + \epsilon + |c|)$. Então, para $n \geq N$

$$\begin{aligned} |R_{n,c,a}(z)| &\geq \frac{|a|}{|z|^n} - |c| - |z|^n \geq \frac{|a|}{|z|^n} - |c| - 1 \\ &\geq \frac{(2+\epsilon+|c|)}{|a|}|a| - |c| - 1 = 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Então $R_{n,c,a}(z) \notin K(R_{n,c,a})$ daí $z \notin K(R_{n,c,a})$. \square

Corolário 3.25. Para qualquer $c \in \mathbb{C}$ e qualquer $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \geq 2$ tal que, para todo $n > N$, temos $K(R_{n,c,a}) \subset \mathbb{A}(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$.

Demonstração. Basta combinarmos os lemas 3.21 e 3.24. \square

Lema 3.26. Para qualquer $c \in \mathbb{C}$ e para qualquer $a \in \mathbb{C}$, se α é uma n -ésima raiz primitiva da unidade, para qualquer ponto $z \in J(R_{n,c,a})$ temos que o conjunto $\{\alpha^j z : j \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ possui n pontos distintos em $J(R_{n,c,a})$ espalhados uniformemente ao redor do círculo do raio $|z|$.

Demonstração. Sejam $\alpha, a \in \mathbb{C}, z \in J(R_{n,c,a})$, onde α é uma n -ésima raiz primitiva da unidade, isto é, $\alpha^n = 1$, mas $\alpha^j \neq 1$ para $j < n$. Como $0 \notin J(R_{n,c,a})$ temos $z \neq 0$, e então o conjunto $\{\alpha^j z : j \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ possui n pontos distintos e note que para cada j , $(\alpha^j)^n = 1$. Observe que

$$R_{n,c,a}(\alpha^j z) = (\alpha^j z)^n + c + \frac{a}{(\alpha^j z)^n} = (\alpha^j)^n z^n + c + \frac{a}{(\alpha^j)^n z^n} = R_{n,c,a}(z).$$

Como $J(R_{n,c,a})$ é totalmente invariante cada $\alpha^j \in J(R_{n,c,a})$ e cada um tem norma $|z|$. \square

Lema 3.27. Sejam $a, c \in \mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$ seja $a \in \mathbb{C}$. Então, existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$ e para qualquer $s = e^{i\theta}$, temos $B(s, \epsilon) \cap J(R_{n,c,a}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Primeiramente lembre-se de que $J(R_{n,c,a})$ é não vazio, já que $R_{n,c,a}$ é uma aplicação racional de grau maior ou igual a 2. Deste modo existe um ponto $z_n \in J(R_{n,c,a})$ para qualquer $n \geq 2$. Pelo lema 3.26 se $z_n \in J(R_{n,c,a})$ então $\alpha^j z_n$ também pertence a $J(R_{n,c,a})$, e temos n pontos distribuídos ao longo do círculo de raio $|z_n|$ que estão em $J(R_{n,c,a})$. Pelo Corolário 3.25, quando $n \rightarrow \infty$ temos $|z_n| \rightarrow 1$. Usando argumentos similares a prova do lema 3.13 segue o resultado. \square

Teorema 3.28. Para qualquer $a \in \mathbb{C}$ e para qualquer $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(R_{n,c,a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(R_{n,c,a}) = S^1.$$

Demonstração. Primeiramente lembre-se de que para quaisquer n, c, a , temos $J(R_{n,c,a}) \subseteq K(R_{n,c,a})$. De forma análoga à prova do Teorema 3.14, juntamente com o corolário 3.25, temos que ambos, $\inf_{z \in J(R_{n,c,a})} d(z, S^1)$ e $\inf_{z \in K(R_{n,c,a})} d(z, S^1)$ tendem a zero quando $n \rightarrow \infty$.

O Lema 3.27 garante que, para qualquer $s \in S^1$, $d(s, J(R_{n,c,a})) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e como, $J(R_{n,c,a}) \subseteq K(R_{n,c,a})$ segue que $d(s, K(R_{n,c,a})) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, $d_{\mathcal{H}}(S^1, J(R_{n,c,a}))$ e $d_{\mathcal{H}}(S^1, K(R_{n,c,a}))$ ambas tendem a zero quando $n \rightarrow \infty$, e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(R_{n,c,a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(R_{n,c,a}) = S^1.$$

\square

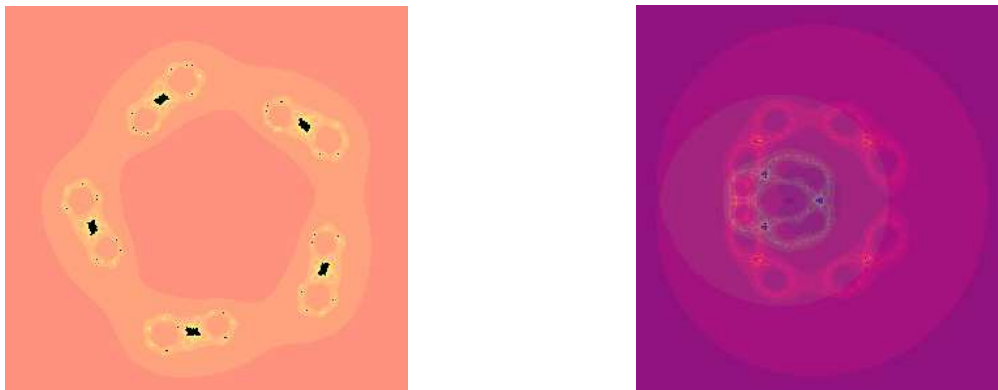


Figura 3.5: $J(R_{n,c,a})$ para $n = 5, c = 1, a = 1.815 + 0.565i$ e $M_n(R_c)$ para $n = 8$ e $c = 0.25$

3.2.1 O Conjunto de Mandelbrot para $c = 0$

O caso $c = 0$ foi mais estudado, e neste caso, podemos obter informações mais específicas do que o caso geral no qual $c \neq 0$. Considere a subfamília

$$R_{n,a}(z) = R_{n,0,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n}.$$

De forma semelhante usaremos $J(R_{n,a})$ e $K(R_{n,a})$ para nos referirmos aos conjuntos de Julia e Julia cheio respectivamente.

Para o caso $c = 0$, apesar de termos dois valores críticos $v^+ = +\sqrt{a}$ e $v^- = -\sqrt{a}$, existe apenas uma órbita crítica livre (não é ponto fixo e tampouco levado em ∞ na primeira iterada). Pois se n é ímpar, então as órbitas desses dois valores críticos se comportam simetricamente sobre $z \mapsto -z$. E se n é par ambos valores críticos possuem a mesma imagem.

Assim podemos definir o conjunto de Mandelbrot $M_n(R_0)$ como o conjunto de todas as órbitas críticas livres que não escapam para o infinito.

A seguir apresentaremos um resultado que não demonstraremos, pois foge do objetivo desse trabalho. Veja em [6].

Teorema 3.29. A tricotomia Fundamental

Seja B_∞ a bacia do infinito da aplicação $R_{n,a}$, com valores críticos v^\pm .

- (1) Se um dos v^\pm pertencem a B_∞ , então $J(R_{n,a})$ é um conjunto de Cantor;
- (2) Se o caso acima não ocorrer, mas se um dos $R_{n,a}(v^\pm)$ pertence a B_∞ , então $J(R_{n,a})$ é um domínio de McMullen;
- (3) Mas caso não ocorra os casos acima, e a órbita de v^\pm é limitada, então $J(R_{n,a})$ é conexo.

Obs 3.30. Vale lembrar que o domínio de McMullen é um disco aberto contendo parâmetros para os quais o conjunto de Julia é sempre um conjunto de Cantor de curvas concêntricas simples e fechadas.

Teorema 3.31. *Seja $S_{1/4}^1$ o círculo de raio $1/4$ em \mathbb{C} . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(R_0) = S_{1/4}^1$$

Para demonstrar o resultado acima precisamos dos seguintes resultados auxiliares.

Lema 3.32. *Para qualquer $\epsilon \in (0, 1/4)$, existe um $N \geq 2$ tal que, para todo $n \geq N$, $M_n(R_0) \subset \mathbb{A}(1/4 - \epsilon, 1/4 + \epsilon)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon \in (0, 1/4)$. Suponha $|a| \geq 1/4 + \epsilon$. Então

$$|v^\pm| = 2|\sqrt{a}| > \sqrt{1 + 4\epsilon} = 1 + \delta$$

para algum $\delta > 0$. Pelo corolário 3.25, sabemos que existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, $K(R_{n,a}) \subset \mathbb{A}(1 - \delta/2, 1 + \delta/2)$. Assim $v^\pm \in B_\infty$, conseqüentemente $a \notin M_n(R_0)$. Daí $M_n(R_0) \subset \mathbb{D}_{1/4+\epsilon}$.

Agora suponha $|a| \leq 1/4 - \epsilon$. Então

$$|v^\pm| = 2|\sqrt{a}| < \sqrt{1 - 4\epsilon} = 1 - \delta$$

para algum $\delta \in (0, 1)$. Então pelo corolário 3.25, sabemos que existe $N_1 \geq 2$ tal que, para todo $n \geq N_1$, $K(R_{n,a}) \subset \mathbb{A}(1 - \delta/2, 1 + \delta/2)$. Daí, v^\pm estão no alçapão, isto é, $v^\pm \notin B_\infty$. Mas pelo Lema 3.24, temos que para todo $n > N$ e para algum $N \geq N_1$, $R_{n,a}(v^\pm) \in B_\infty$. Assim pela tricotomia fundamental, a está em um domínio de McMullen para n suficientemente grande, logo não está em $M_n(R_0)$. Portanto, $M_n(R_0) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{1/4-\epsilon}}$. \square

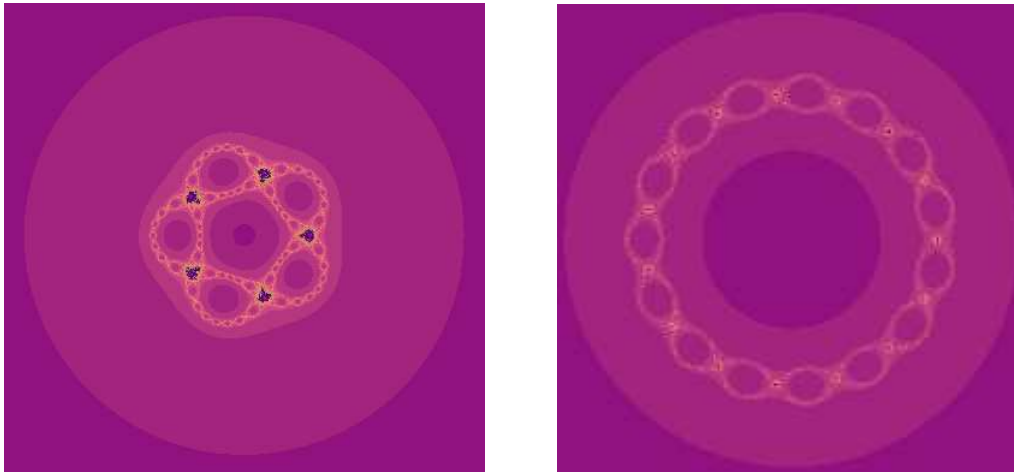


Figura 3.6: $M_n(R_0)$ para $n = 6$ e $n = 16$

O lema acima implica que $\inf_{a \in M_n(R_0)} d(a, S_{1/4}^1) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Para estabelecer a outra distância, vamos localizar pontos específicos em $M_n(R_0)$ que preencherão $S_{1/4}^1$ no limite.

