

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Equações diferenciais binárias aplicadas a geometria de superfícies

Erik Vinicius Amaro Alves
Magister Scientiae

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2026

ERIK VINICIUS AMARO ALVES

Equações diferenciais binárias aplicadas a geometria de superfícies

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Marco A. do C. Fernandes

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

A474e
2026

Alves, Erik Vinicius Amaro, 2001-

Equações diferenciais binárias aplicadas a geometria de superfícies / Erik Vinicius Amaro Alves. – Viçosa, MG, 2026.
1 dissertação eletrônica (84 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Marco Antônio do Couto Fernandes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2026.

Referências bibliográficas: f. 82-84.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2026.115>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Equações diferenciais. 2. Espaços generalizados.
3. Transformações de Lorentz. I. Fernandes, Marco Antônio do
Couto, 1994-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento
de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

CDD 22. ed. 515.35

ERIK VINICIUS AMARO ALVES

Equações diferenciais binárias aplicadas a geometria de superfícies

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de fevereiro de 2026.

Assentimento:

Erik Vinicius Amaro Alves
Autor

Marco Antonio do Couto Fernandes
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pelo autor em 30/04/2026 às 23:09:47 e pelo orientador em 01/05/2026 às 19:32:03. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **YSNX.F4NV.AC17** e clique no botão 'Validar documento'.

Dedico à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pelo privilégio de ter comigo boas pessoas que me apoiaram até aqui.

Agradeço à minha família por não medir esforços em me ajudar durante essa nova etapa, cada despedida na hora de ir embora e cada sorriso quando voltava pra casa marcaram os últimos dois anos. Agradeço pelo carinho e por tudo que fizeram e fazem por mim.

Agradeço ao meu orientador Marco, por desde antes da minha entrada no mestrado, já fazer a diferença na minha formação. Agradeço por ser um excelente orientador, professor e amigo, pela dedicação nesse trabalho e por sempre confiar em mim.

Agradeço à minha namorada Maria Eduarda, que durante tantos anos caminha comigo, e nos últimos dois anos compartilha as alegrias e dores de fazer um mestrado, cada um na sua área, cada um na sua cidade, cada um com seu propósito, mas ainda, juntos.

Agradeço aos meus veteranos do mestrado Rebeca, Lucas e Pedro, que me acolheram e me ajudaram quando eu mais precisei. Sou grato por tudo que me ensinaram e pela paciência comigo. Agradeço aos meus amigos João Paulo, Luiz, Suzana e todos os meus colegas de mestrado por fazerem essa caminhada mais leve. Agradeço aos meus melhores amigos Lara e Ramon por todo o suporte e por sempre torcerem por mim.

Agradeço à banca que leu e contribuiu para o enriquecimento deste trabalho. Agradeço a todos os professores do departamento que tive a oportunidade de estudar. Agradeço a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

“Um matemático é uma máquina que transforma café em teoremas.”
(Paul Erdos)

RESUMO

ALVES, Erik Vinicius Amaro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2026. **Equações diferenciais binárias aplicadas a geometria de superfícies.** Orientador: Marco Antonio do Couto Fernandes.

Uma equação diferencial binária (EDB) é uma equação diferencial implícita que define até duas direções no plano. Neste trabalho, tratamos de EDB's da forma $a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dy\,dx + c(x,y)dx^2 = 0$, com a , b e c funções suaves em um aberto U de $\mathbb{R}^2$.

As equações das linhas de curvatura e das linhas assintóticas são exemplos de EDB's da forma acima. Logo, é possível usar os resultados estudados para conhecer seu comportamento em superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Além disso, o trabalho avança generalizando a métrica do espaço, com foco nas métricas lorentzianas e degenerada, e generalizando o operador linear autoadjunto que define essas curvas. Dessa forma, são definidas as linhas de curvatura A-principais, as linhas A-assintóticas e as linhas tipo luz, estudando principalmente seu comportamento e singularidades localmente em seus respectivos conjuntos discriminantes.

Palavras-chave: equações diferenciais binárias; linhas de curvatura; linhas assintóticas; espaço de Minkowski

ABSTRACT

ALVES, Erik Vinicius Amaro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2026. **Binary differential equations applied to surface geometry**. Adviser: Marco Antonio do Couto Fernandes.

A Binary Differential Equation (BDE) is an implicit differential equation that defines up to two directions in the plane. In this work, we consider BDEs of the form

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dy\,dx + c(x,y)dx^2 = 0,$$

where a , b , and c are smooth functions on an open subset U of $\mathbb{R}^2$. The equations of lines of curvature and asymptotic lines are examples of BDEs of the form above. Therefore, the results developed here can be used to understand their behavior on surfaces in $\mathbb{R}^3$.

Moreover, this work advances by generalizing the metric of the ambient space, with a focus on Lorentzian and degenerate metrics, as well as by generalizing the self-adjoint linear operator that defines these curves. In this way, A -principal curvature lines, A -asymptotic lines, and lightlike lines are defined, with particular emphasis on the local study of their behavior and singularities on their respective discriminant sets.

Keywords: binary differential equations; lines of curvature; asymptotic lines; Minkowski space

Lista de ilustrações

Figura 1 – Soluções do Exemplo 2.2.1.	17
Figura 2 – Singularidade do tipo sela.	20
Figura 3 – Singularidades do tipo nó.	21
Figura 4 – Singularidades do tipo foco.	21
Figura 5 – Direções definidas por (2.7) no ponto $(1, -2)$	23
Figura 6 – Cone de luz do espaço de Minkowski.	25
Figura 7 – Pseudo-esferas em $\mathbb{R}_1^3$	25
Figura 8 – Direções definidas pela EDB nos pontos $(1, -3)$ e $(0, 1)$	32
Figura 9 – Levantamento do campo de direções de (3.4).	35
Figura 10 – Projeção das soluções do campo ξ em uma vizinhança de $(0, 0, 0)$ em M no plano tangente $T_{(0,0,0)}M$	37
Figura 11 – Projeção das soluções de ξ no plano xy de uma vizinhança do ponto p . As curvas em amarelo e azul representam a projeção das soluções de ξ em vizinhanças de $\pi^{-1}(p)$ dadas pelo Teorema do Fluxo Tubular (2.3.4).	38
Figura 12 – Configuração de $ydy^2 - dx^2 = 0$	39
Figura 13 – Configuração de $dy^2 + (\lambda x^2 - y)dx^2 = 0$	40
Figura 14 – Configuração de (3.1) quando os coeficientes se anulam na origem e δ possui singularidade A_1^+	44
Figura 15 – Configuração de (3.1) quando os coeficientes se anulam na origem e δ possui singularidade A_1^-	45
Figura 16 – Conjunto LD (em azul) tangente ao LPL (em amarelo). No ponto de interseção, singularidades de dobra.	73
Figura 17 – Configuração das linhas de curvatura A -principais de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ (em amarelo) e conjunto LD (em azul).	80

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	Funções diferenciáveis	12
2.2	Geometria Diferencial	13
2.3	Equações Diferenciais Ordinárias	16
2.4	Equações Diferenciais Implícitas	22
2.5	Espaço de Minkowski	24
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS BINÁRIAS	30
3.1	Equações Diferenciais Binárias	30
3.2	Levantamento do Campo de Direções	32
3.3	Formas Normais	37
4	EDBS EM SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^3$	46
5	EDB'S EM SUPERFÍCIES COM MÉTRICA LORENTZIANA	56
5.1	Linhas de Curvatura A -principal	58
5.2	Linhas A -assintóticas	64
6	EDB'S EM SUPERFÍCIES COM MÉTRICA DEGENERADA	69
6.1	Linhas Tipo Luz	69
6.2	Linhas de Curvatura A -principal	70
6.3	Linhas A -Assintóticas	73
7	SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}_1^3$	75
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
	REFERÊNCIAS	82

1 Introdução

Uma equação diferencial binária (EDB) é uma equação diferencial implícita que define no máximo duas direções para cada ponto do plano. As EDB's podem ser representadas na forma

$$a(x, y)dy^2 + b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0.$$

A classificação de campos de direções multi-valorados se baseia em trabalhos como Cibrario [8] e Dara [9], que estudam singularidades genéricas das chamadas equações diferenciais multiformes. Esses são os primeiros passos para o que é conhecido hoje como equações diferenciais implícitas. Posteriormente, novos trabalhos surgiram sobre esse tema, dos quais destacam-se [1, 2, 3, 4, 5].

O estudo de equações diferenciais binárias pode ser aplicado a geometria de superfícies, uma vez que pares de curvas transversais podem ser interpretadas como EDB's. A equação das linhas de curvatura

$$(fE - eF)dx^2 + (gE - eG)dxdy + (gF - fG)dy^2 = 0$$

e a equação das linhas assintóticas

$$edx^2 + 2fdxdy + gdy^2 = 0$$

são exemplos de pares de linhas em superfícies de $\mathbb{R}^3$ que são definidas por EDB's.

As linhas de curvatura revelam, geometricamente, como uma superfície se curva no espaço. Além disso, uma parametrização adaptada às linhas de curvatura pode simplificar cálculos de diversos modos. As linhas de curvatura também se relacionam com o máximo e mínimo da função curvatura normal. Já os zeros da função curvatura normal, estão diretamente conectados às linhas assintóticas. Elas são úteis para conhecer localmente a forma de uma superfície, seja através da indicatriz de Dupin ou do plano normal.

Em 1896, G. Darboux apresentou em [10] a estrutura das linhas de curvatura próximo a pontos umbílicos, introduzindo o termo ponto umbílico Darbouxiano. Mais contribuições sobre linhas de curvatura podem ser encontradas em [15]. Garcia e Sotomayor em [23] reuniram mais detalhes sobre o contexto histórico do estudo de linhas de curvatura.

Neste trabalho são estudados os resultados de Gutierrez e Sotomayor em [14] sobre o comportamento genérico das linhas de curvatura próximo a pontos umbílicos no espaço euclidiano. Esses dois pares de linhas são definidos a partir de um operador linear autoadjunto. Seguindo o trabalho [16] de Izumiya e Tari, é estudado a generalização do operador autoadjunto e da métrica do espaço, surgindo assim um novo par de linhas

de interesse, as linhas tipo luz. Mais informações sobre generalizações da métrica e do operador podem ser encontrados em [25, 26].

O segundo capítulo é destinado às preliminares do trabalho, trazendo os resultados e definições sobre geometria diferencial, equações diferenciais ordinárias, espaço de Minkowski e equações diferenciais implícitas. No terceiro capítulo é introduzido o tema central deste trabalho, as equações diferenciais binárias. Seu comportamento é estudado utilizando-se de técnicas como o levantamento do campo de direções e algumas formas normais encontrados na literatura. O quarto capítulo é destinado ao estudo das linhas de curvatura no espaço euclidiano. Na sua construção, é visto que a equação das linhas de curvatura é uma EDB e que os pontos umbílicos constituem seu conjunto discriminante.

Todos os resultados estudados nos Capítulos 5, 6 e 7 são de Izumiya e Tari em [16]. No quinto capítulo é estudado a construção da geometria em superfícies lorentzianas e, dado um operador adjunto genérico A , o comportamento das linhas que são definidas por ele, chamadas de linhas de curvatura A -principais e linhas A -assintóticas. O caso onde a métrica é degenerada é estudado no sexto capítulo, no qual são trabalhadas alternativas para encontrar o comportamento dos pares de linhas nesse cenário. O sétimo capítulo é dedicado exclusivamente para o estudo das linhas de curvatura principais e assintóticas no espaço de Minkowski.

2 Preliminares

Neste capítulo serão abordados brevemente os conceitos preliminares para este trabalho, trazendo as principais definições e resultados. No início de cada seção são apresentadas as referências utilizadas e demais fontes para consulta.

2.1 Funções diferenciáveis

Esta seção será destinada a apresentar definições e notações importantes sobre funções diferenciáveis utilizadas durante todo o trabalho.

Seja $F = (f_1, \dots, f_m)$ uma função diferenciável dada por

$$\begin{aligned} F : \quad U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

A função F será dita **suave** se ela for diferenciável de classe C^∞ , ou seja, suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas. A derivada parcial com relação a i -ésima coordenada $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ será denotada apenas por F_{x_i} . A derivada da função F em $x \in U$ é uma transformação linear $dF_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A matriz dessa transformação linear nas bases canônicas é dada por

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

e é chamada de **matriz jacobiana** de F no ponto x .

Teorema 2.1.1 (Teorema da Função Inversa). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função suave. Suponha que exista $x \in U$ tal que $J_F(x)$ seja inversível. Então existem abertos $V \subset U$ contendo p e $W \subset \mathbb{R}^m$ contendo $F(p)$ tais que*

$$F : V \rightarrow W$$

é um difeomorfismo.

Suponha agora $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave. O vetor $\nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x))$ é chamado de **gradiente** de f no ponto x . A matriz

$$\text{Hess } f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) & \cdots & f_{x_2x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & f_{x_nx_2}(x) & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}.$$

é chamada de **matriz Hessiana**.

Definição 2.1.2. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é dito **ponto singular** de f se $f_{x_i}(p) = 0$, para $i = 1, \dots, n$. Um ponto é **regular** quando não é singular.

Seja $p \in \mathbb{R}^n$ uma singularidade da função f . O ponto p é dito ser uma **singularidade de Morse** se $\det(\text{Hess } f(p)) \neq 0$. Uma singularidade de Morse é do tipo A_1^+ se $\det(\text{Hess } f(p)) > 0$ e do tipo A_1^- se $\det(\text{Hess } f(p)) < 0$.

O **k -jato** de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in U$ é dado pelo polinômio de Taylor de grau k de f em a . Para $n = 2$ e $a = (0, 0)$, o k -jato de f é

$$j^k f = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \frac{1}{(i-j)!j!} \frac{\partial^i f}{\partial x^{i-j} \partial y^j}(0, 0) x^{i-j} y^j.$$

2.2 Geometria Diferencial

Nesta seção, serão abordada a geometria diferencial de superfícies, definindo os principais conceitos e fixando notações que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações das proposições e teoremas serão omitidas, para mais detalhes ver [6].

Definição 2.2.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferenciável.
2. X é um homeomorfismo. Como X é contínua pela condição 1, isto significa que X tem inversa $X^{-1} : V \cap A \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Considerando as coordenadas (u, v) para U , se $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, então a condição 3 da definição anterior é equivalente a dizer que $dX_q(e_1) = X_u(q)$ e $dX_q(e_2) = X_v(q)$ são linearmente independentes. O **plano tangente** da superfície S em p , denotado por $T_p S$, é o espaço vetorial gerado por $X_u(q)$ e $X_v(q)$, onde $p = X(q)$. O plano $T_p S$ independe da parametrização escolhida.

O produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^3$ pode ser induzido em cada plano tangente de uma superfície regular S , que também será denotado por $\langle, \rangle$. Note que esse produto interno é uma forma bilinear simétrica. Será denotado por I_p a forma quadrática dada por

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A forma quadrática I_p em $T_p S$ é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície regular S em p . Seja $w \in T_p S$ um vetor tangente no ponto $p \in S$ e seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ uma curva em S parametrizada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, tal que $p = \alpha(0)$ e $w = \alpha'(0)$. Assim,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

as funções $E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle$, $F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle$ são chamadas de **coeficientes da primeira forma fundamental**.

Como X_u e X_v são linearmente independentes, o produto vetorial $X_u \times X_v \neq \vec{0}$. Assim, a aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(q), \quad q \in U \text{ e } p = X(q),$$

associa um vetor unitário $N(p)$ a cada ponto $p \in X(U)$, essa aplicação é chamada de **aplicação de Gauss**. A diferencial da aplicação de Gauss em um ponto $p \in S$ é uma transformação linear de $T_p S$ em $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$. Além disso, dN_p pode ser considerada como um operador linear em $T_p S$, pois $T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \approx T_p S$. Se $N(u, v) = N(X(u, v))$ então $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. A aplicação $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é chamada de **operador de forma**.

Proposição 2.2.2. *A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é um operador linear auto-adjunto.*

A forma quadrática II_p definida em $T_p S$ por $II_p(w) = \langle -dN_p(w), w \rangle$ é chamada de **segunda forma fundamental** de S em p . Seja $w \in T_p S$ e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, uma curva parametrizada em S tal que $p = \alpha(0)$ e $w = \alpha'(0)$. Assim

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle dN_p(X_u u' + X_v v'), X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \end{aligned}$$

$$= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

onde $e(u, v) = \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle$, $f(u, v) = \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle$ e $g(u, v) = \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle$ são chamados **coeficientes da segunda forma fundamental**.

Os autovalores de $-dN_p$, $k_1(p), k_2(p) \in \mathbb{R}$, são chamados de **curvaturas principais**. Seus respectivos autovetores, $w_1, w_2 \in T_p S$, são chamados de **direções principais**. Na base $\beta = \{w_1, w_2\}$, a matriz do operador $-dN_p$ será diagonal e dada por

$$[-dN_p]_\beta = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.2.3. Se uma curva regular e conexa C em S é tal que para todo $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p , então C é dita uma **linha de curvatura** de S .

Definição 2.2.4. Seja p um ponto em S . Uma **direção assintótica** de S em p é uma direção de $T_p M$ para qual a $II_p = 0$. Uma **curva assintótica** de S é uma curva conexa e regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ a reta tangente a C em p é uma direção assintótica.

Sejam $p \in S$ e $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de $-dN_p$ é chamado de **curvatura Gaussiana** K de S em p . A metade do traço de $-dN_p$ é chamado de **curvatura média** de S em p . Note que

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Além disso, um ponto p em S é chamado de

- **Planar** se $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$;
- **Parabólico** se $\kappa_1 \kappa_2 = 0$ e $\kappa_1 \neq \kappa_2$;
- **Elíptico** se $\kappa_1 \kappa_2 > 0$;
- **Hiperbólico** se $\kappa_1 \kappa_2 < 0$.

Se $p \in S$ tal que $\kappa_1 = \kappa_2$, então p é chamado um **ponto umbílico** de S .

Definição 2.2.5. Um **campo de vetores** w em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$. O campo de vetores w é diferenciável em $p \in U$ se, para alguma parametrização $X(u, v)$ em p , as funções $a(u, v)$ e $b(u, v)$ dadas por

$$w(p) = a(u, v)X_u + b(u, v)X_v$$

são funções diferenciáveis em p .

Teorema 2.2.6. *Sejam w_1 e w_2 dois campos de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$, que são linearmente independentes em algum ponto $p \in U$. Então é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p de tal maneira que para cada $q \in V$ as curvas coordenadas dessa parametrização passando por q são tangentes às curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$.*

Uma **métrica** em uma superfície S é uma correspondência que associa a cada ponto p de S uma forma bilinear simétrica g_p no espaço tangente $T_p S$ que varia diferencialmente no seguinte sentido: se $X : U \rightarrow S$ é uma parametrização de S , então as seguintes funções são suaves

$$g_{11}(q) = g_{X(q)}(X_u(q), X_u(q)),$$

$$g_{12}(q) = g_{X(q)}(X_u(q), X_v(q)),$$

$$g_{21}(q) = g_{X(q)}(X_v(q), X_u(q)),$$

$$g_{22}(q) = g_{X(q)}(X_v(q), X_v(q)).$$

A matriz (g_{ij}) é chamada de matriz da métrica. Uma métrica é **degenerada** quando sua matriz possui determinante igual a 0. Uma métrica é dita **riemanniana** quando for positiva definida. Uma métrica não riemanniana é dita **lorentziana** quando for não degenerada. Para mais informações ver [7].

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção serão abordados os conceitos e resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, como referência ver [12, 24]. Sejam U um aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Uma **equação diferencial ordinária** (EDO) de primeira ordem é um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma **solução** de (2.1) é um conjunto de funções $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não degenerado, tais que

$$x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t));$$

$$\vdots$$

$$x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Tomando $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$, então é possível reescrever (2.1) na forma vetorial

$$x' = f(t, x). \quad (2.2)$$

Uma solução de (2.2) é uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I.$$

Exemplo 2.3.1. *Seja $U = \mathbb{R}^2$ e $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Assim, é obtida a EDO*

$$x' = 3x^{\frac{2}{3}}.$$

Note que

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & t > c \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$

é uma solução da EDO para todo $c \in \mathbb{R}$. A Figura 1 ilustra essas soluções. Porém, note que $\varphi(t) = 0$ também é uma solução.

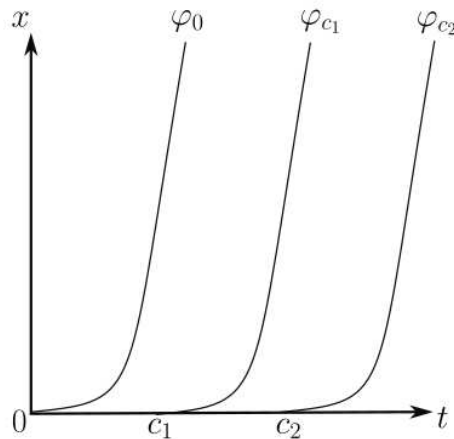


Figura 1 – Soluções do Exemplo 2.2.1.

Dado $(t_0, x_0) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, o sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

é chamado de **problema de valor inicial** (PVI). Uma solução de (2.3) é uma função

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

que é solução da EDO, ou seja,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

e satisfaz $\varphi(t_0) = x_0$.

Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita **Lipschitziana com relação a segunda coordenada** se existe uma constante κ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \kappa \|x - y\|$$

para todo $(t, x), (t, y) \in U$.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Picard). *Sejam $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e Lipschitziana em relação a segunda coordenada. Dado $(t_0, x_0) \in U$, defina*

$$I_a = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a\}$$

e

$$B_b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Se existem constantes $a > 0$, $b > 0$ e $m > 0$ tais que

$$I_a \times B_b \subset U \quad e \quad \|f(t, x)\| < m, \forall (t, x) \in I_a \times B_b,$$

então existe uma única solução $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{m}\}$.

Corolário 2.3.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , então dado $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do PVI*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

A equação (2.2) pode ser vista como um campo de direções em U . De fato, para cada $(t_0, x_0) \in U$ é possível associar a reta

$$l(t_0, x_0) : x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

Assim, uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (2.2) se, e somente se, a reta tangente a φ em t é $l(t, \varphi(t))$, para todo t em I .

