

ANDRUSS KEISSI LUGO MEDINA

SUPERFÍCIES TOTALMENTE UMBÍLICAS EM VARIETADES
HOMOGÊNEAS TRIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Ady Cambraia Junior

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

L951s
2020 Lugo Medina, Andruss Keissi, 1994-
Superfícies totalmente umbílicas em variedades
homogêneas tridimensionais / Andruss Keissi Lugo Medina. –
Viçosa, MG, 2020.
112f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Ady Cambraia Junior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.109-110.

1. Geometria riemanniana. 2. Isometria (Matemática).
3. Geodésica (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 516.373

ANDRUSS KEISSI LUGO MEDINA

SUPERFÍCIES TOTALMENTE UMBÍLICAS EM VARIÉDADES
HOMOGÊNEAS TRIDIMENSIONAIS

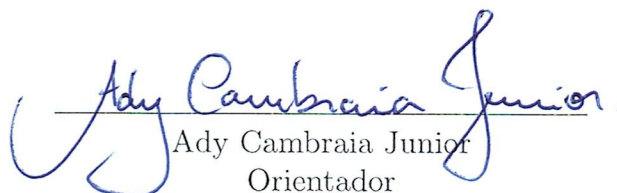
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 05 de Março de 2020.

Assentimento:



Andruss Keissi Lugo Medina
Autor



Ady Cambraia Junior
Orientador

Aos meus pais: Neiser e Zulma pelo apoio, paciência e por serem exemplo de superação.

Agradecimentos

Para começar quero agradecer a Deus pela força que me deu para conseguir finalizar este mestrado.

Aos meus pais e minha irmã pelo apoio tanto econômico como moral nos estudos e além disso por sempre estarem presentes quando mais precisei deles.

Aos meus familiares pela atenção que sempre tiveram comigo durante os dois anos do mestrado.

Aos meus colegas do mestrado e amigos da UFV por ajudarem no primeiro ano de disciplinas, que foi quando mais tive dificuldade de aprendizagem tanto na matemática como na língua portuguesa.

Ao grupo de estrangeiros, denominado *Masturbanda*, por me ajudar no último semestre do mestrado à descansar um pouco dos estudos.

Ao meu orientador por me guiar, ajudar e estar atento com a dissertação. Graças à ele aprendi usar vários programas matemáticos, a ter maturidade na matemática e comecei a descobrir como é que realmente se pesquisa na matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Se os fatos não se encaixam na
teoria, modifique os fatos”.

Albert Einstein

Biografia

Meu nome é Andruss Keissi Lugo Medina, sou Colombiano, nascido na cidade Ibagué - Tolima. Fiz o ensino médio na instituição educativa Inem Manuel Murillo Toro. Ao final do curso em 2011, havia pensado em estudar Geologia mas infelizmente não consegui porque tinha que ir para outra cidade e não tive os recursos financeiros necessários para poder ir. Logo, decide estudar matemática na Universidade del Tolima (UT), lá me graduei em Profissional em matemática, com ênfase em estatística, em 2017. Nesse período, tive a oportunidade de fazer intercâmbio acadêmico no Brasil na Universidade Federal de Viçosa (UFV), onde realizei meu TCC na área de Topologia. Mais particularmente, estudei sobre os grafos de Reeb e fiz outras disciplinas que enriqueceram minha formação acadêmica. Depois de ter formado trabalhei por seis meses como professor de ensino médio na Colômbia, mas realmente não gostei muito da experiência. Então resolvi me ingressar no mestrado em matemática na Universidade Federal de Viçosa (UFV). No momento, estou finalizando o mestrado e minha área de pesquisa é Geometria Diferencial, especificamente trabalho com a classificação de superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$.

Resumo

MEDINA, Andruss Keissi Lugo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2020.
Superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais.
Orientador: Ady Cambraia Junior.