Para cada $n \geq 3$, e cada $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, coloque

$$a_n^k = 2^{-2n/(n-1)} e^{i2\pi k/(n-1)}.$$

Denote os valores críticos da aplicação R_{n,a^k} por $v^+ = 2\sqrt{a^k}$ e $v^- = -2\sqrt{a^k}$.

Lema 3.33. *Seja $n \geq 3$ e $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Então as órbitas críticas livres de R_{n,a_n^k} são finitas, conseqüentemente $a_n^k \in M_n(R_0)$. Em particular, usaremos R e v^\pm para nos referirmos a R_{n,a_n^k} e $v^\pm(a_n^k)$ respectivamente. Então*

- Se n é par e k é par, então $R(v^-) = v^+$ e $R(v^+) = v^+$;
- Se n é par e k é ímpar, então $R(v^+) = v^-$ e $R(v^-) = v^-$;
- Se n é ímpar e k é par, então $R(v^+) = v^+$ e $R(v^-) = v^-$;
- Se n é ímpar e k é ímpar, então $R(v^+) = v^-$ e $R(v^-) = v^+$;

Demonstração. Note que

$$v^+ = 2\sqrt{a_n^k} = 2 \cdot 2^{-n/(n-1)} e^{ink/(n-1)}$$

e que

$$v^- = -2\sqrt{a_n^k} = 2 \cdot 2^{-n/(n-1)} e^{ink/(n-1)} e^{i\pi}.$$

Defina $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \{+1, -1\}$ dada por :

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é par} \\ -1, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.1)$$

Então note que $e^{i\pi k} = e^{-i\pi k} = \sigma(k)$. Agora calculando $R(v^+)$ temos :

$$\begin{aligned} R(v^+) &= (v^+)^n + \frac{a_n^k}{(v^+)^n} = \left(2 \cdot 2^{-n/(n-1)} e^{i\pi k/n}\right)^n + \frac{2^{-2n/(n-1)} e^{i2\pi k/n}}{\left(2 \cdot 2^{-n/(n-1)} e^{i\pi k/n}\right)^n} \\ &= 2^n \cdot 2^{-n^2/(n-1)} e^{i\pi kn/n-1} + \frac{2^{-2n/(n-1)} e^{i2\pi k/n}}{2^n \cdot 2^{-n^2/(n-1)} e^{i\pi kn/n-1}} = 2^{-n/(n-1)} e^{i\pi kn/n-1} + \frac{2^{-2n/(n-1)} e^{i2\pi k/n}}{2^n \cdot 2^{-n^2/(n-1)} e^{i\pi kn/n-1}} \\ &= 2^{-n/(n-1)} e^{i\pi kn/n-1} + 2^{-n/(n-1)} e^{-i\pi k(n-2)/n-1} = 2^{-n/(n-1)} \left(\left(e^{i\pi k/n-1}\right)^n + \left(e^{-i\pi k/n-1}\right)^{n-2} \right) \\ &= 2^{-n/(n-1)} \left(e^{i\pi kn/n-1} + e^{-i\pi k(n-2)/n-1} \right) = 2^{-n/(n-1)} \left(e^{\frac{i\pi kn+i\pi k(n-2)}{n-1}} + e^{-\frac{i\pi k(n-2)}{n-1}} \right) \\ &= 2^{-n/(n-1)} \left(e^{\frac{i\pi k+i\pi k(n-1)}{n-1}} + e^{-\frac{i\pi k(n-1)+i\pi k}{n-1}} \right) = 2^{-n/(n-1)} \left(e^{\left(\frac{i\pi k}{n-1}+i\pi k\right)} + e^{\left(\frac{i\pi k}{n-1}-i\pi k\right)} \right) \\ &= 2^{-n/(n-1)} \left(e^{\frac{i\pi k}{n-1}} e^{i\pi k} + e^{\frac{i\pi k}{n-1}} e^{-i\pi k} \right) = 2^{-n/(n-1)} \left(e^{\frac{i\pi k}{n-1}} \left(e^{i\pi k} + e^{-i\pi k} \right) \right) \\ &= \sigma(k) 2 \cdot 2^{-n/(n-1)} e^{\frac{i\pi k}{n-1}}. \end{aligned}$$

Assim, se k é par, então $\sigma(k) = 1$, daí $R(v^+) = v^+$. Se k é ímpar, então $\sigma(k) = -1$, logo $R(v^+) = v^-$.

Aplicando cálculos semelhantes a $v^- = v^+ e^{i\pi}$ temos

$$\begin{aligned}
 R(v^-) &= (v^-)^n + \frac{(a_n^k)}{(v^-)^n} = \left(2 \cdot 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k}{n-1}} e^{i\pi}\right)^n + \frac{2^{\frac{-2n}{n-1}} e^{\frac{i2\pi k}{n-1}}}{\left(2 \cdot 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k}{n-1}} e^{i\pi}\right)^n} \\
 &= 2^n \cdot 2^{\frac{-n^2}{n-1}} e^{\frac{i\pi n k}{n-1}} e^{i\pi n} + \frac{2^{\frac{-2n}{n-1}} e^{\frac{i2\pi k}{n-1}}}{2^n \cdot 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k n}{n-1}} e^{i\pi n}} = 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k n}{n-1}} e^{i\pi n} + \frac{2^{\frac{-2n}{n-1}} e^{\frac{i2\pi k}{n-1}}}{2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k n}{n-1}} e^{i\pi n}} \\
 &= 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k n}{n-1}} e^{i\pi n} + 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{-i\pi k(n-2)}{n-1}} e^{-i\pi n} = 2^{\frac{-n}{n-1}} \left(e^{\frac{i\pi k n}{n-1}} e^{i\pi n} + e^{\frac{-i\pi k(n-2)}{n-1}} e^{-i\pi n} \right) \\
 &= 2^{\frac{-n}{n-1}} \left(e^{\frac{i\pi k}{n-1}} e^{i\pi k} e^{i\pi n} + e^{\frac{i\pi k}{n-1}} e^{-i\pi k} e^{-i\pi n} \right) \\
 &= 2^{\frac{-n}{n-1}} \left(e^{\frac{i\pi k}{n-1}} (\sigma(k)\sigma(n) + \sigma(k)\sigma(n)) \right) = \sigma(k)\sigma(n) \cdot 2 \cdot 2^{\frac{-n}{n-1}} e^{\frac{i\pi k}{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $R(v^-) = v^+$ se n e k são pares ou se n e k são ímpares e $R(v^-) = v^-$ se n é par e k é ímpar ou n ímpar e k é par. \square

Com o lema anterior temos condições para demonstrar o Teorema 3.31.

Demonstração. Teorema 3.31: Seja $\epsilon > 0$. Primeiramente, como na demonstração do Teorema 3.14, o Lema 3.32 nos mostra que $\inf_{a \in M_n(R_0)} d(a, S_{1/4}^1) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pelo Lema 3.33, como os pontos a_n^k são n pontos em $M_n(R_0)$ que se espalham uniformemente ao longo do círculo de raio $2^{-2n/n-1}$, o raio tende a $1/4$ quando $n \rightarrow \infty$. De imediato segue que, para $s \in S_{1/4}^1$, $d(s, M_n(R_0)) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Deste modo $d_{\mathcal{H}}(S_{1/4}^1, M_n(R_0)) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(R_0) = S_{1/4}^1$. \square

3.2.2 Conjunto de Mandelbrot para $c \neq 0$

Quando $c \neq 0$, as órbitas críticas de $v^+ = c + 2\sqrt{a}$ e $v^- = c - 2\sqrt{a}$ são ambas livres. Neste caso a análise é bem mais complicada.

Denotaremos

$M_n(R_c) = M_n^1(R_c) = \{a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \text{pelo menos uma órbita crítica de } R_{n,c,a} \text{ é limitada}\}$. Assim este é um Conjunto de Mandelbrot localizado na faixa $\{c\} \times \mathbb{C}$ do espaço de parâmetros $\mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{(c, a) : c, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Coloque $M_n^2(R_c)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o conjunto tal que, ambas órbitas críticas livres são limitadas. No entanto nosso foco será no estudo do $M_n^1(R_c)$.

Proposição 3.34. *Se $|c| > 1$, então existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, temos $M_n^2(R_c) = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $w = 2\sqrt{a}$. Se $|\text{Arg}(w) - \text{Arg}(c)| < \pi$, então se $w \neq 0$, $|c + w| > |c|$. Consequentemente, $|v^+| = |c + w| = 1 + \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Assim

existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, a órbita de v^+ escapa, assim $a \notin M_n^2(R_c)$.

por outro lado, se $|\text{Arg}(w) - \text{Arg}(c)| \geq \pi$, então, $|\text{Arg}(-w) - \text{Arg}(c)| < \pi$, consequentemente $|c - w| > |c|$, e novamente $a \notin M_n^2(R_c)$. \square

Definição 3.35. Para qualquer $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$, definimos o conjunto L_c em \mathbb{C} por :

$$L_c = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{c}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \frac{(c^2 - 1)}{4} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

e para qualquer $c \in \mathbb{C}$ definimos :

$$L_c = e^{2\pi i \text{Arg}(c)} L_{|c|}$$

Note que L_c é o limaçon polar $r = (c + \cos \theta)/2$ deslocado por $(c^2 - 1)/4$

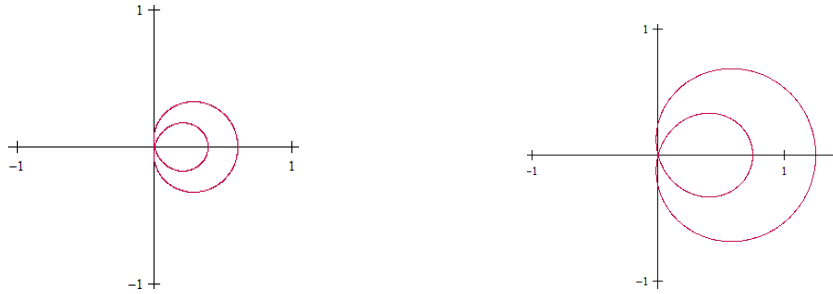


Figura 3.7: À esquerda L_c para $c = 0.25$ e à direita L_c para $c = 1 + i$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(R_c)$ é o limaçon L_c . O Teorema 3.28 nos mostra o caminho: o limaçon surge como o conjunto de valores c para os quais os valores críticos têm módulo um.