Suponha que $f(t, x)$ não depende de t , então a EDO (2.2) pode ser escrita como

$$x' = X(x), \tag{2.4}$$

onde $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X(x) = f(t, x)$. A equação (2.4) define um **campo de vetores** em Δ , isto é, para cada ponto $x \in \Delta$, está relacionado um vetor $X(x) \in \mathbb{R}^n$. Uma solução

do campo (2.4) é uma curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujo vetor tangente em t é $X(\varphi(t))$. Tais soluções são chamadas de **trajetórias**. Um ponto $x \in \Delta$ é um **ponto singular** quando

$$X(x) = (0, \dots, 0),$$

caso contrário, o ponto x é dito **regular**. Considere X de classe C^1 . Para todo $x_0 \in \Delta$, existe uma solução $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para o PVI

$$\begin{cases} x' = X(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Considere que φ_{x_0} é maximal, ou seja, não existe solução $\tilde{\varphi} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\varphi_{x_0}(t) = \tilde{\varphi}(t)$ para todo $t \in I_{x_0}$ e

$$I_{x_0} \subsetneq J.$$

O conjunto

$$D = \{(x, t) \mid x \in \Delta, t \in I_x\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e a aplicação

$$\psi_X : D \rightarrow \Delta$$

dada por $\psi_X(t, x) = \varphi_x(t)$ é chamado de **fluxo** de (2.4). Dados dois campos vetoriais $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, é dito que X_1 e X_2 são **topologicamente conjugadas** se existe um homeomorfismo $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que

$$h(\psi_{X_1}(t, x)) = \psi_{X_2}(t, h(x)).$$

Teorema 2.3.4 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja $p \in \Delta$ um ponto regular do campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$. Existe uma vizinhança V de p em Δ tal que $X|_V$ é topologicamente conjugado ao campo $Y : \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por*

$$Y(x) = (1, 0, \dots, 0),$$

onde $\tilde{\Delta} = (-\epsilon, \epsilon) \times B$, $\epsilon > 0$ e B é uma bola aberta de $\mathbb{R}^{n-1}$ com centro na origem.

Dado $p \in \Delta$, denote por dX_p a derivada do campo

$$X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

em p . Dessa forma, dX_p é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$. Um ponto singular $p \in \Delta$ é dito **hiperbólico** se os autovalores de dX_p possuem parte real não nula.

Teorema 2.3.5 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e $p \in \Delta$ um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças V de p e W de $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado ao campo $Y : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por*

$$Y(x) = dX_p(x), \quad \forall x \in W.$$

Considere em $\mathbb{R}^2$ o campo linear $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$Y(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy).$$

Note que $(0, 0)$ é um ponto singular de Y . Note também que se os autovalores de matriz possuem parte real não nula, então 0 não é autovalor e $\det(A) \neq 0$. Assim, Y é injetor e o único ponto singular é $(0, 0)$.

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de Y e, caso existam, v_1 e v_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente. Tome E_1 e E_2 as retas geradas pelos autovetores v_1 e v_2 , respectivamente. A solução do campo linear depende unicamente dos autovalores.

- Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ possuem sinais diferentes ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$), a singularidade da origem é chamado de **sela** e será como na Figura 2.

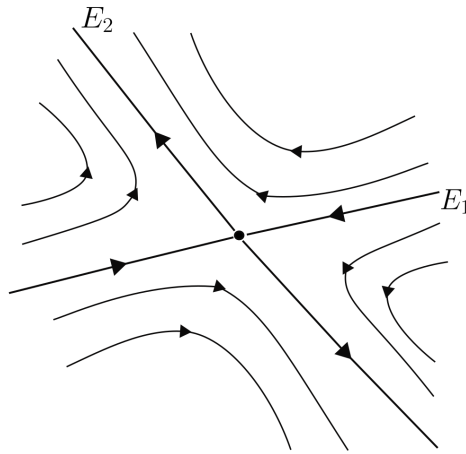


Figura 2 – Singularidade do tipo sela.

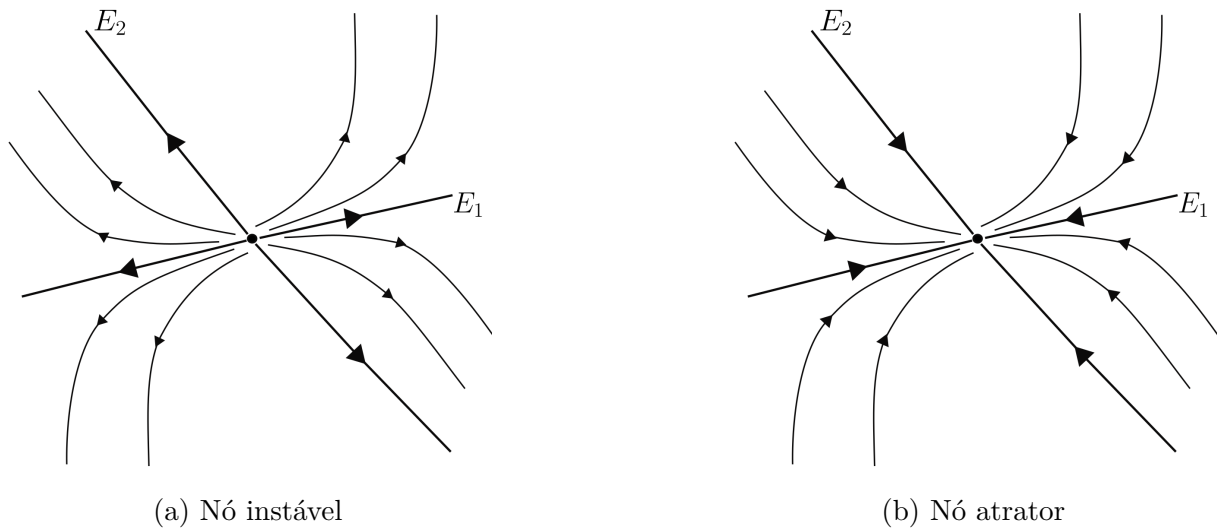
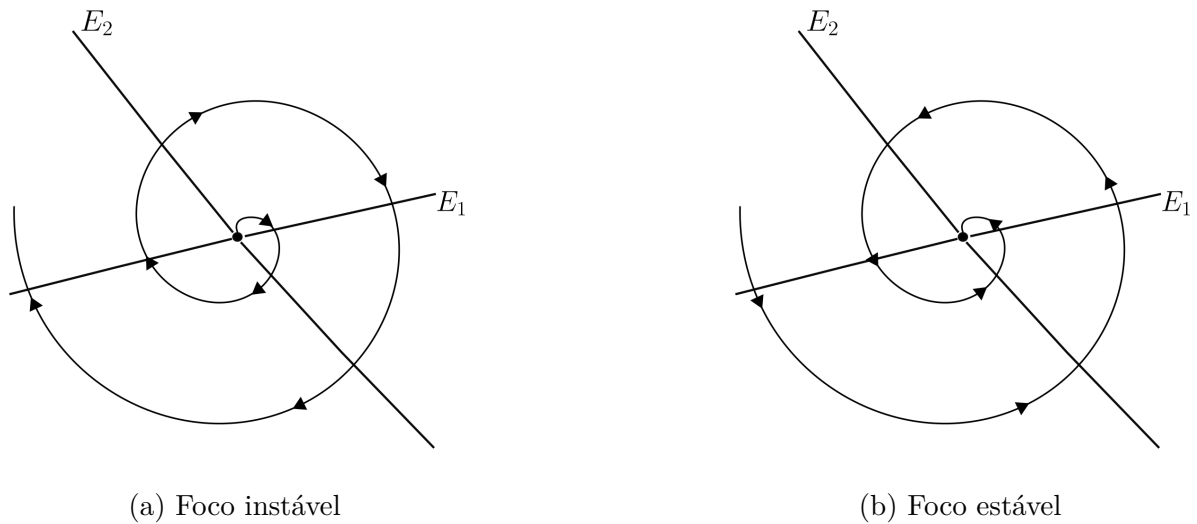
- Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ possuem o mesmo sinal ($0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$), a singularidade na origem é chamada de **nó** e será como na Figura 3.
- Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$, a singularidade da origem é chamada de **foco** e será como na Figura 4.

Exemplo 2.3.6. Considere $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$X(x, y) = (x + y - 1, -2xy).$$

Os pontos singulares de X são

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 1) \text{ ou } (x, y) = (1, 0).$$

**Figura 3** – Singularidades do tipo nó.**Figura 4** – Singularidades do tipo foco.

Portanto, os pontos singulares são $(0, 1)$ e $(1, 0)$. A matriz da diferencial de X é dada por

$$dX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Em $(0, 1)$, a matriz é

$$dX_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Assim, pelo Teorema de Hartman-Grobman 2.3.5, a singularidade em $(0, 1)$ é um foco. Analogamente, em $(1, 0)$ a matriz é

$$dX_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, logo $(1, 0)$ é uma sela.

2.4 Equações Diferenciais Implícitas

Para definir as equações diferenciais binárias, primeiro é necessário conhecer uma variedade unidimensional muito importante. O **espaço projetivo**, denotado por $\mathbb{R}P^1$, é o conjunto das retas em $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem, ver [17] para mais detalhes. Considere em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ a relação de equivalência $\sim$ dada por

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow xv = uy.$$

A classe de equivalência do ponto (x, y) é denotada por $(x : y)$. É fácil ver que

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}P^1 \text{ t.q. } (x, y), (u, v) \in r.$$

Segue que $\mathbb{R}P^1$ é o conjunto das classes de equivalência de $\sim$, ou seja,

$$\mathbb{R}P^1 = \frac{\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}}{\sim}.$$

Assim, a reta $r \in \mathbb{R}P^1$ será representada por $(x : y)$ onde $(x, y) \in r$. Note que se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então

$$(x : y) = (\lambda x : \lambda y).$$

Além disso, ao munir $\mathbb{R}P^1$ com a topologia quociente, tem-se que $\mathbb{R}P^1$ é uma variedade de dimensão 1 com as seguintes parametrizações

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}P^1 & \text{e} & & \psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}P^1 \\ r &\mapsto (1 : r) & & & s &\mapsto (s : 1). \end{aligned}$$

Uma **equação diferencial implícita** (EDI) em $\mathbb{R}^2$ é uma equação do tipo

$$F(x, y, (dx : dy)) = 0 \tag{2.6}$$

onde $F : U \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto (ver [4, 5]). A EDI (2.6) define em U um **campo de direções**, isto é, para cada $(x_0, y_0) \in U$ são associados as direções determinadas pelas retas $r = (dx : dy) \in \mathbb{R}P^1$ que satisfazem

$$F(x_0, y_0, (dx : dy)) = 0.$$

Exemplo 2.4.1. Considere a EDI

$$dy^3 + xdx dy^2 + ydx^2 dy = 0. \tag{2.7}$$

No ponto $(1, -2)$ tem-se

$$dy^3 + dx dy^2 - 2dx^2 dy = 0.$$

Dividindo ambos os lados por dx^3 , obtém-se

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Tomando $\frac{dy}{dx} = r$, é possível reescrever como

$$r^3 + r^2 - 2r = r(r^2 + r - 2) = 0.$$

As raízes da equação acima são $r = 0$, $r = 1$ e $r = -2$, equivalentemente, $dy = 0$, $dy = dx$ e $dy = -2dx$, ou seja, em $(1, -2)$, as 3 direções definidas por (2.7) são: $y = 0$, $y = x$ e $y = -2x$ (ver Figura 5).

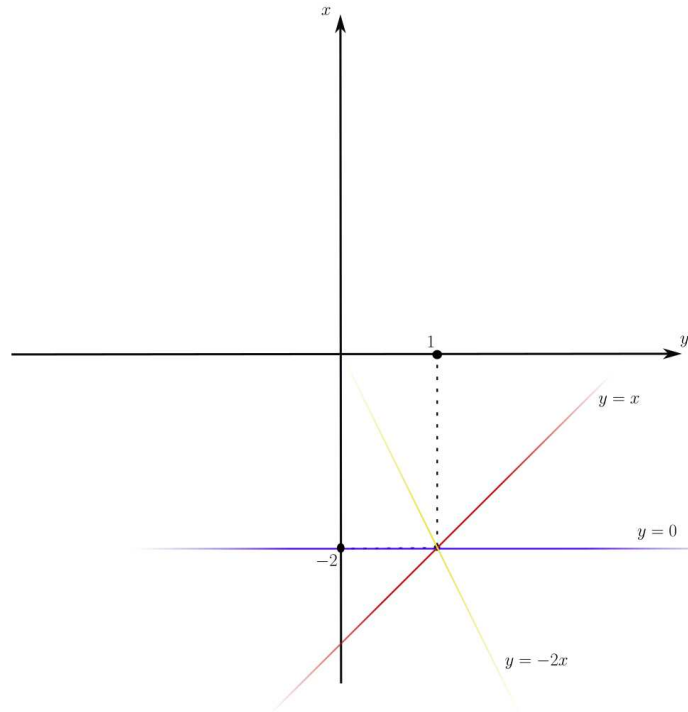


Figura 5 – Direções definidas por (2.7) no ponto $(1, -2)$.

Uma **solução** de (2.6) é uma curva γ em U tal que em todo ponto $\gamma(t)$, a curva γ é tangente a uma das direções definidas por (2.6) em $\gamma(t)$. Logo, se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então a direção tangente é $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e γ é uma solução se, e somente se,

$$F(x(t), y(t), (x'(t) : y'(t))) = 0, \forall t \in U.$$

Exemplo 2.4.2. As curvas $\gamma_c(t) = (t, c)$ são soluções de

$$dy^3 + xdx dy^2 + ydx^2 dy = 0$$

para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

2.5 Espaço de Minkowski

Nesta seção será apresentado o espaço de Minkowski. Em 1908, Hermann Minkowski mostrou em [19] que a Teoria da Relatividade Restrita poderia ser melhor entendida em um modelo geométrico semi-riemanniano, dessa forma, o espaço de Minkowski se tornou muito importante em várias áreas da matemática e física. Abaixo, será definido e apresentado os resultados necessários desse espaço, mais detalhes podem ser encontrados em [18, 20].

Definição 2.5.1. O espaço $\mathbb{R}^3$ munido do pseudo-produto interno $\langle, \rangle_1$, dado por

$$\langle u, v \rangle_1 = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3, \quad u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3),$$

é chamado de **espaço de Minkowski** e $\langle, \rangle_1$ de **métrica de Minkowski**. O espaço de Minkowski será denotado por $\mathbb{R}_1^3$.

A métrica de Minkowski possui algumas propriedades que a diferencia fortemente da métrica euclidiana usual. Primeiramente, note que a métrica de Minkowski não é positiva definida, pois

$$\langle e_3, e_3 \rangle_1 = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle_1 = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Dessa forma, fica claro que a métrica $\langle, \rangle_1$ não define uma norma. Note também que há vetores não nulos w tais que $\langle w, w \rangle_1 = 0$, como

$$\langle e_1 + e_3, e_1 + e_3 \rangle_1 = \langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle_1 = 0.$$

Dois vetores $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ são ditos **ortogonais** quando $\langle v, u \rangle_1 = 0$. Dado uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonal para um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}_1^3$, a **matriz da métrica** $\langle, \rangle_1$ em V é uma matriz quadrada diagonal (g_{ij}) de ordem n onde $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle_1$ e o índice é o número de termos negativos da matriz. A métrica é dita **degenerada** em V se $\det(g_{ij}) = 0$. Note que a métrica ser degenerada em V é equivalente a existir um elemento não nulo $v \in V$ ortogonal a todos os elementos de V .

Definição 2.5.2. Um vetor $w \in \mathbb{R}_1^3$ é chamado de

- **tipo espaço** se $\langle w, w \rangle_1 > 0$ ou $w = \vec{0}$;
- **tipo luz** se $\langle w, w \rangle_1 = 0$ e $w \neq \vec{0}$;
- **tipo tempo** se $\langle w, w \rangle_1 < 0$.

Seja $w \in \mathbb{R}_1^3$, a **norma** de w é definida por

$$\|w\|_1 = \sqrt{|\langle w, w \rangle_1|}.$$

Um vetor w é chamado de **normal** quando $\|w\|_1 = 1$, uma base ortogonal em que todos os vetores são normais é chamada de base **ortonormal**.

Note que o conjunto de vetores tipo luz pode ser descrito como

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \setminus \{\vec{0}\},$$

esse conjunto é chamado de **cone de luz** (Figura 6).

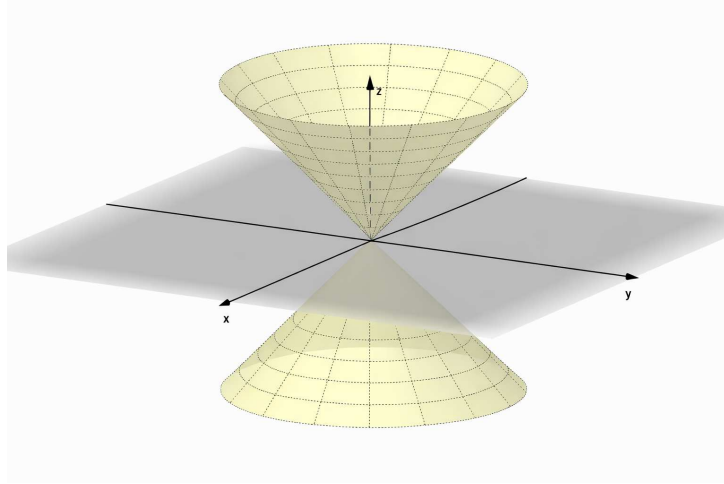


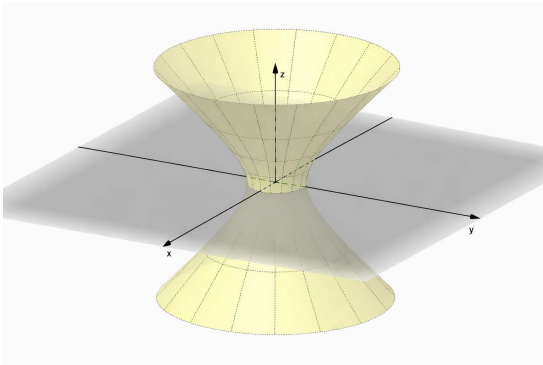
Figura 6 – Cone de luz do espaço de Minkowski.

Outros dois conjuntos importantes são as pseudo-esferas $\mathbb{S}_1^2$ (espaço de Sitter) e $\mathbb{H}_+^2$ (Plano Hiperbólico Superior) dadas por

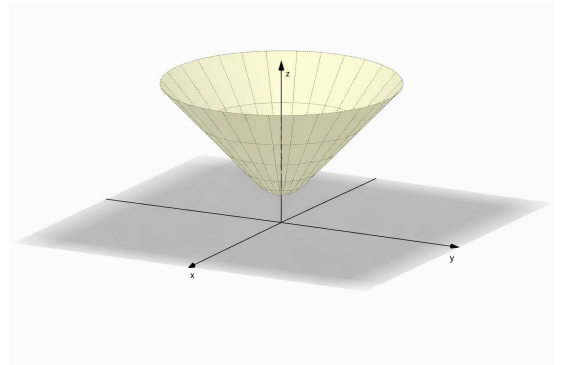
$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\};$$

$$\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\},$$

que podem ser vistas na Figura 7.



(a) Espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^2$



(b) Plano Hiperbólico superior $\mathbb{H}_+^2$

Figura 7 – Pseudo-esferas em $\mathbb{R}_1^3$.

A métrica de Minkowski de $\mathbb{R}_1^3$ pode ser induzida em qualquer subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, e assim surgem os tipos de subespaços de $\mathbb{R}_1^3$ listados abaixo.

Definição 2.5.3. Um subespaço U de $\mathbb{R}_1^3$ é chamado de

- **tipo espaço** se a métrica induzida é positiva definida;
- **tipo luz** se a métrica induzida é degenerada e $U \neq \{\vec{0}\}$;
- **tipo tempo** se a métrica induzida é não degenerada de índice 1.

Exemplo 2.5.4. 1. Seja $U = [e_1, e_2]$ o espaço gerado pelos vetores canônicos e_1 e e_2 , ou seja,

$$U = \{ae_1 + be_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $u \in U$ qualquer, com $u = (u_1, u_2, 0)$, tem-se

$$\langle u, u \rangle_1 = u_1^2 + u_2^2 - 0 \geq 0$$

e $\langle u, u \rangle_1 = 0$ se, e somente se, $u = (0, 0, 0)$. Logo, U é positivo definido e portanto um subespaço tipo espaço.

2. Tome $Z = [e_1, e_3] = \{(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$. Note que em Z a métrica não é positiva definida, pois $e_3 \in Z$ e como visto $\langle e_3, e_3 \rangle_1 = -1$, porém é não degenerada. De fato, seja $(x, 0, z) \in Z$ tal que

$$\langle (x, 0, z), (a, 0, c) \rangle = 0, \quad \forall (a, 0, c) \in Z.$$

Daí

$$\langle (x, 0, z), (1, 0, 0) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

e também

$$\langle (x, 0, z), (0, 0, 1) \rangle = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Portanto $(x, 0, z) = (0, 0, 0)$. Logo, a métrica é não degenerada. Além disso, sua matriz é dada por

$$g_{ij} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle_1 & \langle e_1, e_3 \rangle_1 \\ \langle e_3, e_1 \rangle_1 & \langle e_3, e_3 \rangle_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a métrica em Z é não degenerada de índice 1 e daí Z é subespaço tipo tempo.

3. Seja $W = [e_1, e_2 + e_3] = \{(a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ e (x, y, y) um vetor qualquer de W . Note que $e_2 + e_3 = (0, 1, 1) \in W$ e

$$\langle (0, 1, 1), (x, y, y) \rangle_1 = y - y = 0.$$

Como (x, y, y) é arbitrário, $e_2 + e_3$ é não nulo e ortogonal a todos os vetores de W . Logo a métrica é degenerada e portanto W é um subespaço tipo luz.

Seja U um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_1^3$, considere o subespaço de $\mathbb{R}_1^3$ dado por

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle v, u \rangle_1 = 0, \forall u \in U\}.$$

É fácil ver que $U = (U^\perp)^\perp$ e $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = 3$.

Proposição 2.5.5. *Seja $v \in \mathbb{R}_1^3$. Então v é tipo tempo (resp. espaço) se, e somente se, $[v]^\perp$ é tipo espaço (resp. tempo). Mais ainda, $\mathbb{R}_1^3 = [v] \oplus [v]^\perp$. Por fim, v é tipo luz se, e somente se, $[v]^\perp$ é tipo luz.*

Demonstração. Sejam v um vetor tipo tempo e $\{u_1, u_2\}$ uma base ortogonal para $[v]^\perp$. Assim $\{u_1, u_2, v\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}_1^3$. Como $\mathbb{R}_1^3$ é um espaço não degenerado de índice 1 e $\langle v, v \rangle_1 < 0$, então $\langle u_1, u_1 \rangle_1 > 0$ e $\langle u_2, u_2 \rangle_1 > 0$. Logo, u_1 e u_2 são tipo espaço e daí $[u_1, u_2] = [v]^\perp$ é tipo espaço. Por outro lado, suponha que $[v]^\perp$ é tipo espaço e tome uma base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ para $[v]^\perp$. Novamente $\{u_1, u_2, v\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}_1^3$, como $\langle u_1, u_1 \rangle_1 = \langle u_2, u_2 \rangle_1 = 1 > 0$, segue que $\langle v, v \rangle_1 < 0$. Logo v é tipo tempo.

