

Stefani Rose Teixeira

**Superfícies helicoidais com curvatura média
constante em $M^2 \times \mathbb{R}$**

Viçosa-MG

2024

Stefani Rose Teixeira

Superfícies helicoidais com curvatura média constante em
 $M^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de Magister Scientiae.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Orientador: Ady Cambraia Junior

Viçosa-MG

2024

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

T266t
2024
Teixeira, Stefani Rose, 1995-
Superfícies helicoidais com curvatura média constante em
M2 x R / Stefani Rose Teixeira. – Viçosa, MG, 2024.
1 dissertação eletrônica (84 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Ady Cambraia Junior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2024.
Referências bibliográficas: f. 82-84.
DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2024.372>
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Superfícies (Matemática). 2. Curvatura. 3. Hélices
(Álgebra). I. Cambraia Junior, Ady, 1980-. II. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.


CDD 22. ed. 516.352

Stefani Rose Teixeira


Superfícies helicoidais com curvatura média constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de Magister Scientiae.

Viçosa-MG, 22 de março de 2024.

 Documento assinado digitalmente
STEFANI ROSE TEIXEIRA
Data: 23/07/2024 13:51:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Stefani Rose Teixeira
Autora

 Documento assinado digitalmente
ADY CAMBRAIA JUNIOR
Data: 23/07/2024 12:40:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ady Cambraia Junior
Orientador

Viçosa-MG
2024

Dedico à Carlos Gabriel Freitas Dias.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador Ady Cambraia Junior por mostrar o mundo maravilhoso da Geometria Diferencial e como é gostoso estudar um tema em conjunto. Por toda dedicação, paciência, compreensão e atenção, foram essenciais para que este trabalho fosse concluído.

À banca que leu e contribuiu para o enriquecimento do mesmo.

Quero expressar minha sincera gratidão ao meu companheiro, Pedro, por ser minha fonte constante de amor e apoio durante esta jornada acadêmica. Por sempre estar meu lado celebrando as conquistas e enfrentando os obstáculos juntos. Além disso, sou grata pela calorosa recepção de sua família, que me acolheu com amor e carinho, especialmente a minha sogra Ivete, a minha cunhada Júlia e às tias Suzete, Ivone, Elizete e Beatriz. Não posso esquecer de agradecer aos tios Tarcísio e Breno.

Expresso minha gratidão a minha mãe, Rosilene, ao meu pai, Luiz e ao meu irmão, Luigi. Também agradeço aos meus avós maternos, Washington e Zilda, assim como aos meus tios Ronildo, Cristine e Marcelene. Aos meus primos Íris, Karine, Rafael, Gabriel, Rafael, Luís e Tainara, reconheço os momentos de cuidado e dedicação que proporcionaram, a esperança necessária para seguir em frente.

Quero expressar minha gratidão aos meus amigos Ana, Ana Luiza, Bárbara, Bruna, Claudemir, Eduarda, Érica, João, Joyce, Julio, Mônica, Paulo, Rodolfo, Natália, Veralice, assim como aos professores do departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, especialmente a Edney, Éder, Geraldo, Monique e ao meu orientador e mentor acadêmico Gil, eles desempenharam papéis significativos em minha jornada acadêmica, compartilhando e revelando a magia da matemática.

Agradeço com imensa gratidão à Iasmim, Laysa, Maria Terezinha e Renata membros da republica Cownerd por todos os momentos que compartilhamos juntas nesta república incrível. Cada risada, desafio superado, memória construída, tornou esta experiência única e inesquecível. Agradeço a cada uma de vocês por contribuir para que eu terminasse essa dissertação.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) Código de Financiamento 001.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), na modalidade de Bolsa de Desenvolvimento em Ciência, Tecnologia e Inovação (BDCTI), identificador APQ-02201-22.

*“O talento é um fator. Mas treinamento e foco
é o que realmente define o sucesso de alguém.”
(Ahsoka Tano - Star Wars.)*

Resumo

Teixeira, Stefani Rose, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2024. **Superfícies helicoidais com curvatura média constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$** . Orientador: Ady Cambraia Junior.

Este trabalho tem como principal objetivo investigar propriedades das superfícies com curvatura média constante não-nula invariantes por movimento helicoidal em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ em que \mathbb{M}^2 é uma forma espacial bidimensional. No âmbito dessa pesquisa, exploramos o Lema de Bour, que consiste em munir uma superfície com parâmetros especiais (s, t) de modo que sua métrica seja da forma $ds^2 + U(s)^2 dt^2$, no qual $U(s)$ é uma função suave. Esses parâmetros e a métrica associada permitem explicitar os parâmetros que descrevem de forma clara e evidente uma superfície helicoidal parametrizada regular imersa em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ que possui curvatura média constante.

Palavras-chave: Teorema de correspondência de Lawson; Lema de Bour; parâmetros isotérmicos; variedades homogêneas.

Abstract

Teixeira, Stefani Rose, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, march de 2024. **Helicoidal surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$** . Adviser: Ady Cambraia Junior.

This work aims to investigate properties of surfaces with non-zero constant mean curvature invariant under helicoidal motion in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, where \mathbb{M}^2 is a two-dimensional manifold. In the scope of this research, we explore Bour's Lemma, which consists of endowing a surface with special parameters (s, t) such that its metric takes the form $ds^2 + U(s)^2 dt^2$, where $U(s)$ is a smooth function. These parameters and the associated metric allow for the explicit description of parameters that characterize, in a clear and evident manner, a regularly immersed parametrized helicoidal surface in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ with constant mean curvature.

Keywords: Lawson's Correspondence Theorem; Bour's Lemma; isothermal parameters; homogeneous manifolds..

Lista de ilustrações

Figura 1 – Bordo infinito de \mathbb{H}^2 .	20
Figura 2 – Geodésicas de \mathbb{H}^2 .	22
Figura 3 – Horociclos.	23
Figura 4 – Isometria hiperbólica.	24
Figura 5 – Isometria parabólica.	24
Figura 6 – Isometria elíptica.	24
Figura 7 – Modelo do disco (\mathbb{D}).	25
Figura 8 – Correspondência entre os modelos.	26
Figura 9 – Plano π .	30
Figura 10 – Superfície helicoidal.	31
Figura 11 – Geratriz da superfície de revolução.	37
Figura 12 – Superfície de revolução.	37
Figura 13 – Geratriz com $D=1$.	45
Figura 14 – Cilindro reto de raio $\frac{1}{2H}$ e $D = 0$.	46
Figura 15 – $D_0 = 1$.	56
Figura 16 – $\alpha(\rho) = \left(\operatorname{tgh}\left(\frac{\rho}{2}\right), 0, \lambda(\rho)\right)$.	59
Figura 17 – Superfície de revolução ($h = 0$).	59
Figura 18 – $H = 0$.	74
Figura 19 – $H = \frac{1}{2}$.	74
Figura 20 – $H = \frac{1}{4}$.	75

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	Geometria Riemanniana	13
2.1.1	Conexão Riemanniana	14
2.1.2	Imersões isométricas.	17
2.2	Geometria Hiperbólica Plana (\mathbb{H}^2)	19
2.2.1	Geodésicas	21
2.2.2	Isometrias positivas de \mathbb{H}^2	22
2.2.3	Disco de Poincaré (\mathbb{D})	24
2.3	Espaço \mathbb{S}^2	26
2.4	Isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$	27
2.5	Correspondência de Lawson	28
3	SUPERFÍCIES HELICOIDAIS EM \mathbb{R}^3.	30
3.1	Lema de Bour.	30
3.2	Família de superfícies helicoidais com CMC	46
4	SUPERFÍCIES HELICOIDAIS EM $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$	58
4.1	Superfícies helicoidais em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.	58
4.1.1	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	58
4.1.2	Lema de Bour em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	59
4.1.3	Caso mínimo ($H = 0$)	65
4.1.4	Caso $H \neq 0$	69
4.1.5	Exemplos:	74
4.2	Superfícies helicoidais em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.	76
4.2.1	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	76
4.2.2	Lema de Bour em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	76
4.2.3	Caso mínimo ($H = 0$)	78
4.2.4	Caso $H \neq 0$	80
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS	84

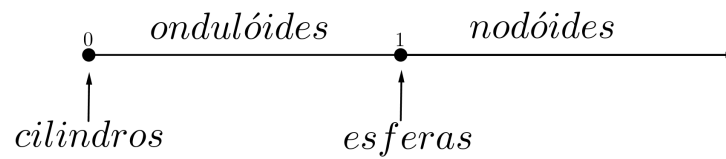
1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar as superfícies helicoidais com curvatura média constante (CMC) em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathbb{M}^2 é uma forma espacial bidimensional. As superfícies helicoidais despertam o interesse da humanidade há anos graças a sua marcante complexidade geométrica e às suas aplicações práticas em diversas esferas. Esta dissertação de mestrado tem como propósito investigar minuciosamente as características e propriedades dessas superfícies helicoidais, visando contribuir para uma compreensão mais abrangente de seu comportamento.

Historicamente a Geometria Diferencial inicia-se com a junção do cálculo e a geometria clássica, com a perspectiva de estudar curvas planas e superfícies no espaço ambiente \mathbb{R}^3 , por exemplo, enquanto o cálculo é fundamental para compreender as leis de Newton, a elaboração da teoria da relatividade exigiu o emprego de conhecimentos estabelecidos na geometria diferencial, como está esquematizado em [3].

Determinar a parametrização de uma superfície helicoidal com CMC pode ser um desafio complexo, razão pela qual é necessário impor certas restrições à sua natureza para facilitar a obtenção de soluções. A abordagem adotada neste estudo consiste em impor a restrição de que as superfícies helicoidais tenham curvatura média constante (CMC). Em outras palavras, estamos investigando superfícies helicoidais CMC, um tipo específico de superfície tridimensional gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo combinada com uma translação em uma dada direção. A curva em questão, denominada geratriz, é deslocada de maneira uniforme ao longo do eixo de rotação, formando uma espiral contínua. Uma característica distintiva das superfícies helicoidais é a sua configuração em formato de espiral, sendo que as superfícies de rotação com CMC representam uma particularização na parametrização das superfícies helicoidais.

O estudo das superfícies (imersas em \mathbb{R}^3) com curvatura média constante (CMC) iniciou-se no século XVIII. O matemático Charles-Eugène Delaunay [8] demonstrou que, ao rolar uma cônica sobre uma reta tangente sem deslizamentos, o foco da cônica descreve uma curva. Quando essa curva é rotacionada, forma uma superfície de revolução com curvatura média constante, conhecida como superfície de Delaunay. Posteriormente, em 1980, Kenmotsu [14] concentrou-se na curvatura média prescrita, buscando classificar de maneira geral a parametrização da geratriz de uma superfície de revolução. Esse processo pode ser alcançado variando um parâmetro no intervalo $[0, \infty)$.



Anos depois, Manfredo e Dajczer [4] exploraram, por meio do Lema de Bour, parâmetros especiais (s, t) em superfícies helicoidais, em que a métrica é modelada como $ds^2 + U(s)^2 dt^2$, sendo $U(s)$ uma função suave. Eles apresentaram um resultado fundamental que caracteriza as superfícies helicoidais de curvatura média constante como uma família de superfícies em \mathbb{R}^3 . Posteriormente, [1] estudou as superfícies helicoidais imersas nas variedades homogêneas tridimensionais, cujo grupo de isometrias tem dimensão 6, ou seja, as formas espaciais tridimensionais. No ano de 2005, Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana [10] investigaram as propriedades geométricas de superfícies de movimento helicoidal com curvatura média constante nos espaços $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Ao analisar a trajetória histórica desses matemáticos, torna-se claro o interesse e a relevância de investigar as propriedades das superfícies helicoidais. Este trabalho inicia-se com o capítulo das Preliminares, cujo o objetivo principal é fornecer uma revisão de notações, teoremas e outros elementos essenciais para a compreensão do trabalho.

No segundo Capítulo, estudamos as superfícies helicoidais de CMC imersas em uma variedade cujo grupo de isometrias tem dimensão 6, a saber o espaço \mathbb{R}^3 . Posteriormente, obtemos de maneira explícita os parâmetros dessa família de superfícies, tendo como referência o artigo [4] e a correspondência de Lawson discutida em [12].

No terceiro Capítulo, apresentamos duas variedades homogêneas tridimensionais, com grupo de isometrias de dimensão 4, mais especificamente, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Neste contexto, realizamos uma análise minuciosa dos parâmetros das superfícies helicoidais nesses espaços.

2 Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve revisão dos pré-requisitos que consideramos mais importantes para uma boa compreensão desta dissertação. Começaremos definindo alguns conceitos de Geometria Riemanniana como variedades diferenciáveis, coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, curvatura média, curvatura Gaussiana, entre outros. Apresentaremos a variedade bidimensional \mathbb{M}^2 e enfatizaremos quando $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2$, \mathbb{H}^2 e \mathbb{S}^2 . Em seguida, destacaremos a geometria desses espaços para podermos abordar de modo mais natural as superfícies helicoidais em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, exibiremos as representações de *Lawson* [12], com o objetivo de obter o teorema de classificação da família de superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 .

Principais referências: [5], [6], [7], [11], [12] e [13].

2.1 Geometria Riemanniana

Nesta seção, faremos uma breve revisão de alguns conceitos da Geometria Riemanniana, com base na referência [5].

Definição 2.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto \mathbb{M} e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em \mathbb{M} tais que:*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{M}$;
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições (1) e (2).

Definição 2.1.2. *Sejam \mathbb{M}_1^n e \mathbb{M}_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ é diferenciável em $p \in \mathbb{M}_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{M}_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de \mathbb{M}_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Proposição 2.1.1. *Sejam \mathbb{M}_1^n e \mathbb{M}_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in \mathbb{M}_1$ e cada $v \in T_p\mathbb{M}_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{M}_1$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação*

$d\varphi_p : T_p\mathbb{M}_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{M}_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Demonstração. Veja [5], página 9. □

Definição 2.1.3. A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela 2.1.1 é chamada diferencial de φ em p .

Definição 2.1.4. Sejam \mathbb{M}_1 e \mathbb{M}_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in \mathbb{M}_1$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Teorema 2.1.1. Seja $\varphi : \mathbb{M}_1^n \rightarrow \mathbb{M}_2^m$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in \mathbb{M}_1$ tal que

$$d\varphi_p : T_p\mathbb{M}_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{M}_2$$

é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p .

Demonstração. Veja [5], página 11. □

Definição 2.1.5. Seja \mathbb{M} uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em \mathbb{M} é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in \mathbb{M}$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p\mathbb{M}$, que varia de forma diferenciável, isto é, se $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de um ponto p , com

$$X(x_1, \dots, x_n) = p \in X(U) \quad e \quad \frac{\partial(p)}{\partial x_i} = dx_p(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

então $\langle X_i, X_j \rangle_p$ é uma função diferenciável em U , com $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

A seguir, apresentamos resultados sobre superfícies imersas em uma variedade de dimensão 3 que possui métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{M}}$ e conexão ∇ .

2.1.1 Conexão Riemanniana

Seja \mathbb{M} uma variedade Riemanniana com métrica dada por $g_{\mathbb{M}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{M}}$. Definimos a seguir a conexão Riemanniana ∇ de \mathbb{M} . Primeiramente abordaremos sobre imersão que é grande parte das questões puramente locais da Geometria, a distinção entre imersões e mergulhos é irrelevante. Essa observação decorre da seguinte proposição, toda imersão é localmente um mergulho.

Proposição 2.1.2. Seja $\varphi : \mathbb{M}_1^n \rightarrow \mathbb{M}_2^m$, $n \leq m$, uma imersão da variedade \mathbb{M}_1 na variedade \mathbb{M}_2 . Para todo ponto $p \in \mathbb{M}_1$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{M}_1$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \rightarrow \mathbb{M}_2$ é um mergulho.

Demonstração. Veja [5], página 14. □

Lema 2.1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável \mathbb{M} . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Demonstração. Veja [5], página 28. □

Definimos $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em \mathbb{M} e $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em \mathbb{M} .

Definição 2.1.6. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável \mathbb{M} é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{M})$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

em que $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ e $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$.

Definição 2.1.7. *Sejam X, Y campos de vetores em \mathbb{M} , definimos a aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) &\longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{M}) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_Y X, \end{aligned}$$

dada implicitamente pela formula de Koszul:

$$\langle Z, \nabla_X Y \rangle = \frac{1}{2} \cdot \{X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle\},$$

em que Z é um campo vetorial de \mathbb{M} . Essa aplicação é chamada de conexão Riemanniana de M . Tal aplicação satisfaz as seguintes propriedades:

- i) (Compatibilidade com a métrica) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$;
- ii) (Simetria) $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$;
- iii) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;
- iv) $\nabla_Y fX = YfX + f\nabla_Y X$;
- v) $\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X$.

Teorema 2.1.2. *Dada uma variedade Riemanniana \mathbb{M} , existe uma única conexão afim ∇ em \mathbb{M} satisfazendo as condições:*

- a) ∇ é simétrica;
 b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Veja [5], página 61. □

O campo vetorial Z dado pelo Lema 2.1.1 é chamado o colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y ; Z é evidentemente diferenciável. A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 2.1.3. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em \mathbb{M} ; a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então:*

- a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade);
 b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade);
 c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi);
 d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Veja [5], página 29. □

Definição 2.1.8. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável é dita simétrica quando*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}),$$

em que $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ é o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ .

Observação 2.1.1. *Em um sistema de coordenadas (U, x) , o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$,*

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Observação 2.1.2. *A conexão dada pelo teorema 2.1.2 é denominada conexão Levi-Civita (ou Riemanniana) de \mathbb{M} . Além disso, em um sistema de coordenadas (U, x) . É conveniente dizer que as funções $\Gamma_{i,j}^k$ definidas em $U \subset \mathbb{R}^n$ por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão.*

Proposição 2.1.4. *Sejam $\partial_x, \partial_y, \partial_t$ o referencial adaptado (base canônica) de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e ∇ a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, tem-se que:*

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_x} \partial_x = \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x - \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y; \\ \nabla_{\partial_y} \partial_y = -\frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_y; \\ \nabla_{\partial_y} \partial_x = \nabla_{\partial_x} \partial_y = \frac{\lambda_y}{\lambda} \partial_x + \frac{\lambda_x}{\lambda} \partial_y; \\ \nabla_{\partial_x} \partial_t = \nabla_{\partial_y} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_x = \nabla_{\partial_t} \partial_y = 0. \end{cases}$$

Com

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } \mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2, \\ \frac{2}{1-x^2-y^2} & ; \text{ se } \mathbb{M}^2 = \mathbb{D}^2, \\ \frac{2}{1+x^2+y^2} & ; \text{ se } \mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2. \end{cases}$$

Demonstração. Veja [13], página 32. □

2.1.2 Imersões isométricas.

Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por $X : U \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e orientada dada por um campo normal unitário N . Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e por ∇ , a métrica e a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, respectivamente.

Definição 2.1.9. *Seja $X(u, v)$ uma superfície regular. Dado um vetor $w \in T_p S$, em que w é vetor de tangência à curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ em $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, com t variando intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. A primeira forma quadrática é dada por*

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha'(0) &\longmapsto \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= (u')^2 \langle X_u, X_u \rangle_p + 2u'v' \langle X_u, X_v \rangle_p + (v')^2 \langle X_v, X_v \rangle_p \\ &= (u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G. \end{aligned}$$

Os coeficientes E , F e G são chamados de coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$.

Definição 2.1.10. *Sejam S uma superfície regular parametrizada por $X : U \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e $p \in X(u, v)$. Dizemos que o vetor normal à X em p é ortogonal a $T_p X$, isto é, ortogonal a todos os vetores tangentes a X em p .*

Definição 2.1.11 (Aplicação normal de Gauss). *Dada uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, para cada ponto de $X(U)$, um vetor normal unitário é dado por*

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), \quad q \in X(U).$$

Assim, temos uma aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ que associa a cada $q \in X(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

Proposição 2.1.5. *A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Demonstração. Veja [6], página 165. □

Definição 2.1.12. A forma quadrática definida por

$$\begin{aligned} II_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -\langle \nabla_v N, v \rangle \end{aligned}$$

é chamada segunda forma fundamental de S em p e ∇ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

A expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ é dada por:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= \langle -\nabla_{\alpha'(0)} N, \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle N, \nabla_{\alpha'(0)} \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle N, \nabla_{X_u u' + X_v v'} (X_u u' + X_v v') \rangle_p \\ &= \langle N, \nabla_{X_u} X_u \rangle (u')^2 + 2 \langle N, \nabla_{X_v} X_u \rangle u' v' + \langle N, \nabla_{X_v} X_v \rangle (v')^2 \\ &= e (u')^2 + 2 f u' v' + g (v')^2 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases} e(u, v) = -\langle \nabla_{X_u} N, X_u \rangle = \langle N, \nabla_{X_u} X_u \rangle; \\ f(u, v) = -\langle \nabla_{X_u} N, X_v \rangle = \langle N, \nabla_{X_u} X_v \rangle; \\ f(u, v) = -\langle \nabla_{X_v} N, X_u \rangle = \langle N, \nabla_{X_v} X_u \rangle; \\ g(u, v) = -\langle \nabla_{X_v} N, X_v \rangle = \langle N, \nabla_{X_v} X_v \rangle. \end{cases}$$

As funções e , f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$.

Pondo

$$\begin{cases} \nabla_{X_u} N = N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v; \\ \nabla_{X_v} N = N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{cases}$$

em que u e v são tangentes, portanto,

$$\nabla_{\alpha'} N = (a_{11} X_u + a_{21} X_v) u' + (a_{12} X_u + a_{22} X_v) v'$$

logo,

$$\begin{cases} -e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11} E + a_{21} F; \\ -f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11} F + a_{21} G; \\ -f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{12} E + a_{22} F; \\ -g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{12} F + a_{22} G. \end{cases}$$

em que E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$.

Então,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}; & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}; \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}; & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

As equações

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \quad \text{e} \quad N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

com $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ obtidos acima, são conhecidas como as equações de Weingarten.

Definição 2.1.13. *Sejam $p \in S$, tem-se que a curvatura média $H(p)$ e a curvatura de Gauss extrínseca $K_e(p)$ de S são definidas por*

$$H(p) = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}(u, v)$$

e

$$K_e(p) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(u, v)$$

respectivamente.