Teorema 3.36. Para qualquer $c \in \mathbb{C}$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(R_c) = L_c.$$

Mas antes de demonstrar o teorema acima precisamos de alguns resultados que serão dados a seguir.

Proposição 3.37. Para qualquer $c \in \mathbb{C}$, L_c é precisamente o conjunto de todos $a \in \mathbb{C}$ para os quais $|c + 2\sqrt{a}| = 1$ e/ou $|c - 2\sqrt{a}| = 1$.

Demonstração. $|c + 2\sqrt{a}| = 1$, se e só se, existe algum $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $c \pm 2\sqrt{a} = -e^{i\theta}$. Daí, isolando a obtemos:

$$a = \left(\frac{e^{i\theta} + c}{2} \right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} = \left(\frac{c^2}{4} + \frac{c}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} \right) + \left(\frac{c^2 - 1}{4} \right).$$

Suponha $c \in \mathbb{R}, c > 0$. O limaçon polar $r = B + A \cos \theta$ tem equação complexa $A/2 + Be^{i\theta} + A/2e^{2i\theta}$, consequentemente $A = 1/2$ e $B = c/2$ produz $r = (c + \cos \theta)/2$, o que está de acordo com a nossa definição acima, isto é,

$$L_c = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{c}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \frac{(c^2 - 1)}{4} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Agora, considere c complexo e seja $\phi = \text{Arg}(c)$. Definindo $L_c := e^{2i\phi}L_{|c|}$, temos $a \in L_c$, se e só se, $e^{-2i\phi} \in L_{|c|}$, que significa

$$1 = ||c| \pm 2\sqrt{ae^{-2i\phi}}| = |e^{i\phi}||c| \pm 2\sqrt{ae^{-2i\phi}}| = ||c|e^{i\phi} \pm 2\sqrt{a}| = |c \pm 2\sqrt{a}|.$$

□

Primeiro vamos restringir $M_n(R_c)$ para um anel baseado em $|c|$ de acordo com a definição a seguir.

Notação :

$$l(c) = \frac{(1-|c|)^2}{4} \text{ e } u(c) = \frac{(1+|c|)^2}{4}$$

e definimos $A_{|c|} = \overline{\mathbb{A}(l(|c|), u(|c|))}$.

Veja a figura 3.27 para comparar as imagens de alguns limaçons L_c , e os Conjuntos de Mandelbrot $M_n(R_c)$. Veja na figura 3.28 vários $M_n(R_c)$ para c ao longo círculo de raio 1, ou seja, $|c| = 1$ para todo c .

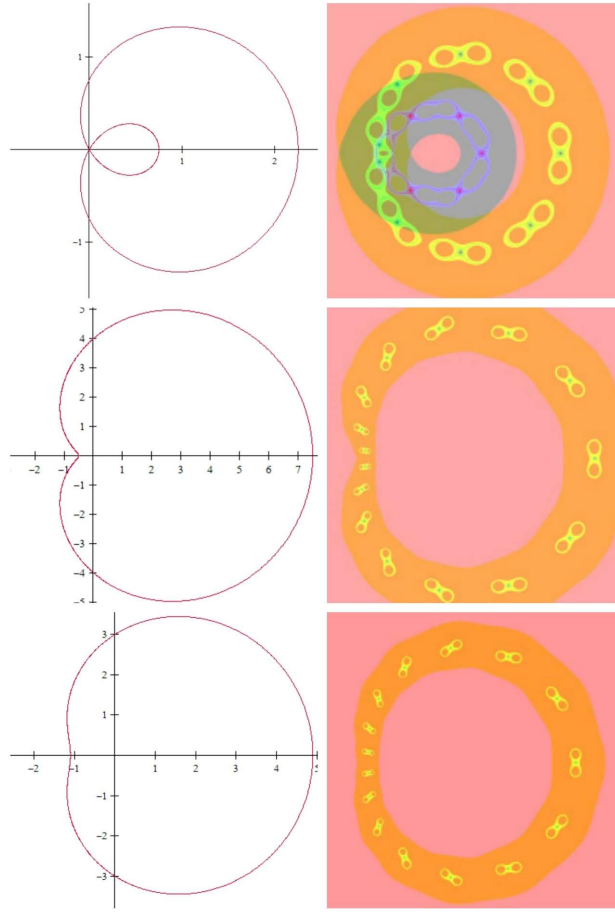


Figura 3.8: Para $c = 0.25$, $c = 1.5$ e $c = 2$, temos L_c (à esquerda) e $M_n(R_c)$ (à direita) para $n = 15$.

Lema 3.38. *Seja $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\epsilon > 0$. Então, existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, temos*

$$M_n(R_c) \subset \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|}).$$

Demonstração. Primeiramente, considere $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{u(|c|)}$. Defina $\delta > 0$ por

$$2\sqrt{\frac{1}{4}(1 + |c|)^2 + \epsilon} - |c| = 1 + \delta.$$

Suponha que a satisfaça $|a| \geq u(c) + \epsilon$. Daí se, $|c| \leq 2\sqrt{|a|}$ obtemos $2\sqrt{|a|} - |c| \geq 1 + \delta$.

De fato, Como $|a| \geq u(c) + \epsilon$ temos $|a| \geq \frac{(1+|c|)^2}{4} + \epsilon$ e daí $\sqrt{|a|} \geq \sqrt{\frac{1}{4}(1 + |c|)^2 + \epsilon}$, multiplicando por 2 em ambos os lados $2\sqrt{|a|} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}(1 + |c|)^2 + \epsilon}$ uma vez que $|c| \leq 2\sqrt{|a|}$ segue que $2\sqrt{|a|} - |c| \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}(1 + |c|)^2 + \epsilon} - |c| = 1 + \delta$.

Então, pelo Corolário 3.25, existe $N_1 \geq 2$ (que depende somente de c e ϵ) tal que, para todo $n \geq N_1$, $v^\pm \notin K(R_{n,c,a})$, assim $a \notin M_n(R_c)$. Logo $M_n(R_c) \subset \mathbb{D}_{u(c)+\epsilon}$ para todo $n \geq N_1$.

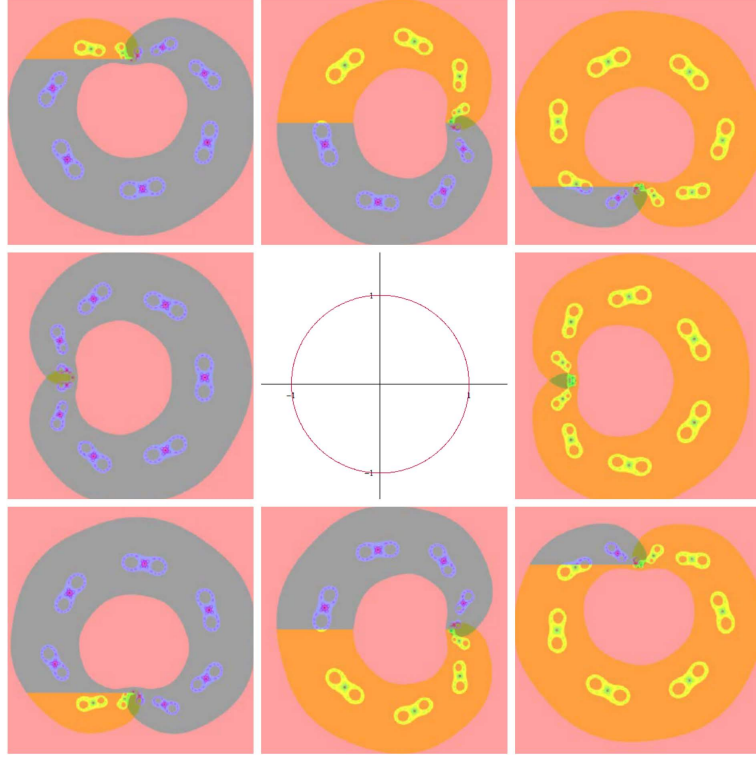


Figura 3.9: A figura central representa o S^1 . As outras imagens são um $M_n(R_c)$ para $|c| = 1$. As figuras são organizadas em torno do círculo de acordo com seus valores c . A mudança laranja / cinza na coloração deve-se a uma escolha de raiz quadrada. A cúspide do cardiode está sempre na origem (recortamos cada foto para mostrar apenas $M_n(R_c)$). Para $0^\circ (c = 1)$ e $180^\circ (c = -1)$. Para $45^\circ (c = 0.707 + 0.707i)$ e $225^\circ (c = -0.707 - 0.707i)$. Para $90^\circ (c = i)$ e $270^\circ (c = -i)$. E por fim para $135^\circ (c = -0.707 + 0.707i)$ e $315^\circ (c = 0.707 - 0.707i)$.

Agora considere $\mathbb{D}_{l(|c|)}$. Primeiramente assuma $|c| > 1$. Defina $\delta > 0$ por :

$$|c| - 2\sqrt{\frac{1}{4}(1 - |c|)^2 - \epsilon} = 1 + \delta.$$

Daí, $|c| < l(c) - \epsilon$ implica em $|c| \geq 2\sqrt{a} + 1$, assim $|v^+| \geq |c| - 2\sqrt{a} \geq 1 + \delta$.

De fato, Como $|a| < l(c) - \epsilon$ temos $|a| < \frac{(1-|c|)^2}{4}$ e daí $\sqrt{|a|} < \sqrt{\frac{(1-|c|)^2}{4}}$, multiplicando por -2 em ambos os lados $-2\sqrt{|a|} \geq -2\sqrt{\frac{(1-|c|)^2}{4}}$ e uma vez que $|c| \geq 2\sqrt{a}$ segue que

$$|c| - 2\sqrt{|a|} \geq |c| - 2\sqrt{\frac{(1-|c|)^2}{4}} = 1 + \delta.$$

Conseqüentemente pelo Corolário 3.25, existe $N \geq N_1$ que dependem somente de c e ϵ tal que para todo $n \geq N$, $v^\pm \notin K(R_{n,c,a})$, assim $a \notin M_n(R_c)$. Portanto, $M_n(R_c) \subset \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|})$ para todo $n \geq N$.

Por outro lado, se $|c| > 1$, definimos $\delta > 0$ por :

$$|c| + \sqrt{\frac{1}{4}(1 - |c|)^2 - \epsilon} = 1 - \delta.$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, $|a| < l(c) - \epsilon$ implica $|v^\pm| \leq |c| + 2|\sqrt{a}| \leq 1 - \epsilon$, assim pelo Corolário 3.25 existe $N \geq N_1$, tal que, para todo $n \geq N$, $v^\pm \notin K(R_{n,c,a})$ e assim $a \notin M_n(R_c)$. Portanto, $M_n(R_c) \subset \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|})$ para todo $n \geq N$.