Seja v um vetor tipo espaço e $\{u_1, u_2\}$ uma base ortogonal para $[v]^\perp$. Como visto, $\{u_1, u_2, v\}$ é uma base para $\mathbb{R}_1^3$. Como $\langle v, v \rangle_1 > 0$ e $\mathbb{R}_1^3$ tem índice 1, assim $\langle u_1, u_1 \rangle_1 < 0$ ou $\langle u_2, u_2 \rangle_1 < 0$. Logo, $[u_1, u_2] = [v]^\perp$ é não degenerado de índice 1, ou seja, tipo tempo. Reciprocamente, se $[v]^\perp$ é tipo tempo e $\{u_1, u_2\}$ base de $[v]^\perp$, então $\{u_1, u_2, v\}$ é base de $\mathbb{R}_1^3$, e u_1 ou u_2 é tipo tempo. Logo, v é tipo espaço. Como em ambos os casos $\{u_1, u_2, v\}$ é base de $\mathbb{R}_1^3$ e $[u_1, u_2] = [v]^\perp$ é não degenerado, então $v \notin [v]^\perp$ e assim $[v] \cap [v]^\perp = \{\vec{0}\}$. Portanto $\mathbb{R}_1^3 = [v] \oplus [v]^\perp$. O caso v tipo luz segue diretamente dos casos anteriores. $\square$

Proposição 2.5.6. *Sejam u e v dois vetores tipo luz, então eles são linearmente dependentes se, e somente se, $\langle u, v \rangle_1 = 0$*

Demonstração. Se u e v são linearmente dependentes, pode-se escrever $v = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle u, \lambda u \rangle_1 = 0.$$

Agora, suponha que $\langle u, v \rangle_1 = 0$. Como e_3 é tipo tempo, pela proposição anterior tem-se $\mathbb{R}_1^3 = [e_3]^\perp \oplus [e_3]$. Nessa decomposição, escreva $u = x + \lambda_1 e_3$ e $v = y + \lambda_2 e_3$. Como $[e_3]^\perp$ é tipo espaço e $x, y \in [e_3]^\perp$, então x e y são tipo espaço. Logo $x \neq u$ e $y \neq v$, pois u e v são tipo luz. Assim $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Tome $\tilde{u} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u$. Note que $\tilde{u}$ é tipo luz e $\langle \tilde{u}, v \rangle_1 = 0$, basta mostrar que $\tilde{u} = v$. Observe que

$$\tilde{u} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x + \lambda_2 e_3.$$

Tome $\tilde{x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x$ e $w = \lambda_2 e_3$, assim

$$\tilde{u} = \tilde{x} + w \text{ e } v = y + w.$$

Além disso,

$$\langle \tilde{u}, v \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tilde{x}, y \rangle_1 + \langle \tilde{x}, w \rangle_1 + \langle w, y \rangle_1 + \langle w, w \rangle_1 = 0;$$

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_1 + 2\langle \tilde{x}, w \rangle_1 + \langle w, w \rangle_1 = 0;$$

$$\langle v, v \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle y, y \rangle_1 + 2\langle y, w \rangle_1 + \langle w, w \rangle_1 = 0.$$

Como $w \in [e_3]$, segue que $\langle \tilde{x}, w \rangle_1 = \langle y, w \rangle_1 = 0$. Deste modo,

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_1 = -\langle w, w \rangle_1;$$

$$\langle v, v \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle y, y \rangle_1 = -\langle w, w \rangle_1;$$

$$\langle \tilde{u}, v \rangle_1 = 0 \Rightarrow \langle \tilde{x}, y \rangle_1 = -\langle w, w \rangle_1.$$

É fácil ver que

$$2\langle \tilde{x}, y \rangle_1 = -2\langle w, w \rangle_1 = \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_1 + \langle y, y \rangle_1 \Rightarrow \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_1 - 2\langle \tilde{x}, y \rangle_1 + \langle y, y \rangle_1 = 0$$

e, portanto, $\langle \tilde{x} - y, \tilde{x} - y \rangle_1 = 0$. Como $[e_3]^\perp$ é tipo espaço, é positivo definido, logo $\tilde{x} - y = 0$. Isso implica $\tilde{x} = y$ e assim $v = \tilde{u}$. $\square$

Proposição 2.5.7. *Seja $U \subset \mathbb{R}_1^3$ um subespaço bidimensional. As seguintes sentenças são equivalentes*

1. U é tipo tempo;
2. U contém 2 vetores tipo luz linearmente independentes;
3. U contém um vetor tipo tempo.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Seja U tipo tempo, assim U possui uma base ortogonal $\{u_1, u_2\}$ com $\langle u_1, u_1 \rangle_1 = 1$ e $\langle u_2, u_2 \rangle_1 = -1$. Note que $u_1 + u_2$ e $u_1 - u_2$ pertencem a U e são tipo luz. De fato

$$\langle u_1 + u_2, u_1 + u_2 \rangle_1 = \langle u_1, u_1 \rangle_1 + 2\langle u_1, u_2 \rangle_1 + \langle u_2, u_2 \rangle_1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 = \langle u_1, u_1 \rangle_1 - 2\langle u_1, u_2 \rangle_1 + \langle u_2, u_2 \rangle_1 = 1 - 1 = 0.$$

Além disso, $u_1 + u_2$ e $u_1 - u_2$ são linearmente independentes, pois dado $a, b \in \mathbb{R}$, segue que $a(u_1 + u_2) + b(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1(a + b) + u_2(a - b) = 0 \Rightarrow (a + b) = (a - b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

Logo, U contém dois vetores tipo luz linearmente independentes.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sejam u e v dois vetores tipo luz linearmente independentes de U . Pela Proposição 2.5.6, segue que $\langle u, v \rangle_1 \neq 0$. Se $\langle u, v \rangle_1 > 0$, então $u - v$ é tipo tempo, pois

$$\langle u - v, u - v \rangle_1 = \langle u, u \rangle_1 - 2\langle u, v \rangle_1 + \langle v, v \rangle_1 = -2\langle u, v \rangle_1 < 0.$$

Caso $\langle u, v \rangle_1 < 0$, então $u + v$ é tipo tempo, pois

$$\langle u + v, u + v \rangle_1 = \cancel{\langle u, u \rangle_1} + 2\langle u, v \rangle_1 + \cancel{\langle v, v \rangle_1} = 2\langle u, v \rangle_1 < 0,$$

portanto U contém um vetor tipo tempo.

(3) $\Rightarrow$ (1): Seja $v \in U$ tipo tempo, então $U^\perp \subset [v]^\perp$ com $\dim_{\mathbb{R}} U^\perp = 1$. Pela Proposição 2.5.5, $[v]^\perp$ é tipo espaço e portanto $U^\perp$ é tipo espaço. Como $\dim_{\mathbb{R}} U^\perp = 1$, é possível escrever $U^\perp$ como $[w]$, para qualquer vetor não nulo $w \in U^\perp$. Como w é tipo espaço, segue que $[w]^\perp = (U^\perp)^\perp = U$ é tipo tempo. $\square$

Observação 2.5.8. *Caso U tenha dimensão 1, a proposição anterior se resume a (1) $\Leftrightarrow$ (3).*

Proposição 2.5.9. *Seja $U \subset \mathbb{R}_1^3$ um subespaço. As seguintes sentenças são equivalentes*

1. U é tipo luz.
2. U possui um vetor tipo luz mas não possui um vetor tipo tempo.
3. $U \cap \mathcal{C} = W \setminus \{\vec{0}\}$, onde W é um subespaço de dimensão 1.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Suponha U tipo luz, logo existe $w \in U$ tal que $\langle w, u \rangle_1 = 0$ para todo $u \in U$. Em particular $\langle w, w \rangle_1 = 0$ e U possui um vetor tipo luz. Por outro lado, a Proposição 2.5.7 diz que U contém um vetor tipo tempo se, e somente se, U é tipo tempo. Logo, U não possui nenhum vetor tipo tempo.

(2) $\Rightarrow$ (3): Como U possui um vetor tipo luz, $U \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Como U não possui um vetor tipo tempo, pela proposição anterior U não possui dois vetores tipo luz linearmente independentes. Logo $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Como $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$, U não possui vetores tipo luz linearmente independentes. Portanto, pela proposição anterior, U não é tipo tempo. Por outro lado, existe $w \in U$ tal que $\langle w, w \rangle_1 = 0$, logo U não é tipo tempo. Portanto U é tipo luz. $\square$

Definição 2.5.10. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}_1^3$, o **produto vetorial de Minkowski** de u e v é o único vetor, denotado por $u \times_1 v$, que satisfaz*

$$\langle u \times_1 v, w \rangle_1 = \det(u, v, w),$$

onde $\det(u, v, w)$ é o determinante da matriz que possui como colunas, as coordenadas de u , v e w .

3 Equações Diferenciais Binárias

Este capítulo tratará sobre equações diferenciais binárias, assunto central deste trabalho, que são casos particulares de EDI's (abordadas na Seção 2.4). Serão apresentados os conceitos e resultados fundamentais desse assunto, como o levantamento do campo de direções e algumas formas normais. É abordada a configuração local de EDB's em alguns casos, que diferem sobre a regularidade do conjunto discriminante e se os coeficientes se anulam na origem.

3.1 Equações Diferenciais Binárias

Para iniciar o capítulo, é necessário definir equações diferenciais binárias e seu conjunto discriminante, prosseguindo com alguns resultados importantes. Para mais detalhes, ver [1, 2].

Definição 3.1.1. *Uma EDI é chamada de **equação diferencial binária** (EDB) se existem no máximo duas direções para cada ponto do plano.*

As EDB's estudadas serão da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (3.1)$$

onde a , b e c são funções suaves em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Estão relacionados com a equação (3.1) a função $\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$, chamada de **função discriminante** da EDB, e também o **conjunto discriminante** $\Delta = \{(x, y) \in U : \delta(x, y) = 0\}$.

Proposição 3.1.2. *A equação (3.1) define um par de direções em cada ponto $(x, y) \in U$ onde $\delta(x, y) > 0$ e não existem direções em pontos onde $\delta(x, y) < 0$. Nos pontos de Δ , onde as funções a , b e c não se anulam simultaneamente, a EDB (3.1) define apenas uma única direção.*

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0) \in U$. Como os coeficientes não se anulam simultaneamente, suponha sem perda de generalidade que $a(p) \neq 0$. Divida (3.1) por dx^2 e tome $\frac{dy}{dx} = z$, assim

$$a_0 z^2 + 2b_0 z + c_0 = 0, \quad (3.2)$$

onde $a_0 = a(p)$, $b_0 = b(p)$ e $c_0 = c(p)$. Caso $\delta(p) > 0$ então $4b_0^2 - 4a_0c_0 > 0$ e (3.2) possui duas raízes reais. Sejam z_1 e z_2 as raízes de (3.2) quando $\delta(p) > 0$. Portanto $dx = 1$ e $dy = z_1$ é uma solução de (3.1) em p e $dx = 1$ e $dy = z_2$ é outra solução de (3.1) em p . Logo, a EDB (3.1) define duas direções em p .

Se $\delta(p) < 0$, (3.2) não possui raízes reais. Suponha que a EDB (3.1) defina uma direção em p , com $dx = x_1$ e $dy = y_1$, ou seja,

$$a_0 y_1^2 + 2b_0 y_1 x_1 + c_0 x_1^2 = 0,$$

com $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$. Como $a(p) \neq 0$, se $x_1 = 0$, então

$$a_0 y_1^2 + b_0 y_1 \cdot 0 + c_0 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0,$$

o que não é possível. Portanto $x_1 \neq 0$. Logo,

$$\frac{1}{x_1^2} (a_0 y_1^2 + 2b_0 y_1 x_1 + c_0 x_1^2) = 0,$$

ou seja,

$$a_0 \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 + 2b_0 \left(\frac{y_1}{x_1}\right) + c_0 = 0.$$

Deste modo, $\frac{y_1}{x_1}$ é uma solução de (3.2), o que contraria não ter raízes reais. Logo, (3.1) não define direções em p .

Se $\delta(p) = 0$, a equação (3.2) possui uma única raiz. Seja z_1 a raiz de (3.2) quando $\delta(p) = 0$. Logo, $dx = 1$ e $dy = z_1$ define uma direção que é solução para (3.1). Suponha que exista uma outra direção distinta $dx = x_2$ e $dy = y_2$ para (3.1). Analogamente ao caso anterior, $x_2 \neq 0$ e $z_2 = \frac{y_2}{x_2}$ é solução de (3.2), o que contraria (3.2) possuir uma única solução, pois $z_1 \neq z_2$. Portanto, quando $\delta(p) = 0$, a EDB (3.1) define uma única direção em p . $\square$

Observação 3.1.3. *Caso a , b e c se anularem simultaneamente em algum ponto $(x, y) \in \Delta$, tem-se*

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0$$

para todo $(dx : dy) \in \mathbb{RP}^1$. Portanto a EDB (3.1) define infinitas direções.

Exemplo 3.1.4. *Considere a EDB*

$$x dy^2 + 2dx dy + y dx^2 = 0.$$

Tem-se $\delta(x, y) = 1 - xy$ e $\Delta = \{(x, y) \mid 1 - xy = 0\}$. Em $(1, -3)$, a EDB é dada por

$$dy^2 + 2dydx - 3dx^2 = 0,$$

como uma solução possui $dx \neq 0$ ou $dy \neq 0$, suponha $dx \neq 0$. Assim, dividindo ambos os lados por dx^2 ,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0,$$

logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}.$$

que implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

Portanto as soluções são $dy = dx$ e $dy = -3dx$. Em $(0, 1)$,

$$2dydx + dx^2 = 0 \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

onde a solução é $dy = -\frac{1}{2}dx$. Neste caso, $dx = 0$ também é solução. Veja Figura 8.

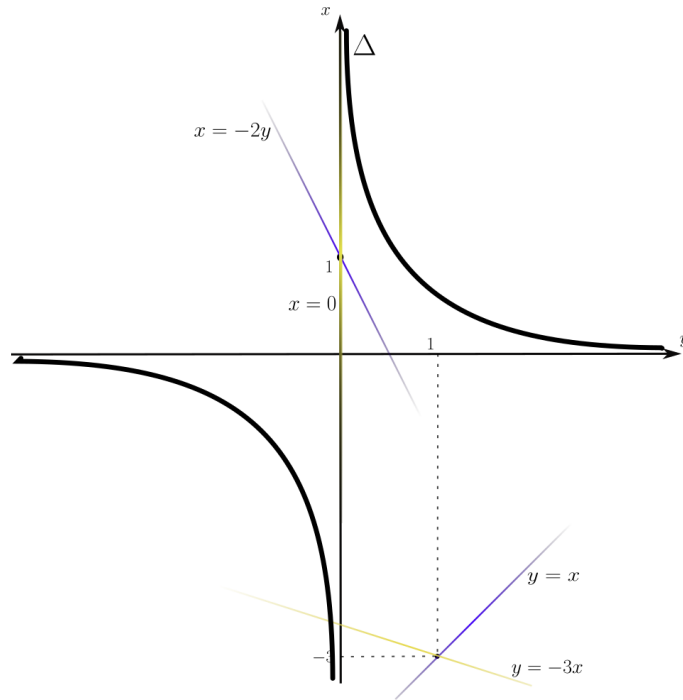


Figura 8 – Direções definidas pela EDB nos pontos $(1, -3)$ e $(0, 1)$.

O conjunto discriminante, juntamente com as direções definidas em cada ponto, é chamado de **configuração** da EDB. Duas EDB's são ditas **topologicamente equivalentes** (ou **suavemente equivalentes**) se existir um homeomorfismo (ou difeomorfismo) local que leva a configuração de uma na configuração da outra.

3.2 Levantamento do Campo de Direções

Uma equação diferencial implícita geralmente determina diversas direções para um ponto do plano, e portanto, há diversas soluções nesse ponto. Assim, uma EDI pode ser pensada, a grosso modo, como uma superposição de EDO's (ver [3]). Dessa forma, o levantamento do campo de direções é uma alternativa para estudar equações diferenciais binárias usando os conceitos descritos na Seção 2.3.

Considere a EDB (3.1) e o espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Note que $(dx : dy) \in \mathbb{R}P^1$ pode ser visto como um real r , pois $\mathbb{R}P^1$ é uma variedade unidimensional e portanto localmente

euclidiano. Logo, tome a carta $r = \frac{dy}{dx}$ em $\mathbb{R}P^1$ e assim $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}^3$ com elementos da forma (x, y, r) . Em $\mathbb{R}^3$, considere a superfície

$$M = \{(x, y, r) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x, y, r) = 0\} \quad (3.3)$$

com $P(x, y, r) = a(x, y)r^2 + 2b(x, y)r + c(x, y)$. Assim $M = P^{-1}(0)$. Além disso, considere

$$a(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + o(2);$$

$$b(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + o(2);$$

$$c(x, y) = c_0 + c_1x + c_2y + o(2),$$

em que $o(2)$ representa os termos de ordem maior ou igual a 2 nas variáveis x e y . Note que $(x, y, dy/dx) \in M$ se, e somente se, $(dx : dy)$ é uma das direções definidas por (3.1) em $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A partir de M , tome a seguinte projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, r) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

Lema 3.2.1. *Seja $q \in M$. Então $P_r(q) = 0$ se, e somente se, $q \in \pi^{-1}(\Delta)$.*

Demonstração. Seja $q = (x_0, y_0, r_0)$ em M , logo $P(q) = 0$. Note que $q \in \pi^{-1}(\Delta)$ é equivalente a $b(x_0, y_0)^2 - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0$. Calculando P_r ,

$$P_r(q) = 2a(x_0, y_0)r_0 + 2b(x_0, y_0) = 2(a(x_0, y_0)r_0 + b(x_0, y_0)).$$

Logo, se $a(x_0, y_0) \neq 0$, então $P_r(q) = 0$ se, e somente se, $r_0 = -\frac{b(x_0, y_0)}{a(x_0, y_0)}$. Como $q \in M$, substituindo em $P(x, y, r)$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{b(x_0, y_0)^2}{a(x_0, y_0)} - \frac{2b(x_0, y_0)^2}{a(x_0, y_0)} + c(x_0, y_0) &= 0 \Leftrightarrow b(x_0, y_0)^2 - 2b(x_0, y_0)^2 + a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow b(x_0, y_0)^2 - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Caso $a(x_0, y_0) = 0$, então $P_r(q) = 0$ é equivalente a $b(x_0, y_0) = 0$ e portanto

$$b(x_0, y_0)^2 - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0.$$

Assim, $P_r(q) = 0$ se, e somente se, $q \in \pi^{-1}(\Delta)$. □

Proposição 3.2.2. *A projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local fora de $\pi^{-1}(\Delta)$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ tal que $p \notin \pi^{-1}(\Delta)$. A diferencial de π em p é dada por

$$\begin{aligned} d\pi_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto (a, b), \end{aligned}$$

onde $T_p M = \{(a, b, c) \mid aP_x(p) + bP_y(p) + cP_r(p) = 0\}$. Como $\dim_{\mathbb{R}} T_p M = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, $d\pi_p$ é isomorfismo se, e somente se, é injetor.

Seja $w = (w_1, w_2, w_3) \in \ker(d\pi_p)$, então $d\pi_p(w) = (0, 0)$. Assim $w_1 = w_2 = 0$ e portanto $w = (0, 0, w_3)$. Como $w \in T_p M$ segue que

$$w_1 P_x(p) + w_2 P_y(p) + w_3 P_r(p) = w_3 P_r(p) = 0.$$

Como $p \notin \pi^{-1}(\Delta)$, pelo Lema 3.2.1, $P_r(p) \neq 0$. Logo $w_3 = 0$ e assim $w = \vec{0}$. Portanto, $d\pi_p$ possui núcleo trivial, que implica a injetividade de $d\pi_p$. Pelo Teorema da Função Inversa, $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local em p . $\square$

Definição 3.2.3. Um campo vetorial ξ sobre a superfície M é chamado de **levantamento** da EDB (3.1) se, e somente se, $d\pi_{(x,y,r)}(\xi)$ é um vetor de direção r . Quando ξ é, além disso, um campo tangente a superfície M , ξ é dito um **levantamento adequado** sobre M .

Proposição 3.2.4. O campo vetorial

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + r P_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + r P_y) \frac{\partial}{\partial r}$$

é um levantamento adequado sobre M da EDB (3.1). Esse campo é chamado de **Campo de Lie-Cartan**.

Demonstração. Seja

$$\xi = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial r}$$

um campo vetorial qualquer, onde A , B e C são as componentes nas direções x , y e r , respectivamente. Como $r = (dx : dy) \in \mathbb{R}P^1$, então $dx \neq 0$ ou $dy \neq 0$. Suponha sem perda de generalidade que $dx \neq 0$. O campo ξ é um levantamento adequado se ela for tangente à superfície M e $d\pi_{(x,y,r)}(\xi)$ é um vetor na direção r . Como $\pi(x, y, r) = (x, y)$, segue que

$$d\pi_{(x,y,r)}(\xi) = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}.$$

Assim, como $r = \frac{dy}{dx}$, ξ é um levantamento quando $r = B/A$, ou seja, $B = rA$.

Em todo ponto de $M = P^{-1}(0)$, ∇P é ortogonal ao plano tangente nesse ponto. Portanto, para que ξ seja tangente em todo ponto, é necessário que

$$0 = \langle (A, B, C), \nabla P \rangle = \langle (A, B, C), (P_x, P_y, P_r) \rangle = AP_x + BP_y + CP_r.$$

Substituindo B por rA , porque ξ é um levantamento, a condição de tangência é

$$AP_x + rAP_y + CP_r = 0.$$

Tomando $A = P_r$, segue que

$$B = rPr \quad e \quad C = -(P_x + rP_y).$$

Portanto, um levantamento adequado é

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}.$$

□

Exemplo 3.2.5. *Considere a EDB*

$$dy^2 + ((x-2)^2 - y + 1)dx^2 = 0. \quad (3.4)$$

A partir de (3.4), se define a superfície

$$M = \{(x, y, r) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x, y, r) = 0\}$$

com $P(x, y, r) = r^2 + ((x-2)^2 - y + 1)$. O campo de Lie-Cartan é dado por

$$\xi = 2r \frac{\partial}{\partial x} + 2r^2 \frac{\partial}{\partial y} + (r - 2x + 4) \frac{\partial}{\partial r}.$$

A figura 9 ilustra o levantamento do campo de direções de (3.4).

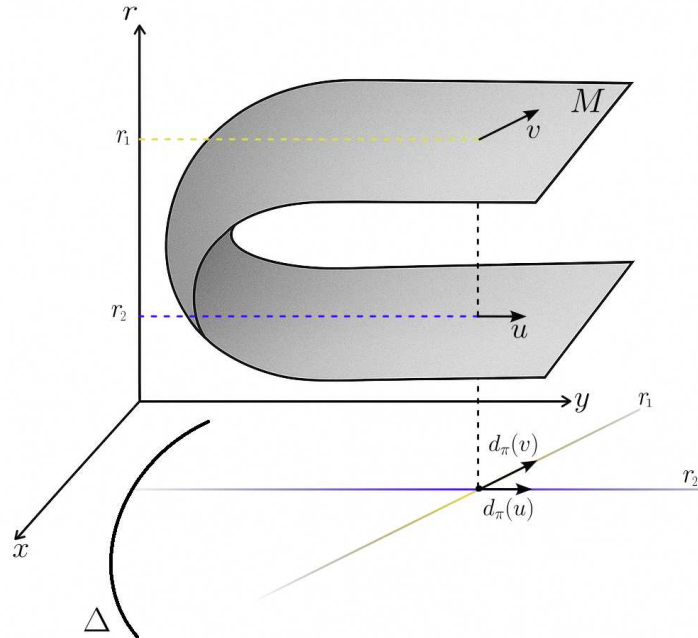


Figura 9 – Levantamento do campo de direções de (3.4).