Definição 2.1.14 (Equação da curvatura de Gauss). *Seja S uma imersão conforme parametrizada por*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \\ w &\longmapsto (h(w), f(w)). \end{aligned}$$

Dado $N = (N_1, N_2, N_3)$ a aplicação normal de Gauss de S . Seja K_i a curvatura intrínseca de S e K_e a curvatura extrínseca de S . Seja $K_{\mathbb{M}^2}$ a curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 . Então a equação de Gauss de S é dada por

$$K_i(w) - K_e(X(w)) = K_{\mathbb{M}^2}(h(w))N_3^2(w),$$

para cada $w \in \Omega$.

Demonstração. Veja [13], página 41. □

No decorrer do texto, mais precisamente na seção 4.1, abordaremos o espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Antes, porém, apresentaremos as principais noções geométricas de dois modelos do plano hiperbólico: o semiplano superior \mathbb{H}^2 e o disco de Poincaré \mathbb{D} , conforme [5], [7] e [11].

2.2 Geometria Hiperbólica Plana (\mathbb{H}^2)

Nesta seção, vamos apresentar, de modo sucinto, uma revisão da geometria hiperbólica plana. Mais precisamente, apresentamos dois modelos desta geometria, bem como suas geodésicas, isometrias e seus principais resultados. A referência utilizada é [11].

Definição 2.2.1. O conjunto de pontos

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}, \quad (2.1)$$

em que $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $\text{Im}(z) = y$ é a parte imaginária do número complexo z , chamado de **plano hiperbólico** \mathbb{H}^2 .

Definição 2.2.2. Dado $T_{z_0}\mathbb{H}^2$ o espaço tangente de \mathbb{H}^2 no ponto z_0 e sejam $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$, o **produto escalar hiperbólico**, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$, que é definido por

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle u, v \rangle}{(\text{Im}(z_0))^2}, \quad (2.2)$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar de \mathbb{R}^2 .

Definição 2.2.3. A métrica definida pelo produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ e denotada por $g_{\mathbb{H}^2}$ e é dada por

$$g_{\mathbb{H}^2}(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}. \quad (2.3)$$

Assim, define-se a **métrica hiperbólica** de \mathbb{H}^2 por

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} |dz|^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2), \quad (2.4)$$

em que $z = x + yi$ e $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$.

Definição 2.2.4. A união do eixo real ($y = 0$) com o ponto no infinito (∞), é chamado **bordo infinito** de \mathbb{H}^2 , ou **bordo assintótico**, é denotado por $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$, ou seja, é o conjunto

$$\partial_{\infty}\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}. \quad (2.5)$$

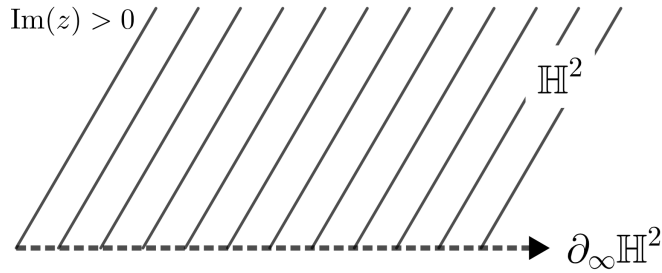


Figura 1 – Bordo infinito de \mathbb{H}^2 .

Definição 2.2.5. Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$. Definimos o **ângulo hiperbólico** entre u e v como sendo o real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{\mathbb{H}}}$$

e o **ângulo orientado** entre $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ é denotado por $\angle(u, v) \in (-\pi, \pi]$, como o número real que satisfaz

$$\angle(u, v) = \begin{cases} \theta; & \text{se } u_1 v_2 - u_2 v_1 \geq 0 \\ -\theta; & \text{se } u_1 v_2 - u_2 v_1 < 0 \end{cases}.$$

Definição 2.2.6. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, uma curva C^1 . Definimos o **comprimento hiperbólico** de γ , denotado por $L_{\mathbb{H}}(\gamma)$, como

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_a^b g_{\mathbb{H}^2}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{H}}^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt. \end{aligned}$$

Definição 2.2.7. Sejam U e V dois conjuntos abertos de \mathbb{C} . Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é uma **aplicação conforme** se, para todo ponto $z_0 \in U$ e todos vetores $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$, tivermos

$$\angle(u, v) = \angle(D_{z_0}f(u), D_{z_0}f(v)),$$

ou seja, f é conforme se preserva os ângulos orientados. No caso particular em que $f : U \rightarrow U$ é uma bijeção conforme, dizemos que f é uma **transformação conforme** de U .

Proposição 2.2.1. O grupo de transformações conformes de \mathbb{H}^2 é

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Demonstração. Veja [11], página 51. □

2.2.1 Geodésicas

Nesta subseção, abordaremos as geodésicas em \mathbb{H}^2 , dado dois pontos de \mathbb{H}^2 , sempre existe uma curva minimizante que liga esses dois pontos.

Definição 2.2.8. Diremos que uma curva de classe C^1 por partes e regular $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma **geodésica**, se para cada par de pontos em $c([a, b])$, a curva c é minimizante entre esses pontos, isto é,

$$d_{\mathbb{H}}(c(t_1), c(t_2)) = L_{\mathbb{H}}(c)[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \|c'(t)\|_{\mathbb{H}} dt, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

Definição 2.2.9. Dizemos que um difeomorfismo φ de \mathbb{H}^2 é uma **isometria de \mathbb{H}^2** se φ preserva a métrica $g_{\mathbb{H}^2}$, isto é,

$$g_{\mathbb{H}^2}(u, v) = g_{\mathbb{H}^2}(d_z\varphi(u), d_z\varphi(v)), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2, u, v \in T_z\mathbb{H}^2.$$

Além disso, φ é uma isometria positiva se preserva a orientação. Caso contrário diremos que φ é uma isometria negativa.

Teorema 2.2.1. *Toda transformação conforme do modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 é uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$. Denotemos por $\ell_{\mathbb{H}}$ o grupo das isometrias de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$ e consideremos a isometria negativa de \mathbb{H}^2 definida por $h(z) = -\bar{z}$. Então*

$$\ell_{\mathbb{H}^2} = \mathcal{M}_{\mathbb{H}^2} \cup h\mathcal{M}_{\mathbb{H}^2} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}; z \mapsto \frac{-a\bar{z} - b}{c\bar{z} + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Demonstração. Veja [11], página 58. □

Lema 2.2.1. *As semirretas verticais $\gamma(t) = x_0 + it$, $t \in [0, \infty)$, com $x_0 \in \mathbb{R}$, são geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$.*

Lema 2.2.2. *Os semicírculos ortogonais ao bordo assintótico são geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$.*

Teorema 2.2.2. *Dado dois pontos de \mathbb{H}^2 passa uma única geodésica por estes pontos. Além disso, as únicas geodésicas de \mathbb{H}^2 são as semirretas verticais e os semicírculos ortogonais ao eixo real.*

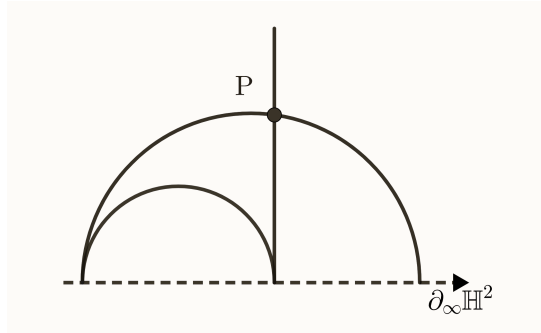


Figura 2 – Geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Veja [11], página 63. □

2.2.2 Isometrias positivas de \mathbb{H}^2

Nesta seção, exploraremos as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 , que são transformações que preservam a orientação dos ângulos. Existem três tipos principais de isometrias positivas: hiperbólica, parabólica e elíptica. Antes de mergulharmos nesses conceitos, é fundamental introduzirmos os horociclos, pois eles desempenham um papel crucial na determinação dessas isometrias.

Definição 2.2.10. *Definimos como **horociclos** de \mathbb{H}^2 os círculos tangentes ao bordo assintótico e as retas horizontais contínuas de \mathbb{H}^2 .*

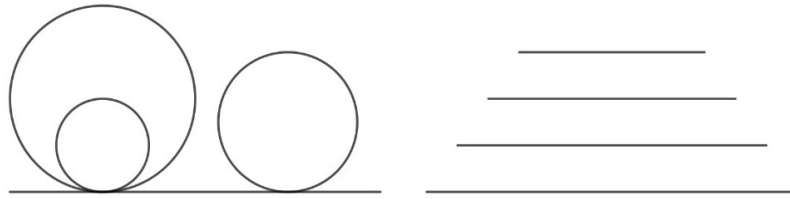


Figura 3 – Horociclos.

Proposição 2.2.2. *A imagem de todo horociclo de \mathbb{H}^2 por uma isometria qualquer de \mathbb{H}^2 é um horociclo.*

Demonstração. Veja [11], página 74. □

As isometrias positivas de \mathbb{H}^2 são caracterizadas pela quantidade de pontos fixos. Deste modo, uma isometria positiva qualquer de \mathbb{H}^2 diferente da identidade pode ser determinada a partir da análise de $T = \frac{az+b}{cz+d}$ em que $ad - bc = 1$. Dividiremos esta análise em dois casos:

1º caso. Seja $c = 0$. Então T é caracterizado por $T(z) = az + b$. Dividiremos em mais dois sub-casos:

1.1. se $a = 1$, $T(z) = z + b$ e então $b = 0$;

1.2. se $a \neq 1$, $T(z) = az + b$ e então $z = \frac{b}{1-a}$.

2º caso. Se $c \neq 0$, dada um ponto $z \in \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ é fixo por T se, e somente, se $T(z) = z$, ou seja,

$$\begin{aligned} z &= \frac{az + b}{cz + d} \\ cz^2 + dz &= az + b \\ cz^2 + dz - az - b &= 0 \\ cz^2 + (d - a)z - b &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando a formula de Bhaskara, temos

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c},$$

em que $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$. A partir deste resultado, conseguimos classificar as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 de acordo com os pontos fixos:

1. $\Delta > 0$, ou seja, se T tem dois pontos fixos no bordo assintótico, então T é uma isometria hiperbólica;

2. $\Delta = 0$, ou seja, se T tem apenas um ponto fixo no bordo assintótico, então T é uma isometria parabólica;
3. $\Delta < 0$, então tem um único ponto fixo no interior de \mathbb{H}^2 e T é uma isometria elíptica.

A seguir, ilustraremos o comportamento geométrico das isometrias positivas de \mathbb{H}^2

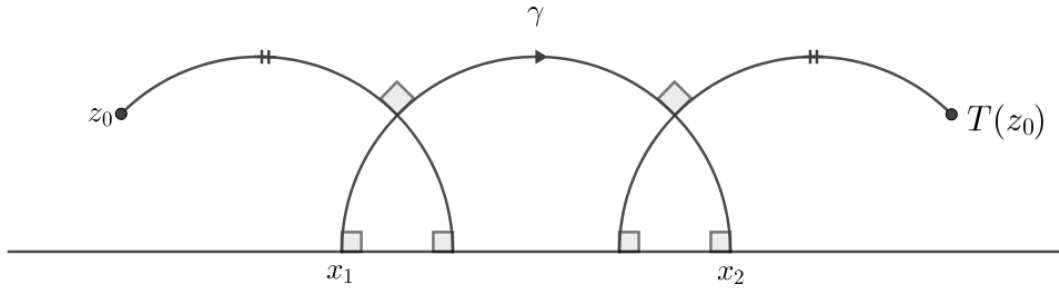


Figura 4 – Isometria hiperbólica

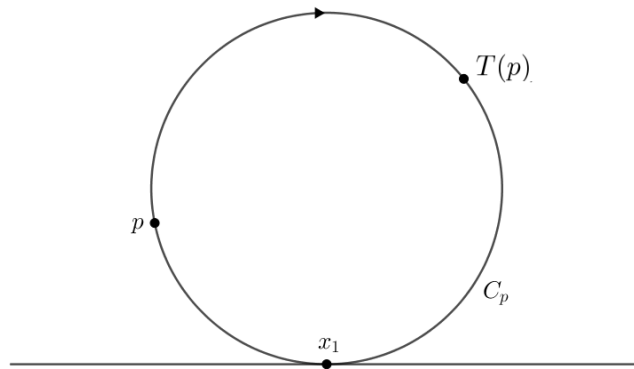


Figura 5 – Isometria parabólica.

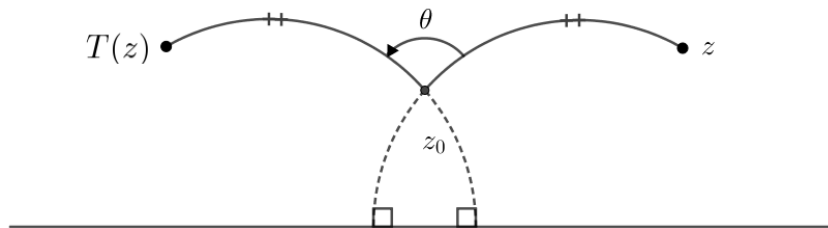


Figura 6 – Isometria elíptica

2.2.3 Disco de Poincaré (\mathbb{D})

Nesta seção, abordaremos o Disco de Poincaré e suas características, visando transitar entre os modelos do plano hiperbólico, sendo eles \mathbb{H}^2 e \mathbb{D} . Consideremos \mathbb{D} como

o disco unitário aberto,

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$

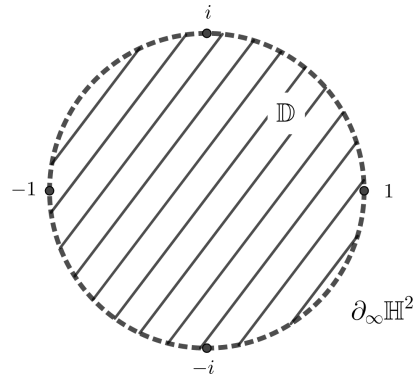


Figura 7 – Modelo do disco (\mathbb{D}).

Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z - i}{z + i} \end{aligned}$$

é um difeomorfismo conforme de \mathbb{H}^2 para \mathbb{D} . Agora vamos equipar \mathbb{D} com uma métrica $g_{\mathbb{D}}$ de modo que φ seja uma isometria entre $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$ e $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, então deduzir a partir desta isometria as geodésicas e as isometrias de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$.

Lema 2.2.3. *A única métrica $g_{\mathbb{D}}$ definida sobre \mathbb{D} tal que φ seja uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$ sobre $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ é*

$$g_{\mathbb{D}} = \frac{4|dw|^2}{(1 - |w|^2)^2} = \frac{4\langle dw, dw \rangle}{(1 - |w|^2)^2}, \quad w = u + iv, \quad |w| < 1.$$

Demonstração. Veja [11], página 70. □

Proposição 2.2.3. *As geodésicas de \mathbb{D} , munido da métrica $g_{\mathbb{D}}$, são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais à \mathbb{S}^1 .*

Demonstração. Veja [11], página 74. □

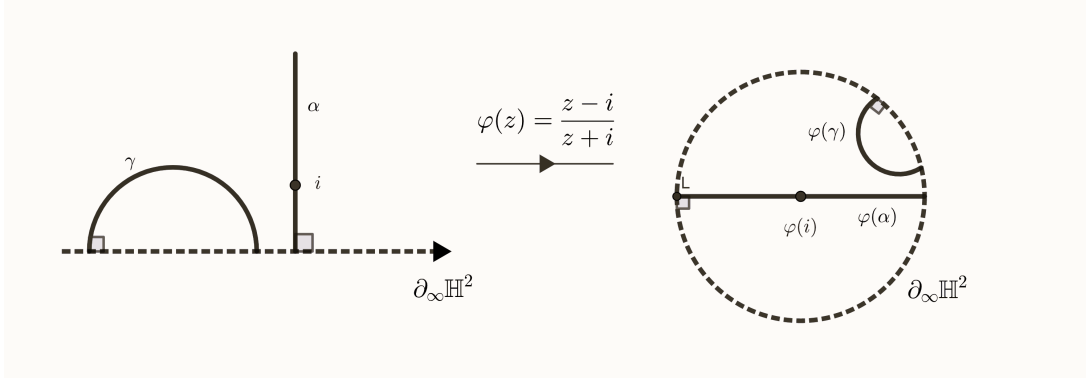


Figura 8 – Correspondência entre os modelos.

Para determinar o conjunto de transformações conformes de \mathbb{D} , que denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$, utilizaremos a definição de que $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ é uma composição de aplicações, consequentemente um grupo. Esse grupo também é chamado de grupo de Möbius de \mathbb{D} . Analogamente, o conjunto de transformações conformes de \mathbb{H}^2 , denotado por $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$, é chamado de grupo de Möbius de \mathbb{H}^2 .

Proposição 2.2.4. *O grupo de transformações conformes de \mathbb{D} é*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{D}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \mid a, c \in \mathbb{C}, a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}. \quad (2.6)$$

Demonstração. Veja [11], página 51. □

A aplicação $f(w) = \bar{w}$ é uma isometria negativa de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, ou seja, invertendo a orientação, e que a composição de duas isometrias negativas é uma isometria positiva, podemos determinar o conjunto de isometrias de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, por $\ell_{\mathbb{D}}$.

Proposição 2.2.5. *O grupo de isometrias de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ é*

$$\ell_{\mathbb{D}} = \mathcal{M}_{\mathbb{D}} \cup f \cdot \mathcal{M}_{\mathbb{D}} = \left\{ w \mapsto \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}}, w \mapsto \frac{\overline{aw + \bar{c}}}{\overline{cw + \bar{a}}} \mid a, c \in \mathbb{C}, a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}.$$

Demonstração. Veja [11], página 73. □

2.3 Espaço \mathbb{S}^2

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos básicos da geometria esférica. A esfera Euclidiana é o conjunto

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

dotado da métrica induzida do espaço Euclidiano tridimensional. Considerando a projeção estereográfica, podemos reescrever $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ com a métrica

$$ds^2 = \lambda^2 (dx^2 + dy^2), \quad \lambda = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}.$$

As únicas isometrias de \mathbb{S}^2 são as rotações.

Proposição 2.3.1. *O grupo de isometrias da esfera Euclidiana é dada por,*

$$\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = O(3)$$

em que $O(3)$ é o grupo de matrizes ortogonais de ordem 3×3 .

Demonstração. Veja [9], página 36. □

Observação 2.3.1. *As únicas geodésicas de \mathbb{S}^2 são os grandes círculos.*

2.4 Isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção, trataremos das superfícies invariantes por isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, com ênfase em \mathbb{H}^2 . Supondo que $g_{\mathbb{M}^2}$ e $g_{\mathbb{R}}$ representam as métricas de \mathbb{M}^2 e \mathbb{R} , respectivamente, a variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}, \bar{g})$, com $\bar{g} = g_{\mathbb{M}^2} + g_{\mathbb{R}}$, está bem definida. Utilizando a notação diferencial, a métrica é expressa como

$$ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2) + dt^2,$$

sendo λ uma função apropriada, dada por

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } \mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2, \\ \frac{2}{1-x^2-y^2} & ; \text{ se } \mathbb{M}^2 = \mathbb{D}^2, \\ \frac{2}{1+x^2+y^2} & ; \text{ se } \mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Definição 2.4.1. *Sejam \mathbb{M} e \mathbb{N} variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ é chamado uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in \mathbb{M}, u, v \in T_p\mathbb{M}.$$

A seguir, apresentaremos um resultado sobre as isometrias em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathbb{M}^2 é uma variedade bidimensional.

Lema 2.4.1. *Seja $f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ um difeomorfismo. Se $f(x, y, t) = (f_1(x, y), f_2(t))$ com $f_1 \in \text{Isom}(\mathbb{M}^2)$ e $f_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R})$, então $f \in \text{Isom}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$.*

Demonstração. Veja [13], página 16. □

2.5 Correspondência de Lawson

Nesta seção, apresentamos um resultado clássico da geometria de \mathbb{R}^3 que fornece uma família de superfícies associadas a uma superfície previamente conhecida, a saber a correspondência de Lawson, e para variedades homogêneas que possuem grupo de isometrias de dimensão 4, que é o caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. As principais referências utilizadas são: [7], [12] e [15].

Iniciaremos definindo parâmetros isotérmicos.

Definição 2.5.1. *Seja a parametrização $X : U \subset \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{M}^3$ é uma aplicação conforme quando a sua diferencial é uma aplicação que preserva ângulos, ou seja, que exista uma função $\lambda(q) > 0$ diferenciável para todo $q \in U$ tal que*

$$\langle dX_q(u), dX_q(v) \rangle = \lambda^2(q) \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in T_{X(q)}S,$$

se X é conforme, as coordenadas $(u, v) \in U$ são chamados de parâmetros isotérmicos.

Observação 2.5.1. *Observe a definição 2.5.1, quando temos uma parametrização sobre parâmetros isotérmicos, tem-se que sua primeira forma fundamental é $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$.*

Proposição 2.5.1. *Seja $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície, e sejam (u, v) parâmetros isotérmicos. Então, uma condição necessária e suficiente para que a curvatura média de uma superfície X seja constante é que a função $\phi(z) = \frac{e-g}{2} - f\sqrt{-1}$ em que e , f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental, seja analítica complexa em D .*

Demonstração. Veja [15], página 21. □

Teorema 2.5.1. *(Correspondência de Lawson- [12], Teorema 8)*

Sejam $ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$ uma métrica riemanniana (isotérmica) definida sobre uma superfície simplesmente conexa S e H^2 uma constante real não negativa qualquer. Suponha que a curvatura de Gauss K dessa métrica satisfaça

$$K \leq H^2$$

e, além disso, suponha que a métrica

$$d\hat{s}^2 = \sqrt{H^2 - K} ds^2$$

seja flat, ou seja, a curvatura gaussiana seja identicamente nula. Então existe uma família 2π -periódica diferenciável de imersões isométricas

$$\psi_\theta : S \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \theta \in \mathbb{R},$$

com curvatura média constante H . Além disso, a menos de congruências, as aplicações ψ_θ , com $0 \leq \theta \leq \pi$, representam todas as imersões isométricas locais de S em \mathbb{R}^3 , com curvatura média constante H .