Finalmente note que se, $|c| = 1$, então $l(|c|) = 0$, conseqüentemente $A_{|c|} = \overline{\mathbb{D}}_{u(|c|)}$. \square

Note que se $|c| < 1$, então para n suficientemente grande o complemento deste anel está contido no Cantor locus. Por outro lado, se $|c| < 1$ para n suficientemente grande, $\mathbb{D}_{l(c)}$ está contido no domínio de McMullen e $\mathbb{D}_{u(c)}$ no Cantor locus. Finalmente, se $|c| = 1$, obtemos $\overline{\mathbb{A}(l(c), u(c))} = \overline{\mathbb{D}}$, e fora deste disco está o Cantor locus.

Obs 3.39. *O Cantor Locus é a única componente hiperbólica, do espaço das aplicações racionais quadráticas, consistindo de aplicações para as quais o Conjunto Julia é totalmente desconexo.*

Lema 3.40. *Seja $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\epsilon > 0$. Então existe $N \geq 2$ tal que para todo $n \geq N$, $M_n(R_c) \subset \mathcal{N}_\epsilon(L_c)$.*

Demonstração. Pelo lema 3.38, podemos escolher $N_1 \geq 2$ tal que para todo $n > N_1$, $M_n(R_c) \subset \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|})$. Além disso a demonstração desse lema combinada com a Proposição 3.37 implica que $L_c \subset A_{|c|}$. Conseqüentemente se $a \notin \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|})$, existem dois casos.

1º Caso: Se $a \notin \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|})$, então o lema 3.38 indica que para todo $n \geq N_1$, $a \notin M_n(R_c)$ e está feito. Agora considere

$$U_c(\epsilon) := \overline{\mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|})} \setminus \mathcal{N}_\epsilon(L_c).$$

Esse conjunto é compacto, pois seu complementar $\mathcal{N}_\epsilon(L_c)$ é aberto, assim, a cobertura aberta $\{B(w, \frac{\epsilon}{2}) : w \in U_c(\epsilon)\}$ possui subcobertura finita $\{B_1(\frac{\epsilon}{2}), \dots, B_m(\frac{\epsilon}{2})\}$.

Se $|c| = 1$ então $A_{|c|} = \overline{\mathbb{D}}_{u(|c|)}$, mas a fórmula de L_c mostra que L_c contém a origem (é o ponto de cúspide da cardióide), daí $U_c(\epsilon)$ não intercepta \mathbb{D}_ϵ a cobertura de bolas não intercepta $\mathbb{D}_{\frac{\epsilon}{2}}$. Assim, em cada $B(\frac{\epsilon}{2})$ a função raiz quadrada produz duas vizinhanças abertas que são as raízes quadradas de cada $B(\frac{\epsilon}{2})$. Por outro lado, se $|c| \neq 1$, os anéis $A_{|c|}$ não intercepta uma vizinhança aberta da origem, então para ϵ suficientemente pequeno, as bolas $B(\frac{\epsilon}{2})$ também não intercepta uma vizinhança aberta da origem, e a função raiz quadrada novamente produz duas vizinhanças abertas em cada $B(\frac{\epsilon}{2})$. Daí $\{c \pm 2\sqrt{b_k}; b_k \in B_k\}$ é uma coleção de vizinhanças abertas, e cada $\overline{B_k} \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{2}}(L_c)$, assim, para cada B_k existe um $\delta = \delta_k(c, \epsilon) > 0$ definido por

$$\delta_k = \min_{w \in B_k} |c \pm 2\sqrt{w}| - 1|.$$

Coloque $\delta = \min_{1 \leq k \leq m} \delta_k$, e $\delta > 0$.

Agora, para esse δ o Corolário 3.25 nos fornece $N \geq N_1$ tal que, para cada $n \geq N$, $K(R_{n,c,a}) \subset \mathcal{N}_\delta(S^1)$. Mas para todo $a \in U_c(\epsilon)$, temos $a \in B_k(\frac{\epsilon}{2})$ para algum k , portanto, $|c \pm 2\sqrt{a}| - 1| > \delta$, ou seja, $v^\pm \notin K(R_{n,c,a})$ e assim $a \in M_n(R_c)$.

Deste modo, para todo $n \geq N$, temos $M_n(R_c) \subset (\mathbb{C} \setminus U_c(\epsilon)) \cap \mathcal{N}_\epsilon(A_{|c|}) = \mathcal{N}_\epsilon(L_c)$. \square

Note que o Lema 3.38 implica que $\inf_{a \in M_n(R_c)} d(a, L_c) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Vamos calcular a outra distância necessária para o nosso propósito. Apresentamos anteriormente

o cálculo de parâmetros $a \in M_n(R_c)$ explicitamente. Aqui nos contentaremos em mostrar a existência de parâmetros $a \in M_n(R_c)$ que preencha L_c no limite, isto é, quando n tender ao infinito.

Proposição 3.41. *Para qualquer $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos $\inf_{a \in L_c} d(a, M_n(R_c)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Nós procuramos parâmetros $a = a_{n,k}(c)$ que satisfaçam a equação

$$c \pm 2\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2n}} \quad (1)$$

Nesse caso, a aplicação $R_{n,c,a}(z) = z^n + a/z^n + c$ tem um ponto crítico igual a um valor crítico, portanto, tem um ponto crítico fixo. Assim, esse ponto não escapa para o infinito, portanto, $a \in M_n(R_c)$.

Usando $w^{2n} = a$ transformamos a equação $c + 2\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2n}}$ em

$$w^n = \frac{w}{2} - \frac{c}{2}. \quad (2)$$

Notação: Usaremos os símbolos \gg e \ll para dizer que um determinado valor está próximo superiormente e inferiormente a outro valor respectivamente.

Vejamos algumas preliminares

Afirmção 1 : A função

$$f(r) = r^n + \frac{r}{2} - \frac{|c|}{2}$$

tem uma única raiz positiva $r = u_n > 0$.

DEMONSTRAÇÃO :

$f'(r) = nr^{n-1} + 1/2$, então f têm pontos críticos, conseqüentemente potencial ótimo (máximos e/ou mínimos) para soluções de $r^{n-1} = -1/2n$. Agora como $n \in \mathbb{Z}^+$, existem dois casos:

- (i) Se n é par, então $n - 1$ é ímpar, assim f tem pelo menos uma solução ótima (e está em \mathbb{R}^-). Como $f(r) > 0$ para $r \ll 0$ e $r \gg 0$, f tem um mínimo. Como $f(0) = -\frac{|c|}{2} < 0$ e $f(r) > 0$ para r grande, f possui uma raiz positiva.
- (ii) Se n é ímpar, então $n - 1$ é par, assim f não tem solução ótima, f é monótona crescente, Como $f(0) < 0$ e $f(r) > 0$ para $r \gg 0$, f tem uma única raiz.

Afirmção 2 : A função

$$g(r) = r^n - \frac{r}{2} - \frac{|c|}{2}$$

tem única raiz positiva $r = v_n > 0$.

DEMONSTRAÇÃO :

$g'(r) = nr^{n-1} - 1/2$, então g têm pontos críticos, logo potencial ótimo em soluções de $r^{n-1} = 1/2n$. Como $n \in \mathbb{Z}^+$, existem dois casos:

- (i) Se n é par, então $n - 1$ é ímpar, assim g tem pelo menos uma solução ótima (e está em \mathbb{R}^+). Como $g(r) > 0$ para $r \ll 0$ e $r \gg 0$, g tem um mínimo. Como

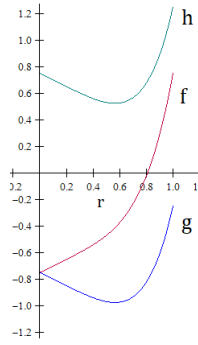


Figura 3.10: As funções $f(r) = r^n + \frac{r}{2} - \frac{|c|}{2}$ em vermelho, $g(r) = r^n - \frac{r}{2} - \frac{|c|}{2}$ em azul e $h(r) = r^n - \frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$ nem verde. Aqui ilustramos o caso no qual $c = 1.5, n = 5$, ou seja, $|c| \geq 1$.

$g(0) = -\frac{|c|}{2} < 0$ e $g'(0) < 0$ e $g(r) > 0$ para $r \gg 0$, g possui uma raiz positiva (e uma raiz negativa).

- (ii) Se n é ímpar, então $n-1$ é par, assim g tem até duas soluções ótimas. Como $g(r) < 0$ para $r \ll 0$ e $g'(0) < 0$ um ótimo deve estar em \mathbb{R}^- . Como $g(r) > 0$ para $r \gg 0$, existe também uma solução ótima em \mathbb{R}^+ . Como $g(0) < 0$, existe única solução em \mathbb{R}^+ .

Afirmção 3 : $0 < u_n < v_n$.

DEMONSTRAÇÃO :

Usando que $\frac{|c|}{2} = (u_n)^n + \frac{u_n}{2} = (v_n)^n - \frac{v_n}{2}$. segue o resultado.

Afirmção 4 : $v_n \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow \infty$, e se $|c| \geq 1$, então $u_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. E se $|c| < 1$, então $u_n \rightarrow |c|$, quando $n \rightarrow \infty$.

DEMONSTRAÇÃO :

Este caso é feito por contradição.

Como v_n é raiz, segue que

$$v_n^n - \frac{v_n}{2} = \frac{|c|}{2}.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(v_n^n - \frac{v_n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c|}{2} \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{2} = \frac{|c|}{2}.$$

Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n < 1$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^n = 0$ e neste caso teríamos $\frac{|c|}{2} < 0$, o que é uma contradição.

Agora suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n > 1$. Deste modo, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^n = \infty$, o que também é uma contradição. Portanto, $v_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado, como u_n é raiz segue que

$$u_n^n + \frac{u_n}{2} = \frac{|c|}{2}.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(u_n^n + \frac{u_n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c|}{2} \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2} = \frac{|c|}{2}.$$

Se $|c| \geq 1$. Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^n = 0$. Neste caso teríamos $1 > \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{|c|}{2} < 1$, o que é um absurdo. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > 1$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^n = \infty$, outra contradição. Portanto, $u_n \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow \infty$. Desde que $|c| \geq 1$.