Observação 3.2.6. Ao tomar a carta $s = \frac{dx}{dy}$ para $\mathbb{R}P^1$, a superfície obtida é

$$N = \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y, s) = 0\},$$

onde $Q(x, y, s) = a(x, y) + 2b(x, y)s + c(x, y)s^2$. Note que quando $dx = 0$, a carta $r = \frac{dy}{dx}$ não é adequada para o levantamento do campo de direções. Neste caso, basta tomar o campo vetorial

$$\eta = sQ_s \frac{\partial}{\partial x} + Q_s \frac{\partial}{\partial y} - (sQ_x + Q_y) \frac{\partial}{\partial s}$$

sobre N como um levantamento adequado.

Considere a EDB

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0$$

com

$$j^2a = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2,$$

$$j^2b = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2,$$

$$j^2c = c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2.$$

Dado um ponto $p \in \Delta$, realizando algumas translações e rotações, admita $p = (0, 0)$ e $dy = 0$ como a única direção definida em p pela EDB acima. Assim, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ e $(0, 0, 0)$ pertence a M . Suponha também que $(0, 0, 0)$ é um ponto regular de M e uma singularidade de ξ , isto é equivalente a $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.

Com estas considerações, os autovalores de $d\xi(0, 0, 0)$ serão

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(c_2 + \sqrt{(4b_1c_2)^2 - 16a_0c_3}), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(c_2 - \sqrt{(4b_1c_2)^2 - 16a_0c_3}).$$

Desta forma, $\lambda_1 = 0$ sempre será um autovalor da derivada do campo de *Lie-Cartan*. Entretanto, o tipo topológico da singularidade de ξ em $(0, 0, 0)$ depende apenas de λ_2 e λ_3 . De fato, o plano tangente a M em $(0, 0, 0)$ é dado por

$$P_x(0, 0, 0)x + P_y(0, 0, 0)y + P_r(0, 0, 0)r = 0,$$

ou seja, é ortogonal ao vetor

$$v = \nabla P(0, 0, 0).$$

Considere η a projeção de ξ neste plano. Assim

$$\eta(x, y, r) = \xi(x, y, r) - \frac{\langle \xi(x, y, r), v \rangle}{\|v\|} \frac{v}{\|v\|}.$$

Calculando $\nabla P(0, 0, 0)$, segue que $P_x(0, 0, 0) = 0$, $P_y(0, 0, 0) = c_2 \neq 0$ e $P_r(0, 0, 0) = 0$. Assim, o plano tangente a M em $(0, 0, 0)$ é

$$y = 0.$$

Considerando a base $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ para $T_{(0,0,0)}M$, é possível identificá-lo com $\mathbb{R}^2$ e reescrever η neste plano como

$$\tilde{\eta}(x, r) = \eta(x, 0, r).$$

Note que a projeção de M no plano tangente de $(0,0,0)$ é um difeomorfismo numa vizinhança de $(0,0,0)$ (demonstração análoga a demonstração da Proposição 3.2.2). Dessa forma, o tipo topológico de ξ em $(0,0,0)$ é o mesmo de $\tilde{\eta}$ em $(0,0)$ (ver Figura 10). Calculando os autovalores de $d\tilde{\eta}(0,0)$ tem-se λ_2 e λ_3 . Como λ_2 e λ_3 determinam o tipo topológico de $\tilde{\eta}$ em $(0,0)$, o mesmo vale para ξ em $(0,0,0)$.

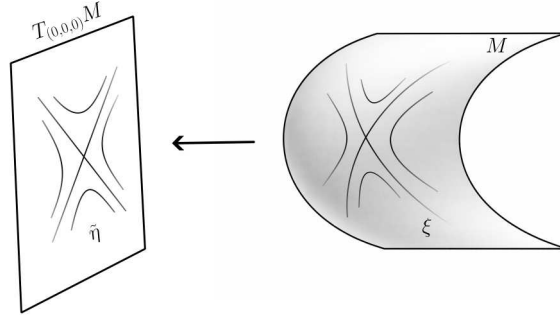


Figura 10 – Projeção das soluções do campo ξ em uma vizinhança de $(0,0,0)$ em M no plano tangente $T_{(0,0,0)}M$.

3.3 Formas Normais

Dada uma EDB como em (3.1), uma forma normal é uma outra EDB mais simples que é topologicamente (ou suavemente) equivalente a EDB inicial. Em geral, as formas normais dependem das singularidades do conjunto discriminante e do campo de Lie-Cartan. Nesta seção, serão apresentadas algumas formas normais importantes para o restante do trabalho. Considere a EDB (3.1)

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dydx + c(x,y)dx^2,$$

com a , b e c funções suaves em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. A EDB (3.1) é relacionada com a função discriminante $\delta = b^2 - ac$ e o conjunto discriminante $\Delta = \delta^{-1}(0)$. Além disso, associe (3.1) com a superfície $M = P^{-1}(0)$ onde

$$P(x,y,r) = a(x,y)r^2 + 2b(x,y)r + c(x,y)$$

e o campo de Lie-Cartan $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

O objetivo principal é estudar as soluções de (3.1) em uma vizinhança de um ponto $p \in U$. Suponha, sem perda de generalidade que $p = (0,0)$. Se $\delta(p) < 0$, então existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que $\delta < 0$ em V , pois δ é contínuo. Logo, (3.1) não define direções em V .

Analogamente, se $\delta(p) > 0$, então existe uma vizinhança $W \subset U$ de p tal que $\delta > 0$ em W . Assim, (3.1) define duas direções em todo ponto de W . Deste modo, $\pi^{-1}(x,y)$ serão dois pontos de M , para cada $(x,y) \in W$. Em cada um desses pontos, é aplicado

o Teorema do Fluxo Tubular 2.3.4 em ξ e obtém-se a configuração de (3.1) projetando as soluções de ξ no plano xy (ver Figura 11). Como visto na Proposição 3.2.2, $d\pi_p$ é um isomorfismo e π é um difeomorfismo.

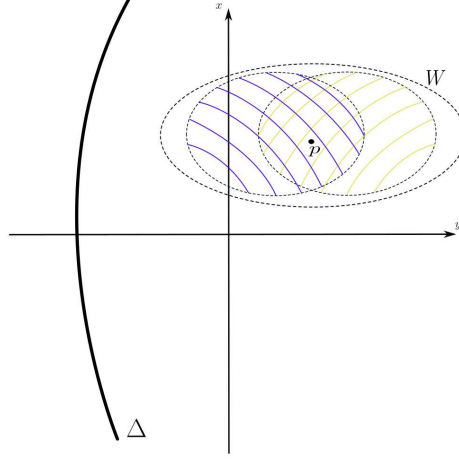


Figura 11 – Projeção das soluções de ξ no plano xy de uma vizinhança do ponto p . As curvas em amarelo e azul representam a projeção das soluções de ξ em vizinhanças de $\pi^{-1}(p)$ dadas pelo Teorema do Fluxo Tubular (2.3.4).

Se $\delta(p) = 0$, então $p \in \Delta$ e se faz necessário considerar alguns casos que dependem da regularidade de δ e de ξ .

Caso 1: Considere δ regular em p . Logo, a , b e c não se anulam simultaneamente em p . Suponha sem perda de generalidade que $a(p) \neq 0$. Dessa forma, (3.1) define uma única direção $(1 : r_0)$ em p , ou seja

$$a(p)r_0^2 + 2b(p)r_0 + c(p) = 0.$$

Assim, $\pi^{-1}(0, 0) = (0, 0, r_0)$.

Proposição 3.3.1. *O campo ξ é regular em $(0, 0, r_0)$ se, e somente se, a única direção definida por (3.1) em $p = (0, 0)$ é transversal a Δ .*

Demonstração. Seja $(1, r_0)$ um vetor na direção definida por (3.1) em p . Logo, esta direção é transversal a Δ em p se, e somente se

$$\langle (1, r_0), \nabla \delta(p) \rangle \neq 0,$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} & 2b(0, 0)b_x(0, 0) - a(0, 0)c_x(0, 0) - a_x(0, 0)c(0, 0) \\ & + r_0(2b(0, 0)b_y(0, 0) - a(0, 0)c_y(0, 0) - a_y(0, 0)c(0, 0)) \neq 0. \end{aligned}$$

Como $(0, 0, r_0)$ é raiz de P , então

$$a(0, 0)r_0^2 + 2b(0, 0)r_0 + c(0, 0) = 0$$

e como $(0, 0, r_0) \in \pi^{-1}(\Delta)$, então $P_r(0, 0, r_0) = 0$, ou seja,

$$2a(0, 0)r_0 + 2b(0, 0) = 0.$$

Assim, $b(0, 0) = -a(0, 0)r_0$ e $c(0, 0) = a(0, 0)r_0^2$, porque $a(0, 0)r_0^2 + 2b(0, 0)r_0 + c(0, 0) = 0$. Logo, a transversalidade ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned} & -a(0, 0)r_0b_x(0, 0) - a(0, 0)c_x(0, 0) - a_x(0, 0)a(0, 0)r_0^2 \\ & + r_0(-2r_0 - a(0, 0)c_y(0, 0) - a_y(0, 0)r_0^2) \neq 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$a_x(0, 0)r_0^2 + 2b_x(0, 0)r_0 + c_x(0, 0) + r_0(a_y(0, 0)r_0^2 + 2b(0, 0)r_0 + c_y(0, 0)) \neq 0.$$

Por outro lado, ξ é regular em $(0, 0, r_0)$ se, e somente se,

$$(P_r(0, 0, r_0), r_0P_r(0, 0, r_0), -(P_x(0, 0, r_0) + r_0P_y(0, 0, r_0))) \neq (0, 0, 0).$$

Como $P_r(0, 0, r_0) = 0$, ξ é regular se, e somente se,

$$\begin{aligned} P_x(0, 0, r_0) + r_0P_y(0, 0, r_0) &= a_x(0, 0)r_0^2 + 2b_x(0, 0)r_0 + c_x(0, 0) \\ &+ r_0(a_y(0, 0)r_0^2 + 2b(0, 0)r_0 + c_y(0, 0)) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, ξ é regular se, e somente se, $(1, r_0)$ é transversal a Δ em p . $\square$

Subcaso 1.1: Suponha que $(1, r_0)$ é transversal a Δ em p . Logo, ξ é regular em $(0, 0, r_0)$. Neste contexto, M. Cibrario [8] mostrou que (3.1) é suavemente equivalente a

$$ydy^2 - dx^2 = 0. \quad (3.5)$$

Assim, as soluções de (3.1) formam uma família de cúspides em Δ . Veja Figura 12.

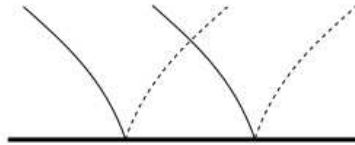


Figura 12 – Configuração de $ydy^2 - dx^2 = 0$.

Subcaso 1.2: Suponha que $(1, r_0)$ seja tangente a Δ em p . Logo, $(0, 0, r_0)$ é uma singularidade do campo de *Lie-Cartan*. Genericamente, ξ possui uma sela, nó ou foco em $(0, 0, r_0)$. Se $d\xi_{(0,0,r_0)}$ possui autovalores não ressonantes e autovetores transversais a $\pi^{-1}(\Delta)$, então A.A. Davydov [11] mostrou que (3.1) é suavemente equivalente a

$$dy^2 + (\lambda x^2 - y)dx^2 = 0, \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{16}. \quad (3.6)$$

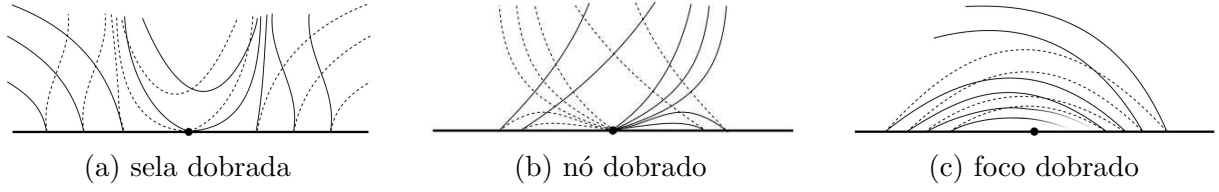


Figura 13 – Configuração de $dy^2 + (\lambda x^2 - y)dx^2 = 0$.

Quando $\lambda < 0$, ξ possui uma sela em $(0, 0, r_0)$ e p é chamada de **sela dobrada**. Quando $0 < \lambda < \frac{1}{16}$, ξ possui um nó em $(0, 0, r_0)$ e p é chamado de **nó dobrado**. Quando $\lambda > \frac{1}{16}$, ξ possui um foco em $(0, 0, r_0)$ e p é chamado de **foco dobrado**. Veja a Figura 13.

Para calcular λ , J.W. Bruce e F. Tari [5] mostraram que se

$$\begin{aligned} j^2 a &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2, \\ j^2 b &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2, \\ j^2 c &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

então

$$\lambda = \frac{4a_0c_3 - b_1^2 - b_1c_2}{4c_2^2}. \quad (3.8)$$

Caso 2: Suponha que δ é singular em p com $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$. Considerando a , b e c como (3.7) segue que $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ e

$$j^2 \delta = (b_1^2 - a_1c_1)x^2 + (2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)xy + (b_2^2 - a_2c_2)y^2.$$

Portanto, δ possui uma singularidade de Morse em p se, e somente se,

$$(2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)^2 - 4(b_1^2 - a_1c_1)(b_2^2 - a_2c_2) \neq 0,$$

o que ocorre genericamente.

Proposição 3.3.2. *Valem as seguintes afirmações:*

1. A fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ está contida na superfície M dada em (3.3) se, e somente se, $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$.
2. A superfície M é suave em uma vizinhança de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ se, e somente se, a função discriminante $\delta = b^2 - ac$ tem uma singularidade de Morse na origem.
3. O campo vetorial ξ tem genericamente um ou três pontos de equilíbrio em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Estes pontos são do tipo nó ou sela.

Demonstração. 1. Suponha $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset M$, assim $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset P^{-1}(0)$. Logo $P(0, 0, r) = 0$, ou seja,

$$a(0, 0)r^2 + 2b(0, 0)r + c(0, 0) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Como a igualdade acima é válida para todo $r \in \mathbb{R}$, quando $r = 0$ segue que

$$0 + c(0, 0) = 0 \Rightarrow c(0, 0) = 0.$$

Assim

$$a(0, 0)r^2 + 2b(0, 0)r = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

que implica

$$a(0, 0)r + 2b(0, 0) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Novamente, tomando $r = 0$,

$$0 + 2b(0, 0) = 0 \Rightarrow b(0, 0) = 0,$$

Logo,

$$a(0, 0)r = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Portanto $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$.

Por outro lado, suponha que $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$, então para todo ponto $(0, 0, r) \in \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ tem-se

$$P(0, 0, r) = a(0, 0)r^2 + 2b(0, 0)r + c(0, 0) = 0r^2 + 0r + 0 = 0.$$

Logo $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset M$.

2. Considere que $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \subset M$. A superfície M será suave se, e somente se, 0 for um valor regular de P , pois $M = P^{-1}(0)$, em uma vizinhança de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Note que 0 deixa de ser valor regular de P em uma vizinhança de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ se

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, r) = \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, r) = \frac{\partial P}{\partial r}(0, 0, r) = 0$$

para algum $r \in \mathbb{R}$. A função $\frac{\partial P}{\partial r} = 2a(x, y)r + b(x, y)$ é identicamente nula em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ pois $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$. Além disso, defina

$$j^1a = a_1x + a_2y;$$

$$j^1b = b_1x + b_2y;$$

$$j^1c = c_1x + c_2y.$$

Assim, 0 é valor crítico se, e somente se,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, r) = a_1r^2 + 2b_1r + c_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, r) = a_2r^2 + 2b_2r + c_2$$

forem simultaneamente nulas para algum r . O resultante R destes dois polinômios é dado por

$$R = \det \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$R = 0 \Leftrightarrow (c_2a_1 - c_1a_2)^2 - 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) = 0. \quad (3.9)$$

Logo, se (3.9) é verdadeira então existe r que seja solução dos dois polinômios simultaneamente.

Por outro lado, a função discriminante é dada por

$$\begin{aligned} \delta &= b^2 - ac \\ &= (b_1x + b_2y + o(2))^2 - (a_1x + a_2y + o(2))(c_1x + c_2y + o(2)) \\ &= b_1^2x^2 + 2b_1b_2xy + b_2^2y^2 - a_1c_1x^2 - a_1c_2xy - a_2c_1xy - a_2c_2y^2 + o(3), \end{aligned}$$

que resulta em

$$\delta = (b_1^2 - c_1a_1)x^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)xy + (b_2^2 - c_2a_2)y^2 + o(3). \quad (3.10)$$

A função discriminante possui uma singularidade na origem, pois $\delta_x(0,0) = \delta_y(0,0) = 0$. Esta singularidade será de Morse se o determinante da matriz Hessiana for diferente de zero. Este determinante é dado por

$$\det(Hess \delta(0,0)) = 4(b_1^2 - c_1a_1)(b_2^2 - c_2a_2) - (2b_1b_2 - c_2c_1 - c_1a_2)^2$$

e simplificando tem-se

$$\det(Hess \delta(0,0)) = 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) - (c_2a_1 - c_1a_2)^2.$$

Portanto, o determinante de $Hess \delta(0,0)$ é diferente de zero se, e somente se, (3.9) não é válida. Assim, a superfície M será suave em uma vizinhança de $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}P^1$ se, e somente se, δ possui uma singularidade de Morse.

3. Os pontos de equilíbrio em $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}P^1$ do campo ξ são dados pelo anulamento de P , P_r e $-(P_x + rP_y)$ simultaneamente. Na fibra

$$P(0,0,r) = a(0,0)r^2 + b(0,0)r + c(0,0) = 0$$

e também

$$P_r(0,0,r) = 2a(0,0)r + b(0,0) = 0.$$

Logo, os pontos de equilíbrio são dados pelo anulamento de $-(P_x + rP_r)$ em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Então, um ponto de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ é ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$\begin{aligned} (-P_x - rP_y)(0, 0, r) &= -a_x(0, 0)r^2 - 2b_x(0, 0)r - c_x(0, 0) - a_y(0, 0)r^3 - 2b_y(0, 0)r^2 - c_y(0, 0)r \\ &= -a_1r^2 - 2b_1r - c_1 - a_2r^3 - 2b_2r^2 - c_2r \\ &= -a_2r^3 - (a_1 + 2b_2)r^2 - (2b_1 + c_2)r - c_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tome a cúbica $\Phi(r) = a_2r^3 + (a_1 + 2b_2)r^2 + (2b_1 + c_2)r + c_1$, ela possui duas raízes se, e somente se, o resultante $Q(\Phi, \Phi')$ dos polinômios Φ e Φ' for zero, ou seja

$$\begin{aligned} 27a_2^3c_1^2 + 4a_2(a_1 + 2b_2)^3c_1 - 18a_2^2(a_1 + 2b_2)(2b_1 + c_2)c_1 + 4a_2^2(2b_1 + c_2)^3 \\ - a_2(a_1 + 2b_2)^2(2b_1 + c_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, o campo vetorial ξ tem genericamente um ou três pontos de equilíbrio em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$.

Para obter o tipo topológico dos pontos de equilíbrio de ξ é necessário analisar os autovalores da linearização de ξ nestes pontos. Seja r_1 uma raiz de Φ . Escrevendo o campo ξ na forma de sistema, segue que

$$\xi = \begin{cases} x' = P_r = 2ar + b \\ y' = rP_r = 2ar^2 + 2br \\ r' = -(P_x + rP_y) = -\Phi(r) \end{cases}.$$

A linearização do campo ξ em $(0, 0, r_1)$ é

$$d\xi(0, 0, r_1) = \begin{pmatrix} 2(a_1r_1 + b_1) & 2(a_2r_1 + b_2) & 0 \\ 2r_1(a_1r_1 + b_1) & 2r_1(a_2r_1 + b_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi'(r_1) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\Phi'(r_1), \lambda_3 = \alpha(r_1) = 2(a_2r_1^2 + (a_1 + b_2)r_1 + b_1).$$

Como r_1 não é uma raiz repetida de Φ , segue que $\lambda_2 = \Phi'(r_1) \neq 0$. Genericamente, α e Φ não possuem raízes comuns, assim $\lambda_3 = \alpha(r_1) \neq 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. Desta forma, se $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$, então o ponto de equilíbrio do campo é do tipo nó, e se $\lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$, o ponto de equilíbrio do campo é do tipo sela. Portanto, os pontos de equilíbrio do campo ξ sobre $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ são do tipo nó ou sela.

□

Subcaso 2.1: Suponha que δ possua uma singularidade de Morse A_1^+ em p . Logo, Δ é formado por um ponto isolado, que é p . Neste caso, J.W. Bruce e D. Fidal [1] mostraram que (3.1) é topologicamente equivalente a

1. $ydy^2 + 2xdydx - ydx^2 = 0$, se ξ possui uma sela na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;
2. $ydy^2 - 2xdydx - ydx^2 = 0$, se ξ possui duas selas e um nó na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;
3. $ydy^2 + \frac{1}{2}xdydx - ydx^2 = 0$, se ξ possui três selas em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$.

Esses casos são conhecidos como Lemom, Monstar e Star, respectivamente. Veja Figura 14.

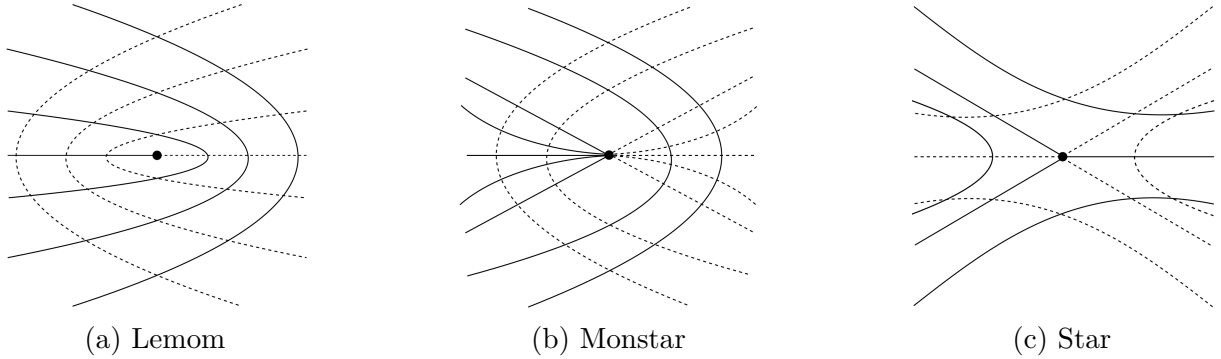


Figura 14 – Configuração de (3.1) quando os coeficientes se anulam na origem e δ possui singularidade A_1^+ .