Demonstração. Ver [\[12\]](#) , página 363.

□

3 Superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 .

Neste capítulo, conduzimos uma investigação aprofundada sobre as superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 . Inicialmente, utilizamos o Lema de Bour (Lema 3.1.1), juntamente com o Lema 3.1.2, para obter de forma clara e explícita os parâmetros de uma superfície helicoidal com curvatura média constante (CMC).

Finalizamos o capítulo utilizando a correspondência de Lawson (2.5.1) e os parâmetros obtidos anteriormente para uma parametrização global de todas as famílias das superfícies helicoidais associadas à uma superfície de rotação.

Utilizamos, com principais referências: [4], [6] e [14].

3.1 Lema de Bour.

Sejam $X : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $U \subset \mathbb{M}$ um aberto. A interseção de $X(U)$ com um plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ que contém o eixo z é uma curva cujo o gráfico é $z = \lambda(\rho)$, o qual está contido na interseção de π com o plano xy .

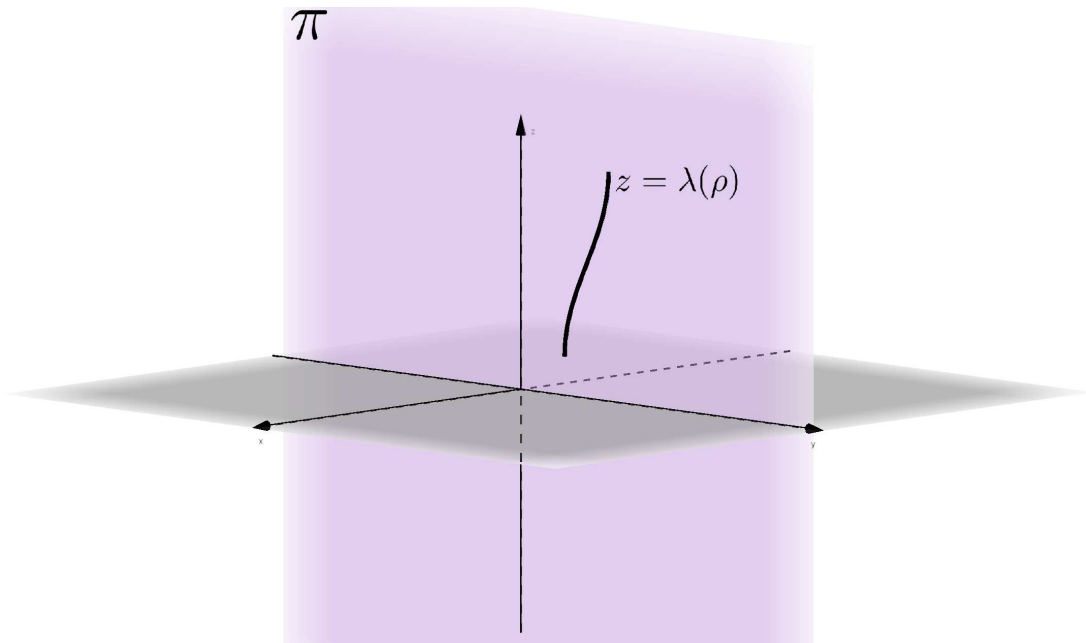


Figura 9 – Plano π .

Se X é invariante por um movimento helicoidal em torno do eixo z com o passo h , então a restrição $X|_U$ pode ser descrita como

$$X(\rho, \varphi) = (\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), \lambda(\rho) + h\varphi), \quad (3.1)$$

em que ρ e φ são coordenadas polares no plano xy .

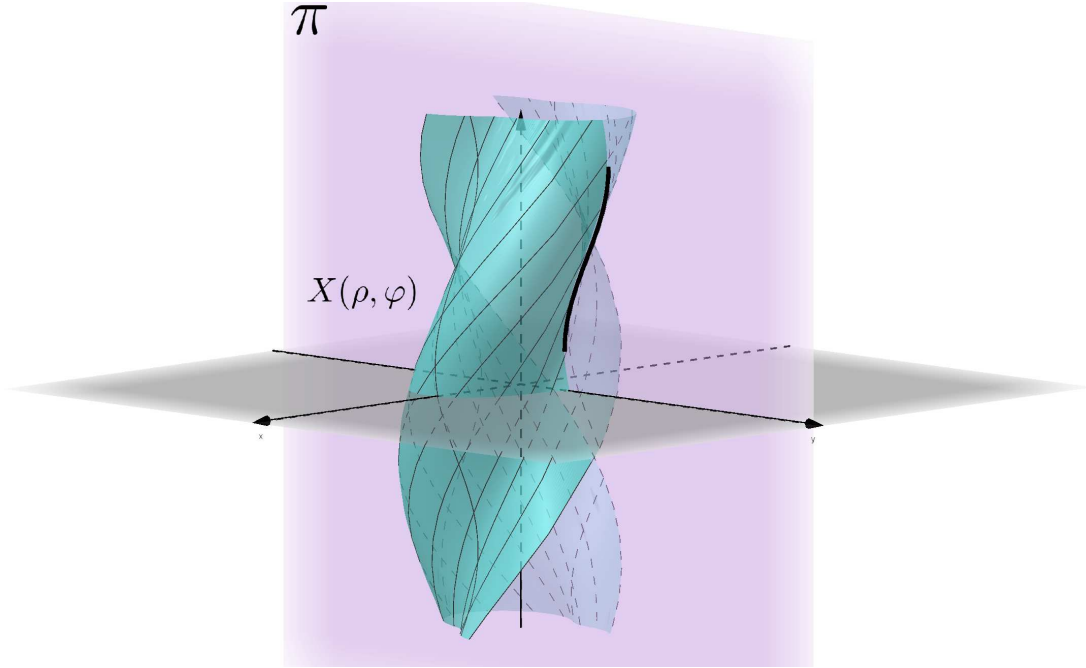


Figura 10 – Superfície helicoidal.

O resultado a seguir fornece de forma explícita os parâmetros ρ , φ e λ de uma superfície helicoidal com curvatura média qualquer, que possui parametrização dada por (3.1).

Lema 3.1.1 (Lema de Bour em \mathbb{R}^3). *Seja S a superfície invariante pelo movimento helicoidal da forma (3.1), pode ser parametrizada localmente pelas coordenadas naturais s e t . Seja X uma superfície helicoidal com passo $h \neq 0$ em \mathbb{R}^3 . Então existe uma família de dois parâmetros $\mathcal{F}(m, h)$, $m \neq 0$, de superfícies helicoidais isométricas a X , que contém uma superfície de revolução, dada por*

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 U^2(s) = \rho^2 + h^2; \\ \rho(s) = (m^2 U^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}; \\ \lambda(s) = \int \frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} (m^2 U^2(1 - m^2(U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}} ds; \\ \varphi(s, t) = \frac{t}{m} - \frac{h}{m} \int \frac{(m^2 U^2(1 - m^2(U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}}}{U(m^2 U^2 - h^2)} ds. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Demonstração 3.1.1. *Os coeficientes E, F e G da primeira forma fundamental de (3.1) são dados por:*

$$\begin{aligned} E &= \langle X_\rho, X_\rho \rangle = \langle (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \lambda'(\rho)), (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \lambda'(\rho)) \rangle \\ &= \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) + (\lambda'(\rho))^2 \\ &= 1 + (\lambda'(\rho))^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_\rho, X_\varphi \rangle = \langle (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \lambda'(\rho)), (-\rho \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi), h) \rangle \\
&= -\rho \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \rho \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \lambda'(\rho)h \\
&= \lambda'(\rho)h;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \langle (-\rho \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi), h), (-\rho \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi), h) \rangle \\
&= \rho^2 \sin^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\varphi) + h^2 \\
&= \rho^2 + h^2.
\end{aligned}$$

Ao remover o parâmetro ρ em $\lambda'(\rho)$ e denotando apenas por λ' , temos

$$E = 1 + (\lambda')^2, \quad F = \lambda'h \quad e \quad G = \rho^2 + h^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
d\sigma^2 &= Ed\rho^2 + 2Fd\rho d\varphi + Gd\varphi^2 \\
&= [1 + (\lambda')^2] d\rho^2 + 2(\lambda'h) d\rho d\varphi + (\rho^2 + h^2) d\varphi^2 \\
&= (\rho^2 + h^2) \left[\frac{1 + (\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} d\rho^2 + \frac{2\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho d\varphi + d\varphi^2 \right] \\
&= (\rho^2 + h^2) \left[\frac{1 + (\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} d\rho^2 + \left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 - \left(\frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 \right] \\
&= (\rho^2 + h^2) \left[\left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + \frac{(\rho^2 + h^2)(1 + (\lambda')^2) d\rho^2 - (\lambda'h d\rho)^2}{(\rho^2 + h^2)^2} \right] \\
&= (\rho^2 + h^2) \left[\left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 + h^2} + \frac{(\rho^2 + h^2)(\lambda')^2 d\rho^2 - (\lambda'h d\rho)^2}{(\rho^2 + h^2)^2} \right] \\
&= (\rho^2 + h^2) \left[\left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 + h^2} + \frac{((\lambda')^2 d\rho^2)(\rho^2 + h^2 - h^2)}{(\rho^2 + h^2)^2} \right] \\
&= (\rho^2 + h^2) \left[\left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 + h^2} + \frac{\rho^2(\lambda')^2 d\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^2} \right] \\
&= (\rho^2 + h^2) \left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2(\lambda')^2 d\rho^2}{\rho^2 + h^2} \\
&= (\rho^2 + h^2) \left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + d\rho^2 \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)
\end{aligned}$$

ou seja, a métrica de (3.1) é

$$d\sigma^2 = (\rho^2 + h^2) \left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)^2 + d\rho^2 \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right). \quad (3.3)$$

Incorporando novos parâmetros (s, t) na equação (3.1), os quais desempenham um papel essencial na determinação implícita de ρ , φ e $\lambda(\rho)$, temos $(s, t) = (s(\rho, \varphi), t(\rho, \varphi))$.

Portanto, as derivadas das funções $s(\rho, \varphi)$ e $t(\rho, \varphi)$ são:

$$ds = s_\rho d\rho + s_\varphi d\varphi; \quad (3.4)$$

$$dt = t_\rho d\rho + t_\varphi d\varphi. \quad (3.5)$$

Logo, por (3.3),

$$d\sigma^2 = (\rho^2 + h^2) \underbrace{\left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \right)}_{dt}^2 + \underbrace{\left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)}_{ds^2} d\rho^2, \quad (3.6)$$

em que

$$ds = \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\rho; \quad (3.7)$$

$$dt = d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho. \quad (3.8)$$

Pelas igualdades (3.4) e (3.7),

$$\begin{aligned} ds &= s_\rho d\rho + s_\varphi d\varphi = \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\rho \\ \Leftrightarrow s_\rho d\rho + s_\varphi d\varphi &= \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\rho + 0 d\varphi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s_\rho &= \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \\ s_\varphi &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, ao comparar as igualdades (3.5) e (3.8),

$$\begin{aligned} dt &= t_\rho d\rho + t_\varphi d\varphi = d\varphi + \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho \\ \Leftrightarrow t_\rho d\rho + t_\varphi d\varphi &= \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} d\rho + d\varphi \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t_\rho &= \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2}; \\ t_\varphi &= 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana que descreve a mudança de parâmetros é expressa por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} s_\rho & s_\varphi \\ t_\rho & t_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} & 1 \end{bmatrix},$$

assim, seu determinante é

$$\det(J_1) = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} & 1 \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Por essa razão, podemos realizar a mudança de parâmetros $\rho = \rho(s, t)$ e $\varphi = \varphi(s, t)$ cujas as derivadas são:

$$d\rho = \rho_s ds + \rho_t dt; \quad (3.9)$$

$$d\varphi = \varphi_s ds + \varphi_t dt. \quad (3.10)$$

Após algumas manipulações matemáticas algébricas em (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} d\rho &= \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} ds + 0 dt \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_s &= \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \\ \rho_t &= 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} ds + dt \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_s &= \frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \varphi_t &= 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Consequentemente, a Jacobiana $J_2 = \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(s, t)}$ é

$$J_2 = \begin{bmatrix} \rho_s & \rho_t \\ \varphi_s & \varphi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -\frac{\lambda'h}{\rho^2 + h^2} \left(1 + \frac{\rho^2(\lambda')^2}{\rho^2 + h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Como $\rho_t = 0$ e $\rho_s \neq 0$, então ρ depende apenas de s , logo

- $\rho(s, t) = \rho(s)$;
- $\lambda(\rho) = \lambda(\rho(s)) = \lambda(s)$.

Visto que o $\det(J_2) \neq 0$, podemos realizar a mudança de parâmetros (s, t) , que constitui uma parametrização natural cujos parâmetros pertencem ao domínio $U \subset \mathbb{M}$, com $U^2(s) = \rho^2(s) + h^2$. Ao substituir em (3.6), obtemos:

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s)dt^2. \quad (3.14)$$

Ao suprimir o parâmetro s , denotamos $U(s)$ por U e $d\lambda$ por $\lambda' d\rho$. Desta forma, podemos reescrever as equações (3.7) e (3.8) como:

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{\rho^2 + h^2} d\lambda^2; \quad (3.15)$$

$$U dt = \pm(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \left(d\varphi + \frac{h}{\rho^2 + h^2} d\lambda \right). \quad (3.16)$$

Ao efetuar manipulações matemáticas na equação (3.16) e considerando o fato de que $U > 0$, temos

$$\begin{aligned} U dt &= \pm(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \left(d\varphi + \frac{h d\lambda}{\rho^2 + h^2} \right) \\ \Rightarrow \pm U dt &= (\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi + (\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \frac{h d\lambda}{\rho^2 + h^2} \\ \Rightarrow (\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi &= \pm U dt - (\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \frac{h d\lambda}{\rho^2 + h^2} \\ \Rightarrow d\varphi &= \pm \frac{U}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} dt - \frac{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{h d\lambda}{\rho^2 + h^2} \end{aligned}$$

Como $\lambda(\rho(s)) = \lambda(s)$, segue $d\lambda = \lambda_s ds$, donde

$$d\varphi = \pm \frac{U}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} dt - \frac{h \lambda_s}{(\rho^2 + h^2)} ds \quad (3.17)$$

e

$$\begin{cases} \varphi_t = \pm \frac{U}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}; \\ \varphi_s = -\frac{h \lambda_s}{(\rho^2 + h^2)}. \end{cases} \quad (3.18)$$

A derivada segunda parcial φ_s em relação a t é igual a zero, logo,

$$\begin{aligned} \varphi_{ts} & \stackrel{\varphi \text{ é de Classe } C^2}{=} \varphi_{st} = 0 \\ & \Rightarrow \varphi_{ts} = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, φ_t não depende de s , assim podemos reescrever φ_t como:

$$\pm \frac{U}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{m} \neq 0 \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow \varphi_t = \frac{1}{m}, \quad (3.20)$$

em que m é uma constante diferente de zero. Além disso, podemos reescrever a equação (3.17) como segue

$$d\varphi = \frac{1}{m} dt - \frac{h}{(\rho^2 + h^2)} \lambda_s. \quad (3.21)$$

Por (3.19),

$$\begin{aligned} mU & = (\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m^2 U^2 = \rho^2 + h^2 \\ & \Rightarrow \rho^2 = m^2 U^2 - h^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A derivada em relação a s é dada por

$$\begin{aligned} 2\rho\rho_s & = 2m^2 U U_s \\ \Rightarrow \rho\rho_s & = m^2 U U_s \\ \Rightarrow \rho_s & = \frac{2m^2 U U_s}{\rho} \\ \Rightarrow (\rho_s)^2 & = \left(\frac{m^2 U U_s}{\rho} \right)^2 \\ \Rightarrow (\rho_s)^2 & = \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{\rho^2} \\ \Rightarrow (\rho_s)^2 & = \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Como $d\rho = \rho_s ds$, então

$$(d\rho)^2 = \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2} ds^2. \quad (3.23)$$

(3.23) em (3.15), temos

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2} ds^2 + \frac{\rho^2}{\rho^2 + h^2} (\lambda_s)^2 \\
\frac{\rho^2}{\rho^2 + h^2} (\lambda_s)^2 &= ds^2 - \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2} ds^2 \\
\frac{m^2 U^2 - h^2}{m^2 U^2} (\lambda_s)^2 &= \left(1 - \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2}\right) ds^2 \\
(\lambda_s)^2 &= \frac{m^2 U^2}{m^2 U^2 - h^2} \left(1 - \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2}\right) ds^2 \\
(\lambda_s)^2 &= \frac{m^2 U^2}{m^2 U^2 - h^2} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 (U_s)^2}{m^2 U^2 - h^2}\right) ds^2 \\
(\lambda_s)^2 &= \frac{m^2 U^2}{(m^2 U^2 - h^2)^2} (m^2 U^2 - h^2 - m^4 U^2 (U_s)^2) ds^2 \\
(\lambda_s)^2 &= \frac{m^2 U^2}{(m^2 U^2 - h^2)^2} (m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2) ds^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_s = \frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} (m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}} ds. \quad (3.24)$$

Daí, substituindo (3.24) em (3.21), segue

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{(\rho^2 + h^2)} d\lambda \\
&= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{(\rho^2 + h^2)} \left(\frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} (m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}} ds\right) \\
&= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{m^2 U^2} \left(\frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} (m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}} ds\right) \\
&= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{m} \left(\frac{(m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}}}{U(m^2 U^2 - h^2)}\right) ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$d\varphi = \frac{1}{m} dt - \frac{h}{m} \left(\frac{(m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}}}{U(m^2 U^2 - h^2)}\right) ds. \quad (3.25)$$

Portanto, ao utilizar a equação (3.22) e integrar as expressões (3.25) e (3.24), resulta em:

$$\begin{cases} \rho = (m^2 U^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}; \\ \lambda = \int \frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} (m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}} ds; \\ \varphi = \frac{t}{m} - \frac{h}{m} \int \frac{(m^2 U^2 (1 - m^2 (U_s)^2) - h^2)^{\frac{1}{2}}}{U(m^2 U^2 - h^2)} ds. \end{cases}$$

Os parâmetros ρ e φ são isométricos à primeira forma fundamental $d\sigma^2 = ds^2 + U^2 dt^2$. Isso prova o Lema de Bour.

□

Observação 3.1.1. A família de Bour (3.2) possui superfícies nas quais as constantes m e h são, respectivamente, 1 e uma constante qualquer. Em particular, o Lema de Bour afirma a existência de uma família de dois parâmetros de superfícies helicoidais isométricas a uma superfície de revolução ($m = 1, h = 0$).

Exemplo 3.1.1. Sejam $m = 1, h = 0$ e $U = s^2$, tem-se que a parametrização utilizando (3.1) e (3.2) é :

$$X(s, t) = (s^2 \cos(t), s^2 \sin(t), s),$$

a geratriz é $\alpha(s) = (s^2, 0, s)$.

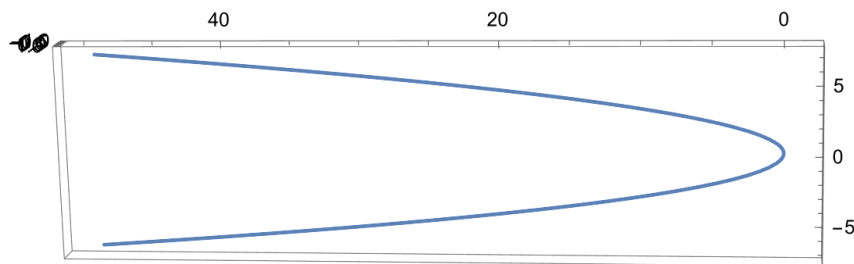


Figura 11 – Geratriz da superfície de revolução.

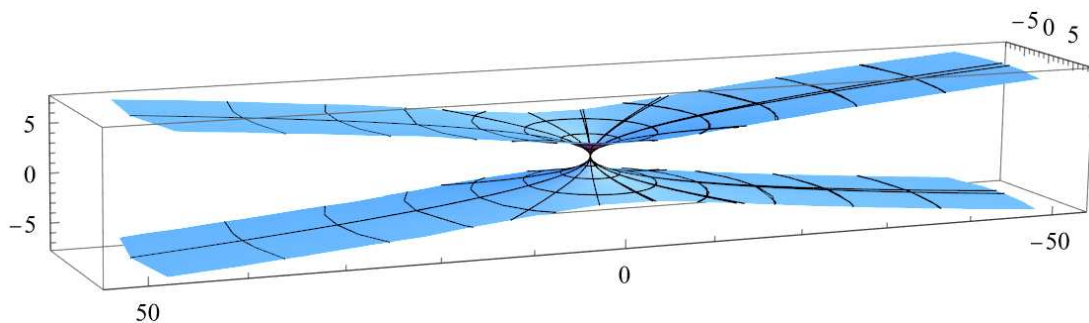


Figura 12 – Superfície de revolução.

Observação 3.1.2. No Lema de Bour trabalhamos sob a restrição de uma superfícies helicoidais $X : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{M}$ é na forma (3.1). Nos parâmetros naturais (s, t) , possui a parametrização X dada por (3.2) bem definida como uma imersão para todo (s, t) , tal que $\rho(s) \neq 0$. Observe que, $0z$ é uma trajetória de um movimento helicoidal, se $X(\mathbb{M})$ encontra $0z$ em um ponto, todo o eixo $0z$ está contido em $X(\mathbb{M})$. Assim, a menos que $X(\mathbb{M})$ seja um cilindro, a parametrização natural inclui pelo menos a parte de $X(\mathbb{M})$ varrida pelos "raios" das trajetórias ortogonais às hélices que passam por uma hélice fixa e começam em $0z$. Veremos na próxima seção que para superfícies com curvatura média constante, $\rho(s)$ só pode ser zero em um caso muito especial. Além disso, assumiremos até a Observação 3.1.4 que $X(\mathbb{M})$ não é um cilindro.

No próximo Lema, apresentamos a fórmula para a equação da curvatura média de um membro da família dada pelo Lema de Bour. Note que um elemento da família

de Bour é determinado quando se fornece uma função U pelas constantes h e m . Aqui, denotaremos um membro da família por $[U, m, h]$.