Se $|c| < 1$ Pelas mesmas análises acima segue que $u_n \rightarrow |c|$, quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmção 5 : Se w é uma solução da equação (2), então $u_n \leq |w| \leq v_n$.
DEMONSTRAÇÃO :

Primeiramente, v_n é o único número inteiro positivo satisfazendo $r^n = \frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$, e para $r > v_n$ temos $r^n > \frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$. Mas se $w^n = \frac{w}{2} - \frac{c}{2}$, então $|w|$ é um número positivo satisfazendo $(|w|)^n = \left| \frac{w}{2} - \frac{c}{2} \right| \leq \frac{|w|}{2} + \frac{|c|}{2}$. Assim $|w| \leq v_n$. E ainda, u_n é o único número inteiro positivo satisfazendo $r^n = -\frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$, e se $r < u_n$, então $r^n < -\frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$. Assim se w é solução, então $|w|^n = \left| \frac{w}{2} - \frac{c}{2} \right| \geq \left| \frac{|c|}{2} - \frac{|w|}{2} \right| \geq \frac{|c|}{2} - \frac{|w|}{2}$, conseqüentemente $|w| \geq u_n$.

O restante da prova é dividida em dois casos. Mas antes de prosseguir precisamos a seguinte definição.

Definição 3.42. Para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$, e $\gamma > 0$ pequeno, seja

$$S_{n,k} = \mathcal{N}_\gamma(\mathbb{A}(u_n, v_n)) \cap \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| \text{Arg}(w) - \frac{\text{Arg}(-c)}{n} - \frac{2k\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{n} \right\}.$$

Cada $S_{n,k}$ tem ângulo inferior limitado por $\Theta_{n,k} = \frac{\text{Arg}(-c)}{n} - \frac{(2k-1)\pi}{n}$ e ângulo superior limitado por $\Theta_{n,k+1}$ e o conjunto de $\overline{S_{n,k}}$, para $k = \{0, \dots, n-1\}$, partições $\overline{\mathbb{A}(u_n - \gamma, v_n + \gamma)}$.

Caso (1) : Assuma $|c| \geq 1$.

Afirmção 6 : Se $|c| \geq 1$, a função

$$h(r) = r^n - \frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$$

é estritamente positiva para $r > 0$.

DEMONSTRAÇÃO :

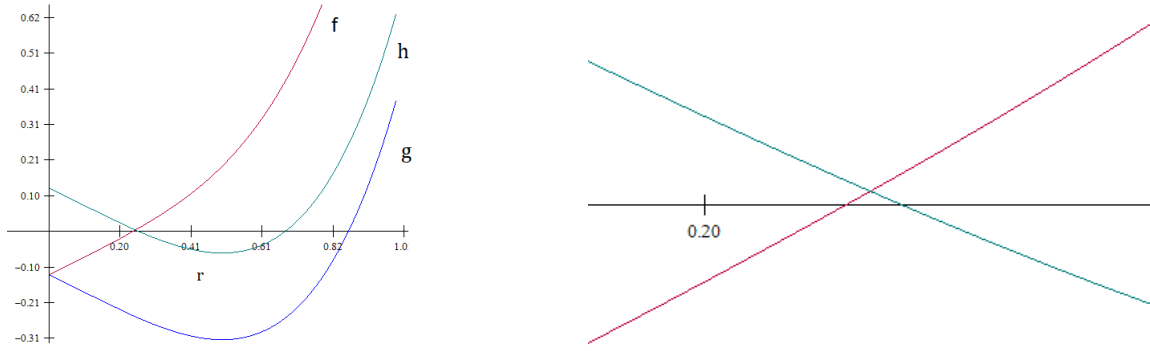


Figura 3.11: À direita temos as funções $f(r) = r^n + \frac{r}{2} - \frac{|c|}{2}$ em vermelho, $g(r) = r^n - \frac{r}{2} - \frac{|c|}{2}$ em azul e $h(r) = r^n - \frac{r}{2} + \frac{|c|}{2}$ em verde. Ilustramos o caso $|c| < 1$ com $c = 0.25$, $n = 4$ e à esquerda temos um zoom da interseção entre f e h , ilustrando $u_n < |c| < v_n$.

$h'(r) = nr^{n-1} - \frac{1}{2}$, assim h tem pontos críticos, consequentemente potencial ótimo em soluções de $r^{n-1} = 1/(2n)$.

- (i) Se n é par, então $n - 1$ é ímpar, assim h tem um ponto crítico. Como $h(r) > 0$ para $r \gg 0$ e $h'(0) < 0$, deve haver um ótimo (mínimo) em \mathbb{R}^+ , a saber a raiz positiva de $(\frac{1}{2n})^{n-1}$. Nós mostraremos abaixo que h é positivo nesse mínimo, desde que $|c| \geq 1$, portanto, h é sempre positivo.
- (ii) Se n é ímpar, então $n - 1$ é par, assim h tem dois ponto críticos. Novamente $h(r) > 0$ para $r \gg 0$ e $h'(0) < 0$, deve haver um ótimo (mínimo) em \mathbb{R}^+ , a saber a raiz positiva de $(\frac{1}{2n})^{n-1}$, e veja abaixo que h é positivo e essa raiz garante que h é positivo para $r > 0$.

Como $|c| \geq 1$ temos :

$$\begin{aligned}
 h\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) &= \left(\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{|c|}{2} \\
 &= \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{|c|}{2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{|c|}{2} \\
 &= \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\right) + \frac{|c|}{2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) + \frac{|c|}{2} \\
 &= \frac{1}{2}\left(|c| + \frac{1}{n} - 1\right) \stackrel{|c| \geq 1}{\geq} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) > 0.
 \end{aligned}$$

Afirmção 7 : Para w na fronteira de qualquer $S_{n,k}$, temos:

$$\frac{|w|}{2} < \left|w^n + \frac{c}{2}\right|.$$

DEMONSTRAÇÃO :

Primeiro considere os segmentos de arco limite. Usaremos $|w^n + \frac{c}{2}| \geq |\frac{|c|}{2} - |w|^n|$. No interior do arco limite circular, temos $|w| < u_n$, conseqüentemente $|w|^n - \frac{|c|}{2} < \frac{|w|}{2}$, assim $\frac{|c|}{2} - |w|^n > \frac{|w|}{2}$. Em seguida no exterior do arco limite circular temos, $|w| > v_n$, então $|w|^n > \frac{|w|}{2} + \frac{|c|}{2}$, conseqüentemente $|w|^n - \frac{|w|}{2} > \frac{|c|}{2}$.

Considere os segmentos de arco limitados. Suponha que $w = re^{i\theta_k}$ encontr-se em algum raio limite. Note que

$$w^n = r^n e^{Arg(-c)} e^{i\pi} = r^n e^{Arg(c)}.$$

Daí

$$w^n + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} (2r^n e^{iArg(c)} + |c| e^{iArg(c)}) = \frac{1}{2} (e^{iArg(c)} (2r^n + |c|)),$$

portanto, $|w^n + \frac{c}{2}| = \frac{1}{2} (2r^n + |c|) = r^n + \frac{|c|}{2}$. Pela afirmação 6, $r^n + \frac{|c|}{2} > \frac{r}{2} = \frac{|w|}{2}$ é verdade para qualquer $r > 0$, assim temos o resultado.

Afirmação 8 : A equação (2) tem solução, que chamaremos $w_{n,k}$, em $S_{n,k}$.

DEMONSTRAÇÃO :

A afirmação anterior nos fornece imediatamente que, pelo Teorema de Rouché 1.43, $w^n - \frac{w}{2} + \frac{c}{2}$ possui o mesmo número de raízes que $w^n + \frac{c}{2}$ em cada $S_{n,k}$, ou seja, uma raiz.

Restante da prova do Caso (1) : Seja $a_{n,k} = (w_{n,k})^{2n}$, então $c \pm 2\sqrt{a_{n,k}}$. Como o $w_{n,k}$ tendem a preencher densamente S^1 quando $n \rightarrow \infty$, pela Proposição 3.37, conseguimos que $a_{n,k}$ tendem a preencher o limaçon L_c quando $n \rightarrow \infty$ e como $a_{n,k} \in M_n(R_c)$ obtemos o resultado.

Caso (2) : Assuma $|c| < 1$.

DEMONSTRAÇÃO :

Este caso é similar ao caso acima, porém um pouco mais simples. Lembre-se que u_n é a única raiz positiva de f .

Note que os cálculos na prova da afirmação 6 podem ser modificados para mostrar que, para n suficientemente grande, h é negativo em seu ponto crítico positivo, conseqüentemente tem duas raízes reais positivas, $0 < x_n < y_n$, onde x_n está próximo de $|c|$ e $y_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmamos que $u_n < x_n$ e que $x_n \rightarrow |c|$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo fato de que $|c|$ é o ponto de interseção positiva dos gráficos de f e h , daí pela forma dos gráficos (justificada pelos cálculos feitos anteriormente), devemos ter $u_n < |c| < x_n$. Também note, $f(c) = h(|c|) = |c|^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, conseqüentemente $u_n, x_n \rightarrow |c|$ quando $n \rightarrow \infty$. Agora, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ e $\gamma > 0$ pequeno, seja

$$T_{n,k} = \mathcal{N}_\gamma(\mathbb{A}(x_n, y_n)) \cap \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| Arg(w) - \frac{2k\pi}{n-1} \right| < \frac{\pi}{n-1} \right\}.$$

Então seus ângulos limite são $\Phi_k = \pi(2k-1)/n-1$ e Φ_{k+1} .

Vamos mostrar que na fronteira de cada $T_{n,k}$, temos

$$\left| w^n - \frac{w}{2} \right|.$$

Primeiro, se $w = re^{i\theta}$ encontra-se em algum dos arcos circular limitado, então $r < x_n$ ou $r > y_n$, assim $h(r) > 0$, e $r^n - \frac{r}{2} > \frac{|c|}{2}$. Daí $\left| w^n - \frac{w}{2} \right| \geq \left| |w|^n - \frac{|w|}{2} \right| = \left| r^n + \frac{r}{2} \right| = r^n + \frac{r}{2} > \frac{|c|}{2}$.

Em seguida, se $w = re^{i\Theta_k}$ está no segmento de raio da fronteira, então $(e^{i\Theta})^n = e^{i\pi(2k-1)\frac{n}{n-1}} = -e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n-1}}$ e assim

$$\left| w^n - \frac{w}{2} \right| = \left| -r^n e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n-1}} - \frac{r}{2} e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n-1}} \right| = \left| r^n + \frac{r}{2} \right| = r^n + \frac{r}{2}.$$

Mas $x_n > u_n$ implica que, para todo r temos $f(r) > 0$, portanto, $r^n + \frac{r}{2} > \frac{|c|}{2}$ e está feito.

Segue pelo Teorema de Rouché, que as funções $w^n - \frac{w}{2}$ e $w^n - \frac{w}{2} + \frac{|c|}{2}$ possuem o mesmo número de raízes em cada $T_{n,k}$. Como $w^n - \frac{w}{2} = w \left(w^{n-1} - \frac{1}{2} \right) = 0$, então $w = 0$ ou $w = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$, assim temos exatamente uma solução em cada $T_{n,k}$.