Subcaso 2.2: Suponha que δ possua uma singularidade A_1^- em p . Logo Δ é formado por duas curvas regulares e transversais em p . Neste caso, J. W. Bruce e F. Tari [2] mostraram que (3.1) é topologicamente equivalente a

1. $ydy^2 + 2xdydx + ydx^2 = 0$, se ξ possui uma sela na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;
2. $ydy^2 - \frac{1}{2}xdydx + ydx^2 = 0$, se ξ possui um nó na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;
3. $ydy^2 - 4xdydx + ydx^2 = 0$, se ξ possui três selas na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;
4. $ydy^2 + 2(y - x)dydx + ydx^2 = 0$, se ξ possui duas selas e um nó na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;
5. $ydy^2 - \frac{4}{3}xdydx + ydx^2 = 0$, se ξ possui uma sela e dois nós na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$.

O caso em que ξ possui três nós não ocorre genericamente. A Figura 15 ilustra as possíveis configurações.

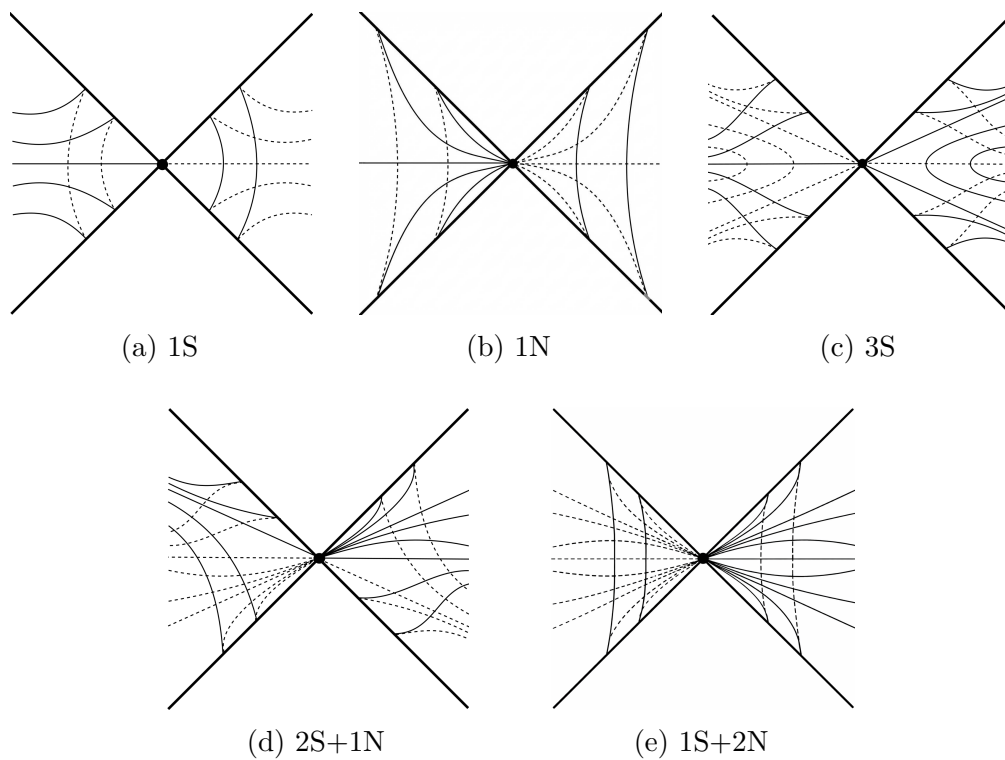


Figura 15 – Configuração de (3.1) quando os coeficientes se anulam na origem e δ possui singularidade A_1^- .

4 EDBs em superfícies em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo será construída a equação das linhas de curvatura em superfícies de $\mathbb{R}^3$ e estudado seu comportamento próximo a pontos umbílicos. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Tome $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S e N a aplicação de Gauss de S . Como

$$\langle N, N \rangle = \|N\|^2 = 1,$$

derivando com relação a u em ambos os lados, tem-se

$$0 = \langle N, N \rangle_u = 2\langle N, N_u \rangle.$$

Logo, $N_u \in T_p S$ porque N_u é ortogonal a N . Analogamente, $N_v \in T_p S$. Tomando $\{X_u, X_v\}$ como base para $T_p S$, é possível escrever $-N_u$ e $-N_v$ como combinação linear dos elementos dessa base. Assim,

$$\begin{cases} -N_u = aX_u + bX_v \\ -N_v = cX_u + dX_v \end{cases},$$

ou seja, na base $\{X_u, X_v\}$, a matriz de $-dN_p$ é

$$-dN_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Substituindo nos coeficientes da segunda forma fundamental, tem-se

$$\begin{cases} e = \langle -N_u, X_u \rangle = \langle aX_u + bX_v, X_u \rangle = a\langle X_u, X_u \rangle + b\langle X_v, X_u \rangle = aE + bF, \\ f = \langle -N_u, X_v \rangle = \langle aX_u + bX_v, X_v \rangle = aF + bG, \\ f = \langle -N_v, X_u \rangle = \langle cX_u + dX_v, X_u \rangle = cE + dF, \\ g = \langle -N_v, X_v \rangle = \langle cX_u + dX_v, X_v \rangle = cF + dG. \end{cases}$$

Observando cada sistema na forma matricial, segue que

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Resolvendo os sistemas, conclui-se que

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Assim, é possível escrever a , b , c e d em função dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais como

$$a = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad b = \frac{fE - eF}{EG - F^2}, \quad c = \frac{fG - gF}{EG - F^2}, \quad d = \frac{gE - fF}{EG - F^2}.$$

Com os termos da matriz de $-dN_p$ em função dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, é possível obter a expressão das curvaturas Gaussiana, média e principais em coordenadas locais obtendo

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}; \quad (4.1)$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}; \quad (4.2)$$

$$\kappa_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}, \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

Observação 4.0.1. Em um ponto umbílico, lembre que $\kappa_1 = \kappa_2$, portanto, pela equação acima,

$$H + \sqrt{H^2 - K} = H - \sqrt{H^2 - K} \Rightarrow H^2 - K = 0.$$

Proposição 4.0.2. (Olínde Rodrigues). Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C em S seja uma linha de curvatura de S é que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C , onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t . Nesse caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura principal segundo $\alpha'(t)$.

Considere uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ em S e suponha que

$$dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Portanto $\alpha'(t) = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN_{\alpha(t)}(X_u u' + X_v v') = \lambda(t)(X_u u' + X_v v') \Rightarrow N_u u' + N_v v' = \lambda(t)X_u u' + \lambda(t)X_v v'.$$

Substituindo N_u e N_v , segue que

$$-(aX_u + bX_v)u' - (cX_u + dX_v)v' = \lambda(t)X_u u' + \lambda(t)X_v v'$$

que implica

$$(au' + cv' + \lambda(t)u')X_u + (bu' + dv' + \lambda(t)v')X_v = \vec{0}.$$

Como $\{X_u, X_v\}$ é linearmente independente, é possível concluir que

$$\begin{cases} au' + cv' + \lambda(t)u' = 0 \\ bu' + dv' + \lambda(t)v' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda(t)u' = au' + cv' \\ -\lambda(t)v' = bu' + dv' \end{cases}.$$

Multiplicando a 1ª equação por v' em ambos os lados e a 2ª equação por u' em ambos os lados, note que

$$\begin{cases} -\lambda(t)u'v' = au'v' + c(v')^2 \\ -\lambda(t)v'u' = b(u')^2 + dv'u' \end{cases} \Rightarrow au'v' + c(v')^2 - b(u')^2 - dv'u' = 0.$$

Por fim, substituindo a , b , c e d ,

$$\left(\frac{eG - fF}{EG - F^2}\right)u'v' + \left(\frac{fG - gF}{EG - F^2}\right)(v')^2 - \left(\frac{fE - eF}{EG - F^2}\right)(u')^2 - \left(\frac{gE - fF}{EG - F^2}\right)u'v' = 0$$

que implica

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0. \quad (4.4)$$

Note que a equação das linhas de curvatura é uma EDB da forma de (3.1) com termos em função dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Logo, é possível estudar seu comportamento usando os resultados do Capítulo 3. Para isso, é importante observar a relação das linhas de curvatura com os pontos umbílicos, descritos na Observação 4.0.3. Mais detalhes podem ser encontrados em [13].

Observação 4.0.3. *Seja p um ponto de uma superfície S , as afirmações a seguir são equivalentes:*

1. p é um ponto umbílico;
2. Todas as direções tangentes em p são principais;
3. Os coeficientes de (4.4) se anulam simultaneamente em p ;
4. As linhas de curvatura possuem uma singularidade em p .

Como no subcaso 2.1 da Seção 3.3, o conjunto discriminante da EDB das linhas de curvatura é formado por pontos isolados, os pontos umbílicos. Adiante, será estudado o comportamento das linhas de curvatura próximas a pontos umbílicos, para isso, relacione com (4.4) a superfície $M = P^{-1}(0)$, em que

$$\begin{aligned} P(x, y, r) = & \left(f(x, y)E(x, y) - e(x, y)F(x, y)\right)r^2 \\ & + \left(g(x, y)E(x, y) - e(x, y)G(x, y)\right)r \\ & + \left(g(x, y)F(x, y) - f(x, y)G(x, y)\right). \end{aligned}$$

Definição 4.0.4. *Seja p um ponto umbílico em uma superfície S e considere o cenário descrito acima. O ponto p é chamado de **ponto umbílico Darbouxiano** se ocorrem as duas condições a seguir:*

T:(Condição de Transversalidade) *A superfície M é suave em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$;*

D:(Condição de Discriminante) As singularidades do campo de Lie-Cartan são hiperbólicas e são dadas por um dos casos abaixo:

D_1 : uma única sela, ou

D_2 : um único nó e duas selas, ou

D_3 : três selas.

Gutiérrez e Sotomayor estudaram o comportamento das linhas de curvatura em pontos umbílicos Darbouxianos para superfícies no espaço euclidiano. A seguir são apresentados os resultados obtidos por eles em [14].

Teorema 4.0.5. *Seja $p \in S$ um ponto umbílico. Transladando p para a origem e realizando algumas rotações, considere a carta de Monge X de S em uma vizinhança de p dada por*

$$X(x, y) = \left(x, y, \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{6}y^3 + o(4) \right).$$

Suponha as seguintes condições

$$T) \quad b(b - a) \neq 0;$$

$$D_1) \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0;$$

$$D_2) \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 > \frac{a}{b} > 1, \quad a \neq 2b;$$

$$D_3) \quad \frac{a}{b} < 1.$$

Então o comportamento das linhas de curvatura próximas ao ponto umbílico p , nos casos D_1 , D_2 e D_3 são do tipo Lemon, Monstar e Star, respectivamente (ver Figura 14).

Demonstração. Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de X , tem-se

$$E = 1 + [kx + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + o(3)]^2,$$

$$F = [kx + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + o(3)][ky + bxy + \frac{c}{2}y^2 + o(3)],$$

$$G = 1 + [ky + bxy + \frac{c}{2}y^2 + o(3)]^2,$$

$$e = k + ax + o(2),$$

$$f = by + o(2),$$

$$g = k + bx + cy + o(2),$$

onde $o(n)$ são termos de grau maior ou igual a n e nos coeficientes e , f e g foi tomado seus respectivos polinômios de Taylor. Por (4.4), a equação das linhas de curvatura é dada por

$$[-by + o(2)]dy^2 + [(b - a)x + cy + o(2)]dxdy + [by + o(2)]dx^2 = 0. \quad (4.5)$$

Associada à equação diferencial binária (4.5), considere a superfície

$$M = \{(x, y, r) \mid P(x, y, r) = [-by + o(2)]r^2 + [(b-a)x + cy + o(2)]r + [by + o(2)] = 0\}$$

com $r = \frac{dy}{dx}$, como em (3.3).

Primeiramente, é necessário verificar que a condição T é equivalente à M ser suave em uma vizinhança de $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Pela Proposição 3.3.2, isto é equivalente à função discriminante

$$\delta(x, y) = [(b-a)x + cy + o(2)]^2 - 4[-by + o(2)][by + o(2)]$$

ter uma singularidade de Morse na origem. De fato, o desenvolvimento do polinômio acima fornece

$$\delta(x, y) = (b-a)^2x^2 + 2(b-a)cxy + (c^2 + 4b^2)y^2 + o(3)$$

e suas derivadas com relação a x e y são

$$\begin{aligned}\delta_x(x, y) &= 2(b-a)^2x + 2(b-a)cy + o(2) \\ \delta_y(x, y) &= 2(b-a)^2cx + 2(c^2 + 4b^2)y + o(2).\end{aligned}$$

Assim $\delta_x(0, 0) = \delta_y(0, 0) = 0$. Além disso, a matriz Hessiana de δ na origem é

$$Hess(\delta(0, 0)) = \begin{pmatrix} 2(b-a)^2 & 2(b-a)c \\ 2(b-a)c & 2c^2 + 8b^2 \end{pmatrix}$$

e seu determinante é dado por

$$4c^2(b-a)^2 + 16b^2(b-a)^2 - 4c^2(b-a)^2 = 16b^2(b-a)^2 = (4b(b-a))^2.$$

Portanto, a função $\delta(x, y)$ possui uma singularidade de Morse na origem se, e somente se, $b(b-a) \neq 0$. Com isso, a condição T é equivalente à superfície M ser suave em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$.

Para estudar o comportamento das linhas de curvatura, considere o campo de *Lie-Cartan*

$$\xi = P_r \frac{\partial}{\partial x} + rP_r \frac{\partial}{\partial y} - (P_x + rP_y) \frac{\partial}{\partial r}.$$

O campo vetorial ξ pode ser escrito na forma de sistema

$$\xi = \begin{cases} x' = P_r = -2byr + (b-a)x + cy + o(2) \\ y' = rP_r = r[-2byr + (b-a)x + cy + o(2)] \\ r' = -(P_x + rP_y) = -[(b-a)r + r(-br^2 + cr + b) + o(1)]. \end{cases} \quad (4.6)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (4.6) em M são dados por $P = P_r = P_x + rP_y = 0$. As equações $P = P_r = 0$ fornecem os pontos $(0, 0, r) \in \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Os pontos onde $P_x + rP_y = 0$ em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ são dados por $\phi(r) = 0$, onde ϕ é a cúbica

$$\phi(r) = -(P_x + rP_y)(0, 0, r) = -(b-a)r - r(-br^2 + cr + b) = r(br^2 - cr + a - 2b).$$

As raízes desta cúbica são

$$r_0 = 0 \text{ e } r_{\pm} = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\Delta}$$

sendo

$$\Delta = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2.$$

Note que $\Delta = 0$ não satisfaz a condição D_1 , D_2 ou D_3 . Portanto, quando $\Delta > 0$, o sistema apresenta três pontos de equilíbrio, denotados por

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_+ = (0, 0, r_+), \quad E_- = (0, 0, r_-).$$

Quando $\Delta < 0$, o sistema tem apenas E_0 como ponto de equilíbrio. A próxima etapa é estudar o tipo topológico destes pontos de equilíbrio. A linearização do campo vetorial ξ dado em (4.6) no ponto $(0, 0, r)$, onde $r \in \{0, r_-, r_+\}$, tem a forma

$$D\xi(0, 0, r) = \begin{pmatrix} b-a & c-2br & 0 \\ (b-a)r & (c-2br)r & 0 \\ 0 & 0 & 3br^2 - 2cr + a - 2b \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Os autovalores da matriz (4.7) são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b, \quad \lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a.$$

Observe que como r é raiz da equação cúbica $\phi(r) = r(br^2 - cr + a - 2b)$, é possível simplificar a escrita dos autovalores λ_2 e λ_3 como

i. Se $r \neq 0$, então

$$\lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b = \cancel{(br^2 - cr + a - 2b)} + 2br^2 - cr = (br^2 - cr) + br^2 = (2b - a) + br^2$$

pois $br^2 - cr + a - 2b = 0$ implica que $br^2 - cr = 2b - a$ e

$$\lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a = -\cancel{(br^2 - cr + a - 2b)} - br^2 - b = -b(r^2 + 1).$$

ii. Se $r = 0$, então

$$\lambda_2 = 3br^2 - 2cr + a - 2b = a - 2b,$$

$$\lambda_3 = -2br^2 + cr + b - a = b - a.$$

De agora em diante, assuma então tais simplificações de λ_2 e λ_3 . Surgem os seguintes casos:

Caso $D_1: \left(\Delta = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0\right)$.

Neste caso, a origem é a única raiz real de $\phi(r)$, ou seja, possui apenas E_0 como ponto de equilíbrio em $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. Os autovalores de $D\xi(E_0)$ são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a - 2b$ e $\lambda_3 = b - a$, pois $r = 0$. Para haver uma singularidade do tipo D_1 , conforme a definição

de ponto umbílico Darboxiano, é suficiente mostrar que os autovalores λ_2 e λ_3 tenham sinais opostos. Como $\Delta < 0$, segue que

$$\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0 \Rightarrow 0 < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 < \frac{a}{b} - 2 \Rightarrow 0 < \frac{a - 2b}{b}.$$

Portanto, $a - 2b$ e b têm o mesmo sinal, assim

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b - a}{a - 2b} = -1 - \frac{b}{a - 2b} < 0.$$

Segue, então, que E_0 é um ponto de equilíbrio do tipo sela.

Caso D_2 : $\left(\Delta = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 > 0, \frac{a}{b} > 1, a \neq 2b\right)$.

Neste caso, há três pontos de equilíbrio. Este caso será dividido em dois subcasos. Primeiramente, considere

$$1 < \frac{a}{b} < 2.$$

É fácil ver que E_0 é um ponto de equilíbrio do tipo nó, pois

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b - a}{a - 2b} = \frac{b\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{b\left(\frac{a}{b} - 2\right)} = \frac{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b} - 2\right)} > 0$$

uma vez que $1 - \frac{a}{b} < 0$ e $\frac{a}{b} - 2 < 0$.

Para estudar a natureza dos pontos de equilíbrio $E_{\pm}$, considere a razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-(r^2 + 1)} < 0,$$

pois $2 - \frac{a}{b} > 0$. Portanto, $E_{\pm}$ são pontos de equilíbrio do tipo sela, independente da escolha de r .

No segundo subcaso, considere

$$2 < \frac{a}{b} < 2 + \left(\frac{c}{2b}\right)^2.$$

De modo análogo ao subcaso anterior, é fácil ver que E_0 é um ponto de equilíbrio do tipo sela, ou seja, $\lambda_3/\lambda_2 < 0$. Para estudar o tipo topológico dos pontos de equilíbrio $E_{\pm}$, considere as razões

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b - a + br^2}{-b(r^2 + 1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2 + 1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-(r^2 + 1)}.$$

Neste caso, o sinal da razão depende do valor de r e é dado pelo numerador, já que o denominador é sempre negativo, independente de r . Logo, faz-se necessário estudar o sinal da expressão $N_{\pm} = 2 - \frac{a}{b} + r_{\pm}^2$. Substituindo o valor de $r_{\pm}$ em $N_{\pm}$, segue que

$$N_{\pm} = 2 - \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{2b} \pm \sqrt{\Delta}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2 - \frac{a}{b} + \frac{c^2}{4b^2} \pm \frac{c}{b}\sqrt{\Delta} + \Delta \\
&= \Delta \pm \frac{c}{b}\sqrt{\Delta} + \Delta \\
&= 2\Delta \pm \frac{c}{b}\sqrt{\Delta} \\
&= 2\sqrt{\Delta} \left(\sqrt{\Delta} \pm \frac{c}{2b} \right).
\end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, os sinais de $N_{\pm}$ seguem da expressão dentro dos parênteses. Assim, supondo $bc > 0$, segue que N_+ é sempre positivo e o sinal de N_- segue de

$$\sqrt{\Delta} - \frac{c}{2b} = \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} - \frac{c}{2b} < \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2} - \frac{c}{2b} = \left|\frac{c}{2b}\right| - \frac{c}{2b} = 0.$$

A desigualdade decorre do fato de $2 < \frac{a}{b}$ e a última igualdade segue pois $bc > 0$ por suposição. Assim, E_+ e E_- são pontos de equilíbrio do tipo sela e nó, respectivamente. De modo análogo, supondo $bc < 0$, conclui-se que E_+ e E_- são pontos de equilíbrio do tipo nó e sela, respectivamente. Deste modo, em todos os casos, os três pontos de equilíbrio são duas selas e um nó.

Caso $D_3: \left(\frac{a}{b} < 1\right)$

Neste caso, há 3 pontos de equilíbrio e todos são do tipo sela. Com efeito, a natureza de E_0 segue do sinal da razão

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{b-a}{a-2b} = \frac{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b} - 2\right)} < 0,$$

porque $1 - \frac{a}{b} > 0$ e $\frac{a}{b} - 2 < 0$. O tipo topológico dos pontos de equilíbrio E_- e E_+ é dado pelo sinal da seguinte razão

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{2b-a+br^2}{-b(r^2+1)} = \frac{b\left(2 - \frac{a}{b} + r^2\right)}{-b(r^2+1)} = \frac{\left(2 - \frac{a}{b}\right) + r^2}{-(r^2+1)} < 0.$$

□

Proposição 4.0.6. *Considere as curvas $(gF - fG)(x, y) = 0$ e $(gE - eG)(x, y) = 0$. As interseções das duas curvas definem os pontos umbílicos. A condição de transversalidade T significa que as curvas acima são regulares e se encontram transversalmente em $(0, 0)$.*

Demonstração. Suponha que $(gF)(x, y) = (fG)(x, y)$ e $(gE)(x, y) = (eG)(x, y)$. De acordo com as equações (4.1) e (4.2), segue que

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{2eG - 2fF}{EG - F^2} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

Assim, pela Observação 4.0.1,

$$\begin{aligned}
H^2 - K &= \left(\frac{eG - fF}{EG - F^2} \right)^2 - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{2eGfF + egF^2 + f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfG + e(gF)F + Ef(fG)}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + e(fG)F + Ef(gF)}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + efGF + f(Eg)F}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-2eGfF + efGF + f(eG)F}{(EG - F^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $(H^2 - K)(x, y) = 0$, então a intersecção das duas curvas serão pontos umbílicos. Por outro lado, nos pontos umbílicos, os coeficientes da equação (4.4) se anulam simultaneamente, em particular $(gF - fG)(x, y) = 0$ e $(gE - eG)(x, y) = 0$. Logo, os pontos umbílicos são exatamente a intersecção das duas curvas.