Lema 3.1.2. $[U, m, h]$ é uma superfície com curvatura média constante H se, e somente se, $U(s)$ satisfaz a equação

$$2H[m^2U^2 - m^4U^2(U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}} = -m^2UU_{ss} - m^2(U_s)^2 + 1$$

Demonstração 3.1.2. Pelo Lema (3.1.1) tem-se que $X(s, t) = X(\rho(s), \varphi(s, t))$, que possui as derivadas parciais:

$$\begin{cases} X_s = X_\rho \rho_s + X_\varphi \varphi_s \\ X_t = X_\varphi \varphi_t. \end{cases} \quad (3.26)$$

Ao substituir as derivadas parciais X_ρ e X_φ em (3.26):

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X_s = \rho_s(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \lambda'(\rho)) + \varphi_s(-\rho \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi), h); \\ X_t = \varphi_t(-\rho \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi), h). \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} X_s = (\rho_s \cos(\varphi) - \varphi_s \rho \sin(\varphi), \rho_s \sin(\varphi) + \varphi_s \rho \cos(\varphi), \rho_s \lambda'(\rho) + \varphi_s h); \\ X_t = (-\varphi_t \rho \sin(\varphi), \varphi_t \rho \cos(\varphi), \varphi_t h). \end{cases} \end{aligned}$$

Com a relação $\lambda_s = \lambda'(\rho)\rho_s$, podemos expressar X_s da seguinte maneira:

$$\begin{cases} X_s = (\rho_s \cos(\varphi) - \varphi_s \rho \sin(\varphi), \rho_s \sin(\varphi) + \varphi_s \rho \cos(\varphi), \lambda_s + \varphi_s h); \\ X_t = (-\varphi_t \rho \sin(\varphi), \varphi_t \rho \cos(\varphi), \varphi_t h). \end{cases} \quad (3.27)$$

As derivadas parciais em relação a t do sistema (3.26) podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X_{st} = \frac{\partial}{\partial t} (X_\rho \rho_s + X_\varphi \varphi_s) \\ X_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} (X_\varphi \varphi_t). \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} X_{st} = \rho_s \varphi_t X_{\rho\varphi} + \varphi_t \varphi_s X_{\varphi\varphi}; \\ X_{tt} = X_{\varphi\varphi} \varphi_t^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ao substituir as derivadas parciais $X_{\rho\varphi}$ e $X_{\varphi\varphi}$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X_{st} = \rho_s \varphi_t (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) + \varphi_t \varphi_s (-\rho \cos(\varphi), -\rho \sin(\varphi), 0); \\ X_{tt} = \varphi_t^2 (-\rho \cos(\varphi), -\rho \sin(\varphi), 0). \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} X_{st} = (-\rho_s \varphi_t \sin(\varphi) - \varphi_t \varphi_s \rho \cos(\varphi), \rho_s \varphi_t \cos(\varphi) - \varphi_t \varphi_s \rho \sin(\varphi), 0); \\ X_{tt} = (-\rho \varphi_t^2 \cos(\varphi), -\rho \varphi_t^2 \sin(\varphi), 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Munido de $[U, m, h]$ nos parâmetros (s, t) e as derivadas de X_s , X_t , X_{st} e X_{tt} , podemos obter f e g que são coeficientes da segunda forma fundamental de (3.1) na parametrização

(s, t) .

$$\begin{aligned}
 f &= \left\langle \frac{X_s \times X_t}{\|X_s \times X_t\|}, X_{st} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\|X_s \times X_t\|} \langle X_s \times X_t, X_{st} \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \rho_s \cos(\varphi) - \varphi_s \rho \operatorname{sen}(\varphi) & \rho_s \operatorname{sen}(\varphi) + \varphi_s \rho \cos(\varphi) & \lambda_s + \varphi_s h \\ -\varphi_t \rho \operatorname{sen}(\varphi) & \varphi_t \rho \cos(\varphi) & \varphi_t h \\ -\rho_s \varphi_t \operatorname{sen}(\varphi) - \varphi_t \varphi_s \rho \cos(\varphi) & \rho_s \varphi_t \cos(\varphi) - \varphi_t \varphi_s \rho \operatorname{sen}(\varphi) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{U^2}} \left[\frac{h(\rho_s)^2 - \rho^2 \varphi_s \lambda_s}{m^2} \right] \\
 &= - \left[\frac{h(\rho_s)^2 - \rho^2 \varphi_s \lambda_s}{m^2 U} \right] \\
 &\Rightarrow f = - \left[\frac{h(\rho_s)^2 - \rho^2 \varphi_s \lambda_s}{m^2 U} \right] \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 g &= \left\langle \frac{X_s \times X_t}{\|X_s \times X_t\|}, X_{tt} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\|X_s \times X_t\|} \langle X_s \times X_t, X_{tt} \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \rho_s \cos(\varphi) - \varphi_s \rho \operatorname{sen}(\varphi) & \rho_s \operatorname{sen}(\varphi) + \varphi_s \rho \cos(\varphi) & \lambda_s + \varphi_s h \\ -\varphi_t \rho \operatorname{sen}(\varphi) & \varphi_t \rho \cos(\varphi) & \varphi_t h \\ -\rho \varphi_t^2 \cos(\varphi) & -\rho \varphi_t^2 \operatorname{sen}(\varphi) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{U^2}} \left(\frac{\rho^2 \lambda_s}{m^3} \right) \\
 &= \frac{\rho^2 \lambda_s}{m^3 U} \\
 &\Rightarrow g = \frac{\rho^2 \lambda_s}{m^3 U} \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Através das equações (3.28) e (3.29), obtemos que f e g são:

$$f = - \left[\frac{h(\rho_s)^2 - \rho^2 \varphi_s \lambda_s}{m^2 U} \right] = \frac{-h}{m^2 U}; \tag{3.30}$$

$$g = \frac{\rho^2 \lambda_s}{m^3 U} = \frac{[m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2}. \tag{3.31}$$

Para determinar o terceiro coeficiente da segunda forma fundamental, utilizaremos a curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Como $E = 1$, $F = 0$, $G = U^2$, $f = \frac{-h}{m^2 U}$ e $g = \frac{[m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2}$, tem-se que:

$$K = \frac{\left[\frac{e[m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2} \right] - \frac{h^2}{m^4 U^2}}{U^2} \tag{3.32}$$

Por outro lado, como a parametrização da superfície Helicoidal X é ortogonal, isto é, $F = 0$, então

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_t}{\sqrt{EG}} \right)_t + \left(\frac{G_s}{\sqrt{EG}} \right)_s \right\} \quad (3.33)$$

Se $E = 1$, $G = U^2$, $E_t = 0$ e $G_s = 2UU_s$ então a equação (3.33) é:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{U^2}} \left\{ \left(\frac{0}{\sqrt{U^2}} \right)_t + \left(\frac{2UU_s}{\sqrt{U^2}} \right)_s \right\} \\ &= -\frac{1}{2U} \left(\frac{2UU_s}{U} \right)_s \\ &= -\frac{1}{U} (U_s)_s \\ &= \frac{-U_{ss}}{U} \\ &\Rightarrow K = \frac{-U_{ss}}{U}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ao igualar as curvaturas presentes nas equações (3.32) e (3.34):

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left[\frac{e[m^2U^2 - m^4U^2(U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2} \right] - \frac{h^2}{m^4U^2}}{U^2} = \frac{-U_{ss}}{U} \\ &\Rightarrow \frac{e[m^2U^2 - m^4U^2(U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2} - \frac{h^2}{m^4U^2} = -UU_{ss} \\ &\Rightarrow \frac{e[m^2U^2 - m^4U^2(U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2} = -UU_{ss} + \frac{h^2}{m^4U^2} \\ &\Rightarrow e[m^2U^2 - m^4U^2(U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{-m^4U^3U_{ss} + h^2}{m^2U^2} \\ &\Rightarrow e = \frac{h^2 - m^4U^3U_{ss}}{m^2U^2[m^2U^2 - m^4U^2(U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como os coeficientes da primeira e segunda forma, podemos determinar a curvatura média contante da superfície:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{eG + Eg}{EG} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e + \frac{g}{U^2} \right) \\ &\Rightarrow 2H = e + \frac{g}{U^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2H &= e + \frac{g}{U^2} \\
\Rightarrow 2H &= \frac{h^2 - m^4 U^3 U_{ss}}{m^2 U^2 [m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{[m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}}{m^2 U^2} \\
\Rightarrow 2H &= \frac{h^2 - m^4 U^3 U_{ss} + [m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]}{m^2 U^2 [m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}} \\
\Rightarrow 2H &= \frac{h^2 - m^4 U^3 U_{ss} + m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 + h^2}{m^2 U^2 [m^2 U^2 + m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&\Rightarrow 2H [m^2 U^2 - m^4 U^2 (U_s)^2 - h^2]^{\frac{1}{2}} = -m^2 U U_{ss} - m^2 (U_s)^2 + 1, \quad (3.37)
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Com o Lema de Bour (3.1.1) e o Lema 3.1.2 determinamos a seguir os coeficientes ρ , φ e λ , para a parametrização (3.1) de uma superfície helicoidal com curvatura média H constante não nula. Ao efetuar a substituição de variável $x = mU$ na equação (3.37):

$$2H(x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} = -xx_{ss} - (x_s)^2 + 1.$$

Se $y = (x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$ então,

$$2Hy = -xx_{ss} - (x_s)^2 + 1. \quad (3.38)$$

Ao derivar y em relação a s , obtemos:

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{2} (x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} (2xx_s - 2xx_s(x_s)^2 - 2x^2x_sx_{ss}) \\
&= \frac{1}{2} (x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} (2xx_s - 2x(x_s)^3 - 2x^2x_sx_{ss}) \\
&= y^{-1} (xx_s - x(x_s)^3 - x^2x_sx_{ss}) \\
&= xx_s y^{-1} (1 - (x_s)^2 - xx_{ss})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_s = xx_s y^{-1} (1 - (x_s)^2 - xx_{ss})$$

$$\Rightarrow y_s \underbrace{=}_{\text{por (3.38)}} xx_s y^{-1} (2Hy)$$

$$\Rightarrow y_s = 2Hxx_s. \quad (3.39)$$

Realizar a integração, tem-se que:

$$\Rightarrow y = Hx^2 + a, \quad a \text{ constante.} \quad (3.40)$$

Ao igualar a equação (3.40) e $y = (x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} y &= -Hx^2 + a = (x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow (Hx^2 + a)^2 &= x^2 - x^2(x_s)^2 - h^2 \\ \Rightarrow x^2(x_s)^2 &= x^2 - h^2 - (Hx^2 + a)^2 \\ \Rightarrow (x_s)^2 &= \frac{x^2 - h^2 - (Hx^2 + a)^2}{x^2} \end{aligned}$$

Seja $z = x^2$ e $x_s = \frac{z_s}{2z^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow (x_s)^2 = \frac{(z_s)^2}{4z}$,

$$\begin{aligned} \frac{(z_s)^2}{4z} &= \frac{z - h^2 - (Hz + a)^2}{z} \\ \Rightarrow \frac{(z_s)^2}{4} &= z - h^2 - (Hz + a)^2 \\ \Rightarrow \frac{(z_s)^2}{4} &= z - h^2 - H^2z^2 - 2Hza - a^2 \\ \Rightarrow (z_s)^2 &= 4(z - h^2 - H^2z^2 - 2Hza - a^2) \\ \Rightarrow z_s &= 2[-H^2z^2 + (1 - 2Ha)z - (a^2 + h^2)]^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{dz}{ds} &= 2[-H^2z^2 + (1 - 2Ha)z - (a^2 + h^2)]^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow dz &= 2[-H^2z^2 + (1 - 2Ha)z - (a^2 + h^2)]^{\frac{1}{2}} ds \\ \Rightarrow 2ds &= [-H^2z^2 + (1 - 2Ha)z - (a^2 + h^2)]^{-\frac{1}{2}} dz. \end{aligned}$$

Com o fato de que $H \neq 0$, podemos realizar a integração,

$$\begin{aligned} 2 \int ds &= \int [-H^2z^2 + (1 - 2Ha)z - (a^2 + h^2)]^{-\frac{1}{2}} dz \\ \Rightarrow 2s &= \int \left[H^2 \left(-z^2 + (1 - 2Ha)\frac{z}{H^2} - \frac{(a^2 + h^2)}{H^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left[- \left(z^2 - (1 - 2Ha)\frac{z}{H^2} + \frac{(a^2 + h^2)}{H^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left\{ - \left[z^2 - (1 - 2Ha)\frac{z}{H^2} + \left(\frac{1 - 2Ha}{2H^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - 2Ha}{2H^2} \right)^2 + \frac{(a^2 + h^2)}{H^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left\{ - \left[\left(z - \frac{1 - 2Ha}{2H^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - 2Ha}{2H^2} \right)^2 + \frac{(a^2 + h^2)}{H^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left\{ - \left[\left(z - \frac{1 - 2Ha}{2H^2} \right)^2 + \frac{(a^2 + h^2)4H^2 - (1 - 2Ha)^2}{4H^4} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left\{ \frac{(1 - 2Ha)^2 - (a^2 + h^2)4H^2}{4H^4} - \left(z - \frac{1 - 2Ha}{2H^2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} dz. \end{aligned}$$

Seja $A = \frac{(1-2Ha)^2 - (a^2+h^2)4H^2}{4H^4}$ e $B = \frac{1-2Ha}{2H^2}$ então:

$$\begin{aligned} 2s &= \frac{1}{H} \int [A - (z - B)^2]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left[A \left(1 - \frac{(z - B)^2}{A} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left[1 - \frac{(z - B)^2}{A} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{A}} dz \\ &= \frac{1}{H} \int \left[1 - \left(\frac{z - B}{\sqrt{A}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{A}} dz. \end{aligned}$$

Pela substituição simples $u = \frac{z-B}{\sqrt{A}}$ e $du = \frac{1}{\sqrt{A}} dz$, tem-se que:

$$\begin{aligned} 2s &= \frac{1}{H} \int [1 - u^2]^{-\frac{1}{2}} du \\ \Rightarrow 2s &= \frac{1}{H} (\arcsen u) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, seja $c_1 = 0$,

$$\begin{aligned} s &= \frac{\arcsen u}{2H} \\ \Rightarrow s &= \frac{\arcsen \left(\frac{z-B}{\sqrt{A}} \right)}{2H} \\ \Rightarrow s &= \frac{1}{2H} \arcsen \left(\frac{z - \frac{2Ha+1}{2H^2}}{\sqrt{\frac{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2}{4H^4}}} \right) \\ \Rightarrow s &= \frac{1}{2H} \arcsen \left(\frac{\frac{2zH^2 - 2Ha - 1}{2H^2}}{\sqrt{\frac{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2}{2H^2}}} \right) \\ \Rightarrow s &= \frac{1}{2H} \arcsen \left(\frac{2zH^2 - 2Ha - 1}{\sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2}} \right). \end{aligned}$$

Como $z = m^2U^2$,

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2H} \arcsen \left(\frac{2m^2U^2H^2 - 2Ha - 1}{\sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2}} \right) \\ \Rightarrow 2Hs &= \arcsen \left(\frac{2m^2U^2H^2 - 2Ha - 1}{\sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2}} \right) \\ \Rightarrow \sen(2Hs) &= \frac{2m^2U^2H^2 - 2Ha - 1}{\sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2}} \\ \Rightarrow 2m^2U^2H^2 - 2Ha - 1 &= \sen(2Hs) \sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2} \\ \Rightarrow 2m^2U^2H^2 &= \sen(2Hs) \sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2} + 2Ha + 1 \\ \Rightarrow U^2 &= \frac{\sen(2Hs) \sqrt{(2Ha+1)^2 - (a^2+h^2)4H^2} + 2Ha + 1}{2m^2H^2}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Se $D = \sqrt{(2Ha + 1)^2 - (a^2 + h^2)4H^2} \neq 0$ podemos reescrever a equação (3.41),

$$U^2 = \frac{D \operatorname{sen}(2Hs) + 2Ha + 1}{2m^2H^2}. \quad (3.42)$$

Derivando (3.42),

$$\begin{aligned} 2UU_s &= \frac{2DH \cos(2Hs)}{2m^2H^2} \\ \Rightarrow U_s &= \frac{D \cos(2Hs)}{2m^2UH}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para reescrever (3.2) temos que encontrar $m^2U^2 - h^2$ e $m^2U^2(1 - m^2(U_s)^2) - h^2$. Por (3.42)

$$m^2U^2 = \frac{D \operatorname{sen}(2Hs) + 2Ha + 1}{2H^2}, \quad (3.44)$$

como

$$D = \sqrt{(2Ha + 1)^2 - (a^2 + h^2)4H^2} \neq 0, \quad (3.45)$$

tem-se que $h^2 = \frac{4Ha+1-D^2}{4H^2}$, então

$$\begin{aligned} m^2U^2 - h^2 &= \frac{D \operatorname{sen}(2Hs) + 2Ha + 1}{2H^2} - \frac{(4Ha + 1 - D^2)}{4H^2} \\ &= \frac{2D \operatorname{sen}(2Hs) + 4Ha + 2 + D^2 - 4Ha - 1}{4H^2} \\ &= \frac{2D \operatorname{sen}(2Hs) + D^2 + 1}{4H^2} \\ \Rightarrow m^2U^2 - h^2 &= \frac{2D \operatorname{sen}(2Hs) + D^2 + 1}{4H^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Das equações (3.43), (3.44) e $h^2 = \frac{4Ha+1-D^2}{4H^2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} m^2U^2(1 - m^2(U_s)^2) - h^2 &= \frac{D \operatorname{sen}(2Hs) + 2Ha + 1}{2H^2} \left(1 - \frac{D \cos(2Hs)}{2UH}\right) - \frac{4Ha + 1 - D^2}{4H^2} \\ &= \frac{(1 + D \operatorname{sen}(2Hs))^2}{4H^2}. \end{aligned}$$

Substituindo

- $m^2U^2 - h^2 = \frac{2D \operatorname{sen}(2Hs) + D^2 + 1}{4H^2}$;
- $m^2U^2(1 - m^2(U_s)^2) - h^2 = \frac{(1 + D \operatorname{sen}(2Hs))^2}{4H^2}$,

em (3.2) obtemos:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(s) &= \left(\frac{2D \operatorname{sen}(2Hs) + D^2 + 1}{4H^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \lambda(s) &= \int \frac{(1 + 4H^2h^2 + D^2 + 2D \operatorname{sen}(2Hs))^{\frac{1}{2}} (1 + D \operatorname{sen}(2Hs))}{2D \operatorname{sen}(2Hs) + D^2 + 1} ds \\ \varphi(s, t) &= \frac{t}{m} - 4H^2h \int \frac{1 + D \operatorname{sen}(2Hs)}{(1 + 4H^2h^2 + D^2 + 2D \operatorname{sen}(2Hs))^{\frac{1}{2}} (1 + D^2 + 2D \operatorname{sen}(2Hs))} ds \end{aligned} \right. \quad (3.47)$$

em que D é dado por (3.45). Em particular, se começarmos com uma superfície helicoidal arbitrária (3.1) com $m = 1$, $h = h_0$, então ela possui curvatura média constante $H \neq 0$ se, somente se as funções $\rho = \rho(s)$, $\varphi = \varphi(s, t)$, $\lambda = \lambda(s)$ são dados por $m = 1, h = h_0$ em (3.47).

Observação 3.1.3. *O parâmetro m influencia apenas a velocidade de φ , portanto, não desempenha um papel crucial na parametrização da superfície. Para cada valor de m em (3.47), as imagens permanecem iguais, independentemente das parametrizações. Assim, podemos substituir $\frac{t}{m}$ por \bar{t} em (3.47). Isso justifica a dispensa de um parâmetro adicional na Proposição anterior, permitindo-nos definir $m = 1$. Esse aspecto é fundamental na prova do Teorema principal 3.2.1, em que a ampliação da família introduz novos parâmetros, explicitando a relação com a superfície associada.*

Proposição 3.1.1. *As superfícies helicoidais com parametrização natural (3.1) que possuem curvatura média constante $H \neq 0$, caracterizam uma família de dois parâmetros D e h , em que os valores ρ , φ , λ na parametrização (3.1) são obtidos ao definir $m = 1$ na equação (3.47).*

Observação 3.1.4. *Decorre de (3.47) que $\rho(s)$ é não nulo para todos os s , exceto quando $D = \sqrt{(2Ha + 1)^2 - (a^2 + h^2)4H^2} = 1$ em que a geratriz está esquematizada na Figura 13. Mesmo nesse caso singular, a parametrização natural (conforme Observação 3.1.2) só é possível para valores de s que satisfaçam $\sin(2Hs) = \pm 1$.*

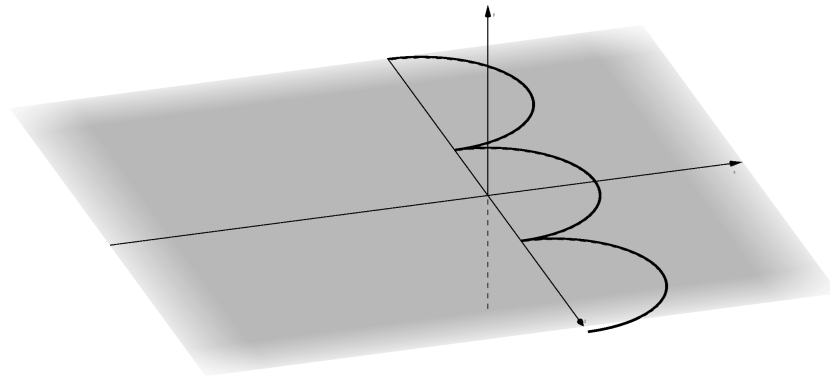


Figura 13 – Geratriz com $D=1$.