Finalmente, note que mesmo $u_n \rightarrow |c| < 1$ quando $n \rightarrow \infty$, as soluções $w_{n,k}$ para n grande garantem $a \in M_n(R_c)$ e sabemos que $M_n(R_c)$ está contido em alguma vizinhança de L_c que diminui quando n cresce, assim as soluções $w_{n,k}$ devem satisfazer $|w_{n,k}| \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, e a prova pode ser terminada como no caso 1.

Combinando a Proposição 3.41 com o Lema 3.38 completamos a prova do Teorema 3.36 no caso $c \neq 0$. \square

Capítulo 4

A reta real estendida como um conjunto de Julia

Neste capítulo, introduzimos uma família de funções racionais $\{F_n\}$, definida recursivamente e mostramos que o conjunto de Julia de F_n é $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vamos calcular o conjunto de Julia de F_n em duas etapas, primeiro explorando a comutatividade desta família e, em seguida, estabelecendo a conjugação desta família com outra conhecida família de funções. Finalmente, nós estudamos F_n como uma função real e mostramos que é caótico em $\mathbb{R} \setminus B_n$, onde subconjunto específico de \mathbb{R} .

Mas antes de seguir, vale lembrar que para uma função contínua $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico é dito ser **caótico** segundo Devaney [7] se satisfaz as seguintes condições :

1. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em X .
2. f é topologicamente transitiva, isto é, para todo par de abertos U, V de X existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
3. f possui dependência sensitiva em relação a condições iniciais, isto é, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $x \in X$ e para qualquer subconjunto aberto U contendo x , existe $y \in U$ e $n \geq 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

4.1 A família recursiva e suas propriedades

Nesta seção definimos uma família de funções racionais $\{F_n\}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ recursivamente e determinamos seu conjunto de Julia.

Considere $f(z) = z^2 + 1$. A iteração de Newton associado a essa função é dada por,

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{z^2 - 1}{2z}. \quad (\clubsuit)$$

Perceba que (\clubsuit) satisfaz a relação

$$F_2(z) = \frac{zF_1(z) - 1}{z + F_1(z)}$$

para $F_1(z) = z$ e $F_2(z) = N(z)$. Motivados por essa observação definimos a seguinte família recursivamente.

Seja $F_1(z) = z$ e para $n \geq 2$, coloque

$$F_n(z) = \frac{zF_{n-1}(z) - 1}{z + F_{n-1}(z)}. \quad (1)$$

Note que, se $F_{n-1}(z_0) = \infty$, então

$$F_n(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{zF_{n-1}(z) - 1}{z + F_{n-1}(z)}.$$

A seguir apresentaremos uma série de resultados que descrevem algumas propriedades dessa família.

Lema 4.1. Para $k \geq 1$ e $n > k$,

$$F_n(z) = \frac{F_k(z)F_{n-k}(z) - 1}{F_k(z) + F_{n-k}(z)}.$$

Demonstração. Se $k = 1$, segue por (1) que

$$F_n(z) = \frac{F_1(z)F_{n-1}(z)}{F_1(z) + F_{n-1}(z)} = \frac{zF_{n-1}(z) - 1}{z + F_{n-1}(z)}.$$

Suponha que, para algum $k > 1$ e $n > k$, temos

$$F_n(z) = \frac{F_k(z)F_{n-k}(z) - 1}{F_k(z) + F_{n-k}(z)}. \quad (2)$$

Agora suponha $n > k + 1$. Então F_n satisfaz (2). Note que em (1) temos

$$F_{k+1}(z) = \frac{zF_k(z) - 1}{z + F_k(z)}$$

$$F_{k+1}(z) - \left(\frac{zF_k(z) - 1}{z + F_k(z)} \right) = 0$$

$$\frac{zF_{k+1}(z) + F_k(z)F_{k+1}(z) - zF_k(z) + 1}{z + F_k(z)} = 0$$

$$zF_{k+1}(z) + F_k(z)F_{k+1}(z) - zF_k(z) + 1 = 0$$

$$F_k(z)(F_{k+1}(z) - z) = -zF_{k+1} - 1$$

$$F_k(z) = \frac{zF_{k+1}(z) + 1}{z - F_{k+1}(z)}.$$

Substituindo a expressão acima em (2) temos

$$F_n(z) = \frac{\left(\frac{zF_{k+1}(z)+1}{z-F_{k+1}(z)}\right)F_{n-k}-1}{\left(\frac{zF_{k+1}(z)+1}{z-F_{k+1}(z)}\right)+F_{n-k}(z)} =$$

$$\frac{\frac{(zF_{k+1}(z)+1)F_{n-k}(z)-z+F_{k+1}(z)}{z-F_{k+1}(z)}}{\frac{zF_{k+1}(z)+1+F_{n-k}(z)(z-F_{k+1}(z))}{z-F_{k+1}(z)}} = \frac{(zF_{k+1}(z)+1)F_{n-k}(z)-z+F_{k+1}(z)}{zF_{k+1}(z)+1+F_{n-k}(z)(z-F_{k+1}(z))} =$$

$$\frac{F_{k+1}(z)(zF_{n-k}(z)+1)+F_{n-k}(z)-z}{F_{k+1}(z)(z-F_{n-k}(z))+zF_{n-k}(z)+1} = \frac{F_{k+1}(z)\left(\frac{zF_{n-k}(z)+1}{z-F_{n-k}(z)}\right)-1}{F_{k+1}+\frac{zF_{n-k}(z)+1}{z-F_{n-k}(z)}} =$$

$$\frac{F_{k+1}(z)F_{n-k-1}(z)-1}{F_{k+1}(z)+F_{n-k-1}(z)} = \frac{F_{k+1}(z)F_{n-(k+1)}(z)-1}{F_{k+1}(z)+F_{n-(k+1)}(z)}.$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, segue o resultado. \square

Lema 4.2. Para $n \geq 1$ e $k \geq 1$, $F_n \circ F_k = F_{nk}$.

Demonstração. Se $n = 1$ e $k \geq 1$ segue pela definição de $F_1(z)$, pois

$$(F_1 \circ F_k)(z) = F_1(z)(F_k(z)) = F_k(z) = F_{1k}(z).$$

Agora suponha $F_n \circ F_k = F_{nk}$ para algum $n \geq 1$ e $k \geq 1$. Por (1)

$$F_{n+1}(F_k(z)) = \frac{F_k(z)F_n(F_k(z)) - 1}{F_k(z) + F_n(F_k(z))} = \frac{F_k(z)F_{nk}(z) - 1}{F_k(z) + F_{nk}(z)}$$

$$\stackrel{\text{Lema 4.1}}{=} F_{n+1+k}(z) = F_{(n+1)k}(z).$$

Portanto pelo princípio de indução segue o resultado. \square

Corolário 4.3. Para $n \geq 1$ e $k \geq 1$, $F_n \circ F_k = F_k \circ F_n$.

Demonstração. Pelo Lema 4.2 temos $F_n \circ F_k = F_{nk} = F_{kn} = F_k \circ F_n$. \square

Lema 4.4. Para $n \geq 2$, o grau de F_n é pelo menos 2.

Demonstração. Suponha $F_n = \frac{p_n(z)}{q_n(z)}$, onde p_n e q_n são polinômios. Vamos mostrar por indução que $p_n(z) = zp_{n-1}(z) - q_{n-1}(z)$ e $q_n(z) = zq_{n-1}(z) + p_{n-1}(z)$, onde $p_1(z) = z$ e $q_1(z) = 1$.

O caso $n = 1$ é imediato pelas condições dadas acima.

Agora suponha

$$F_n(z) = \frac{p_n(z)}{q_n(z)} = \frac{zp_{n-1}(z) - q_{n-1}(z)}{zq_{n-1}(z) + p_{n-1}(z)}$$

Note que

$$\begin{aligned}
 \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= F_{n+1}(z) = \frac{zF_n(z)-1}{z+F_n(z)} = \frac{z\left(\frac{p_n(z)}{q_n(z)}\right)-1}{z+\left(\frac{p_n(z)}{q_n(z)}\right)} \\
 &= \frac{z\left(\frac{zp_{n-1}(z)-q_{n-1}(z)}{zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z)}\right)-1}{z+\left(\frac{zp_{n-1}(z)-q_{n-1}(z)}{zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z)}\right)} \\
 &= \frac{\frac{z(zp_{n-1}(z)-q_{n-1}(z))-(zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z))}{zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z)}}{z+\left(\frac{zp_{n-1}(z)-q_{n-1}(z)}{zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z)}\right)} \\
 &= \frac{z(zp_{n-1}(z)-q_{n-1}(z))-(zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z))}{z(zq_{n-1}(z)+p_{n-1}(z))+zp_{n-1}(z)-q_{n-1}(z)} \\
 &= \frac{zp_n(z)-q_n(z)}{zq_n(z)+p_n(z)}.
 \end{aligned}$$

Como $\text{grau}(p_1) > \text{grau}(q_1)$ e $\text{grau}(p_n) = \text{grau}(p_{n-1}) + 1$, segue que $\text{grau}(p_n) > \text{grau}(q_n)$ e conseqüentemente $F_n(\infty) = \infty$. Por indução sobre n e usando (1) podemos ver que $\pm i$ são pontos fixos de F_n . De fato, $F_1(i) = i$. Suponha $F_n(i) = i$. Note que

$$F_{n+1}(i) = \frac{iF_n(i) - 1}{i + F_n(i)} = \frac{(i)^2 - 1}{i + i} = \frac{-2}{i} = i.$$

Analogamente mostra-se que $-i$ é ponto fixo de F_n . Assim $\text{grau}(F_n) \geq 2$, a não ser que $F_n(z) = z$, o que é impossível. \square

O teorema a seguir determinará o conjunto de Julia de F_n .

Teorema 4.5. *Para $n \geq 2$, o conjunto de Julia de F_n é $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que o conjunto de Julia de $F_2(z) = \frac{z^2-1}{2z}$ é $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Os pontos $z = \pm i$ são pontos fixos superatratores. De fato, pelo que vimos no lema 4.4, $\pm i$ são pontos fixos. Além disso

$$F_2'(z) = \frac{z^2 + 1}{2z^2}.$$

Assim $F_2'(\pm i) = 0 < 1$.