Considerando a parametrização X do Teorema 4.0.5, defina

$$A(x, y) = (gF - fG)(x, y) = by + o(2) = 0,$$

$$B(x, y) = (gE - eG)(x, y) = (b - a)x + cy + o(2) = 0.$$

Segue que

$$\det \begin{pmatrix} A_x(0, 0) & A_y(0, 0) \\ B_x(0, 0) & B_y(0, 0) \end{pmatrix} = -b(b - a).$$

Assim, se valer a condição T , o determinante anterior será diferente de 0. Logo, as linhas da matriz acima não se anulam e portanto as curvas são regulares em $(0, 0)$. Além disto, o determinante diferente de zero significa que seus vetores tangentes são linearmente independentes, ou seja, as curvas se encontram transversalmente em $(0, 0)$. $\square$

Teorema 4.0.7. *A condição de transversalidade T do Teorema 4.0.5 é equivalente a função $H^2 - K$ ter uma singularidade de Morse em $(0, 0)$.*

Demonstração. De acordo com as equações apresentadas em (4.1) e (4.2), segue que

$$\begin{aligned}
H^2 - K &= \frac{(eG - 2fF + gE)^2}{4(EG - F^2)^2} - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{(eG - gE)^2 + 2fE(2fg - gF) + 2eF(2gF - fG)}{4(EG - F^2)^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, calculados na demonstração do Teorema 4.0.5, e efetuando alguns cálculos e simplificações, obtém-se

$$H^2 - K = \frac{(b-a)^2x^2 + 2(b-a)cxy + (4b^2 + c^2)y^2 + o(3)}{4 + 8k^2x^2 + 8k^2y^2 + o(3)}, \quad (4.8)$$

onde $o(3)$ são os termos de grau maior ou igual a 3. Note que a origem é um ponto singular de $H^2 - K$. De fato, como $(0,0)$ é uma raiz do numerador de (4.8) e de suas derivadas parciais de primeira ordem (pois ele é um polinômio homogêneo de grau 2) então, pela regra da derivada do quociente, a origem é um zero das derivadas parciais de primeira ordem de $H^2 - K$. Além disso,

$$Hess(H^2 - K)(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^2}{2} & \frac{(b-a)c}{2} \\ \frac{(b-a)c}{2} & \frac{(4b^2+c^2)}{2} \end{pmatrix}.$$

A função $H^2 - K$ possui uma singularidade de Morse na origem quando

$$\det(Hess(H^2 - K)(0,0)) = b^2(b-a)^2$$

for diferente de zero. Portanto, a função $H^2 - K$ possui uma singularidade de Morse na origem se, e somente se, a condição de transversalidade, $b(b-a) \neq 0$, for verificada. $\square$

5 EDB's em Superfícies com Métrica lorentziana

Sejam M uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e $p \in M$. Foi visto na Seção 2.2 que dado a aplicação de Gauss $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, é definido o operador de forma $-dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$. Como o T_pM herda o produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^3$, $-dN_p$ possui dois autovalores, as curvaturas principais, e seus respectivos autovetores são as direções principais, suas curvas integrais são as linhas de curvatura. As direções que satisfazem $\langle -dN_p(v), v \rangle = 0$ são chamadas de direções assintóticas e suas curvas integrais são as linhas assintóticas. Assim, o operador de forma define dois pares de linhas em M .

Note que isso é possível pelo fato de $-dN_p$ ser um operador linear autoadjunto em T_pM em relação a métrica de $\mathbb{R}^3$ induzida em T_pM . Em [16], o estudo do comportamento de EDB's em superfícies de $\mathbb{R}^3$ foi generalizado para pares de linhas em (M, g) onde g é uma métrica qualquer, a partir de um operador linear autoadjunto A genérico. Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos em [16] para superfícies com métrica lorentziana.

Considere $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície munida de uma métrica g lorentziana, ou seja, de assinatura 1. Deste modo, T_pM pode ser visto como um plano tipo tempo, onde a métrica g faz o papel da métrica de Minkowski $\langle, \rangle_1$. Assim, valem resultados análogos aos vistos na Seção 2.5.

Em (M, g) , tome $X : U \rightarrow M$ uma parametrização local de M , onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. A primeira forma fundamental de M em $p \in M$ é definida como a forma quadrática $I_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I_p(w) = g(w, w)$. Como $\{X_u, X_v\}$ é uma base para T_pM , escreva $w = aX_u + bX_v$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, para $p \in M$, segue que

$$I_p(w) = g(aX_u + bX_v, aX_u + bX_v) = a^2g(X_u, X_u) + 2abg(X_u, X_v) + b^2g(X_v, X_v).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental I_p com relação a parametrização X são $E = g(X_u, X_u)$, $F = g(X_u, X_v)$ e $G = g(X_v, X_v)$, portanto

$$I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2.$$

Sejam $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$ o fibrado tangente de M e $A : TM \rightarrow TM$ uma aplicação suave tal que

$$A(p, v) = (A_1(p, v), A_2(p, v))$$

em que $A_1 : TM \rightarrow M$ e $A_2 : TM \rightarrow T_{A_1(p, v)}M$.

Definição 5.0.1. Uma aplicação suave $A : TM \rightarrow TM$ é um **operador autoadjunto** em (M, g) se $A_1(p, v) = p$ para todo $p \in M$ e a restrição de $A_2(p, v)$ para $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$ for um operador autoadjunto em $T_p M$, ou seja, para todo p em M e dados $u, v \in T_p M$, vale

$$g(A_p(u), v) = g(u, A_p(v)).$$

Denote por $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os operadores autoadjuntos em (M, g) . Em $\mathcal{S}$ tome a topologia induzida de Whitney C^∞ . Um operador autoadjunto é dito **genérico** se ele pertence a um subconjunto aberto e denso de $\mathcal{S}$.

Na seção 2.2, os coeficientes da segunda forma fundamental são obtidos a partir do operador de forma. De modo similar, para um operador autoadjunto qualquer A , em $p \in M$, tome $w = aX_u + bX_v \in T_p M$, assim

$$\begin{aligned} g(A_p(w), w) &= g(A_p(aX_u + bX_v), aX_u + bX_v) \\ &= a^2 g(A_p(X_u), X_u) + 2abg(A_p(X_u), X_v) + b^2 g(A_p(X_v), X_v). \end{aligned}$$

Os coeficientes de A_p em relação a parametrização local X em p são $l = g(A_p(X_u), X_u)$, $m = g(A_p(X_u), X_v) = g(A_p(X_v), X_u)$ e $n = g(A_p(X_v), X_v)$, portanto

$$g(A_p(w), w) = la^2 + 2mab + nb^2.$$

Como $A_p(X_u), A_p(X_v) \in T_p M$, sejam $A_p(X_u) = a_{11}X_u + a_{12}X_v$ e $A_p(X_v) = a_{21}X_u + a_{22}X_v$. A matriz do operador A_p em $T_p M$ com relação a base $\{X_u, X_v\}$ é

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{cases} l = g(A_p(X_u), X_u) = g(a_{11}X_u + a_{12}X_v, X_u) = a_{11}E + a_{12}F; \\ m = g(A_p(X_u), X_v) = g(a_{11}X_u + a_{12}X_v, X_v) = a_{11}F + a_{12}G; \\ m = g(A_p(X_v), X_u) = g(a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_u) = a_{21}E + a_{22}F; \\ n = g(A_p(X_v), X_v) = g(a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_v) = a_{21}F + a_{22}G. \end{cases} \quad (5.1)$$

Como g é não degenerada, vale que $EG - F^2 \neq 0$, portanto, é possível resolver o sistema linear (5.1) de modo análogo ao visto no Capítulo 4 e obter

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

A **curvatura A-Gaussiana** de M em p é definida como

$$K(p) = \det(A_p).$$

O conjunto de pontos de M onde a curvatura A -Gaussiana é nula é chamado de **conjunto A -parabólico**. O determinante da matriz de A_p é dado por $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, usando a solução de (5.2), segue que

$$K(p) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

Como g é lorentziana, $T_p M$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com uma métrica não degenerada de índice 1, logo é um plano tipo tempo. Pela Proposição 2.5.7, há duas direções tipo luz em $T_p M$ para cada ponto $p \in X(U)$. Note que tais direções são soluções de $I_p(w) = g(w, w) = 0$, pela definição de vetor tipo luz. As direções tipo luz fornecem um par de linhas em $X(U)$ que serão estudadas em breve.

Teorema 5.0.2. *Seja (M, g) uma superfície lorentziana. Em cada ponto $p \in M$ existe uma parametrização local de uma vizinhança V de p tal que para todo $p' \in V$, as curvas coordenadas por p' são tangentes às direções tipo luz. Equivalentemente, existe uma parametrização local $X : U \rightarrow V \subset M$ com $E = G = 0$ em U .*

Demonstração. O primeiro resultado segue do Teorema 2.2.6. Suponha que exista uma parametrização local $X : U \rightarrow V \subset M$ tal que as curvas coordenadas são tangentes às direções tipo luz, isto é, X_u e X_v são vetores tipo luz. Portanto, $g(X_u, X_u) = g(X_v, X_v) = 0$ e, conseqüentemente, $E = G = 0$. $\square$

5.1 Linhas de Curvatura A -principal

No Capítulo 4 foi estudado o comportamento local das linhas de curvatura em superfícies de $\mathbb{R}^3$. Se g é uma métrica riemanniana, as linhas de curvatura com um operador autoadjunto genérico em (M, g) possuem o mesmo comportamento local (ver [25]). Será abordado agora linhas de curvatura A -principais em superfícies lorentzianas.

Definição 5.1.1. *Os autovalores reais do operador autoadjunto A_p , quando existem, são chamados de **curvaturas A -principais**, denotados por $\kappa_i, i = 1, 2$. Os autovetores de A_p são chamados de **direções A -principais** e suas curvas integrais são chamadas de **linhas de curvatura A -principais**.*

Como A_p é operador autoadjunto, se κ_1 e κ_2 são seus autovalores, é possível reescrever

$$K(p) = \det(A_p) = \kappa_1 \kappa_2.$$

Analogamente ao caso euclidiano, a EDB das linhas de curvatura A -principais são dadas por

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

que é equivalente a

$$(Gm - Fn)dv^2 + (Gl - En)dudv + (Fl - Em)du^2 = 0. \quad (5.3)$$

A função discriminante da EDB (5.3) é

$$\delta(u, v) = ((Gl - En)^2 - 4(Gm - Fn)(Fl - Em))(u, v).$$

O conjunto de pontos onde $\delta(u, v) = 0$ é chamado de **local A-principal tipo luz (LPL)**. A imagem do LPL pela parametrização X também será chamado de LPL. O conjunto LPL possui propriedades importantes, seu comportamento e suas singularidades serão estudadas abaixo.

Proposição 5.1.2. 1. Para um operador autoadjunto genérico A em uma superfície lorentziana (M, g) , o LPL é uma curva em M . O LPL pode ser caracterizado como o conjunto dos pontos de M onde as duas direções A-principais coincidem em uma direção tipo luz.

2. O LPL divide a superfície em duas regiões. Em uma não há direções A-principais e na outra há duas direções A-principais distintas em cada ponto. No último caso, as direções A-principais são ortogonais onde uma é tipo espaço e a outra é tipo tempo.

Demonstração. Seja $X : U \rightarrow M$ a parametrização local de M dada pelo Teorema 5.0.2.

1. Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto LPL é igual a pré-imagem de 0 pela função discriminante. Como $\delta(u, v)$ é suave, então o conjunto $\delta^{-1}(0)$ é uma curva em $\mathbb{R}^2$ e $X(\delta^{-1}(0))$ é uma curva em M .

Segue da Proposição 3.1.2 que os pontos do LPL são aqueles onde as direções A-principais coincidem em uma única direção. Além disso, dado $q \in LPL$, basta mostrar que a única direção A-principal definida em $p = X(q)$ é tipo luz. Como $E = G = 0$, segue que $\delta(q) = 4F^2nl(q) = 0$. Como $F^2(q) \neq 0$, pois a métrica é não degenerada, então $n(q) = 0$ ou $l(q) = 0$. A equação (5.3) é dada por

$$ndv^2 - ldu^2 = 0.$$

Suponha sem perda de generalidade $n(q) = 0$ e $l(q) \neq 0$, assim

$$ndv^2 - ldu^2 = 0 \Rightarrow ldu^2 = 0 \Rightarrow du = 0.$$

Logo, a direção A-principal definida por (5.3) em q é a direção X_v , que é tipo luz pela parametrização X .

2. Como o LPL é o discriminante da EDB (5.3), segue da Proposição 3.1.2 que o LPL divide a superfície em 2 duas regiões, onde há duas direções A -principais e onde não há direções A -principais. Na região onde há duas direções A -principais, a função discriminante $\delta = 4F^2nl$ é positiva, portanto, os coeficientes l e n são não nulos. Dessa forma,

$$ndv^2 - ldu^2 = 0 \Rightarrow dv^2 = \frac{l}{n}du^2 \Rightarrow dv = \pm\sqrt{\frac{l}{n}}du.$$

Tome $du = \sqrt{n}$, então $dv = \pm\sqrt{l}$. Logo, as direções A -principais são $w_1 = \sqrt{n}X_u + \sqrt{l}X_v$ e $w_2 = \sqrt{n}X_u - \sqrt{l}X_v$. Note que,

$$g(w_1, w_2) = g(\sqrt{n}X_u + \sqrt{l}X_v, \sqrt{n}X_u - \sqrt{l}X_v) = nE - \sqrt{nl}F + \sqrt{nl}F - lG = 0,$$

pois $E = G = 0$, e as direções A -principais são ortogonais. Além disso, observe que

$$g(w_1, w_1) = g(\sqrt{n}X_u + \sqrt{l}X_v, \sqrt{n}X_u + \sqrt{l}X_v) = 2\sqrt{nl}F$$

e

$$g(w_2, w_2) = g(\sqrt{n}X_u - \sqrt{l}X_v, \sqrt{n}X_u - \sqrt{l}X_v) = -2\sqrt{nl}F.$$

Assim, w_1 e w_2 não são tipo luz, afinal $\pm 2\sqrt{nl}F \neq 0$. Caso w_1 seja tipo espaço então w_2 é tipo tempo e caso w_1 seja tipo tempo então w_2 é tipo espaço.

□

Proposição 5.1.3. *Para um operador autoadjunto genérico A em uma superfície lorentziana (M, g) , o LPL é uma curva suave exceto em pontos isolados onde ele possui singularidades de Morse tipo A_1^- . Os pontos singulares são aqueles em que A_p é um múltiplo da identidade.*

Demonstração. Tome a parametrização local $X : U \rightarrow M$ do Teorema 5.0.2. Assim,

$$ndv^2 - ldu^2 = 0$$

é a EDB das linhas de curvatura A -principais. Sua função discriminante é $\delta(u, v) = (nl)(u, v)$. Como A é um operador autoadjunto genérico, o LPL é uma curva. Genericamente, essa curva é suave a menos que $n(q) = l(q) = 0$, para algum $q \in U$. De fato, caso $l(q) = 0$ e $n(q) \neq 0$, então $q \in LPL$. Porém, q é uma singularidade se, e somente se,

$$\begin{cases} \delta_u(q) = 0 \\ \delta_v(q) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_u(q)n(q) + l(q)n_u(q) = 0 \\ l_v(q)n(q) + l(q)n_v(q) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_u(q) = 0 \\ l_v(q) = 0 \end{cases}.$$

Entretanto, $l(q) = l_u(q) = l_v(q) = 0$ não é genérico. O caso onde $n(q) = 0$ e $l(q) \neq 0$ é análogo. Logo, genericamente as singularidades de δ são dadas por $n(q) = l(q) = 0$ e as singularidades do LPL são pontos isolados nesse conjunto.

Suponha que $(0, 0)$ é uma singularidade do LPL . Então $n(0, 0) = l(0, 0) = 0$ e tome $j^1 l = au + bv$ e $j^1 n = cu + dv$. Calculando o 2-jato de δ , segue que

$$j^2 \delta(u, v) = acu^2 + (ad + bc)uv + bdv^2$$

e também

$$\delta_u(u, v) = 2acu + (ad + bc)v + o(2);$$

$$\delta_v(u, v) = (ad + bc)u + 2bdv + o(2);$$

$$\delta_{uu} = 2ac + o(1);$$

$$\delta_{uv} = ad + bc + o(1);$$

$$\delta_{vv} = 2bd + o(1).$$

A matriz Hessiana de δ na origem é

$$Hess(\delta(0, 0)) = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix},$$

portanto

$$\det(Hess \delta(0, 0)) = 4abcd - (ad + bc)^2 = -a^2d^2 + 2abcd - b^2c^2 = -(ad - bc)^2 < 0.$$

Logo, genericamente, o LPL possui singularidades de Morse do tipo A_1^- .

A matriz de A_p , com $p = X(q)$, relacionada a base $\{X_u, X_v\}$ é

$$-\frac{1}{F^2} \begin{pmatrix} 0 & -F \\ -F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = -\frac{1}{F^2} \begin{pmatrix} -Fm & -Fn \\ -Fl & -Fm \end{pmatrix}.$$

Portanto, A_p é um múltiplo da identidade se, e somente se, $l(q) = n(q) = 0$, ou seja, $p = X(q)$ é um ponto singular do LPL . $\square$

Definição 5.1.4. *Os pontos singulares do LPL são chamados de **pontos A-umbílicos tipo tempo**.*

Como visto, o LPL divide a superfície em duas partes, onde a configuração das linhas de curvatura A -principais possuem, genericamente e localmente, um par de linhas transversais ou nenhuma linha. O teorema a seguir traz informações sobre a configuração das linhas A -principais nos pontos do LPL para um operador genérico A .

Teorema 5.1.5. *1. Em pontos regulares do LPL , as linhas de curvatura A -principais formam uma família de cúspides, com as cúspides traçando o LPL , exceto em pontos isolados da curva. Nesses pontos isolados do LPL , as linhas de curvatura A -principais possuem genericamente uma singularidade de dobra do tipo sela, nó ou foco (Figura 13).*

2. Em pontos A -umbílicos tipo tempo, a EDB das linhas de curvatura A -principais possuem genericamente uma singularidade de Morse do tipo A_1^- . Todos os 5 casos genéricos dessas singularidades podem ocorrer (Figura 15).

Demonstração. Assuma a parametrização do Teorema 5.0.2, dessa forma a EDB das linhas de curvatura A -principais é dada por

$$ndv^2 - ldu^2 = 0.$$

Seja $q \in LPL$. Suponha sem perda de generalidade que $q = (0, 0)$ e escreva

$$j^2 l = l_0 + l_1 u + l_2 v + l_3 u^2 + l_4 uv + l_5 v^2,$$

$$j^2 n = n_0 + n_1 u + n_2 v + n_3 u^2 + n_4 uv + n_5 v^2,$$

o 2-jato de l e n em q .

1. Seja q um ponto regular do LPL . Nessa parametrização, a função discriminante de (5.3) é $\delta(u, v) = (nl)(u, v)$ e o LPL é dado por

$$nl = 0.$$

Como visto anteriormente, se q é ponto regular, então $n_0 \neq 0$ ou $l_0 \neq 0$, suponha $n_0 \neq 0$. Assim, $l_0 = 0$. Reescreva a EDB como

$$dv^2 - \frac{l}{n} du^2 = 0.$$

Note que $dv = 0$ é a direção A -principal definida por (5.3) em q , ou seja, a direção A -principal em q é $(1 : 0)$. Tomando a carta $r = \frac{dv}{du}$ para $\mathbb{RP}^1$, então $r = 0$ é a solução da (5.3) em q . Portanto, o campo de *Lie-Cartan* ξ é regular em $(0, 0, 0)$ se, e somente se, $(1, 0)$ transversal ao LPL em q . Note que

$$\nabla(nl)(q) = (n_u(q)l(q) + n(q)l_u(q), n_v(q)l(q) + n(q)l_v(q)) = (n_0 l_1, n_0 l_2).$$

Assim, $(1, 0)$ é transversal ao LPL em q se, e somente se,

$$\langle (1, 0), (n_0 l_1, n_0 l_2) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow 1n_0 l_1 \neq 0 \Leftrightarrow l_1 \neq 0.$$

Note que foi utilizado o produto interno euclidiano pois o gradiente é ortogonal a reta tangente na métrica euclidiana e não necessariamente na métrica g da superfície. Neste caso, a EDB das linhas de curvatura A -principais é suavemente equivalente a (3.5) e formam uma família de cúspides, exceto em pontos isolados onde $l_0 = l_1 = 0$. Quando $l_0 = l_1 = 0$, $(1, 0)$ é paralelo ao LPL e ξ é singular em $(0, 0, 0)$. Calculando o valor de λ de (3.8) tem-se

$$\lambda = \frac{n_0 l_3}{l_2^2}.$$

Logo, a EDB possui uma singularidade de dobra se, e somente se,

$$l_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{16},$$

o que acontece genericamente.

2. Seja agora q um ponto singular do LPL . Portando $n_0 = l_0 = 0$ e o campo ξ em $(0, 0, r)$ é dado por

$$(0, 0, -n_2r^3 - n_1r^2 - l_2r - l_1).$$

Assim, ξ é singular em $(0, 0, r)$ quando $\phi = n_2r^3 + n_1r^2 + l_2r + l_1 = 0$. Pela Proposição 3.3.2, ξ possui genericamente um ou três pontos de equilíbrio na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. De fato, ξ possui duas singularidades se ϕ e ϕ' possuem uma raiz em comum, que ocorre se, e somente se, o resultante dos dois polinômios é zero, ou seja,

$$4l_1n_1^3 - l_2^2n_1^2n_2 + 4l_2^3n_2^2 - 8l_1l_2n_1n_2^2 + 27l_1^2n_2^3 = 0,$$

o que não ocorre genericamente.

Suponha que ϕ possui uma ou três raízes, ou seja, ξ possui uma ou três singularidades na fibra $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$. A Jacobiana de ξ em um ponto singular $(0, 0, r)$ é

$$\begin{pmatrix} 2n_1r & 2n_2r & 0 \\ 2n_1r^2 & 2n_2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi'(r) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\phi'(r)$ e $\lambda_3 = 2r(n_1 + n_2r)$. Note que os autovalores são sempre reais e genericamente não nulos nas singularidades. Logo, o comportamento das linhas de curvatura A -principais nas singularidades da fibra são do tipo nó ou sela. Agora, basta verificar que o caso de três nós não ocorre. Suponha que ϕ possui três raízes reais distintas $r_0 < r_1 < r_2$, assim reescreva ϕ como

$$\phi = n_2(r - r_0)(r - r_1)(r - r_2).$$

Desenvolvendo e comparando com a cúbica original, segue que

$$\begin{aligned} n_1 &= -n_2(r_0 + r_1 + r_2), \\ l_2 &= n_2(r_0r_1 + r_0r_2 + r_1r_2), \\ l_1 &= -n_2r_0r_1r_2. \end{aligned}$$

Substituindo em λ_2 e λ_3 obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda_2(r) &= -n_2(r_0r_1 + r_0r_2 + r_1r_2) + 2rn_2(r_0 + r_1 + r_2) - 3n_2r^2, \\ \lambda_3(r) &= 2r(-n_2(r_0 + r_1 + r_2) + n_2r) = -2rn_2(r_0 + r_1 + r_2) + 2n_2r^2. \end{aligned}$$

A fibra possui 3 singularidades do tipo nó se, e somente se, o sinal de λ_2 e λ_3 for igual em cada ponto singular, equivalentemente, se $\lambda_2\lambda_3 > 0$ para r_0 , r_1 e r_2 . Avaliando $\lambda_2\lambda_3(r)$ nas raízes de ϕ e reorganizando os termos, tem-se

$$\lambda_2\lambda_3(r_0) = 2n_2^2 r_0(r_0 - r_1)(r_0 - r_2)(r_1 + r_2),$$

$$\lambda_2\lambda_3(r_1) = 2n_2^2 r_1(r_1 - r_0)(r_1 - r_2)(r_0 + r_2),$$

$$\lambda_2\lambda_3(r_2) = 2n_2^2 r_2(r_0 + r_1)(r_2 - r_0)(r_2 - r_1).$$

Pela desigualdade das raízes, segue que $2n_2^2(r_0 - r_1)(r_0 - r_2) > 0$, $-2n_2^2(r_1 - r_0)(r_1 - r_2) > 0$ e $2n_2^2(r_2 - r_0)(r_2 - r_1) > 0$, portanto,

$$\lambda_2\lambda_3(r_0) > 0 \Leftrightarrow r_0(r_1 + r_2) > 0,$$

$$\lambda_2\lambda_3(r_1) > 0 \Leftrightarrow -r_1(r_0 + r_2) > 0,$$

$$\lambda_2\lambda_3(r_2) > 0 \Leftrightarrow r_2(r_0 + r_1) > 0.$$

Suponha $0 < r_0 < r_1 < r_2$, então

$$-r_1(r_0 + r_2) < 0 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3(r_1) < 0.$$

Se $r_0 < 0 < r_1 < r_2$, então

$$r_0(r_1 + r_2) < 0 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3(r_0) < 0.$$

Se $r_0 < r_1 < 0 < r_2$, então

$$r_2(r_0 + r_1) < 0 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3(r_2) < 0.$$

Se $r_0 < r_1 < r_2 < 0$, então

$$-r_1(r_0 + r_2) < 0 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3(r_1) < 0.$$

Portanto, o caso da fibra possuir 3 singularidades tipo nó nunca acontece.