Observação 3.1.5. *Se $D = 0$ obtemos os cilindros retos de raio $\frac{1}{2H}$, em que os parâmetros da equação (3.1) são caracterizados por:*

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{2H}; \\ \lambda = s + c_1; \\ \varphi = \bar{t} + c_2. \end{cases} \quad (3.48)$$

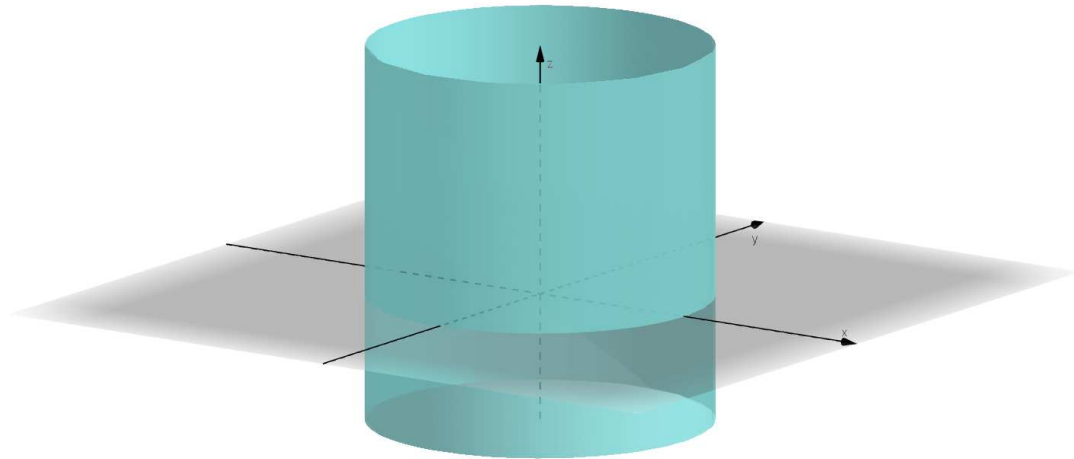


Figura 14 – Cilindro reto de raio $\frac{1}{2H}$ e $D = 0$.

Na próxima seção, determinaremos a família que engloba as superfícies helicoidais associadas as superfícies de revolução.

3.2 Família de superfícies helicoidais com CMC

Nesta seção, utilizaremos a correspondência de Lawson [12] que introduzimos nas preliminares deste trabalho, juntamente com os resultados obtidos da seção (3.1), para determinar a família associada a uma superfície helicoidal previamente dada.

Lema 3.2.1. *Fixando a_0 e θ , sejam*

$$\begin{cases} a &= \frac{a_0 \cos \theta}{1+2a_0H(1-\cos \theta)}, \\ h &= \frac{a_0 \sin \theta}{1+2a_0H(1-\cos \theta)}, \\ m &= \frac{1}{(1+2a_0H(1-\cos \theta))^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Então, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$U(a, h, m) = U(a, 0, 1) \tag{3.49}$$

Assim, para cada superfície de revolução $X(a_0)$ dada por (3.47), existe uma família a um parâmetro $X(a_0, \theta)$ que é isométrica às superfícies helicoidais com curvatura média constante $H \neq 0$. Além disso,

- (i) $X(a_0, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é a família associada a $X(a_0)$.
- (ii) Dada uma superfície arbitrária \bar{X} de (3.47), existe uma superfície de rotação $X(a_0)$ em (3.47) e um número $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que $\bar{X} = X(a_0, \theta)$.

Demostração 3.2.1.

Através de longos cálculos é trivial verificar a equação (3.49) e a unicidade do Teorema de Lawson 2.5.1 prova o item (i). A prova de (ii) segue abaixo.

Seja \bar{X} uma superfície com parâmetros \bar{a} , \bar{h} , \bar{m} , tal que a métrica possui $\bar{U} = U(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m})$. Para determinar os coeficientes da segunda forma fundamental de \bar{X} utilizaremos (3.37) e (3.40) em (3.30), (3.31) e (3.35).

$$\begin{aligned}
 \bar{e} = e(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}) &= \frac{\bar{h}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^3 \bar{U}_{ss}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2 [\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &\stackrel{\text{por (3.37)}}{=} \frac{\bar{h}^2 + 2\bar{H} [\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}} + \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{m}^2 \bar{U}^2}{\bar{m}^2 \bar{U}^2 [\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 2\bar{H} + \frac{\bar{h}^2 + \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{m}^2 \bar{U}^2}{\bar{m}^2 \bar{U}^2 [\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 2\bar{H} - \frac{[\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}} [\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2 [\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 2\bar{H} - \frac{[\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2} \\
 &\stackrel{\text{por (3.40)}}{=} 2\bar{H} - \frac{\bar{H} \bar{m}^2 \bar{U}^2 + \bar{a}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2} \\
 &= \bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2} \\
 &\Rightarrow \bar{e} = \bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2}. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Por (3.40) e o fato de $\bar{U} = U(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m})$, tem-se que:

$$\bar{f} = f(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}) = \frac{-\bar{h}}{\bar{m}^2 \bar{U}}.$$

O último coeficiente é dado por:

$$\begin{aligned}
 \bar{g} = g(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}) &= \frac{[\bar{m}^2 \bar{U}^2 - \bar{m}^4 \bar{U}^2 (\bar{U}_s)^2 - \bar{h}^2]^{\frac{1}{2}}}{\bar{m}^2} \\
 &\stackrel{\text{por (3.40)}}{=} \frac{\bar{H} \bar{m}^2 \bar{U}^2 + \bar{a}}{\bar{m}^2} \\
 &= \bar{H} \bar{U}^2 + \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2}.
 \end{aligned}$$

Com $\bar{U} = U(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m})$, os coeficientes são:

$$\begin{cases} \bar{e} = e(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}) = \bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 \bar{U}^2}; \\ \bar{f} = f(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}) = -\frac{\bar{h}}{\bar{m}^2 \bar{U}}; \\ \bar{g} = g(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}) = \bar{H} \bar{U}^2 + \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2}. \end{cases} \tag{3.51}$$

Queremos determinar uma superfície de revolução $X(a_0)$ com parâmetros $a = a_0$, $h = 0$, $m = 1$ e métrica dada por $U = \bar{U}$, tal que \bar{X} está associado a $X(a_0)$. Assuma que $X(a_0)$ existe, então $e_0 = \langle N, X_{ss} \rangle$, $f_0 = \langle N, X_{st} \rangle = 0$ e $g_0 = \langle N, X_{tt} \rangle$, que são os coeficientes da segunda forma fundamental, com a parametrização (s, t) e métrica $d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s)dt^2$. Realizaremos a mudança de variável para que a métrica da superfície encaixe nas hipóteses da correspondência de Lawson [12], seja

$$\omega = \int_0^s U^{-1} ds \Rightarrow d\omega = U^{-1} ds \Rightarrow ds^2 = U^2 d\omega^2.$$

Podemos reescrever a métrica como:

$$d\sigma^2 = U^2 (d\omega^2 + dt^2).$$

Para determinar os coeficientes referentes à parametrização (ω, t) , necessitamos das derivadas parciais e o vetor normal referentes à superfície X . Dai,

$$\begin{cases} X_s = X_\omega \omega_s; \\ X_{ss} = X_{\omega\omega} \omega_s^2 + X_\omega \omega_{ss}; \\ X_{st} = X_{\omega t} \omega_s = X_{ts}, \end{cases}$$

o vetor normal é dado por:

$$N(\omega, t) = \frac{X_\omega \times X_t}{\|X_\omega \times X_t\|} = \frac{\omega_s^2 X_s \times X_t}{\omega_s^2 \|X_s \times X_t\|} = \frac{X_s \times X_t}{\|X_s \times X_t\|} = N(s, t) = N,$$

consequentemente os vetores normais coincidem. Os coeficientes da segunda forma na métrica $d\sigma^2 = U^2 (d\omega^2 + dt^2)$, são:

$$\begin{aligned} e_0 &= \langle N, X_{ss} \rangle \\ &= \langle N, X_{\omega\omega} \omega_s^2 + X_\omega \omega_{ss} \rangle \\ &= \langle N, X_{\omega\omega} \omega_s^2 \rangle + \langle N, X_\omega \omega_{ss} \rangle \\ &= \langle N, X_{\omega\omega} \omega_s^2 \rangle \\ &= \omega_s^2 \langle N, X_{\omega\omega} \rangle \\ &= U^{-2} \langle N, X_{\omega\omega} \rangle \\ &= U^{-2} e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e = U^2 e_0.$$

$$\begin{aligned} f_0 &= \langle N, X_{st} \rangle \\ &= \langle N, X_{\omega t} \omega_s \rangle \\ &= \omega_s \langle N, X_{\omega t} \rangle \\ &= U f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_0 = Uf.$$

Por outro lado, $f_0 = 0$, conseqüentemente $f = 0$. O último coeficiente é dado por $g_0 = \langle N, X_{tt} \rangle = g$. Obtemos que a relação entre os coeficientes é dada por

$$\begin{cases} e = U^2 e_0; \\ f = 0; \\ g = g_0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Por (3.52), a curvatura média é dada por:

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{e}{U^2} + \frac{g}{U^2} \\ &= \frac{U^2 e_0}{U^2} + \frac{g_0}{U^2} \\ &= e_0 + \frac{g_0}{U^2} \\ \Rightarrow H &= \frac{e_0}{2} + \frac{g_0}{2U^2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sejam (ω, t) parâmetros isotérmicos. Por [15], tem-se que, uma superfície com curvatura média contante possui uma função holomorfa com $z \in \mathbb{C}$, caracterizada por:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{e - g}{2} - if \\ &\stackrel{\text{por (3.52)}}{=} \frac{U^2 e_0 - g_0}{2} \\ \Rightarrow \phi(z) &= \frac{U^2 e_0 - g_0}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Com a função holomorfa ϕ e a métrica $d\sigma^2 = U^2 (d\omega^2 + dt^2)$, podemos utilizar a correspondência de Lawson [12] para determinar os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície $X(\theta, a) \subset \mathbb{R}^3$, vale ressaltar que a curvatura de \mathbb{R}^3 é nula. Os coeficientes da segunda forma fundamental de $X(\theta, a)$ podem ser obtidos pelo sistema (3.52),

- O primeiro coeficiente da segunda forma fundamental é:

$$\begin{aligned}
 e(\theta, 0) &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \phi \right) + HU^2 \\
 &= \cos \theta \left(\frac{e - g}{2} \right) + HU^2 \\
 &\stackrel{\text{por (3.52)}}{=} \cos \theta \left(\frac{e_0 U^2 - g_0}{2} \right) + HU^2 \\
 &\stackrel{\text{por (3.53)}}{=} \cos \theta \cdot U^2 (e_0 - H) + HU^2 \\
 &= U^2 (\cos \theta \cdot (e_0 - H) + H) \\
 &= U^2 e(s, t) \\
 &\stackrel{\text{por (3.53)}}{=} U^2 e \\
 &\stackrel{\text{por (3.53)}}{=} e(s, t) = e \\
 &\Rightarrow e = \cos \theta \cdot (e_0 - H) + H. \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

- O segundo coeficiente da segunda forma fundamental é:

$$\begin{aligned}
 f(\theta, 0) &= \operatorname{Im} \left(e^{i\theta} \phi \right) \\
 &\stackrel{\text{por (3.53)}}{=} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{e - g}{2} \right) \\
 &= \operatorname{sen} \theta \left(\frac{e_0 U^2 - g_0}{2} \right) \\
 &= \frac{U^2}{2} \operatorname{sen} \theta \left(e_0 - \frac{g_0}{U^2} \right) \\
 &= -\frac{U^2}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0 \right) \\
 &\Rightarrow f(\theta, 0) = -\frac{U^2}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0 \right). \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 f(s, t) &= U^{-1} \langle N, X_{\omega t} \rangle \\
 &= U^{-1} f(\theta, 0) \\
 &= \frac{1}{U} \left[-\frac{U^2}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0 \right) \right] \\
 &= -\frac{U^2}{2U} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0 \right) \\
 &= -\frac{U}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0 \right).
 \end{aligned}$$

Seja $f(s, t) = f$, então

$$f = -\frac{U}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0 \right). \tag{3.57}$$

- O terceiro coeficiente da segunda forma fundamental é:

$$\begin{aligned}
 g(\theta, 0) &= -\operatorname{Re}(e^{i\theta}\phi) + HU^2 \\
 &\stackrel{\text{por (3.53)}}{=} -\cos\theta\left(\frac{e-g}{2}\right) + HU^2 \\
 &= -\cos\theta\left(\frac{e_0U^2 - g_0}{2}\right) + HU^2 \\
 &= \cos\theta\left(g_0 - \frac{e_0U^2}{2}\right) + HU^2 \\
 &\stackrel{\text{por (3.53)}}{=} \cos\theta(g_0 - HU^2) + HU^2 \\
 &= g(s, t) = g \\
 &\Rightarrow g = \cos\theta(e_0 - HU^2) + HU^2. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

Desta forma, os coeficientes da segunda forma fundamental com a métrica $d\sigma^2 = U^2(d\omega^2 + dt^2)$ são:

$$\begin{cases}
 e = \cos\theta \cdot (e_0 - H) + H; \\
 f = -\frac{U}{2} \operatorname{sen}\theta \left(\frac{g_0}{U^2} - e_0\right); \\
 g = \cos\theta(g_0 - HU^2) + HU^2.
 \end{cases} \tag{3.59}$$

Ao igualar (3.51) e (3.59), tem-se que e_0 , g_0 e h são:

- e_0 :

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= e \\
 \underbrace{\Rightarrow}_{\bar{e} = e(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m})} \bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}\bar{U}^2} &= \cos\theta \cdot (e_0 - \bar{H}) + \bar{H} \\
 \Rightarrow -\frac{\bar{a}}{\bar{m}\bar{U}^2} &= e_0 \cos\theta - \bar{H} \cos\theta \\
 \Rightarrow e_0 \cos\theta &= \bar{H} \cos\theta - \frac{\bar{a}}{\bar{m}\bar{U}^2} \\
 \Rightarrow e_0 &= \frac{\bar{H} \cos\theta}{\cos\theta} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}\bar{U}^2 \cos\theta} \\
 \Rightarrow e_0 &= \bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}\bar{U}^2 \cos\theta}. \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

- g_0 :

$$\begin{aligned}
\bar{g} &= g \\
\overbrace{\Rightarrow}^{\bar{g} = g(\bar{a}, \bar{h}, \bar{m})} \quad \bar{H}\bar{U}^2 + \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2} &= \cos \theta (g_0 - \bar{H}\bar{U}^2) + \bar{H}\bar{U}^2 \\
&\Rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2} = g_0 \cos \theta - \bar{H}\bar{U}^2 \cos \theta \\
&\Rightarrow g_0 \cos \theta = \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2} + \bar{H}\bar{U}^2 \cos \theta \\
&\Rightarrow g_0 = \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 \cos \theta} + \bar{H}\bar{U}^2. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

• h :

$$\begin{aligned}
-\bar{h} (\bar{m}^2 \bar{U})^{-1} &= -\frac{\bar{U}}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{\bar{U}^2} - e_0 \right) \\
\Rightarrow \bar{h} (\bar{m}^2 \bar{U})^{-1} &= \frac{\bar{U}}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{g_0}{\bar{U}^2} - e_0 \right) \\
\Rightarrow \bar{h} (\bar{m}^2 \bar{U})^{-1} &= \frac{\bar{U}}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\bar{H}\bar{U}^2 + (\bar{a}/\bar{m}^2 \cos \theta)}{\bar{U}^2} - \left(\bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{U}^2 \bar{m} \cos \theta} \right) \right) \\
\Rightarrow \bar{h} (\bar{m}^2 \bar{U})^{-1} &= \frac{\bar{U}}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\bar{H} + \frac{\bar{a}}{\bar{U}^2 \bar{m}^2 \cos \theta} - \bar{H} + \frac{\bar{a}}{\bar{U}^2 \bar{m}^2 \cos \theta} \right) \\
\Rightarrow \bar{h} (\bar{m}^2 \bar{U})^{-1} &= \frac{\bar{U}}{2} \operatorname{sen} \theta \left(\frac{2\bar{a}}{\bar{U}^2 \bar{m}^2 \cos \theta} \right) \\
&\Rightarrow \bar{h} = \bar{m}^2 \bar{U}^2 \left(\frac{\bar{a} \operatorname{sen} \theta}{\bar{U}^2 \bar{m}^2 \cos \theta} \right) \\
&\Rightarrow \bar{h} = \frac{\bar{a} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} e_0 = \bar{H} - \frac{\bar{a}}{\bar{m}\bar{U}^2 \cos \theta}; \\ g_0 = \bar{H}\bar{U}^2 + \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 \cos \theta}; \\ \bar{h} = \frac{\bar{a} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}. \end{cases} \tag{3.63}$$

Considerando uma superfície de revolução com curvatura média constante e $U = \bar{U}$, obtemos, pelas igualdades presentes em (3.63):

$$\begin{cases} e_0 = H - \frac{a_0}{U^2}; \\ f_0 = 0; \\ g_0 = H\bar{U}^2 + a_0. \end{cases} \tag{3.64}$$

Em que,

$$a_0 = \frac{\bar{a}}{\bar{m} \cos \theta}. \tag{3.65}$$

Com θ e a_0 dados por (3.62) e (3.65), obtemos as propriedades de $X(a_0, \theta) = \bar{X}$ de uma Superfície de Revolução. Para provar a afirmação, utilizaremos a (3.41),

$$U = \bar{U} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+2\bar{a}H}{\bar{m}^2} \underbrace{=}_{\bar{a} = a_0, \bar{h} = 0 \text{ e } \bar{m} = 1} 1 + 2a_0H, \\ \frac{(1-4H^2\bar{h}^2+4H\bar{a})^{\frac{1}{2}}}{\bar{m}^2} \underbrace{=}_{\bar{a} = a_0, \bar{h} = 0 \text{ e } \bar{m} = 1} (1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.66)$$

Por outro lado, pela equação (3.65) obtemos que

$$\bar{a} = a_0 m^2 \cos \theta, \quad (3.67)$$

consequentemente ambas as equações de (3.66) satisfazem a:

$$\begin{aligned} \frac{1+2\bar{a}H}{m^2} &= 1 + 2a_0H \\ \Rightarrow \frac{1}{m^2} &= 1 + 2a_0H - \frac{2\bar{a}H}{m^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{m^2} &= 1 + 2a_0H - 2a_0H \cos \theta \\ \Rightarrow \frac{1}{m^2} &= 1 + 2a_0H(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ao substituir (3.67) e (3.68) em (3.62), tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{\bar{a} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \\ &\stackrel{(3.67)}{=} \frac{a_0 m^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \\ &= a_0 m^2 \operatorname{sen} \theta \\ &\stackrel{(3.68)}{=} \frac{a_0 \operatorname{sen} \theta}{1 + 2a_0H - 2a_0H \cos \theta} \\ \Rightarrow \bar{h} &= \frac{a_0 \operatorname{sen} \theta}{1 + 2a_0H(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Substituindo (3.68) em (3.67):

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_0 m^2 \cos \theta \\ &\stackrel{(3.68)}{=} \frac{a_0 \cos \theta}{1 + 2a_0H - 2a_0H \cos \theta} \\ \Rightarrow \bar{a} &= \frac{a_0 \cos \theta}{1 + 2a_0H(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Concluimos que $X(a_0, \theta)$ é dada pelos parâmetros

$$a = \bar{a} = \frac{a_0 \cos \theta}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)}, \quad (3.71)$$

$$h = \bar{h} = \frac{a_0 \sin \theta}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)}, \quad (3.72)$$

$$m = \bar{m} = \frac{1}{(1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta))^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.73)$$

provando, assim, a afirmação (ii). □

O Lema anterior (3.2.1) é base para determinarmos explicitamente a parametrização da família de uma superfície helicoidal com CMC associada à uma superfície de revolução com CMC.

Teorema 3.2.1. *Existe uma aplicação sobrejetiva $\phi : S^1 \times [0, +\infty) \rightarrow \Sigma_H$, em que são as superfícies com curvatura média constante, $\phi(\theta, D_0)$ com $D_0 \in [0, +\infty)$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma família associada à superfície de rotação $\phi(0, D_0)$. Além disso, exceto para $(\theta, 1)$, a imersão*

$$\phi(\theta, D_0) = X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é dada explicitamente em uma parametrização global da imersão reunindo (3.1), (3.2) e (3.80).