Por outro lado ∞ é ponto fixo repulsor de F_2 . De fato, ∞ é ponto fixo, pois

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - 1}{2z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z - 1/z)}{2z} = \infty.$$

E ainda,

$$g(z) = \frac{1}{F_2\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{\frac{2}{z}} = \frac{\frac{1-z^2}{z^2}}{\frac{2}{z}} = \frac{1-z^2}{2z}$$

e

$$g'(z) = \frac{2 + 2z^2}{(1 - z^2)^2} \Rightarrow g'(0) = 2 > 1.$$

Logo ∞ é ponto fixo repulsor. Portanto, ∞ pertence a $J(F_2)$ e o conjunto de todas as pré-imagens iteradas de ∞ , $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : F_2^n(z) = \infty \text{ para algum } n \geq 0\}$, é denso em $J(F_2)$. Como todas as soluções de $F_2(z) = c$ são reais, para algum c real, concluímos que $J(F_2) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Como as fronteiras da bacias de atração dos pontos fixos i e $-i$ são subconjuntos de $J(F_2)$, o semiplano superior é a bacia de atração de i e o semiplano inferior é a bacia de atração de $-i$. assim sendo $J(F_2) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

Obs 4.6. De fato, as soluções de

$$\frac{z^2 - 1}{2z} = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

são reais. Note que $\frac{z^2-1}{2z} = c$, se e só se, $\frac{z^2-1}{2z} - c = 0$, ou seja, $\frac{z^2-1-2cz}{2z} = 0$ e então $z^2 - 2cz - 1 = 0$. Portanto $z = c \pm \sqrt{c^2 + 1}$, que são ambas reais, pois c é real.

Teorema 4.7. F_n e z^n são conjugados.

Demonstração. Suponha que φ seja uma função de Möbius tal que $\varphi(0) = -i$ e $\varphi(\infty) = i$. Assim $\varphi(z) = i \frac{z-a}{z+a}$ para $a \in \mathbb{C}$.

Note que para $F_1(z) = z$, temos :

$$(F_1 \circ \varphi)(z) = F_1(\varphi(z)) = F_1\left(i \frac{z-a}{z+a}\right) = i \frac{z-a}{z+a}.$$

E para $F_2(z) = \frac{z^2-1}{2z}$, temos :

$$\begin{aligned} (F_2 \circ \varphi)(z) &= F_2(\varphi(z)) = \frac{-\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^2 - 1}{2i\left(\frac{z-a}{z+a}\right)} \\ &= \frac{\frac{-(z-a)^2 - (z+a)^2}{(z+a)^2}}{\frac{2i(z-a)}{(z+a)}} = \frac{-(z^2 - 2az + a^2 + z^2 + 2az + a^2)}{2i(z-a)(z+a)} \\ &= \frac{-2(z^2 + a^2)}{2i(z^2 - a^2)} = i \left(\frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2}\right). \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar por indução que

$$\begin{cases} (F_n \circ \varphi)(z) = i \left(\frac{z^n - a^n}{z^n + a^n}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (F_n \circ \varphi)(z) = i \left(\frac{z^n + a^n}{z^n - a^n}\right), & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (4.1)$$

Seja n ímpar, pelo que vimos acima para $n = 1$ a sentença é verdadeira. Suponha então que $(F_n \circ \varphi)(z) = i \left(\frac{z^n - a^n}{z^n + a^n}\right)$. Como n é ímpar segue que $n + 1$ é par e daí

$$\begin{aligned}
 (F_{n+1} \circ \varphi)(z) &= F_{n+1}(\varphi(z)) = \frac{\varphi(z)F_n(\varphi(z))-1}{\varphi(z)+F_n(\varphi(z))} \\
 &= \frac{i\left(\frac{z-a}{z+a}\right)i\left(\frac{z^n-a^n}{z^n+a^n}\right)-1}{i\left(\frac{z-a}{z+a}\right)+i\left(\frac{z^n-a^n}{z^n+a^n}\right)} \\
 &= \frac{-\left(\frac{(z-a)(z^n-a^n)}{(z+a)(z^n+a^n)}\right)-1}{i\left(\frac{(z-a)(z^n+a^n)(z+a)(z^n-a^n)}{(z+a)(z^n+a^n)}\right)} \\
 &= \frac{-\left(\frac{(z-a)(z^n-a^n)+(z+a)(z^n+a^n)}{(z+a)(z^n+a^n)}\right)}{i\left(\frac{(z-a)(z^n+a^n)(z+a)(z^n-a^n)}{(z+a)(z^n+a^n)}\right)} \\
 &= \frac{-(z^{n+1}-a^n z - a z^n + a^{n+1} + z^{n+1} + a^n z + a z^n + a^{n+1})}{i(z^{n+1} + a^n z - a z^n - a^{n+1} + z^{n+1} - a^n z + a z^n - a^{n+1})} \\
 &= \frac{-2(z^{n+1} + a^{n+1})}{2i(z^{n+1} - a^{n+1})} = i \left(\frac{z^{n+1} + a^{n+1}}{z^{n+1} - a^{n+1}} \right).
 \end{aligned}$$

Analogamente, para $n = 2$ a sentença é verdadeira. Suponha então que $(F_n \circ \varphi)(z) = i\left(\frac{z^n+a^n}{z^n-a^n}\right)$. Como n é par segue que $n + 1$ é ímpar e então

$$\begin{aligned}
 (F_{n+1} \circ \varphi)(z) &= F_{n+1}(\varphi(z)) = \frac{\varphi(z)F_n(\varphi(z))-1}{\varphi(z)+F_n(\varphi(z))} \\
 &= \frac{i\left(\frac{z-a}{z+a}\right)i\left(\frac{z^n+a^n}{z^n-a^n}\right)-1}{i\left(\frac{z-a}{z+a}\right)+i\left(\frac{z^n+a^n}{z^n-a^n}\right)} = \frac{-\left(\frac{(z-a)(z^n+a^n)}{(z+a)(z^n-a^n)}\right)-1}{i\left(\frac{(z-a)(z^n-a^n)(z+a)(z^n+a^n)}{(z+a)(z^n-a^n)}\right)} \\
 &= \frac{-\left(\frac{(z-a)(z^n+a^n)+(z+a)(z^n-a^n)}{(z+a)(z^n-a^n)}\right)}{i\left(\frac{(z-a)(z^n-a^n)(z+a)(z^n+a^n)}{(z+a)(z^n-a^n)}\right)} \\
 &= \frac{-(z^{n+1}-a^n z - a z^n - a^{n+1} + z^{n+1} + a^n z + a z^n - a^{n+1})}{i(z^{n+1} + a^n z - a z^n + a^{n+1} + z^{n+1} - a^n z + a z^n + a^{n+1})} \\
 &= \frac{-2(z^{n+1} - a^{n+1})}{2i(z^{n+1} + a^{n+1})} = i \left(\frac{z^{n+1} - a^{n+1}}{z^{n+1} + a^{n+1}} \right).
 \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $(F_n \circ \varphi)(z) = \varphi(z^n)$, se e só se, $a = -1$, deste modo se, $a = -1$ temos

$$\varphi(z) = i \frac{z+1}{z-1} \quad \text{e daí} \quad \varphi(z^n) = i \frac{z^n+1}{z^n-1},$$

além disso substituindo $a = -1$ em 4.1 temos $(F_n \circ \varphi)(z) = \frac{z^n+1}{z^n-1} = \varphi(z^n)$ para todo n .

Por outro lado, se $(F_n \circ \varphi)(z) = \varphi(z^n)$ temos dois casos :

Caso (1) : Suponha n ímpar, então :

$$i \left(\frac{z^n - a^n}{z^n + a^n} \right) = i \left(\frac{z^n - a}{z^n + a} \right)$$

$$z^{2n} + az^n - a^n z^n - a^{n+1} = z^{2n} - az^n + a^n z^n - a^{n+1}$$

$$2az^n - 2a^n z^n = 0$$

$$2az^n(-a^{n-1} + 1) = 0.$$

$$\text{Logo} \quad 2az^n = 0, \text{ ou } a^{n-1} = 1$$

E como $a \neq 0$ segue que $a = \pm 1$ pois $n - 1$ é par.

Caso (2) : Suponha n par, então :

$$i \left(\frac{z^n + a^n}{z^n - a^n} \right) = i \left(\frac{z^n - a}{z^n + a} \right)$$

$$z^{2n} + az^n + a^n z^n + a^{n+1} = z^{2n} - az^n - a^n z^n + a^{n+1}$$

$$2az^n + 2a^n z^n = 0$$

$$2az^n(a^{n-1} + 1) = 0.$$

$$\text{Logo} \quad 2az^n = 0, \text{ ou } a^{n-1} = -1$$

E como $a \neq 0$ segue que $a = -1$ pois $n - 1$ é ímpar. Portanto F_n e z^n são conjugados por $\varphi(z) = i \frac{z+1}{z-1}$. \square

Agora vamos descrever $F_n(z) = \frac{p_n(z)}{q_n(z)}$ mais especificamente. Pelo Teorema 4.7, F_n é uma função racional do grau n e p_n e q_n são dois polinômios relativamente primos de grau n e $n - 1$ respectivamente. A seguinte proposição mostra que F_n tem n raízes reais distintas e $n - 1$ pólos reais.

Obs 4.8. Vale aqui destacar que o fato de F_n e z^n serem conjugados nos diz muito. Por exemplo, as propriedades dinâmicas de z^n são preservadas pela φ .

Proposição 4.9. Todas as raízes de q_n e p_n são reais e distintas.

Demonstração. De acordo com a discussão acima, $F_n(z) = \infty$, se e somente se, $q_n(z) = 0$ ou $z = \infty$. Por outro lado $F_n(z) = \infty$, se e somente se, $\varphi((\varphi^{-1}(z))^n) = \infty$. Como $\varphi(1) = \infty$, temos $(\varphi^{-1}(z))^n = 1$. Daí $\varphi^{-1}(z)$ deve ser uma raiz primitiva da unidade (isto é, $1, e^{2\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n}$) e conseqüentemente $z = \infty, \varphi(e^{2\pi i/n}), \dots, \varphi(e^{2(n-1)\pi i/n})$. Assim sendo, $q_n(z) = 0$ possui $n - 1$ raízes reais distintas. Além disso $p_n(z) = 0$, se

e somente se, $F_n(z) = 0$. Como $\varphi(-1) = 0$, por argumentos similares mostra-se que $f_n(z) = 0$, se e somente se, $(\varphi^{-1}(z))^n = -1$. Deste modo p_n possui n raízes reais distintas. \square

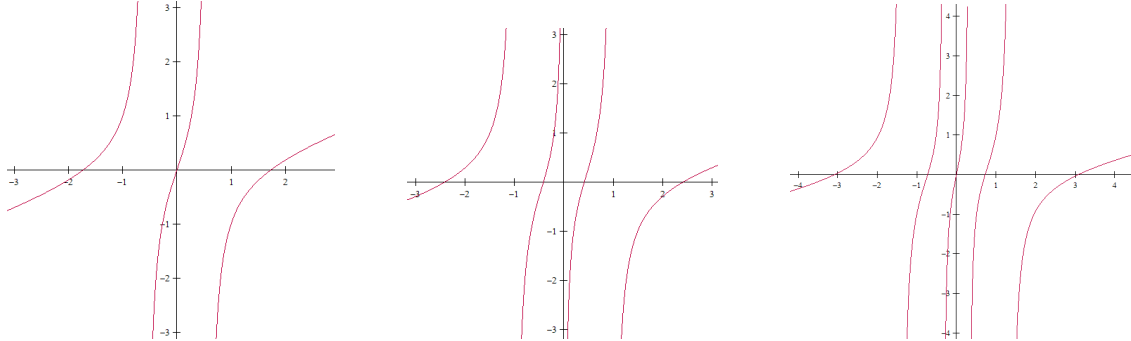


Figura 4.1: Gráficos de F_n para $n = 3, 4, 5$.