□

5.2 Linhas A -assintóticas

Nesta seção será estudado o comportamento das linhas A -assintóticas, que são soluções de uma EDB. Além disso, S. Izumiya e F. Tari [16] trazem relações entre o conjunto discriminante dessa EDB com o LPL , bem como relações com direções A -principais.

Definição 5.2.1. Dada uma superfície lorentziana (M, g) com $p \in M$ e um operador autoadjunto A , uma direção $v \in T_p M$ é dita uma **direção A -assintótica** se $g(A_p(v), v) = 0$. A curva integral das direções A -assintóticas são as **linhas A -assintóticas**.

Como no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, as linhas A -assintóticas são soluções da EDB

$$ndv^2 + 2mdudv + ldu^2 = 0 \quad (5.4)$$

cujo discriminante são os pontos onde $m^2 - nl = 0$. Note que

$$K = 0 \Leftrightarrow \frac{nl - m^2}{EG - F^2} = 0 \Leftrightarrow nl - m^2 = 0.$$

Logo, o conjunto discriminante de (5.4) é o conjunto A -parabólico. Como $EG - F^2 < 0$, então

$$K > 0 \Leftrightarrow \frac{nl - m^2}{EG - F^2} > 0 \Leftrightarrow nl - m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - nl > 0.$$

Portanto (5.4) define duas direções A -assintóticas para cada ponto da região onde $K > 0$ e nenhuma direção onde $K < 0$ (o inverso do caso riemanniano). No conjunto A -parabólico, (5.4) define apenas uma direção A -assintótica. O conjunto A -parabólico, quando não vazio, é genericamente uma curva suave. Assim, no decorrer do capítulo, assumamos o que conjunto A -parabólico é uma curva suave regular.

Proposição 5.2.2. *1. Uma direção A -assintótica em um ponto p em uma superfície lorentziana (M, g) é também uma direção A -principal em p se, e somente se, p é um ponto A -parabólico ou pertence ao LPL . Se $p \in LPL$, então a direção A -assintótica é tipo luz.*

2. Genericamente o conjunto A -parabólico e o LPL são tangentes em seus pontos de interseção. De um lado desses pontos a única direção A -assintótica no conjunto A -parabólico é tipo tempo e do outro lado é tipo espaço.

Demonstração. Tome a parametrização local $X : U \rightarrow M$ do Teorema 5.0.2, assim o LPL é dado por $nl = 0$ e o conjunto A -parabólico por $m^2 - nl = 0$.

1. A EDB (5.3) na parametrização X é dada por

$$ndv^2 - ldu^2 = 0.$$

Uma direção é A -assintótica e A -principal se valem (5.3) e (5.4), ou seja

$$ndv^2 - ldu^2 = 0 \quad \text{e} \quad ndv^2 + 2mdudv + ldu^2 = 0.$$

Assim, $ndv^2 = ldu^2$ e substituindo em (5.4) obtêm-se que

$$du(ldu + mdv) = 0.$$

Suponha que uma direção $(du : dv)$ em $p = X(q)$ seja A -assintótica e A -principal, basta mostrar que q pertence ao LPL ou é A -parabólico. Em q , tem-se o seguinte

sistema

$$\begin{cases} ndv^2 - ldu^2 = 0 \\ ndv^2 + 2mdudv + ldu^2 = 0 \\ du(ldu - mdv) = 0 \end{cases}.$$

Se $du = 0$, então $dv \neq 0$ e

$$ndv^2 - ldu^2 = 0 \Leftrightarrow ndv^2 = 0 \Leftrightarrow n = 0$$

em q . Assim $n(q)l(q) = 0$ e portanto $q \in LPL$. Caso $du \neq 0$, então $ldu - mdv = 0$. Se $l(q) = 0$, novamente $q \in LPL$. Se $l(q) \neq 0$, então

$$ldu + mdv = 0 \Leftrightarrow du = -\frac{m}{l}dv.$$

Substituindo em (5.4), segue que

$$\begin{aligned} ndv^2 + 2mdv \left(-\frac{m}{l}dv\right) + l \left(-\frac{m}{l}dv\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow ndv^2 - 2\frac{m^2}{l}dv^2 + l\frac{m^2}{l^2}dv^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow lndv^2 - 2m^2dv^2 + m^2dv^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow ln - m^2 = 0 \end{aligned}$$

em q . Logo q pertence ao conjunto A -parabólico.

Agora, suponha que $q \in LPL$. Então a direção $d_1 = (du_1 : dv_1)$ A -principal definida em q é A -assintótica. De fato, como $q \in LPL$, então $n(q) = 0$ ou $l(q) = 0$. Suponha $n(q) = 0$ e $l(q) \neq 0$, como d_1 é A -principal, então

$$ndv_1^2 - ldu_1^2 = 0 \Rightarrow du_1 = 0.$$

Logo, $d_1 = (du_1 : dv_1)$ é também A -assintótica, pois

$$ndv_1^2 + 2mdu_1dv_1 + ldu_1^2 = 0.$$

Analogamente, se $l(q) = 0$ e $n(q) \neq 0$, então $dv_1 = 0$ e

$$ndv_1^2 + 2mdu_1dv_1 + ldu_1^2 = 0.$$

Portanto a direção A -principal d_1 é também A -assintótica. O caso $n(q) = l(q) = 0$ é trivial porque todas as direções são A -principais. Além disso, segue da Proposição 5.1.2 que a única direção A -assintótica é tipo luz.

Por outro lado, suponha que q seja A -parabólico e seja $d_2 = (du_2 : dv_2)$ a única direção A -assintótica definida em q , basta mostrar que d_2 é A -principal. Como q é A -parabólico, então

$$ln - m^2 = 0.$$

Se $n(q) = 0$, segue que

$$nl - m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

em q e

$$nd_2^2 + 2mdu_2dv_2 + ldu_2^2 = 0 \Rightarrow ldu_2^2 = 0.$$

Logo,

$$ndv_2^2 - ldu_2^2 = 0$$

e d_2 é A -principal. Se $n(q) \neq 0$, então

$$nl - m^2 = 0 \Rightarrow ln = m^2 \Rightarrow l = \frac{m^2}{n}$$

e

$$\begin{aligned} nd_2^2 + 2mdu_2dv_2 + \frac{m^2}{n}du_2^2 = 0 &\Leftrightarrow n^2dv_2^2 + 2mndu_2dv_2 + m^2du_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (ndv_2 + mdu_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow ndv_2 = -mdu_2 \\ &\Leftrightarrow dv_2 = -\frac{m}{n}du_2. \end{aligned}$$

Substituindo em (5.3), tem-se

$$n\left(-\frac{m}{n}du_2\right)^2 - \left(\frac{m^2}{n}\right)du_2^2 = \frac{m^2}{n}du_2^2 - \frac{m^2}{n}du_2^2 = 0.$$

Logo, d_2 é A -principal.

2. Pela Proposição 5.1.3, as singularidades do LPL , genericamente, ocorrem quando $n(q) = l(q) = 0$. No conjunto A -parabólico isto só ocorre se $m(q) = 0$, o que não é genérico.

Suponha sem perda de generalidade que $n(q) = 0$ e $l(q) \neq 0$. Como l é uma função suave e não nula em q , existe uma vizinhança de q onde l é não nula. Nessa vizinhança, o ponto q pertence a interseção do conjunto A -parabólico e o LPL se, e somente se, $n(q) = m(q) = 0$. Neste caso, segue que

$$\nabla(m^2 - nl)(q) = (-n_ul, -n_vl) \quad \text{e} \quad \nabla n(q) = (n_u, n_v).$$

Logo, o LPL e o conjunto A -parabólico são tangentes na sua interseção. Nesta vizinhança de q , o conjunto A -parabólico é dado por

$$m^2 - ln = 0 \Rightarrow n = \frac{m^2}{l}$$

e a direção A -assintótica em pontos do conjunto A -parabólico é

$$\frac{m^2}{l}dv^2 + 2mdudv + ldu^2 = 0 \Rightarrow m^2dv^2 + 2mldudv + l^2du^2 = 0$$

$$\Rightarrow (mdv + ldu)^2 = 0$$

$$\Rightarrow mdv + ldu = 0,$$

ou seja, a direção é dada por $dv = -l$ e $du = m$. Assim, na direção A -assintótica tem-se

$$g(mX_u - lX_v, mX_u - lX_v) = -2mlF.$$

Como $l \neq 0$ nessa vizinhança, seu sinal permanece enquanto o sinal de m altera. Logo, $m(q) = 0$ quando q pertence a interseção. Logo, de um lado $m < 0$ e a direção A -assintótica é tipo espaço e do outro $m > 0$ e a direção é tipo tempo.

□

Teorema 5.2.3. *No conjunto A -parabólico, as linhas A -assintóticas formam uma família de cúspides, com as cúspides traçando o conjunto A -parabólico, exceto talvez em pontos isolados nesse conjunto. Nesses pontos, a equação das linhas A -assintóticas possuem genericamente singularidades de dobra do tipo sela, nó ou foco (Figura 13).*

Demonstração. Similar à prova do Teorema 5.1.5 item (1).

□

6 EDB's em Superfícies com Métrica Degenerada

Neste capítulo, as EDB's serão estudadas em superfícies que possuem métrica degenerada. Nesse ambiente, surge um novo par de linhas que será estudado, as linhas tipo luz. Os resultados apresentados a seguir são de Izumyia e Tari [16]. Seja M uma superfície com métrica degenerada. Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ de M , a métrica é degenerada quando $EG - F^2 = 0$, riemanniana quando $EG - F^2 > 0$ e lorentziana quando $EG - F^2 < 0$. Como $EG - F^2$ é uma função suave em algum aberto U de $\mathbb{R}^2$, tem-se que $\{(u, v) \in U \mid (EG - F^2)(u, v) = 0\}$ é uma curva suave.

Denomina-se **Local de Degenerescência da Métrica (LD)** a curva suave que, localmente, separa a superfície em duas regiões: de um lado, aquela em que a métrica é riemanniana e, do outro, aquela em que a métrica é lorentziana. Equivalentemente, o LD é caracterizado como a curva definida pela equação $F^2 - EG = 0$.

6.1 Linhas Tipo Luz

Dado $p \in M$, note que $w \in T_p M$ pode ser escrito como $w = duX_u + dvX_v$, portanto uma direção tipo luz é dada por

$$g(w, w) = 0 \Leftrightarrow Gdv^2 + 2Fdudv + Edu^2 = 0. \quad (6.1)$$

A função discriminante de (6.1) é $(F^2 - EG)(u, v)$ e o conjunto discriminante são os pontos onde $F^2 - EG = 0$, ou seja, o conjunto LD.

Definição 6.1.1. *As curvas integrais das direções tipo luz são chamadas de **linhas tipo luz**.*

Teorema 6.1.2. *Existe uma parametrização local de M em uma vizinhança de $p \in LD$ tal que o conjunto de direções tipo luz no plano tangente aos pontos do LD é dado por $\mathbb{R} \cdot X_u = \{\lambda X_u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, que é equivalente a $E = F = 0$ no LD.*

Demonstração. Para todo ponto no LD, (6.1) define apenas uma direção tipo luz. Em alguma vizinhança U de p , é possível estender suavemente esse campo de vetores que (6.1) define em $LD \cap U$ para um campo de vetores tangentes w_1 em U . Seja w_2 um outro campo de vetores em U , obtido pela rotação (euclidiana) dos vetores w_1 por um ângulo $\pi/2$ no sentido anti-horário. Note que w_1 e w_2 são dois campos de vetores linearmente independentes. Aplicando o Teorema 2.2.6, existe uma parametrização local $X : V \rightarrow M$,

com $V \subset U$ uma vizinhança de p , onde as curvas coordenadas são tangentes aos vetores definidos pelos campos w_1 e w_2 . Suponha sem perda de generalidade que $X_u = w_1$, dessa forma, X_u é um vetor tipo luz em $V \cap LD$ e

$$E = g(X_u, X_u) = 0.$$

Como $F^2 - EG = 0$ e $E = 0$ no LD , segue que $F = g(X_u, X_v) = 0$ em $V \cap LD$. $\square$

Proposição 6.1.3. *Para uma métrica degenerada, as linhas tipo luz formam genericamente uma família de cúspides ao longo do LD , exceto talvez em pontos isolados nessa curva, onde há singularidades de dobra do tipo sela, nó ou foco (ver Figura 13).*

Demonstração. Similar à prova do Teorema 5.1.5 item (1). $\square$

6.2 Linhas de Curvatura A -principal

Nesta seção será estudado o comportamento das linhas de curvatura A -principais em superfícies com métrica degenerada. Assuma A como um operador autoadjunto e l , m e n como os coeficientes de A_p .

Teorema 6.2.1. *Para a parametrização do Teorema 6.1.2, os coeficientes l e m se anulam no LD . Consequentemente, a única direção tipo luz em $p \in LD$ é um autovetor em p do operador autoadjunto A em M , isto é, uma direção A -principal.*

Demonstração. Tome a parametrização do Teorema 6.1.2. Sejam $p \in LD$ e $v \in T_p M$. Como $E = F = 0$ no LD , então X_u é ortogonal a X_u e a X_v em p , e portanto, é ortogonal a $T_p M$. Dessa forma,

$$g(X_u, v) = 0, \forall v \in T_p M.$$

Em particular, note que $A_p(X_u), A_p(X_v) \in T_p M$, logo

$$l = g(X_u, A_p(X_u)) = 0,$$

$$m = g(X_v, A_p(X_u)) = g(X_u, A_p(X_v)) = 0.$$

Por fim, como $A_p(X_u)$ pertence a $T_p M$, reescrevendo $A_p(X_u) = cX_u + dX_v$, segue que

$$g(A_p(X_u), A_p(X_u)) = g(A_p(X_u), cX_u + dX_v) = cl + dm = 0.$$

Portanto, $A_p(X_u)$ é tipo luz, como $g(X_u, A_p(X_u)) = 0$, pela Proposição 2.5.6, eles são proporcionais, ou seja,

$$A_p(X_u) = \lambda X_u, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Se M é uma superfície com métrica degenerada, o comportamento local das linhas de curvatura A -principais na região riemanniana e lorentziana já é conhecido. Por fim, será estudado o comportamento local das linhas de curvatura A -principais estendidas ao conjunto LD .

No conjunto LD , não é possível resolver o sistema (5.1), pois $EG - F^2 = 0$. Note que no LD , com a parametrização do Teorema 6.1.2, é possível obter do sistema (5.1) que

$$a_{11}F + a_{12}G = 0 \Rightarrow a_{12}G = 0 \Rightarrow a_{12} = 0,$$

$$a_{21}F + a_{22}G = n \Rightarrow a_{22}G = n \Rightarrow a_{22} = \frac{n}{G}.$$

Entretanto, não é possível obter a_{11} e a_{21} em função dos coeficientes da primeira forma fundamental e de A_p . Nessa parametrização, lembre que $E = F = l = m = 0$ no LD . Pelo Lema 1 de [22], existe uma função suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E = \lambda\tilde{E}$, $F = \lambda\tilde{F}$, $l = \lambda\tilde{l}$, $m = \lambda\tilde{m}$ e $\lambda(p) = 0$ se, e somente se, $p \in LD$.

Assim, o conjunto LD é dado por $\lambda(\lambda\tilde{F}^2 - \tilde{E}G) = 0$. Assuma que o LD é uma curva regular, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda(\lambda\tilde{F}^2 - \tilde{E}G)) &= (\lambda_u(\lambda\tilde{F}^2 - \tilde{E}G) + \lambda(\lambda\tilde{F}^2 - \tilde{E}G)_u, \lambda_v(\lambda\tilde{F}^2 - \tilde{E}G) + \lambda(\lambda\tilde{F}^2 - \tilde{E}G)_v) \\ &= (-\lambda_u\tilde{E}G, -\lambda_v\tilde{E}G) \end{aligned}$$

é diferente de $\vec{0}$ no LD . Observe que isto implica que $\tilde{E}$ e G não se anulam no LD . Dessa forma, é possível reescrever (5.1) como

$$\begin{cases} \tilde{l} = a_{11}\tilde{E} + a_{21}\tilde{F} \\ \lambda\tilde{m} = a_{11}\lambda\tilde{F} + a_{21}G \\ \tilde{m} = a_{12}\tilde{E} + a_{22}\tilde{F} \\ \tilde{n} = a_{12}\lambda\tilde{F} + a_{22}G \end{cases}. \quad (6.2)$$

Resolvendo o sistema, encontra-se a matriz de A_p em relação à parametrização escolhida

$$A_p = \frac{1}{\tilde{E}G - \lambda\tilde{F}^2} \begin{pmatrix} G & -\tilde{F} \\ -\lambda\tilde{F} & \tilde{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l} & \tilde{m} \\ \lambda\tilde{m} & \tilde{n} \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a EDB das linhas de curvatura A -principais é dada por

$$(G\tilde{m} - \tilde{F}\tilde{n})dv^2 + (G\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{n})dudv + \lambda(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})du^2 = 0. \quad (6.3)$$

O conjunto discriminante de (6.3), isto é, o LPL , é

$$(G\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{n})^2 - 4\lambda(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}\tilde{n}) = 0.$$

Suponha que $\lambda = 0$ e $G\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{n} \neq 0$ em algum ponto p . Note que $p \in LD$ e $p \notin LPL$. Logo, (6.3) define um par de direções A -principais em p e (6.1) define apenas uma direção

tipo luz em p . Como visto no Teorema 6.2.1, a direção tipo luz é um autovetor do operador autoadjunto A_p , logo é uma direção A -principal. Caso $\lambda = G\tilde{l} - \tilde{E}n = 0$, então o LD intersecta o LPL . Note que na interseção há apenas uma direção A -principal e uma tipo luz e elas coincidem (Teorema 6.2.1). Seja q um ponto da interseção. Como visto acima, o gradiente do LD nesse ponto é dado por $(-\lambda_u \tilde{E}G, -\lambda_v \tilde{E}G)$ e o gradiente do LPL em q é

$$\begin{aligned}
& \nabla \left((G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2 - 4\lambda(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n) \right) (q) \\
&= \left(2(G\tilde{l} - \tilde{E}n)(G\tilde{l} - \tilde{E}n)_u \right. \\
&\quad \left. - \left(4\lambda_u(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n) + 4\lambda((\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n))_u \right), \right. \\
&\quad \left. 2(G\tilde{l} - \tilde{E}n)(G\tilde{l} - \tilde{E}n)_v \right. \\
&\quad \left. - \left(4\lambda_v(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n) + 4\lambda((\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n))_v \right) \right) \\
&= \left(-4\lambda_u(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n), -4\lambda_v(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n) \right) \\
&= \left(-4\lambda_u(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m}) \left(G(a_{21}\tilde{E} + a_{22}\tilde{F}) - \tilde{F}(a_{21}\lambda\tilde{F} + a_{22}G) \right), \right. \\
&\quad \left. -4\lambda_v(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m}) \left(G(a_{21}\tilde{E} + a_{22}\tilde{F}) - \tilde{F}(a_{21}\lambda\tilde{F} + a_{22}G) \right) \right) \\
&= \left(-4\lambda_u(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(a_{21}\tilde{E}G), -4\lambda_v(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(a_{21}\tilde{E}G) \right) \\
&= \left(-\lambda_u \tilde{E}G (4a_{21}(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})), -\lambda_v \tilde{E}G (4a_{21}(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})) \right).
\end{aligned}$$

Logo, como os gradientes são paralelos, o LPL e o LD são tangentes na sua interseção.

Teorema 6.2.2. *Sejam g uma métrica degenerada em M e A um operador autoadjunto em (M, g) . As linhas de curvatura A -principais podem ser estendidas ao LD onde uma das direções A -principais é tipo luz. Para um A genérico, o par estendido de linhas de curvatura A -principais possuem singularidades de dobra do tipo sela, nó ou foco no LD , e ocorrem exatamente nos pontos onde as linhas tipo luz possuem singularidades de dobra (ver figura 16).*

Demonstração. Tome a parametrização do Teorema 6.1.2, a primeira parte da demonstração foi realizada acima. Seja q um ponto na interseção do LPL com o LD . Como visto, a única direção A -principal definida por (6.3) em q coincide com a única direção tipo luz definida por (6.1) em q . Note que nessa parametrização, (6.1) e (6.3) em q são dadas por $Gdv^2 = 0$ e $(G\tilde{m} - \tilde{F}n)dv^2 = 0$, respectivamente. Assim, a direção $dv = 0$ é solução de ambas e $(1, 0)$ é um vetor nessa direção. Essa direção tipo luz é tangente ao LD se, e somente se,

$$\langle (1, 0), \nabla(\lambda(\lambda F^2 - \tilde{E}G))(q) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (1, 0), (-\lambda_u \tilde{E}G, -\lambda_v \tilde{E}G) \rangle = 0$$

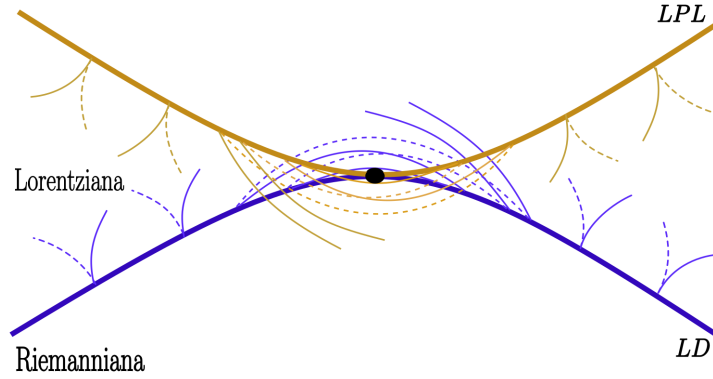


Figura 16 – Conjunto LD (em azul) tangente ao LPL (em amarelo). No ponto de interseção, singularidades de dobra.

$$\Leftrightarrow -\lambda_u \tilde{E}G = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_u = 0.$$

Dessa forma, é necessário e suficiente $\lambda_u = 0$ para que exista uma singularidade de dobra das linhas tipo luz no LD . Note que, como o gradiente do LPL é paralelo ao gradiente do LD , então

$$\langle (1, 0), \nabla((G\tilde{l} - \tilde{E}n)^2 - 4\lambda(\tilde{F}\tilde{l} - \tilde{E}\tilde{m})(G\tilde{m} - \tilde{F}n))(q) \rangle = 0$$

se, e somente se, $\lambda_u = 0$. Portanto as singularidades de dobra das linhas A -principais ocorrem justamente onde há singularidade de dobra das linhas tipo luz.