Demonstração 3.2.2. *Seja a família dada por (3.47) e os parâmetros obtidos na demonstração do Lema 3.2.1*

$$\begin{cases} a &= \frac{a_0 \cos \theta}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)}, \\ h &= \frac{a_0 \sin \theta}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)}, \\ m &= \frac{1}{(1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta))^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Determinaremos explicitamente os parâmetros de uma superfície Helicoidal caracterizada por (3.1), na equação (3.2), em termos dos parâmetros θ e a_0 . Ao analisar (3.66),

$$\begin{aligned} \frac{(1 - 4H^2 h^2 + 4Ha)^{\frac{1}{2}}}{m^2} &= (1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow (1 - 4H^2 h^2 + 4Ha)^{\frac{1}{2}} &= m^2 (1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}} \\ \underbrace{\Rightarrow}_{(3.73)} (1 - 4H^2 h^2 + 4Ha)^{\frac{1}{2}} &= \frac{(1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)} \\ \underbrace{\Rightarrow}_{(3.45)} D(a_0, \theta) &= \frac{(1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D(a_0, \theta) = (1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}} [1 + 2a_0H(1 - \cos \theta)]^{-1}. \quad (3.74)$$

Seja $D_0 = D(a_0, 0)$, então

$$D_0 = D(a_0, 0) = (1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}} \quad (3.75)$$

$$\Rightarrow D_0 = (1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow D_0^2 = 1 + 4Ha_0$$

$$\Rightarrow D_0^2 - 1 = 4Ha_0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{D_0^2 - 1}{4H}. \quad (3.76)$$

Ao substituir (3.76) em (3.74),

$$\begin{aligned} D(a_0, \theta) &= \frac{(1 + 4Ha_0)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2a_0H(1 - \cos \theta)} \\ &\stackrel{(3.76)}{=} \frac{\left(1 + 4H \left(\frac{D_0^2 - 1}{4H}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2\left(\frac{D_0^2 - 1}{4H}\right)H(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{(1 + D_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{D_0^2 - 1}{2}\right)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2(D_0^2)^{\frac{1}{2}}}{2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \\ \Rightarrow D(D_0, \theta) &= \frac{2D_0}{2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)}. \quad (3.77) \end{aligned}$$

Substituindo (3.76) em (3.73),

$$\begin{aligned} m^2(a_0, \theta) &= \frac{1}{1 + 2a_0H(1 - \cos \theta)} \\ &\stackrel{(3.76)}{=} \left(1 + 2\left(\frac{D_0^2 - 1}{4H}\right)H(1 - \cos \theta)\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{(D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)}{2}\right)^{-1} \\ \Rightarrow m^2(D_0, \theta) &= \frac{2}{2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)}. \quad (3.78) \end{aligned}$$

Ao substituir (3.76) em (3.72),

$$\begin{aligned}
 h(a_0, \theta) &= \frac{a_0 \operatorname{sen} \theta}{1 + 2a_0 H(1 - \cos \theta)} \\
 &\stackrel{(3.76)}{=} \left(\frac{D_0^2 - 1}{4H} \right) \left[\frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + 2 \left(\frac{D_0^2 - 1}{4H} \right) H(1 - \cos \theta)} \right] \\
 &= \left(\frac{D_0^2 - 1}{4H} \right) \left[\frac{2 \operatorname{sen} \theta}{2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \right] \\
 &= \frac{2(D_0^2 - 1) \operatorname{sen} \theta}{4H [2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)]} \\
 \Rightarrow h(D_0, \theta) &= \frac{(D_0^2 - 1) \operatorname{sen} \theta}{2H [2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)]}. \tag{3.79}
 \end{aligned}$$

Por (3.45), (3.78) e (3.79):

$$\begin{cases}
 D(D_0, \theta) &= \frac{2D_0}{2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)}; \\
 m^2(D_0, \theta) &= \frac{2}{2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)}; \\
 h(D_0, \theta) &= \frac{(D_0^2 - 1) \operatorname{sen} \theta}{2H [2 + (D_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)]}.
 \end{cases} \tag{3.80}$$

O único problema que resta é considerar o caso em que a parametrização natural pode ter uma singularidade, ou seja, o caso $D = 1$ (Observação 3.1.4). A superfície de rotação da família associada, ou seja, $\theta = 0$, é dada, neste caso, por $D_0 = 1$. Então

$$h(1, \theta) = 0, \quad D(1, \theta) = m^2(1, \theta) = 1; \quad \forall \theta.$$

Assim, $D_0 = 1$ corresponde à esfera, cuja família associada é a própria esfera. Neste caso a parametrização natural tem na verdade uma singularidade em dois pontos. Isso justifica a exceção no enunciado do Teorema 3.2.1 e completa a prova.

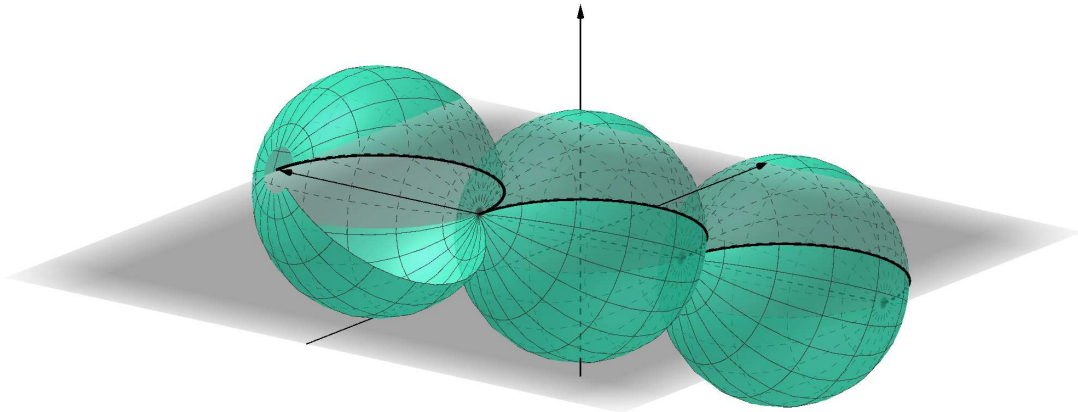


Figura 15 – $D_0 = 1$

Observação 3.2.1. *As expressões dadas no Teorema 3.2.1 generalizam aquelas obtidas em [14] para $h = 0$. É facilmente verificado que $D_0 = 0$ dá $D(0, \theta) = 0$ para todo θ , e $\rho = 1/2H$. Isso mostra que a família associada ao cilindro é o próprio cilindro. O cilindro e a esfera são as únicas superfícies de rotação de curvatura média constante com a propriedade de que a família associada é a própria superfície.*

Observação 3.2.2. *Segue de (3.47) que*

$$\frac{1-D}{2H} \leq \rho(s) \leq \frac{1-D}{2H}.$$

Assim, com exceção da esfera ($D = 1$), as superfícies helicoidais estão contidas entre dois cilindros que dependem de D_0 e θ .

4 Superfícies helicoidais em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo, conduzimos o estudo de superfícies helicoidais com curvatura média constante imersas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, em que \mathbb{M}^2 é uma forma espacial bidimensional de curvatura não nula, ou seja, $\mathbb{M}^2 = \mathbb{H}^2$ e $\mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2$, em que \mathbb{H}^2 é o plano hiperbólico e \mathbb{S}^2 é a esfera unitária.

As principais referências: [5], [7], [10] e [11].

4.1 Superfícies helicoidais em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Nesta seção, realizamos uma investigação aprofundada sobre as superfícies helicoidais em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. A princípio, utilizamos o Lema de Bour 4.1.1 em conjunto com o Lema 4.1.2, para explicitar de forma nítida e evidente os parâmetros de uma superfície helicoidal com curvatura média constante (CMC).

Finalizamos a seção, resolvendo a EDO presente no Lema 4.1.2 para construir exemplos superfícies helicoidais com CMC.

As principais referências utilizadas neste capítulo são: [4], [6] e [14].

4.1.1 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção, vamos estudar superfícies invariantes por movimentos helicoidais imersas em

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, t); x^2 + y^2 < 1 \text{ e } t \in \mathbb{R}\},$$

que é um espaço homogêneo, ou seja, qualquer par de pontos está conectado por isometria. Consideraremos \mathbb{H}^2 como o modelo do disco de Poincaré. Com base no que foi introduzido na Seção 2.4, tem-se que a métrica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é dada por:

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1 - x^2 - y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2) + dt^2.$$

Considere a curva $\alpha(\rho)$, que está no plano vertical $\pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \mid y = 0\}$. Neste contexto, ρ denota a distância hiperbólica da projeção de um ponto $\alpha(\rho)$ no eixo x até a origem. Agora estamos aptos a realizar uma parametrização,

$$\begin{aligned} \alpha : U &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \alpha(\rho) = \left(\operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right), 0, \lambda(\rho) \right). \end{aligned}$$

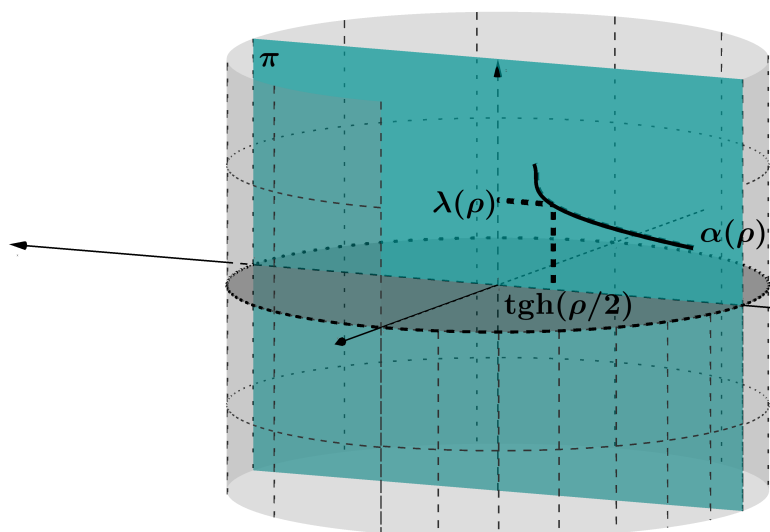


Figura 16 – $\alpha(\rho) = \left(\operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right), 0, \lambda(\rho) \right)$

Realizando uma rotação e uma translação (que são isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) na curva α ao longo do eixo t , obtém-se imersões que possui a seguinte configuração:

$$X(\rho, \varphi) = \left(\operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, \operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \operatorname{sen} \varphi, \lambda(\rho) + h\varphi \right) \quad (4.1)$$

em que $h \geq 0$ é o passo. Note que, se $h = 0$ então temos uma superfície invariante por rotações em torno do eixo t , ou seja, uma superfície de revolução.

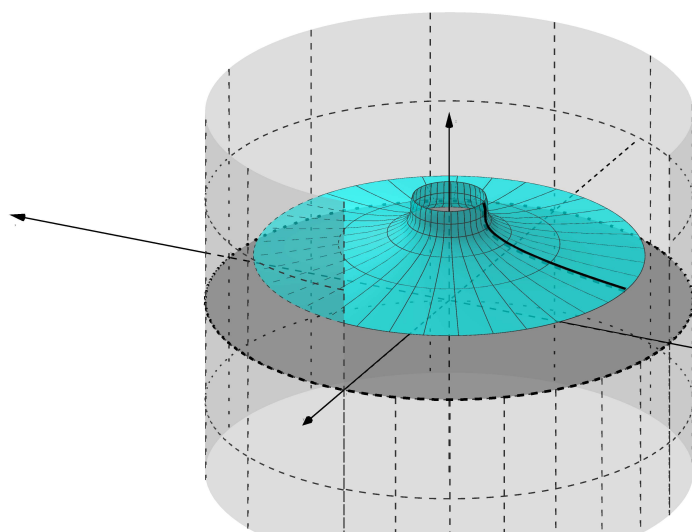


Figura 17 – Superfície de revolução ($h = 0$).

4.1.2 Lema de Bour em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

O Lema a seguir, fornece de forma explícita os parâmetros ρ , φ e λ de uma superfície helicoidal com curvatura média qualquer, que possui parametrização dada por

(4.1).

Lema 4.1.1 (Lema de Bour em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$). *Seja X uma superfície helicoidal com passo $h \neq 0$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então existe uma família de dois parâmetros $\mathcal{F}(m, h)$, $m \neq 0$ de superfícies helicoidais isométricas a X , que contém uma superfície de revolução, dada por*

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 U^2(s) = h^2 + \sinh^2 \rho(s); \\ 1 - \rho'^2(s) = \frac{\lambda_s^2 \sinh^2 \rho}{h^2 + \sinh^2 \rho + \lambda_s^2 \sinh^2 \rho}; \\ \rho(s) = \int \left(\frac{m^4 U^2(U_s)^2}{(m^2 U^2 - h^2)(m^2 U^2 - h^2 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} ds; \\ \lambda(s) = \int \frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds; \\ \varphi(s, t) = \frac{t}{m} - h \int \frac{1}{mU(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Demonstração 4.1.1. *Os coeficientes E, F e G da primeira forma fundamental de (4.1) são dados por:*

$$\begin{aligned} E &= \langle X_\rho, X_\rho \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \sin \varphi, \lambda' \right), \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \sin \varphi, \lambda' \right) \right\rangle \\ &= \frac{4}{\left(1 - \operatorname{tanh}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \right)^2} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \right)^2 + (\lambda'(\rho))^2 \\ &= 1 + (\lambda'(\rho))^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_\rho, X_\varphi \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \sin \varphi, \lambda' \right), \left(-\operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \sin \varphi, \operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, h \right) \right\rangle \\ &= \lambda'(\rho)h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle \\ &= \left\langle \left(-\operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \sin \varphi, \operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, h \right), \left(-\operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \sin \varphi, \operatorname{tgh} \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, h \right) \right\rangle \\ &= \frac{4}{\left(1 - \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \right)^2} \left(\operatorname{tgh}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \right) + h^2 \\ &= \sinh^2(\rho) + h^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= Ed\rho^2 + 2Fd\rho d\varphi + Gd\varphi^2 \\ &= [1 + (\lambda')^2] d\rho^2 + 2(\lambda'h) d\rho d\varphi + (\sinh^2(\rho) + h^2) d\varphi^2 \\ &= (\sinh^2(\rho) + h^2) \left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\sinh^2(\rho) + h^2} d\rho \right)^2 + d\rho^2 \left(1 + \frac{\sinh^2(\rho)(\lambda')^2}{\sinh^2(\rho) + h^2} \right), \end{aligned}$$

ou seja, a métrica de (4.1) é

$$d\sigma^2 = (\sinh^2(\rho) + h^2) \left(d\varphi + \frac{\lambda'h}{\sinh^2(\rho) + h^2} d\rho \right)^2 + d\rho^2 \left(1 + \frac{\sinh^2(\rho)(\lambda')^2}{\sinh^2(\rho) + h^2} \right). \quad (4.3)$$

Efetuiremos alteração de parâmetros (s, t) na equação (4.3),

$$ds = \left(1 + \frac{\sinh^2(\rho)(\lambda')^2}{\sinh^2(\rho) + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\rho; \quad (4.4)$$

$$dt = d\varphi + \frac{\lambda'h}{\sinh^2(\rho) + h^2} d\rho. \quad (4.5)$$

A matriz Jacobiana da mudança de parâmetros é dada por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} s_\rho & s_\varphi \\ t_\rho & t_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\sinh^2(\rho)(\lambda')^2}{\sinh^2(\rho) + h^2} \right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{\lambda'h}{\sinh^2(\rho) + h^2} & 1 \end{bmatrix},$$

em que o determinante de J_1 é diferente de zero para todos os valores de ρ e φ no domínio aberto U . Com base nessa condição, é viável realizar a mudança de parâmetros $\rho = \rho(s, t)$ e $\varphi = \varphi(s, t)$. Assim, a Jacobiana J_2 é representada como a matriz da transformação $J_2 = \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(s, t)}$,

$$J_2 = \begin{bmatrix} \rho_s & \rho_t \\ \varphi_s & \varphi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\sinh^2(\rho)(\lambda')^2}{\sinh^2(\rho) + h^2} \right)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -\frac{\lambda'h}{\sinh^2(\rho) + h^2} \left(1 + \frac{\sinh^2(\rho)(\lambda')^2}{\sinh^2(\rho) + h^2} \right)^{-\frac{1}{2}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Dado que $\rho_t = 0$ e $\rho_s \neq 0$, concluímos que ρ depende unicamente de s , assim

- $\rho(s, t) = \rho(s)$;
- $\lambda(\rho) = \lambda(\rho(s)) = \lambda(s)$.

$U(s) = \sinh^2(\rho) + h^2$. Ao substituir $U(s)$, (4.4), e (4.5) em (4.3), obtemos:

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s)dt^2. \quad (4.7)$$

Ao omitir o parâmetro s e substituir $U(s)$ por U , além de reescrever $d\lambda$ como $\lambda' d\rho$, podemos expressar as equações (4.4) e (4.5) da seguinte maneira:

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{\sinh^2(\rho) d\lambda^2}{\sinh^2(\rho) + h^2}; \quad (4.8)$$

$$U dt = \pm(\sinh^2(\rho) + h^2)^{\frac{1}{2}} \left(d\varphi + \frac{h d\lambda}{\sinh^2 + h^2} \right). \quad (4.9)$$

Através de manipulações matemáticas na equação (4.9) e levando em consideração a condição de que $U > 0$:

$$d\varphi = \pm \frac{U}{(\sinh^2(\rho) + h^2)^{\frac{1}{2}}} dt - \frac{h d\lambda}{\sinh^2(\rho) + h^2}.$$

Dado que $\lambda(\rho(s)) = \lambda(s)$, podemos concluir que $d\lambda = \lambda_s ds$, donde

$$d\varphi = \pm \frac{U}{(\sinh^2(\rho) + h^2)^{\frac{1}{2}}} dt - \frac{h \lambda_s}{(\sinh^2(\rho) + h^2)} ds \quad (4.10)$$

e

$$\begin{cases} \varphi_t = \pm \frac{U}{(\sinh^2(\rho) + h^2)^{\frac{1}{2}}}; \\ \varphi_s = -\frac{h \lambda_s}{(\sinh^2(\rho) + h^2)}. \end{cases} \quad (4.11)$$

A segunda derivada parcial φ_s em relação a t é nula, assim,

$$\begin{aligned} \varphi_{ts} & \stackrel{\varphi \text{ é de Classe } C^2}{=} \varphi_{st} = 0 \\ & \Rightarrow \varphi_{ts} = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente φ_t não depende de s , assim podemos reescrever φ_t como:

$$\frac{U}{(\sinh^2(\rho) + h^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{m} \neq 0 \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \varphi_t = \frac{1}{m}, \quad (4.13)$$

m é uma constante não nula. Além disso, podemos reescrever a equação (4.10) da seguinte forma:

$$d\varphi = \frac{1}{m} dt - \frac{h}{(\sinh^2(\rho) + h^2)} \lambda_s. \quad (4.14)$$

Por (4.12),

$$\begin{aligned} mU & = (\sinh^2(\rho) + h^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m^2U^2 = \sinh^2(\rho) + h^2 \\ & \Rightarrow \sinh^2(\rho) = m^2U^2 - h^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A derivada em relação a s é dada por

$$\begin{aligned} 2\rho_s \sinh(\rho) \cosh(\rho) & = 2m^2UU_s \\ \Rightarrow \rho_s \sinh(\rho) \cosh(\rho) & = m^2UU_s \\ \Rightarrow \rho_s & = \frac{2m^2UU_s}{\sinh(\rho) \cosh(\rho)} \\ \Rightarrow (\rho_s)^2 & = \left(\frac{m^2UU_s}{\sinh(\rho) \cosh(\rho)} \right)^2 \\ & = \frac{m^4U^2(U_s)^2}{\sinh^2(\rho) \cosh^2(\rho)} \\ & = \frac{m^4U^2(U_s)^2}{\underbrace{\sinh^2(\rho)}_{(4.15)} \underbrace{\cosh^2(\rho)}_{(4.15)+1}} \\ & = \frac{m^4U^2(U_s)^2}{(m^2U^2 - h^2)(m^2U^2 - h^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Como $d\rho = \rho_s ds$, então

$$(d\rho)^2 = \frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{(m^2 U^2 - h^2)(m^2 U^2 - h^2 + 1)} ds^2. \quad (4.16)$$

Ao substituir (4.16) em (4.8), temos

$$(\lambda_s)^2 = \left(\frac{m^2 U^2 [(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2]}{(m^2 U^2 - h^2)^2 (m^2 U^2 - h^2 + 1)} \right) ds^2.$$

Assim,

$$\lambda_s = \frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \quad (4.17)$$

Daí, a equação (4.17) pode ser substituída em (4.14)

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{m^2 U^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{m^2 U^2} \left(\frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds \right) \\ &= \frac{1}{m} dt - \frac{h}{mU(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$d\varphi = \frac{1}{m} dt - \frac{h}{mU(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \quad (4.18)$$

Portanto, por (4.16) podemos integrar (4.18) e (4.17), então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(s) = \int \left(\frac{m^4 U^2 (U_s)^2}{(m^2 U^2 - h^2)(m^2 U^2 - h^2 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} ds; \\ \lambda(s) = \int \frac{mU}{(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds; \\ \varphi(s, t) = \frac{t}{m} - h \int \frac{1}{mU(m^2 U^2 - h^2)} \left(\frac{(m^2 U^2 - h^2 + 1)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U_s^2}{m^2 U^2 - h^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \end{array} \right.$$

com a métrica $d\sigma^2 = ds^2 + U^2 dt^2$. Isso prova o Lema de Bour. \square

Lema 4.1.2. $[U, m, h]$ é uma superfície com curvatura média H se, e somente se, $U(s)$ satisfaz a equação

$$2H[(m^2 U^2 - h^2)^2 + m^2 U^2 - h^2 - m^4 U^2 U_s^2]^{\frac{1}{2}} = m^2 U^2 - h^2 + 1 + \frac{m^2 (h^2 - 1) U_s^2}{1 + m^2 U^2 - h^2} - m^2 U U_{ss}.$$

Demonstração 4.1.2. O processo de demonstração é análogo ao Lema 3.1.2. Após uma análise detalhada, é viável determinar os coeficientes f e g , os quais representam a segunda forma fundamental de (4.1) na parametrização (s, t) ,

$$f = -\frac{h\sqrt{1-h^2+m^2U^2}}{m^2U}; \quad (4.19)$$

$$g = \frac{\sqrt{h^4-h^2(1+2m^2U^2)+m^2U^2(1+m^2(U^2-U_s^2))}}{m^2}. \quad (4.20)$$

Para encontrar e que é o terceiro coeficiente da segunda forma fundamental, recorreremos à função ângulo, representada por ν . Conforme descrito no artigo de Benoit Daniel [7], a equação de Gauss é expressa como $K_e = K_i - \nu^2$, em que:

- $K_e = -\frac{U_{ss}}{U}$;
- $K_i = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$;
- $\nu = \frac{mU_s}{\sqrt{1-h^2+m^2U^2}}$;

então,

$$\begin{aligned} K_e &= K_i - \nu^2 \\ -\frac{U_{ss}}{U} &= \frac{e \left(\frac{\sqrt{h^4-h^2(1+2m^2U^2)+m^2U^2(1+m^2(U^2-U_s^2))}}{m^2} \right) + \left(-\frac{h\sqrt{1-h^2+m^2U^2}}{m^2U} \right)^2}{U^2} - \left(\frac{mU_s}{\sqrt{1-h^2+m^2U^2}} \right)^2 \\ &\Rightarrow e = \frac{m^2 \left[\frac{h^2(1-h^2+m^2U^2)}{m^4U^2} + U \left(\frac{m^2UU_s^2}{1-h^2+m^2U^2} - U_{ss} \right) \right]}{\sqrt{h^4-h^2(1+2m^2U^2)+m^2U^2(1+m^2(U^2-U_s^2))}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Daí, a curvatura média da superfície é dada por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + Eg}{EG} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{1}{2} \left(e + \frac{g}{U^2} \right) \\ &\Rightarrow 2H = e + \frac{g}{U^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2H &= \frac{m^2 \left[\frac{h^2(1-h^2+m^2U^2)}{m^4U^2} + U \left(\frac{m^2UU_s^2}{1-h^2+m^2U^2} - U_{ss} \right) \right]}{\sqrt{h^4-h^2(1+2m^2U^2)+m^2U^2(1+m^2(U^2-U_s^2))}} + \\ &+ \frac{\sqrt{h^4-h^2(1+2m^2U^2)+m^2U^2(1+m^2(U^2-U_s^2))}}{m^2U^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2H[(m^2U^2-h^2)^2+m^2U^2-h^2-m^4U^2U_s^2]^{\frac{1}{2}} &= (m^2U^2-h^2+1) + \\ &+ \frac{m^2(h^2-1)(U_s^2+UU_{ss})+m^4U^3U_{ss}}{m^2U^2-h^2+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2H[(m^2U^2-h^2)^2+m^2U^2-h^2-m^4U^2U_s^2]^{\frac{1}{2}} = m^2U^2-h^2+1 + \frac{m^2(h^2-1)U_s^2}{m^2U^2-h^2+1} - m^2UU_{ss}.$$

Como queríamos demonstrar.