4.1.1 F_n como uma função racional real

Nesta seção, consideramos F_n como uma função real e mostraremos que F_n é caótico em $\mathbb{R} \setminus B_n$. Como F_n não é definida nas raízes de q_n como uma função real, só podemos estudar a dinâmica de F_n no conjunto $\mathbb{R} \setminus B_n$, onde

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_n^{-k}(\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é um pólo de } F_n\}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_n^{-k}(\infty).$$

Pela definição de B_n temos $F_n(\mathbb{R} \setminus B_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus B_n$.

Por outro lado, $\varphi(e^{i\theta}) = i \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

De fato,

$$\begin{aligned} i \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} &= i \left(\frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta + 1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta - 1} \right) = i \left(\frac{(\cos \theta + 1) + i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta - 1) + i \operatorname{sen} \theta} \right) \\ &= i \left(\frac{(\cos \theta + 1) + i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta - 1) + i \operatorname{sen} \theta} \right) \left(\frac{(\cos \theta - 1) - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta - 1) - i \operatorname{sen} \theta} \right) \\ &= i \left(\frac{(\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) - i \operatorname{sen} \theta (\cos \theta + 1) + i \operatorname{sen} \theta (\cos \theta - 1) + \operatorname{sen}^2 \theta}{(\cos \theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\cos^2\theta - 1 - i \operatorname{sen}\theta \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta + i \operatorname{sen}\theta \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta - 2 \cos\theta + 1 + \operatorname{sen}^2\theta} \right) \\
 &= i \left(\frac{-2i \operatorname{sen}\theta}{2 - 2 \cos\theta} \right) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})}{1 - \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})} \\
 &= \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{1 - (\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2}))} = \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{1 - \cos^2(\frac{\theta}{2}) + \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})} \\
 &= \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} = \cot(\frac{\theta}{2}).
 \end{aligned}$$

Assim se $C(\theta) = \cot(\frac{\theta}{2})$ e $D_n : S^1 \rightarrow S^1$ é definida por:

$$D_n(\theta) = n\theta \pmod{2\pi},$$

onde S^1 é o círculo unitário, então a relação $(F_n \circ \varphi)(z) = \varphi(z^n)$ pode ser escrita como $(F_n \circ C)(\theta) = (C \circ D_n)(\theta)$, onde $z = e^{i\theta}$.

De fato,

$$F_n(C(\theta)) = F_n \left(i \left(\frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} \right) \right) = i \left(\frac{e^{in\theta} + 1}{e^{in\theta} - 1} \right) = C(n\theta) = (C \circ D_n)(\theta).$$

Vamos agora reduzir o domínio de D_n para $S^1 \setminus A_n$, onde $A_n = \bigcup_{k \geq 1} D_n^{-k}(0)$, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 \setminus A_n & \xrightarrow{D_n} & S^1 \setminus A_n \\
 C(\theta) \downarrow & & \downarrow C(\theta) \\
 \mathbb{R} \setminus B_n & \xrightarrow{F_n} & \mathbb{R} \setminus B_n
 \end{array}$$

é comutativo. Como A_n é denso em S^1 , $C(A_n \setminus \{0\}) = B_n$ e $C(\theta)$ é um homeomorfismo para $0 < \theta < 2\pi$.

Obs 4.10. A_n é denso em S^1 .

Demonstração. Seja n fixo, porém arbitrário. Fixe x_0 no intervalo $(0, 2\pi)$. Dado $\epsilon > 0$ considere o intervalo $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Tome k tal que $\frac{1}{n^k} < \epsilon$ e $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p_0} \in [0, 1]$. Note que

$$D_n^k(x) = n^k x \pmod{2\pi} \quad \text{se, e somente se,} \quad n^k x \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Desta forma sendo $x = \frac{p_0 2\pi}{n^k}$ temos

$$Dn^k(x) = n^k \frac{p_0 2\pi}{n^k} = 2p_0\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

□

Obs 4.11. $C(A_n \setminus \{0\}) = B_n$

Demonstração. Note que pela definição de $C(\theta) = \cot \frac{\theta}{2}$, os pontos de $A_n \setminus \{0\}$ são levados no infinito. Além disso pela própria construção de F_n os pontos de B_n também são levados no infinito. Como $C(\theta)$ é homeomorfismo e F_n é sobrejetiva segue que $C(A_n \setminus \{0\}) = B_n$. \square

E então temos o seguinte resultado.

Proposição 4.12. B_n é denso em \mathbb{R}

Teorema 4.13. F_n é caótico em $\mathbb{R} \setminus B_n$.

Demonstração. Sabemos que $D_n : S^1 \rightarrow S^1$ é caótico (veja [7] [página 50]). Vamos mostrar que $D_n : S^1 \setminus A_n \rightarrow S^1 \setminus A_n$ é caótico.

(1) Os pontos periódicos de D_n são densos em S^1 . Os pontos de A_n são eventualmente levados no 0, então $x \neq 0$ e $x \in A_n$ é um ponto não periódico de D_n . Assim os pontos periódicos de D_n são densos em $S^1 \setminus A_n$.

(2) Para um subconjunto aberto não vazio U de S^1 , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $D_n^k(U) = S^1$. Assim $D_n^k(U \setminus A_n) = S^1 \setminus A_n$, uma vez que $D_n(A_n) = A_n$. Se V é um subconjunto não vazio de S^1 , então $D_n^k(U \setminus A_n) \cap (V \setminus A_n) \neq \emptyset$. Isso implica que D_n é transitiva em $S^1 \setminus A_n$.

(3) Como $D_n^k(U \setminus A_n) = S^1 \setminus A_n$ para algum $k \in \mathbb{N}$, se $x \in U \setminus A_n$, então existe $y \in U \setminus A_n$ tal que $d(D_n^k(x), D_n^k(y)) > \frac{1}{2}$. Assim D_n possui dependência sensível a condições iniciais em $S^1 \setminus A_n$. Portanto D_n é caótico em $S^1 \setminus A_n$.

Como o diagrama 4.1.1 é comutativo, a densidade dos pontos periódicos de F_n e a transitividade topológica de F_n são concluídas a partir dessa discussão. Também para cada conjunto aberto U em $\mathbb{R} \setminus B_n$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_n^k(U) = \mathbb{R} \setminus B_n$. Assim, F_n tem uma dependência sensível das condições iniciais em $\mathbb{R} \setminus B_n$. \square

Obs 4.14. Todas as figuras contidas no trabalho foram construídas pelo autor com o auxílio dos softwares citados nas referências bibliográficas. As figuras do capítulo 2 foram feitas usando [9], já nos capítulos 2 e 3 usando [16], [8] e [17]. E por fim no capítulo 4 as figuras foram feitas usando [17].

Considerações Finais

Neste trabalho investigamos propriedades geométricas e dinâmicas do Conjunto de Julia, do Conjunto de Julia Cheio, e do Connectness Locus e pudemos apresentar que para a família $P_{n,c}(z) = z^n + c$ e para c fora de S^1 os limites geométricos do Julia e do Julia cheio são bem definidos, mas para $c \in S^1$ é inconclusivo. Já no caso da família $R_{n,c,a}(z) = z^n + \frac{a}{z^n} + c$ para qualquer c o Julia e Julia cheio os limites geométricos são bem definidos e o $M_n(R_c)$ converge a um limaçon. E por fim verificamos que para de fato $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é um conjunto de Julia para família $F_n = \frac{zF_{n-1}(z)-1}{z+F_{n-1}(z)}$, para $n \geq 2$ e $F_1(z) = z$ e que F_n é caótico em um subconjunto específico de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Após o estudo minucioso dos artigos que compõem este trabalho me fiz alguns questionamentos. Será possível calcular os limites geométricos dos Conjuntos de Julia e Julia Cheio e do Connectness Locus para a família $F_a(z) = z^n + \frac{a}{z^d}$, $n \geq 2$, $d \geq 1$? Além disso será possível fazer uma análise semelhante para $f(z) = z^3 + 1$, $f(z) = z^4 + 1$ ou de forma mais geral para $f(z) = z^n + 1$, assim como feita no último capítulo deste trabalho? No momento procuro respostas a estas perguntas.

Referências Bibliográficas

- [1] L. AHLFORS, Complex Analysis, McGraw-Hill, Third Edition 1992.
- [2] M. AKBARI e M. RABII, The Extended Line As Julia Set. Korean Math. Soc. 52 (2015), No. 4, pp. 1107-1112
- [3] A. BEARDON, Iteration of rational functions, volume 132 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. Complex analytic dynamical systems.
- [4] L. CARLESON e T. W. GAMELIN, Complex Dynamics, Springer-Verlag, 1992.
- [5] J. CONWAY, Functions of One Complex Variable. New York : Springer-Verlag, Second edition - 1978
- [6] R. DEVANEY, "Singular perturbations of complex analytic dynamical systems," Nonlinear Dynamics and Chaos: Advances and Perspectives, Underst. Complex Syst. (Springer, Berlin), pp. 13-29.
- [7] R. DEVANEY, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd. ed., Addison-Wesley.
- [8] Dynamics Explorer. Disponível para download no site : <https://sourceforge.net/projects/detool/postdownload>. Desenvolvedores Suzanne e Brian Boyd.
- [9] Fraqtive. Disponível para download so site > <https://fraqtive.mimec.org/>
- [10] S. J. C. LIBERATO . Algumas propriedades geométricas do conjunto de Julia. Viçosa : Universidade Federal de Viçosa - 2014
- [11] A. L. NETO, Funções de uma Variável Complexa. Rio de Janeiro : IMPA - 1993
- [12] L. A. MEDEIROS, Introdução as Funções Complexas, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1972.
- [13] J. MILNOR, Dynamics in One Complex Variable. New Jersey: Princiton universety Press, Third edition.
- [14] M. G. SOARES, Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2012.
- [15] S. H. BOYD and M. J. SCHULZ. Geometric limits of Mandelbrot and Julia sets under degree growth. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. (2012),

- [16] Xaos Fractal. Disponível para download no site: <https://sourceforge.net/projects/xaos/>
- [17] Winplot. Disponível para download no site: <https://winplot.br.softonic.com/>