□

6.3 Linhas A -Assintóticas

Assumindo a parametrização do Teorema 6.1.2, $l = m = 0$ nos pontos do conjunto LD pelo Teorema 6.2.1. Usando a notação da seção anterior, a equação das linhas A -assintóticas pode ser escrita como

$$ndv^2 + 2\lambda\tilde{m}dudv + \lambda\tilde{l}du^2 = 0 \quad (6.4)$$

e seu conjunto discriminante, o conjunto A -parabólico, é dado por

$$(2\lambda\tilde{m})^2 - 4n\lambda\tilde{l} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda\tilde{m} - n\tilde{l}) = 0.$$

Teorema 6.3.1. *Sejam g uma métrica degenerada em M e A um operador autoadjunto genérico em (M, g) . O conjunto LD é uma componente do conjunto A -parabólico. Em pontos regulares do LD , as linhas A -assintóticas formam uma família de cúspides exceto em singularidades de dobra das linhas tipo luz, onde as linhas A -assintóticas possuem singularidades de dobra do tipo sela, nó ou foco.*

Demonstração. Tome a parametrização do Teorema 6.1.2. O conjunto A -parabólico é dado por $\lambda(\lambda\tilde{m} - n\tilde{l}) = 0$. Como $\lambda = 0$ nos pontos do LD , tem-se que o LD é uma componente do conjunto A -parabólico. Seja q um ponto regular do conjunto LD , então a EDB (6.4) das linhas A -assintóticas em q é dada por

$$ndv^2 = 0.$$

Logo, a direção $dv = 0$ é uma solução de (6.4) em q e $(1, 0)$ é um vetor nessa direção. Portanto, q é uma singularidade de dobra das linhas A -assintóticas se, e somente se, a única direção A -assintótica $(1, 0)$ é tangente ao LD (que é parte do conjunto discriminante das direções A -assintóticas). Como na demonstração anterior, $(1, 0)$ é tangente ao LD quando $\lambda_u = 0$ e isto ocorre exatamente nas singularidades de dobra das linhas tipo luz.

□

7 Superfícies em $\mathbb{R}_1^3$

Neste capítulo será abordada a geometria de superfícies em $\mathbb{R}_1^3$ e como os pares de linhas estudados podem ser estendidos para esse ambiente. Considere M uma superfície suave no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização local de M . Dado $p \in M$, é definida a forma bilinear $I_p : T_p M \rightarrow T_p M$ com

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_1 = Ea^2 + 2Fab + Gb^2,$$

onde $w = aX_u + bX_v$. As funções suaves $E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle_1$, $F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle_1$ e $G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle_1$ são os coeficientes da primeira forma fundamental de $(M, \langle, \rangle_1)$ em relação a parametrização X .

Observe que, nos pontos do LD , o plano tangente é degenerado e, portanto, tipo luz. A aplicação de Gauss que associa, a cada ponto da superfície, um vetor ortonormal ao plano tangente é dada por

$$N = \frac{X_u \times_1 X_v}{\|X_u \times_1 X_v\|_1}.$$

Note que o plano tangente é o subespaço

$$[X_u \times_1 X_v]^\perp.$$

Pela Proposição 2.5.5, no LD , o vetor $X_u \times_1 X_v$ é tipo luz e assim N não está definido porque o denominador é 0. Como uma alternativa para contornar este problema, Pei [21] define a aplicação

$$PN : X(U) \rightarrow \mathbb{R}P^2$$

onde $PN(p)$ é a direção de $\mathbb{R}P^2$ paralelo ao vetor $X_u \times_1 X_v$ em p . Fora do conjunto LD , a direção definida pelo mapa PN pode ser substituído pelo vetor definido pelo mapa de Gauss

$$N : X(U) \rightarrow \mathbb{S}_1^2$$

na parte riemanniana e

$$N : X(U) \rightarrow \mathbb{H}_+^2$$

na parte lorentziana, ambos dados por

$$N = \frac{X_u \times_1 X_v}{\|X_u \times_1 X_v\|_1}.$$

Tome $w \in T_p M$ com $w = X_u du + X_v dv$, assim

$$\begin{aligned} dN_p(w) &= dN_p(X_u du + X_v dv) \\ &= (dN_p(X_u)du + dN_p(X_v)dv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial(N \circ X)}{\partial u} du + \frac{\partial(N \circ X)}{\partial v} dv \\
&= N_u du + N_v dv.
\end{aligned}$$

É fácil ver que $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Como $\langle X_u, N \rangle_1 = 0$, derivando com relação a v de ambos os lados obtêm-se

$$\langle X_{uv}, N \rangle_1 + \langle X_u, N_v \rangle_1 = 0,$$

e derivando $\langle X_v, N \rangle_1 = 0$ com relação a u em ambos os lados,

$$\langle X_{vu}, N \rangle_1 + \langle X_v, N_u \rangle_1 = 0.$$

Igualando e subtraindo $\langle X_{vu}, N \rangle_1$ em ambos os lados, segue que

$$\langle X_v, N_u \rangle_1 = \langle X_u, N_v \rangle_1 \Leftrightarrow \langle dN_p(X_u), X_v \rangle_1 = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle_1.$$

Logo, a diferencial da aplicação N é um operador linear autoadjunto em $T_p M$. Considere a aplicação $-dN_p$ em $X(U) \setminus LD$ e $w \in T_p M$, assim

$$\langle -dN_p(w), w \rangle_1 = la^2 + 2mab + nb^2,$$

onde $w = aX_u + bX_v$. As funções suaves

$$l = \langle -dN_p(X_u), X_u \rangle_1 = \langle N, X_{uu} \rangle_1;$$

$$m = \langle -dN_p(X_u), X_v \rangle_1 = \langle N, X_{uv} \rangle_1;$$

$$n = \langle -dN_p(X_v), X_v \rangle_1 = \langle N, X_{vv} \rangle_1;$$

são os coeficientes da segunda forma fundamental. Como no capítulo anterior, segue que $F^2 - EG = 0$ em $p \in LD$, portanto, não é possível resolver o sistema (5.1) com esses coeficientes.

Lembre-se que, fora do LD , a equação das linhas de curvatura é dada por

$$(Gm - Fn)dv^2 + (Gl - En)dudv + (Fl - Em)du^2 = 0$$

e das linhas assintóticas por

$$ldu^2 + 2mdudv + ndv^2 = 0.$$

Como estas equações são homogêneas em l , m e n , é possível multiplicar as equações por $\|X_u \times_1 X_v\|_1$ e substituir esses coeficientes por

$$\bar{l} = l\|X_u \times_1 X_v\|_1 = \left\langle \frac{X_u \times_1 X_v}{\|X_u \times_1 X_v\|_1}, X_{uu} \right\rangle_1 \|X_u \times_1 X_v\|_1 = \langle X_u \times_1 X_v, X_{uu} \rangle_1,$$

$$\bar{m} = \langle X_u \times_1 X_v, X_{uv} \rangle_1,$$

$$\bar{n} = \langle X_u \times_1 X_v, X_{vv} \rangle_1.$$

Como $\|X_u \times_1 X_v\|_1 \in \mathbb{R}$ é não nulo fora do LD , essa multiplicação não altera as direções principais e assintóticas fora do LD . Portanto, os pares de linhas não se alteram. Além disso, as novas equações das curvas integrais estão definidas no conjunto LD porque $\bar{l}$, $\bar{m}$ e $\bar{n}$ podem ser calculados em todos os pontos de M . As linhas de curvatura principais são dadas por

$$(G\bar{m} - F\bar{n})dv^2 + (G\bar{l} - E\bar{n})dudv + (F\bar{l} - E\bar{m})du^2 = 0, \quad (7.1)$$

e as linhas assintóticas são dadas por

$$\bar{n}dv^2 + 2\bar{m}dvdv + \bar{l}du^2 = 0. \quad (7.2)$$

Observação 7.0.1. Observe que os resultados obtidos no Capítulo 6 não se aplicam nas EDB's (7.1) e (7.2). De fato, se existisse um operador autoadjunto A definido em toda a superfície M gerando essas equações, pelo Teorema 6.3.1, o LD deveria ser uma componente conexa do conjunto A -parabólico. Porém, isso não ocorre, como mostrará o Exemplo 7.0.5.

Proposição 7.0.2. Para superfícies em $\mathbb{R}_1^3$, a única direção tipo luz nos pontos do LD é uma direção principal.

Demonstração. Tomando a parametrização do Teorema 6.1.2, o coeficiente $(F\bar{l} - E\bar{m})$ de (7.1) se anula no LD , assim, $dv = 0$ é uma solução de (7.1). Note que essa é a única direção tipo luz que (6.1) define no LD . $\square$

Proposição 7.0.3. Para superfícies em $\mathbb{R}_1^3$, o LD e o LPL são tangentes nos pontos de interseção. Nestes pontos, as linhas tipo luz e as linhas de curvatura principal possuem singularidades de dobra.

Demonstração. O LPL intersepta o conjunto LD quando $\bar{l} = 0$ no LD . De fato, o LPL é dado por

$$(G\bar{l} - E\bar{n})^2 - 4(G\bar{m} - F\bar{n})(F\bar{l} - E\bar{m}) = 0$$

que se reduz a $(G\bar{l})^2 = 0$ nos pontos do LD . Como $G \neq 0$, o LPL intersepta o LD quando $\bar{l} = 0$. Observe que, dado um ponto p nessa interseção, tem-se

$$\nabla(EG - F^2)(p) = (E_u G + EG_u - 2FF_u, E_v G + EG_v - 2FF_v) = (E_u G, E_v G) \quad (7.3)$$

e

$$\begin{aligned}
& \nabla \left((G\bar{l} - E\bar{n})^2 - 4(G\bar{m} - F\bar{n})(F\bar{l} - E\bar{m}) \right) (p) \\
&= \left(2 \cancel{(G\bar{l} - E\bar{n})} (G\bar{l} - E\bar{n})_u - 4 \left((G\bar{m} - F\bar{n})(F\bar{l} - E\bar{m})_u + (G\bar{m} - F\bar{n})_u \cancel{(F\bar{l} - E\bar{m})} \right), \right. \\
&\quad \left. 2 \cancel{(G\bar{l} - E\bar{n})} (G\bar{l} - E\bar{n})_v - 4 \left((G\bar{m} - F\bar{n})(F\bar{l} - E\bar{m})_v + (G\bar{m} - F\bar{n})_v \cancel{(F\bar{l} - E\bar{m})} \right) \right) \\
&= \left(-4(G\bar{m})(E_u\bar{m}), -4(G\bar{m})(E_v\bar{m}) \right) \\
&= \left(-4\bar{m}^2 E_u G, -4\bar{m}^2 E_v G \right).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Portanto, o LPL e o LD são tangentes na sua interseção. Como X_u é tipo luz nessa parametrização e é ortogonal a $X_u \times_1 X_v$, pela Proposição 2.5.6, eles são proporcionais. Seja $X_u \times_1 X_v = \mu X_u$, para alguma função não nula μ . Dessa forma

$$\bar{l} = 0 \Leftrightarrow \langle X_u \times_1 X_v, X_{uu} \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \langle \mu X_u, X_{uu} \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \langle X_u, X_{uu} \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow E_u = 0.$$

Isso significa que os pontos de intersecção do LPL com o LD ocorrem quando $E_u = 0$. Assim, seque das equações (7.3) e (7.4) que o vetor tangente a essas curvas nesses pontos é $(1, 0)$. Como $E = F = 0$ no LD , é fácil ver que $(1, 0)$ é uma direção tipo luz e principal. Portanto isso significa que o pontos de tangência do LPL com o LD são os pontos de singularidades de dobra das linhas tipo luz e das linhas de curvatura principal de M . $\square$

Proposição 7.0.4. *Dada uma superfície M com a métrica herdada de $\mathbb{R}_1^3$, as linhas assintóticas coincidem com as linhas assintóticas de M com a métrica herdada de $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização para a superfície M . Em $\mathbb{R}_1^3$, as linhas assintóticas são dadas por

$$\bar{n}dv^2 + 2\bar{m}dvdu + \bar{l}du^2 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{l} &= \langle X_u \times_1 X_v, X_{uu} \rangle_1 = \det(X_u, X_v, X_{uu}), \\
\bar{m} &= \langle X_u \times_1 X_v, X_{uv} \rangle_1 = \det(X_u, X_v, X_{uv}), \\
\bar{n} &= \langle X_u \times_1 X_v, X_{vv} \rangle_1 = \det(X_u, X_v, X_{vv}).
\end{aligned}$$

No caso euclidiano, a equação das linhas assintóticas é

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0,$$

onde

$$e = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \det(X_u, X_v, X_{uu}) = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \bar{l},$$

$$f = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \det(X_u, X_v, X_{uv}) = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \bar{m},$$

$$g = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \det(X_u, X_v, X_{vv}) = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \bar{n}.$$

Como $\|X_u \times X_v\| \neq 0$ e a equação das linhas assintóticas é homogênea em l , m e n , o produto da equação por $\frac{1}{\|X_u \times X_v\|}$ não altera seu comportamento. Portanto, ambas as EDB's possuem as mesmas soluções. $\square$

Exemplo 7.0.5. *Considere a esfera unitária*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

contida no espaço $\mathbb{R}_1^3$. Tome a parametrização $X : U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$X(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais nessa parametrização são

$$E = \sin(v)^2, \quad F = 0, \quad G = \cos(v)^2 - \sin(v)^2,$$

$$\bar{l} = \sin(v)^3, \quad \bar{m} = 0, \quad \bar{n} = \sin(v).$$

Substituindo em (7.1), a EDB das linhas de curvatura principal é

$$-2 \sin(v)^5 du dv = 0.$$

Note que $\sin(v) \neq 0$, para todo v em $(0, \pi)$. Portanto, as soluções da EDB nos pontos de U são as curvas coordenadas, que neste caso, são os meridianos e paralelos.

Substituindo os coeficientes em (7.2), a EDB das linhas assintóticas é

$$\sin(v)(dv^2 + \sin(v)^2 du^2) = 0.$$

Observe que não há soluções para a EDB acima nos pontos de U , logo, não há linhas assintóticas em $\mathbb{S}^2$.

A EDB das linhas tipo luz é

$$(\cos(v)^2 - \sin(v)^2)dv^2 + \sin(v)^2 du^2 = 0.$$

e sua função discriminante é

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \sin(v)^2(\cos(v)^2 - \sin(v)^2) \\ &= \sin(v)^2(1 - 2\sin(v)^2). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto LD é dado por

$$EG - F^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(v)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin(v) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow v \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Conclui-se que as curvas coordenadas $v = \frac{\pi}{4}$ e $v = \frac{3\pi}{4}$ são locais de pontos onde a métrica é degenerada, isto é, $EG - F^2 = 0$, e fora desses pontos a métrica é riemanniana ou lorentziana. O LD são dois paralelos que dividem $\mathbb{S}^2$ em três regiões: uma calota superior ($0 < v < \frac{\pi}{4}$), uma região central ($\frac{\pi}{4} < v < \frac{3\pi}{4}$) e uma calota inferior ($\frac{3\pi}{4} < v < \pi$). Note que se $q = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então $X(q) = (0, 1, 0)$ pertence a região central de $\mathbb{S}^2$ e

$$(EG - F^2)(q) = -1.$$

Portanto, a região central é lorentziana. Analogamente, é possível verificar que as calotas superior e inferior são riemannianas.

Note que a parametrização X não cobre os pontos $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Tome a parametrização

$$\varphi(u, v) = (\sin(u) \sin(v), \cos(v), \cos(u) \sin(v)).$$

Nessa parametrização, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são

$$E = \sin^2 v \cos(2u), \quad F = \frac{1}{2} \sin(2u) \sin(2v), \quad G = -\cos^2 v \cos(2u) + \sin^2 v,$$

$$l = \sin^3 v, \quad m = 0, \quad n = \sin v.$$

Assim,

$$(G\bar{l} - E\bar{n})^2 - 4(G\bar{m} - F\bar{n})(F\bar{l} - E\bar{m}) = 0 \Leftrightarrow u = 0, \pi \quad e \quad v = \frac{\pi}{2},$$

ou seja, o LPL são os pontos $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$. Veja Figura 17.

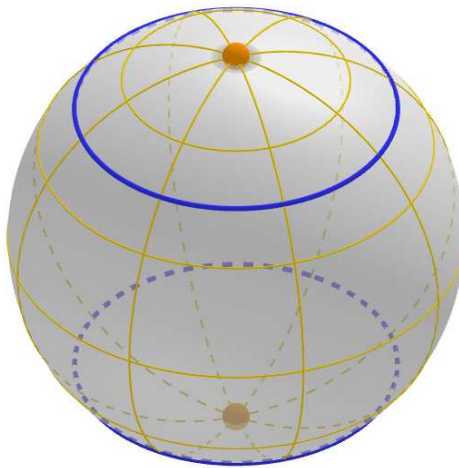


Figura 17 – Configuração das linhas de curvatura A -principais de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ (em amarelo) e conjunto LD (em azul).

8 Considerações finais

Estudar equações diferenciais binárias é uma oportunidade muito valiosa, ela envolve equações diferenciais ordinárias, teoria de singularidades, geometria diferencial, entre outras áreas. Todos os resultados envolvendo linhas de curvatura possuem forte importância, visto a relevância dessas curvas na geometria de superfícies. Conclui-se que as equações diferenciais binárias são uma ferramenta poderosa para estudar diversas linhas em superfícies no espaço. As formas normais, que foram tratadas na Seção 3.3, desempenham um papel fundamental nesse trabalho. Elas permitem obter as configurações genéricas de EDB's em diferentes cenários com clareza. Mesmo em ambientes mais complexos, como no Capítulo 7, foi possível fazer uso dessa teoria. A generalização da métrica do espaço enriquece muito o trabalho. Diferentemente do caso riemanniano, a métrica lorentziana ou degenerada permite que um operador autoadjunto possa ou não possuir autovetores. Dessa forma, o LPL pode ser uma curva no plano e o estudo se torna mais interessante. Portanto, investir em generalizações de ideias já existentes se mostra muito enriquecedor do ponto de vista matemático. Por fim, visto a importância das formas normais, neste trabalho é possível ver que, buscando alternativas para contornar eventuais problemas, adaptar estruturas para que se encaixem nos casos já estudados, é uma forma eficiente e elegante de se estudar equações diferenciais binárias.

Referências

- [1] J. W. Bruce and D. L. Fidal. *On binary differential equations and umbilics*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, 111A (1989), 147–168. Citado 3 vezes nas páginas 10, 30 e 44.
- [2] J. W. Bruce and F. Tari. *On binary differential equations*. Nonlinearity, 8 (1995), 255–271. Citado 3 vezes nas páginas 10, 30 e 44.
- [3] J. W. Bruce and F. Tari. *Implicit Differential Equations from the Singularity Theory Viewpoint*. Banach Center Publications, 33 (1996), 23–38. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 32.
- [4] J. W. Bruce, G. J. Fletcher and F. Tari. *Bifurcations of implicit differential equations*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, 130 (2000), 485–506. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 22.
- [5] J. W. Bruce and F. Tari. *Duality and implicit differential equations*. Nonlinearity, 13 (2000), 791–812. Citado 3 vezes nas páginas 10, 22 e 40.
- [6] M. P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 13.
- [7] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. 6ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2020. Citado na página 16.
- [8] M. Cibrario. *Sulla riduzione a forma delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*. Rendiconti dell'Istituto Lombardo – Accademia di Scienze e Lettere, 65 (1932), 889–906. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 39.
- [9] L. Dara. *Singularités génériques des équations différentielles multifformes*. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática (Bulletin of the Brazilian Mathematical Society), 6 (1975), no. 2, 95–128. Citado na página 10.
- [10] G. Darboux. *Leçons sur la Théorie des Surfaces*. Vol. IV: *Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic*, Note 07. Gauthier-Villars, Paris, 1896. Citado na página 10.
- [11] A. A. Davydov. *Qualitative Control Theory*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 142, American Mathematical Society, Providence, 1994. Citado na página 39.
- [12] F. Dumortier, J. Llibre and J. C. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer, Berlin, 2006. Citado na página 16.

- [13] R. Garcia and J. Sotomayor. *Differential Equations of Classical Geometry: A Qualitative Theory*. 27th Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, 2009. Citado na página 48.
- [14] C. Gutiérrez and J. Sotomayor. *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*. Astérisque, (1982), 195–215. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 49.
- [15] C. Gutiérrez and J. Sotomayor. *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*. 18th Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, 1991. Reprinted as: *Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces*, Monografias del IMCA, Lima, 1998. Citado na página 10.
- [16] S. Izumiya and F. Tari. *Self-adjoint operators on surfaces with singular metric*. Journal of Dynamical and Control Systems, 16 (2010), 329–353. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 56, 64 e 69.
- [17] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd ed., Springer, New York, 2013. Citado na página 22.
- [18] A. Lymberpoulos and I. T. Couto. *Introdução à Geometria lorentziana: Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2018. Citado na página 24.
- [19] H. Minkowski. *Raum und Zeit*. Physikalische Zeitschrift, 10 (1908), 75–88. Citado na página 24.
- [20] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York, 1983. Citado na página 24.
- [21] D. Pei. *Singularities of $\mathbb{RP}^2$ -valued Gauss maps of surfaces in Minkowski 3-space*. Hokkaido Mathematical Journal, 28 (1999), 97–115. Citado na página 75.
- [22] A. O. Remizov. *A Brief Introduction to Singularity Theory*. ICTP Lecture Notes, Trieste, 2010. Citado na página 71.
- [23] J. Sotomayor and R. A. Garcia. *Lines of Curvature on Surfaces, Historical Comments and Recent Developments*. São Paulo Journal of Mathematical Sciences, 2 (2008), no. 1, 99–143. Citado na página 10.
- [24] J. Sotomayor. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Livraria da Física, São Paulo, 2011. Citado na página 16.
- [25] F. Tari. *Self-adjoint operators on surfaces in $\mathbb{R}^n$* . Differential Geometry and its Applications, 27 (2009), 296–306. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 58.

-
- [26] F. Tari. *Pairs of foliations on surfaces*. In: *Geometry and Topology of Caustics — Caustics '08*, Cambridge University Press, 2010, pp. 305–337. Citado na página 11.