□

Utilizando o Lema de Bour (Lema 4.1.1), o Lema 4.1.2 e o fato da curvatura média H constante, podemos prosseguir para determinar na sequência, ρ , φ , e λ para uma superfície helicoidal com curvatura média constante. A Equação Diferencial Ordinária (EDO) apresentada no Lema (4.1.2) será resolvida através da seguinte mudança de variáveis: $x = mU$ e

$$y = [(x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - x^2 x_s^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

Assim, podemos reescrever a EDO do Lema (4.1.2) como:

$$2Hy = x^2 - h^2 + 1 + \frac{(h^2 - 1)x_s^2}{x^2 - h^2 + 1} - xx_{ss}. \quad (4.24)$$

Estudaremos separadamente os casos em que $H = 0$ e $H \neq 0$.

Observação 4.1.1. *O parâmetro m não é efetivamente importante para a parametrização de (4.1), pois os diferentes valores de m apenas mudam a parametrização da superfície, enquanto a imagem permanece inalterada. De fato, o parâmetro m apenas muda a velocidade de $\varphi(s, t)$ em (4.2), então podemos considerar sem perda de generalidade $m = 1$.*

4.1.3 Caso mínimo ($H = 0$)

Analisaremos nesta seção o caso em que a curvatura média é nula. Neste caso, a EDO (4.24) se reduz a

$$x_{ss} = \frac{x^2 + \varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon x_s^2}{x(x^2 + \varepsilon)}, \quad (4.25)$$

onde $\varepsilon = 1 - h^2$. Note que a equação acima é uma equação autônoma¹.

Dividiremos em casos a resolução de (4.25), baseando-se nos possíveis valores de ε .

1º Caso. A análise começará ao fazer $\varepsilon = 0$ na equação (4.25). Nesse caso, obtém-se a equação autônoma:

$$x_{ss} = x, \quad (4.26)$$

ao realizar a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \omega = x_s; \\ \omega_s = x_{ss}, \end{cases} \quad (4.27)$$

tem-se que $\omega = \omega(x(s))$. Assim, segue da regra da cadeia:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega}{dx} \frac{dx}{ds} \stackrel{(4.27)}{\Rightarrow} \frac{d\omega}{ds} = \omega \frac{d\omega}{dx}, \quad (4.28)$$

¹ Uma EDO é dita autônoma se a variável independente não aparece explicitamente. Para mais informações consulte por exemplo [2]

por (4.27) e (4.28), reescrevemos a EDO (4.26) como:

$$\begin{aligned}\omega_s &= x \\ \omega \frac{d\omega}{dx} &= x.\end{aligned}$$

Daí, $\omega = \pm\sqrt{x^2 + c}$ com $c \in \mathbb{R}$ uma constante de integração. Como $\omega = x_s$, segue que

$$\frac{dx}{ds} = \pm\sqrt{x^2 + c}. \quad (4.29)$$

Para melhor compreensão das soluções da EDO (4.29), dividiremos em sub-casos vinculados a variação de c .

1.1. Se $c < 0$, então

$$\begin{aligned}\frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} &= \pm ds \\ \Rightarrow \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{\sqrt{-c}}\right) &= \pm s \\ \Rightarrow x &= \sqrt{-c} \cosh(s).\end{aligned}$$

Como $x = U$, tem-se

$$U(s) = \sqrt{-c} \cosh(s). \quad (4.30)$$

1.2. Se $c > 0$ em (4.29) então,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} &= \pm ds \\ \Rightarrow \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) &= \pm s \\ \Rightarrow x &= \sqrt{c} \operatorname{senh}(\pm s).\end{aligned}$$

Daí, com o fato de que $x = U$

$$U(s) = \pm\sqrt{c} \operatorname{senh}(s). \quad (4.31)$$

1.3. Dado $c = 0$ em (4.29), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= \pm ds. \\ \Rightarrow \ln x &= \pm s + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x &= Ke^{\pm s}, \quad K \in \mathbb{R}_+^*.\end{aligned}$$

Conclui-se que,

$$U(s) = Ke^{\pm s}. \quad (4.32)$$

No caso a seguir analisaremos quando ε é positivo e as possíveis soluções.

2º Caso. Considerando $|\varepsilon| > 0$ em (4.25), podemos reescrever como:

$$x_{ss} = \frac{x^2 + \varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon x_s^2}{x(x^2 + \varepsilon)}, \quad (4.33)$$

seja $\omega = x_s$, então

$$\omega \frac{d\omega}{dx} = \frac{x^2 + \varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon \omega^2}{x(x^2 + \varepsilon)}$$

obtemos uma equação de Bernoulli ²:

$$\omega \frac{d\omega}{dx} + \frac{\varepsilon \omega^2}{x(x^2 + \varepsilon)} = \frac{x^2 + \varepsilon}{x},$$

dado

$$\begin{cases} V &= \omega^2 \\ \frac{dV}{dx} &= 2\omega \frac{d\omega}{dx} \end{cases}$$

consequentemente, obtemos a EDO linear:

$$\frac{dV}{dx} + \frac{2\varepsilon}{x(x^2 + \varepsilon)} V = 2 \left(\frac{x^2 + \varepsilon}{x} \right). \quad (4.34)$$

Pelo fator integrante,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{2\varepsilon \int [x(x^2 + \varepsilon)]^{-1} dx} \\ &= e^{2 \ln x - \ln(x^2 + \varepsilon)} \\ &= \frac{x^2}{x^2 + \varepsilon} \end{aligned}$$

multiplicando (4.34) por μ , tem-se que

$$\left(\frac{x^2}{x^2 + \varepsilon} V \right)_x = 2 \left(\frac{x^2 + \varepsilon}{x} \right) \left(\frac{x^2}{x^2 + \varepsilon} \right).$$

Integrando,

$$\frac{x^2}{x^2 + \varepsilon} V = 2 \int x dx = x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

então,

$$V = x^2 + \varepsilon + k \left(\frac{x^2 + \varepsilon}{x^2} \right). \quad (4.35)$$

Como $V = \omega^2$ e $\omega = x_s$, podemos reescrever (4.35)

$$x_s = \pm \sqrt{x^2 + \varepsilon + k \left(\frac{x^2 + \varepsilon}{x^2} \right)}$$

realizando a integração

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + \varepsilon)(x^2 + k)}} dx = \pm \int ds \quad (4.36)$$

² A Equação diferencial de Bernoulli é uma equação diferencial ordinária não linear, de primeira ordem, da forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, em que n é qualquer número real com $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Para mais informações [2].

se $z^2 = x^2 + \varepsilon$ então,

$$\begin{cases} x^2 + \varepsilon = z^2 \\ x^2 + k = z^2 + k - \varepsilon \end{cases}$$

daí a integral (4.36) fica,

$$\pm s = \int \frac{1}{\sqrt{z^2 + k - \varepsilon}} dz. \quad (4.37)$$

Analisaremos as possibilidades para k , desta forma varreremos todas as soluções.

2.1. Seja $k = 0$ então (4.37)

$$\begin{aligned} \pm s &= \int \frac{1}{\sqrt{z^2 - \varepsilon}} dz = \operatorname{arccosh} \left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \\ \Rightarrow z &= \sqrt{\varepsilon} \cosh(s) \\ \Rightarrow z^2 &= \varepsilon \cosh^2(s) \end{aligned}$$

como $z^2 = x^2 + \varepsilon$

$$\begin{aligned} x^2 + \varepsilon &= \varepsilon \cosh^2(s) \\ \Rightarrow x^2 &= \varepsilon (\cosh^2(s) - 1) \\ \Rightarrow x^2 &= \varepsilon \sinh^2(s) \\ \Rightarrow x &= \sqrt{\varepsilon} \sinh(s) \end{aligned}$$

então

$$U = \sqrt{\varepsilon} \sinh(s).$$

2.2. Quando $k - \varepsilon > 0$ então (4.37) é dada por $\pm s = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{z}{\sqrt{k - \varepsilon}} \right)$, daí

$$z = \sqrt{k - \varepsilon} \sinh(\pm s)$$

como $z^2 = x^2 + \varepsilon$ e $U = x$,

$$U = \sqrt{k \sinh^2(\pm s) - \varepsilon \cosh^2(s)}.$$

2.3. Quando $k - \varepsilon < 0$ então (4.37) é dada por $\pm s = \operatorname{arccosh} \left(\frac{z}{\sqrt{k - \varepsilon}} \right)$, daí

$$z = \sqrt{k - \varepsilon} \cosh(s)$$

como $z^2 = x^2 + \varepsilon$ e $U = x$,

$$U = \sqrt{k \cosh^2(s) - \varepsilon \sinh^2(s)}.$$

4.1.4 Caso $H \neq 0$

Analisaremos nesta seção a EDO do Lema (4.1.2) em que a curvatura média constante não nula, caracterizada por:

$$2Hy = x^2 - h^2 + 1 + \frac{(h^2 - 1)x_s^2}{x^2 - h^2 + 1} - xx_{ss}.$$

Lembre que,

$$y = [(x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - x^2x_s^2]^{\frac{1}{2}},$$

Derivando y obtemos:

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{2}[(x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - x^2x_s^2]^{-\frac{1}{2}}[4(x^2 - h^2)xx_s + 2xx_s - 2xx_s(x_s^2 + xx_{ss})] \\ &= \frac{xx_s(x^2 - h^2 + 1 - x_s^2 - xx_{ss} + x^2 - h^2)}{[(x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - x^2x_s^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &\stackrel{\text{por (4.23)}}{=} \frac{xx_s}{y} \left(x^2 - h^2 + 1 - xx_{ss} + \frac{x_s^2(h^2 - 1)}{x^2 - h^2 + 1} - \frac{x_s^2(h^2 - 1)}{x^2 - h^2 + 1} - x_s^2 + x^2 - h^2 \right) \\ &= \frac{xx_s}{y} \left(x^2 - h^2 + 1 - xx_{ss} + \frac{x_s^2(h^2 - 1)}{x^2 - h^2 + 1} - \frac{x_s^2(h^2 - 1)}{x^2 - h^2 + 1} - x_s^2 + x^2 - h^2 \right) \\ &= \frac{xx_s}{y} \left(x^2 - h^2 + 1 - xx_{ss} + \frac{x_s^2(h^2 - 1)}{x^2 - h^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 - h^2 + 1} \right) \\ &\stackrel{\text{por (4.24)}}{=} \frac{xx_s}{y} \left(2Hy + \frac{y^2}{x^2 - h^2 + 1} \right) \\ &= xx_s \left(2H + \frac{y}{x^2 - h^2 + 1} \right) \\ &= 2xx_sH + \left(\frac{xx_s}{x^2 - h^2 + 1} \right) y \\ &\Rightarrow y_s = 2Hxx_s + \left(\frac{xx_s}{x^2 - h^2 + 1} \right) y \end{aligned}$$

Então obtemos a EDO de primeira ordem linear não-homogênea na variável y ,

$$y_s - \left(\frac{xx_s}{x^2 - h^2 + 1} \right) y = 2Hxx_s. \quad (4.38)$$

Considere o fator integrante,

$$\mu(s) = e^{\int \frac{-xx_s}{x^2 - h^2 + 1} ds}. \quad (4.39)$$

Ao realizar uma substituição simples $u(s) = x^2 - h^2 + 1$ na integral presente na equação (4.39),

$$\begin{aligned} \mu(s) &= e^{\int \frac{-1}{2u} du} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \ln u} \\ &= e^{\ln u^{-\frac{1}{2}}} \\ &= u^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

então,

$$\mu = \frac{1}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.40)$$

Daí, multiplicando a equação (4.38) por $\mu(s)$,

$$\begin{aligned} y_s \mu(s) - \mu(s) \left(\frac{xx_s}{x^2 - h^2 + 1} \right) y &= 2Hxx_s\mu(s) \\ \underbrace{\Rightarrow}_{(4.40)} \frac{y_s}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{xx_s}{x^2 - h^2 + 1} \right) y &= \frac{2Hxx_s}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \left(y \frac{1}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right)_s &= \frac{2Hxx_s}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Integrando (4.41),

$$\begin{aligned} \int \left(y \frac{1}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right)_s ds &= \int \frac{2Hxx_s}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} ds \\ \Rightarrow y \frac{1}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} &= \int \frac{2Hxx_s}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} ds \\ \Rightarrow y &= (x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{2Hxx_s}{(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Utilizando novamente a substituição simples $u = x^2 - h^2 + 1$ na integral indicada em (4.42). Desta forma, a equação (4.42) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{H}{u^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= (x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (2H(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + dH) \\ \Rightarrow y &= 2H(x^2 - h^2 + 1) + dH(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

em que $d \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Igualando (4.23) e (4.43)

$$\begin{aligned} [(x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - x^2x_s^2]^{\frac{1}{2}} &= 2H(x^2 - h^2 + 1) + dH(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow (x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - x^2x_s^2 &= [2H(x^2 - h^2 + 1) + dH(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]^2 \\ \Rightarrow x^2x_s^2 &= (x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - [2H(x^2 - h^2 + 1) + dH(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_s^2 = \frac{(x^2 - h^2)^2 + x^2 - h^2 - [2H(x^2 - h^2 + 1) + dH(x^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]^2}{x^2}. \quad (4.44)$$

Seja $z^2 = x^2 - h^2 + 1$,

$$\begin{aligned} z^2 z_s^2 &= (z^2 - 1)^2 + z^2 - 1 - [2Hz^2 + dHz]^2 \\ &= z^4 - 2z^2 + 1 + z^2 - 1 - (2Hz^2 + dHz)^2 \\ &= z^4 - z^2 - (4H^2 z^4 + 4dH^2 z^3 + d^2 H^2 z^2 + 1) \\ &= z^2 [(1 - 4H^2)z^2 - 4dH^2 z - d^2 H^2 - 1] \\ \Rightarrow z_s^2 &= (1 - 4H^2)z^2 - 4dH^2 z - d^2 H^2 - 1. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Renomeando (4.45):

- $A = 1 - 4H^2$;
- $B = -4dH^2$;
- $C = -d^2 H^2 - 1$,

tem-se que,

$$z_s = [Az^2 + Bz + C]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Integrando (4.46),

$$\begin{aligned} \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz &= \int ds \\ \Rightarrow \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz &= s + \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ajustando a origem, podemos considerar $\delta = 0$,

$$s = \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz. \quad (4.47)$$

Analisando o polinômio de segundo grau presente na raiz, tem-se que o discriminante é

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4AC \\ &= (-4dH^2)^2 - 4(1 - 4H^2)(-d^2 H^2 - 1) \\ &= 16d^2 H^4 - (4 - 16H^2)(-d^2 H^2 - 1) \\ &= 4d^2 H^2 - 16H^2 + 4 \\ \Rightarrow \Delta &= 4(d^2 H^2 - 4H^2 + 1). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dividiremos em dois casos a resolução da integral (4.47).

1º caso: $A = 0$;

A integral (4.47) é dada por:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{2}{B}[Bz + C]^{\frac{1}{2}} \\
 \Rightarrow Bz + C &= \frac{B^2 s^2}{4} \\
 \Rightarrow Bz &= \frac{B^2 s^2}{4} - C \\
 \Rightarrow z &= \frac{B^2 s^2 - 4C}{4B} \\
 \Rightarrow z^2 &= \left(\frac{B^2 s^2 - 4C}{4B} \right)^2, \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

seja $z^2 = x^2 - h^2 + 1$ em (4.49), então

$$x^2 = \left[\frac{B^2 s^2 - 4C}{4B} \right]^2 + h^2 - 1, \tag{4.50}$$

reescrevendo $x = mU$ em (4.50):

$$U^2 = \left[\frac{B^2 s^2 - 4C}{4mB} \right]^2 + \frac{h^2 - 1}{m^2}. \tag{4.51}$$

Voltando às variáveis $A = 1 - 4H^2$, $B = -4dH^2$, e $C = -d^2H^2 - 1$, a equação (4.51) pode ser reformulada da seguinte maneira:

$$U^2 = \frac{h^2 - 1}{m^2} + \left[\frac{d^2 H^2 (4s^2 H^2 + 1) + 1}{-4dmH^2} \right]^2.$$

2º caso: $A > 0$ e $\Delta \neq 0$;

Considerando, sem perda de generalidade, $\Delta > 0$, a resolução para o caso em que $\Delta < 0$ segue um raciocínio análogo.

$$\begin{aligned}
 \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz &= \int \left[A \left(z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\
 &= \int [A]^{-\frac{1}{2}} \left[\left(z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\
 &= \int [A]^{-\frac{1}{2}} \left[\left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\
 &= \int [A]^{-\frac{1}{2}} \left[\left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} \right).
 \end{aligned}$$

A reformulação da equação (4.47) é dada por:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
\Rightarrow \sqrt{A}s &= \operatorname{arccosh} \left(\frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
\Rightarrow \frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} &= \cosh(\sqrt{A}s) \\
\Rightarrow 2Az + B &= (B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \cosh(\sqrt{A}s) \\
\Rightarrow z &= \frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \cosh(\sqrt{A}s) - B}{2A} \\
\Rightarrow z^2 &= \left[\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \cosh(\sqrt{A}s) - B}{2A} \right]^2, \tag{4.52}
\end{aligned}$$

seja $z^2 = x^2 - h^2 + 1$ em (4.52),

$$x^2 = \left[\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \cosh(\sqrt{A}s) - B}{2A} \right]^2 + h^2 - 1, \tag{4.53}$$

como $x = mU$ então (4.53),

$$U^2 = \left[\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \cosh(\sqrt{A}s) - B}{2mA} \right]^2 + \frac{h^2 - 1}{m^2}, \tag{4.54}$$

as designações $A = 1 - 4H^2$, $B = -4dH^2$, e $C = -d^2H^2 - 1$, a equação (4.54) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$U^2 = \left[\frac{(d^2H^2 - 4H^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cosh\left((1 - 4H^2)^{\frac{1}{2}}s\right) + 2dH^2}{m(1 - 4H^2)} \right]^2 + \frac{h^2 - 1}{m^2}.$$

O teorema a seguir resume o que foi analisado nesta seção.

Teorema 4.1.1. *Seja S uma superfície de movimento helicoidal com curvatura média constante não nula ($H \neq 0$) em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por coordenadas naturais (s, t) .*

- Se $1 - 4H^2 = 0$, então:

$$(m^2U^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{d^2H^2(4s^2H^2 + 1) + 1}{-4dH^2}$$

- Se $1 - 4H^2 > 0$ e $d^2H^2 - 4H^2 + 1 > 0$, então:

$$(m^2U^2 - h^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{(d^2H^2 - 4H^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cosh\left((1 - 4H^2)^{\frac{1}{2}}s\right) + 2dH^2}{(1 - 4H^2)}$$

4.1.5 Exemplos:

Através do software Mathematica, é possível esquematizar exemplos geométricos utilizando parâmetros predefinidos.

Exemplo 4.1.1. Assumindo $h = 1$, $m = 1$, $H = 0$ e utilizando a expressão $U^2 = 2 \cosh(s)$, na equação (4.2), obtemos a geratriz e a superfície correspondente:

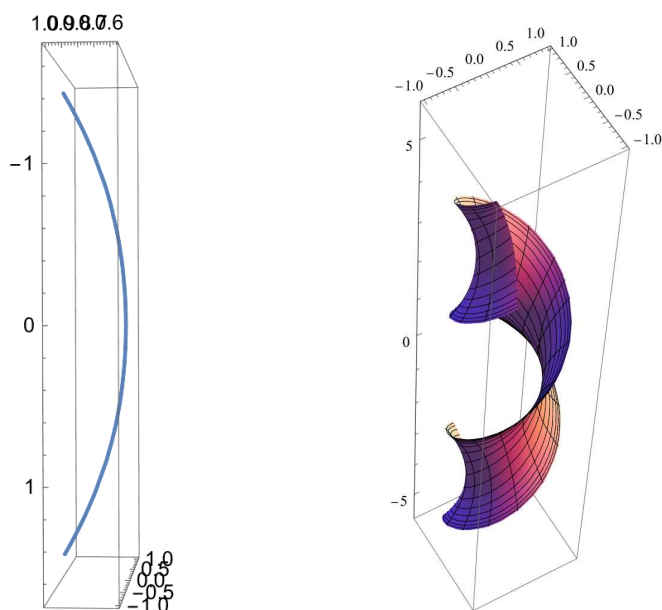


Figura 18 – $H = 0$.

Exemplo 4.1.2. Assumindo $d = -1$, $h = 1$, $m = 1$, $H = \frac{1}{2}$ e utilizando a expressão $U^2 = \frac{h^2-1}{m^2} + \left[\frac{d^2 H^2 (4s^2 H^2 + 1) + 1}{-4dmH^2} \right]^2$, na equação (4.2), obtemos a geratriz e a superfície correspondente:

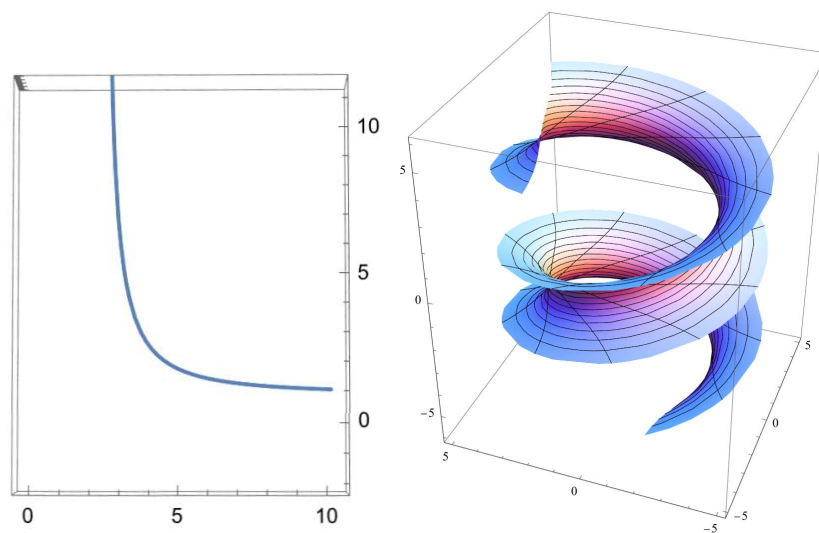


Figura 19 – $H = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.1.3. Considerando $d = \sqrt{2}$, $h = 1$, $m = 1$, $H = \frac{1}{4}$ e a expressão

$$U^2 = \left[\frac{(d^2 H^2 - 4H^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cosh \left((1 - 4H^2)^{\frac{1}{2}} s \right) + 2dH^2}{m(1 - 4H^2)} \right]^2 + \frac{h^2 - 1}{m^2},$$

ao substituir esses valores na equação (4.2), obtemos a geratriz e a superfície correspondente:

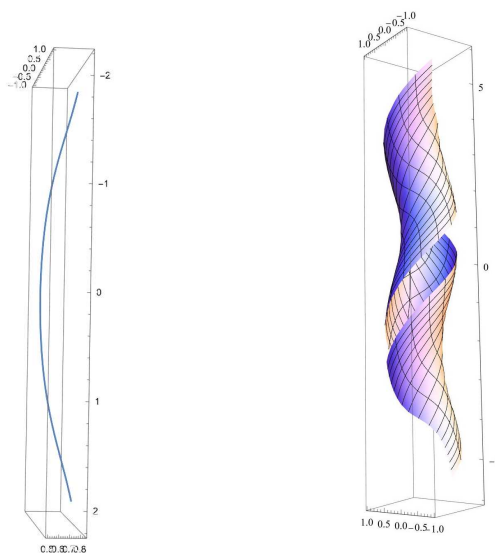


Figura 20 – $H = \frac{1}{4}$.

4.2 Superfícies helicoidais em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Nesta seção, conduzimos uma investigação sobre as superfícies helicoidais em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Inicialmente, empregamos o Lema de Bour (4.2.1) em conjunto com o Lema (4.2.2) e a métrica $d\sigma^2 = U^2 dt^2 + ds^2$ para elucidar de forma nítida e evidente os elementos que definem uma superfície helicoidal com Curvatura Média Constante (CMC).

Concluimos a seção utilizando a Equação Diferencial Ordinária (EDO) presente no Lema (4.2.2) para construir exemplos de superfícies helicoidais com CMC.

As principais referências foram [4], [6], [10] e [14].

4.2.1 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção, exploraremos superfícies que são invariantes sob movimentos helicoidais que estão imersas em

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, t); x^2 + y^2 = 1 \text{ e } t \in \mathbb{R}\},$$

que é um espaço homogêneo onde qualquer par de pontos está conectado por isometria. Com base no que foi abordado na seção 2.4, a métrica de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é descrita por:

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2) + dt^2.$$

Seja a curva $\alpha(\rho)$, que está contida no plano vertical $\pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \mid y = 0\}$. Neste contexto, ρ denota a distância da projeção de um ponto $\alpha(\rho)$ no eixo x até a origem. Agora, encontramos preparados para realizar a parametrização,

$$\begin{aligned} \alpha : U &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \alpha(\rho) = \left(\text{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right), 0, \lambda(\rho) \right). \end{aligned}$$

Realizando uma rotação e uma translação de α ao longo do eixo t , tem-se que imersões possui a seguinte configuração:

$$X(\rho, \varphi) = \left(\text{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right) \cos \varphi, \text{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right) \text{sen} \varphi, \lambda(\rho) + h\varphi \right) \quad (4.55)$$

em que $h \geq 0$ é o passo. Se $h = 0$, é uma superfície de revolução.

4.2.2 Lema de Bour em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

O Lema a seguir, apresenta de maneira explícita os parâmetros ρ , φ , e λ de uma superfície helicoidal com curvatura média qualquer, cuja parametrização é definida por (4.55).

Lema 4.2.1 (Lema de Bour em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$). *Qualquer superfície invariante por movimentos de helicoidal pode ser parametrizada localmente por parâmetros naturais s, t . Seja S uma superfície de movimento de Helicoidal em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Então, existe uma família de duas variáveis $\mathcal{F}(m, h)$, $m \neq 0$ de superfícies helicoidais isométricas a S , dada por*

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 U^2(s) = h^2 + \text{sen}^2 \rho(s) \\ 1 - \rho_s^2(s) = \frac{\lambda_s^2 \text{sen}^2 \rho}{h^2 + \text{sen}^2 \rho + \lambda_s^2 \text{sen}^2 \rho} \\ \rho(s) = \int \sqrt{\frac{m^4 U^2 U'^2}{(m^2 U^2 - h^2)(1 - m^2 U^2 + h^2)}} ds \\ \lambda(s) = \int \sqrt{\frac{(1 - m^2 U^2 + h^2)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U'^2}{1 - m^2 U^2 + h^2}} \cdot \frac{mU}{m^2 U^2 - h^2} ds \\ \varphi(s, t) = \frac{t}{m} - h \int \sqrt{\frac{(1 - m^2 U^2 + h^2)(m^2 U^2 - h^2) - m^4 U^2 U'^2}{1 - m^2 U^2 + h^2}} \cdot \frac{1}{mU(m^2 U^2 - h^2)} ds \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Demonstração 4.2.1. *Realize de forma análoga a demonstração do Lema (4.1.1), basta substituir $\text{senh } \rho \rightarrow \text{sen } \rho$ e $\text{cosh } \rho \rightarrow \text{cos } \rho$.*

Lema 4.2.2. *$[U, m, h]$ é uma superfície com curvatura média H se, e somente se, $U(s)$ satisfaz a equação*

$$2H[m^2 U^2 - (m^2 U^2 - h^2)^2 - h^2 - m^4 U^2 U_s^2]^{\frac{1}{2}} = h^2 - m^2 U^2 + 1 - \frac{m^2 U_s^2 (h^2 + 1)}{h^2 + 1 - m^2 U^2} - m^2 U U_{ss}.$$

Demonstração 4.2.2. *A demonstração assemelha-se ao segundo capítulo. Após uma extensa análise, podemos obter os coeficientes f e g da segunda forma fundamental de (4.55) na parametrização (s, t) ,*

$$f = -\frac{h\sqrt{1+h^2-m^2U^2}}{m^2U}; \quad (4.57)$$

$$g = \frac{\sqrt{-h^4+h^2(2m^2U^2-1)-m^2U^2(m^2(U^2+Us^2)-1)}}{m^2}. \quad (4.58)$$

Tem-se que,

- $K_e = -\frac{U_{ss}}{U}$;
- $K_i = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$;
- $\nu = \frac{mU_s}{\sqrt{1+h^2-m^2U^2}}$.

Com base nas informações anteriores, a determinação do coeficiente e da segunda forma fundamental é conduzida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K_e &= K_i - \nu^2 \\ -\frac{U_{ss}}{U} &= \frac{e \left(\frac{\sqrt{-h^4+h^2(2m^2U^2-1)-m^2U^2(m^2(U^2+Us^2)-1)}}{m^2} \right) + \left(-\frac{h\sqrt{1+h^2-m^2U^2}}{m^2U^2} \right)^2}{U^2} - \left(\frac{mU_s}{\sqrt{1+h^2-m^2U^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e = \frac{m^2 \left[\frac{h^2(1+h^2-m^2U^2)}{m^4U^2} - U \left(\frac{m^2UU_s^2}{1+h^2+m^2U^2} - U_{ss} \right) \right]}{\sqrt{-h^4 + h^2(2m^2U^2 - 1) - m^2U^2(m^2(U^2 + U_s^2) - 1)}}. \quad (4.59)$$

A curvatura média da superfície é expressa por $2H = e + \frac{g}{f^2}$. Com os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental obtidos anteriormente, podemos determinar a curvatura média contante da superfície:

$$2H[m^2U^2 - (m^2U^2 - h^2)^2 - h^2 - m^4U^2U_s^2]^{\frac{1}{2}} = h^2 - m^2U^2 + 1 - \frac{m^2U_s^2(h^2 + 1)}{h^2 + 1 - m^2U^2} - m^2UU_{ss}. \quad (4.60)$$

Como queríamos demonstrar. □

Observação 4.2.1. Substituindo $\frac{t}{m}$ por \bar{t} no Lema (4.2.1), tem-se que possui uma superfície para cada m em (4.55) em que a imagens é igual mesmo com parametrizações distintas. Consideraremos sem perda de generalidade $m = 1$.

A resolução da Equação Diferencial Ordinária (EDO) (4.60) é alcançada ao introduzirmos a variável $x = U$:

$$2H[x^2 - (x^2 - h^2)^2 - h^2 - x^2x_s^2]^{\frac{1}{2}} = h^2 - x^2 + 1 - \frac{x_s^2(h^2 + 1)}{h^2 - x^2 + 1} - xx_{ss}, \quad (4.61)$$

dividiremos em dois casos, que serão examinados separadamente quando a curvatura é nula e não nula.

4.2.3 Caso mínimo ($H = 0$)

Quando a curvatura média é nula, seja $\varepsilon = h^2 + 1$ tem-se que (4.61) é dada pela equação autônoma:

$$x_{ss} = \frac{\varepsilon - x^2}{x} - \frac{\varepsilon x_s^2}{x(\varepsilon - x^2)}, \quad (4.62)$$

se

$$\begin{cases} \omega & = & x_s \\ \omega_s & = & x_{ss} \end{cases}$$

então

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega}{dx} \frac{dx}{ds} \Rightarrow \frac{d\omega}{ds} = \omega \frac{d\omega}{dx}.$$

Pela equação de Bernoulli,

$$\omega \frac{d\omega}{dx} + \frac{\varepsilon\omega^2}{x(\varepsilon - x^2)} = \frac{\varepsilon - x^2}{x} \quad (4.63)$$

realizando,

$$\begin{cases} V & = & \omega^2 \\ \frac{dV}{dx} & = & 2\omega \frac{d\omega}{dx} \end{cases} \quad (4.64)$$

por (4.63) e (4.64), obtemos a equação de linear:

$$\frac{dV}{dx} + \frac{2\varepsilon}{x(\varepsilon - x^2)} V = 2 \left(\frac{\varepsilon - x^2}{x} \right). \quad (4.65)$$

Pelo fator integrante,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{2\varepsilon \int [x(\varepsilon - x^2)]^{-1} dx} \\ &= e^{2 \ln(x) - \ln(\varepsilon - x^2)} \\ &= \frac{x^2}{\varepsilon - x^2} \end{aligned}$$

multiplicando (4.65) por μ , tem-se que

$$\left(\frac{x^2}{\varepsilon - x^2} V \right)_x = 2 \left(\frac{x^2}{\varepsilon - x^2} \right) \left(\frac{\varepsilon - x^2}{x} \right).$$

Integrando,

$$\frac{\varepsilon - x^2}{x^2} V = \int 2x dx = x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

daí,

$$V = \varepsilon - x^2 + k \left(\frac{\varepsilon - x^2}{x^2} \right) \quad (4.66)$$

Como $V = \omega^2$ e $\omega = x_s$, podemos reescrever (4.66)

$$x_s = \pm \sqrt{\varepsilon - x^2 + k \left(\frac{\varepsilon - x^2}{x^2} \right)}$$

realizando a integração

$$\int \frac{x}{\sqrt{(\varepsilon - x^2)(x^2 + k)}} dx = \pm \int ds \quad (4.67)$$

se $z^2 = \varepsilon - x^2$ então,

$$\begin{cases} \varepsilon - x^2 = z^2 \\ x^2 + k = \varepsilon - z^2 + k \end{cases}$$

daí a integral (4.67) fica,

$$\pm s = \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + k - z^2}} dz. \quad (4.68)$$

Analisaremos as possibilidades para k , desta forma varreremos todas as soluções.

Caso 1. Seja $k = 0$ então (4.68)

$$\begin{aligned} \pm s &= \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - z^2}} dz = \arcsen \left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \\ \Rightarrow z &= \sqrt{\varepsilon} \operatorname{sen}(\pm s) \\ \Rightarrow z^2 &= \varepsilon \operatorname{sen}^2(\pm s) \end{aligned}$$

como $z^2 = \varepsilon - x^2$

$$\begin{aligned}\varepsilon - x^2 &= \varepsilon \operatorname{sen}^2(\pm s) \\ \Rightarrow -x^2 &= \varepsilon(\operatorname{sen}^2(\pm s) - 1) \\ \Rightarrow x^2 &= \varepsilon \cos^2(s) \\ \Rightarrow x &= \sqrt{\varepsilon} \cos(s)\end{aligned}$$

então

$$U = \sqrt{\varepsilon} \cos(s).$$

Caso 2. Quando $|k + \varepsilon| > 0$, então (4.37) é dada por $\pm s = \arcsen\left(\frac{z}{\sqrt{k+\varepsilon}}\right)$, daí

$$z = \sqrt{k - \varepsilon} \operatorname{sen}(\pm s)$$

como $z^2 = \varepsilon - x^2$ e $U = x$, tem-se que

$$U = \sqrt{\varepsilon - (k - \varepsilon) \operatorname{sen}^2(\pm s)}.$$

4.2.4 Caso $H \neq 0$

Considerando a curvatura média da superfície constante e diferente de zero ($H \neq 0$) em (4.61) e

$$y = [x^2 - (x^2 - h^2)^2 - h^2 - x^2 x_s^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.69)$$

então,

$$2Hy = h^2 - x^2 + 1 - \frac{x_s^2 (h^2 + 1)}{h^2 - x^2 + 1} - xx_{ss} \quad (4.70)$$

Derivando y obtemos:

$$y_s = xx_s \left(2H - \frac{y}{h^2 - x^2 + 1} \right),$$

então obtemos a EDO primeira ordem linear não-homogênea,

$$y_s + \left(\frac{xx_s}{h^2 - x^2 + 1} \right) y = 2Hxx_s \quad (4.71)$$

utilizando fator de integrante, tem-se que

$$y = (h^2 - x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{2Hxx_s}{(h^2 - x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} ds \quad (4.72)$$

Após as devidas manipulações matemáticas, tem-se que:

$$y = -2H(h^2 - x^2 + 1) + dH(h^2 - x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

em que d é uma constante de integração. Ao igualarmos as expressões (4.69) e (4.73), obtemos

$$\Rightarrow x_s^2 = \frac{x^2 - h^2 - (x^2 - h^2)^2 - [-2H(h^2 - x^2 + 1) + dH(h^2 - x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]^2}{x^2} \quad (4.74)$$

Ao efetuarmos a substituição $z^2 = h^2 - x^2 + 1$, chegamos à expressão $z_s^2 = (-1 - 4H^2)z^2 + 4dH^2z + (-d^2H^2 - 1)$. Podemos reescrever os coeficientes desta equação como:

- $A = -1 - 4H^2$;
- $B = 4dH^2$;
- $C = -d^2H^2 + 1$,

tem-se que,

$$z_s = [Az^2 + Bz + C]^{\frac{1}{2}} \quad (4.75)$$

Integrando (4.75),

$$\begin{aligned} \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz &= \int ds \\ \Rightarrow \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz &= s + \delta, \quad \delta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ajustando a origem, podemos considerar $\delta = 0$,

$$s = \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz. \quad (4.76)$$

O discriminante é dado por:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4(1 - d^2H^2 + 4H^2).$$

Seja que $A < 0$ e $\Delta \neq 0$. Supondo sem perda de generalidade, podemos assumir que $\Delta > 0$. O caso em que $\Delta < 0$ é análogo a análise.

$$\begin{aligned} \int [Az^2 + Bz + C]^{-\frac{1}{2}} dz &= \int \left[-A \left(-z^2 - \frac{B}{A}z - \frac{C}{A} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \int [-A]^{-\frac{1}{2}} \left[\left(-z^2 - \frac{B}{A}z - \frac{C}{A} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \int [-A]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} - \left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \int [-A]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{B^2 - 4AC}{4A^2} - \left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-A}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

É possível reformular a equação (4.76)

$$\begin{aligned}
 s &= -\frac{1}{\sqrt{-A}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 \Rightarrow -\sqrt{-A}s &= \operatorname{arcsen} \left(\frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 \Rightarrow \frac{2Az + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} &= \operatorname{sen} \left(-\sqrt{-A}s \right) \\
 \Rightarrow 2Az + B &= -(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{-A}s \right) \\
 \Rightarrow z &= -\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{-A}s \right) - B}{2A} \\
 \Rightarrow z^2 &= \left[\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{-A}s \right) - B}{2A} \right]^2
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

realizando $z^2 = h^2 - x^2 + 1$ em (4.77),

$$x^2 = h^2 + 1 - \left[\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{-A}s \right) - B}{2A} \right]^2 \tag{4.78}$$

como $x = mU$ então (4.78),

$$U^2 = \frac{h^2 + 1}{m^2} - \left[\frac{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{-A}s \right) - B}{2mA} \right]^2 \tag{4.79}$$

como $A = -1 - 4H^2$, $B = 4dH^2$ e $C = -d^2H^2 + 1$, então (4.79) é

$$U^2 = \frac{h^2 + 1}{m^2} - \left[\frac{(1 - d^2H^2 + 4H^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left((1 + 4H^2)^{\frac{1}{2}} s \right) - 2dH^2}{m(1 + 4H^2)} \right]^2$$

Teorema 4.2.1. *Seja S uma superfície de movimento helicoidal com curvatura média constante não nula ($H \neq 0$) em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por coordenadas naturais s, t . Se $1 - d^2H^2 + 4H^2$ então*

$$(m^2U^2 - h^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = -\frac{(1 - d^2H^2 + 4H^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left((1 + 4H^2)^{\frac{1}{2}} s \right) - 2dH^2}{m(1 + 4H^2)}.$$

Observação 4.2.2. *Para exemplos explícitos, veja o artigo [10].*

5 Considerações finais

Neste trabalho estudamos e apresentamos resultados sobre superfícies helicoidais com curvatura média constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, com \mathbb{M}^2 uma forma espacial bidimensional podendo ser \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}^2 ou \mathbb{S}^2 . Para que o objetivo fosse alcançado, foi necessário recorrer a diversas literaturas e aprender técnicas de geometria.

Apresentamos, no caso do ambiente ser o \mathbb{R}^3 , um teorema que fornece explicitamente a família de superfícies associadas a uma dada superfície helicoidal CMC, veja 3.2.1. No caso em que a base é \mathbb{H}^2 ou \mathbb{S}^2 , um teorema apresentado por Benoit Daniel em [7], garante que cada superfície CMC em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ está associada a uma superfície mínima em uma outra variedade homogênea tridimensional com grupo de isometrias de dimensão 4. Porém, nestes ambientes ainda não se tem de forma explícita as superfícies associadas às superfícies helicoidais CMC. Portanto, fica evidente que existem lacunas no estudo das superfícies helicoidais CMC em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Por fim, este trabalho possibilitou uma maior compreensão de tópicos significativos na geometria, os quais têm atraído a atenção de diversos geometras globalmente. Assim, essa fundamentação teórica recém-adquirida abrirá caminho para investigações mais avançadas em pesquisas futuras.

Referências

- [1] BARRIENTOS, J. O. **Superfícies Helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensional**. 1995. Tese de Doutorado. Citado na página 12.
- [2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais ordinárias e problemas de valores de contorno**. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2020. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 67.
- [3] CARAGEORGE, E. C.; ZARRO, C. A. D. **Princípios Físicos e Matemáticos da Teoria da Relatividade Geral**. 2020. Citado na página 11.
- [4] DO CARMO, M. P.; DAJCZER, M. **Helicoidal surfaces with constant mean curvature**. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, v. 34, n. 3, p. 425-435, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 12, 30, 58 e 76.
- [5] CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 15, 16, 19 e 58.
- [6] CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. [S.l.: s.n.], 2014. v. 6. 620 p. ISSN 9788583370246. Citado 5 vezes nas páginas 13, 17, 30, 58 e 76.
- [7] DANIEL, B. **Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds**. Commentarii mathematici helvetici, v. 82, n. 1, p. 87–131, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 13, 19, 28, 58, 64 e 83.
- [8] DELAUNAY, C. **Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante**. Journal de mathématiques pures et appliquées, v. 6, p. 309–315, 1841. Citado na página 11.
- [9] DORIA, C. M. **Geometrias Não-Euclidianas Exemplos**. Bienal de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2004. Citado na página 27.
- [10] EARP, R. S.; TOUBIANA, E. **Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$** . Illinois J. Math, v. 49, n. 4, p. 1323–1362, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 12, 58, 76 e 82.
- [11] EARP, R. S.; TOUBIANA, E. **Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann**. Cassini, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 13, 19, 21, 22, 23, 25, 26 e 58.
- [12] LAWSON JR, H. B. **Complete minimal surfaces in \mathbb{S}^3** . Annals of Mathematics, p. 335-374, 1970. Citado 7 vezes nas páginas 12, 13, 28, 29, 46, 48 e 49.

-
- [13] JUNIOR, A. C. Imersões mínimas e Conformes em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Dissertação PUC-Rio, 2009. Citado 4 vezes nas páginas [13](#), [17](#), [19](#) e [27](#).
- [14] KENMOTSU, K. **Surfaces of revolution with prescribed mean curvature.** Tohoku Mathematical Journal, Second Series, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 32, n. 1, p. 147–153, 1980. Citado 5 vezes nas páginas [11](#), [30](#), [57](#), [58](#) e [76](#).
- [15] KENMOTSU, K. **Surfaces with constant mean curvature.** [S.l.]: American Mathematical Soc., 2003. Citado 2 vezes nas páginas [28](#) e [49](#).