Recentemente, o estudo de superfícies com propriedades geométricas preestabelecidas, imersas em variedades homogêneas de dimensão 3, têm recebido atenção de diversos geométricos, um dos principais foi **H.Rosenberg**, veja [17]. O principal objetivo deste trabalho foi estudar superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas tridimensionais cujo grupo de isometrias tem dimensão 4, estes espaços são conhecidos como espaços $E^3(\kappa, \tau)$. Para cumprir tal objetivo, apresentaremos no capítulo 1 as ferramentas necessárias para classificar as superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$. Começaremos definindo alguns conceitos da Geometria Diferencial, tais como superfície, curvatura, pontos umbílicos, superfícies completas, dentre outros. Além disso, vamos apresentar a classificação das superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$ com $\kappa = \tau = 0$, ou seja, em \mathbb{R}^3 . Em seguida, com o objetivo de obter o teorema de classificação das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, que será apresentado no capítulo 2, apresentamos de maneira sucinta a geometria das formas espaciais bidimensionais \mathbb{H}^2 e \mathbb{S}^2 . No capítulo 2, provamos a inexistência de superfícies totalmente umbílicas em variedades homogêneas $E^3(\kappa, \tau)$ para $\tau \neq 0$, isto é, aquelas que não são produtos Riemannianos. Em seguida, apresentamos a classificação das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Por fim, apresentamos um resultado de unicidade das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Palavras-chave: Teorema de Classificação. Isometrias positivas. Teorema de unicidade. Submersão de Killing.

Abstract

MEDINA, Andruss Keissi Lugo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2020.
Totally umbilic surfaces in homogenous three-dimensional varieties. Adviser:
Ady Cambraia Junior.

Recently, the study of surfaces with pre-established geometrical properties, immersed in homogeneous manifolds of dimension 3, has received attention from several geometers, one of the main ones was **H.Rosenberg**, see [17]. The main objective of this work was to study totally umbilical surfaces in three-dimensional homogeneous varieties whose isometric group has dimension 4, these spaces are known as spaces $E^3(\kappa, \tau)$. To accomplish this goal, we will present in the 1 chapter the tools needed to classify totally umbilical surfaces into $E^3(\kappa, \tau)$. We will begin by defining some concepts of differential geometry such as surface, curvature, umbilical points and complete surfaces. Also, let's talk about an important known result about surfaces that are totally umbilical in $E^3(\kappa, \tau)$ with $\kappa = \tau = 0$, ie \mathbb{R}^3 . In the following section with the objective of obtaining the totally umbilical surface classification theorem in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, which will be presented in chapters 2, we briefly present the geometry of two-dimensional space forms \mathbb{H}^2 and \mathbb{S}^2 . In chapter 2, we proved the absence of totally umbilical surfaces in homogeneous varieties $E^3(\kappa, \tau)$ for $\tau \neq 0$, that is, those that are not Riemannian products. Next, we present the classification of totally umbilical surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Finally, we present a result of uniqueness of the fully umbilical surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Keywords: Classification Theorem. Positive isometries. Uniqueness theorem. Killing submersion.

Lista de Figuras

1.1	Esfera bi-dimensional [3].	16
1.2	Modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^2 .	21
1.3	Inversão com respeito ao círculo C .	25
1.4	Geodésicas do modelo do semi-plano superior.	28
1.5	Geodésicas do modelo do disco.	30
1.6	Horociclos de \mathbb{H}^2 .	31
1.7	Geodésica completa γ com extremos x_1 e x_2 .	33
1.8	Geodésica completa γ com extremos x_1 e ∞ .	33
1.9	Isometria hiperbólica.	34
1.10	Isometria parabólica.	37
1.11	Isometria elíptica.	38
1.12	Translação do vetor v com ponto p na origem.	48
1.13	Geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.	50
2.1	Decomposição do campo ξ .	53
2.2	Superfície rotacional em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.	58
2.3	Curva α_a gerada para $a = 0.9$, [12].	68
2.4	Curva $\alpha_1(s)$ simétrica com relação ao eixo de rotação R .	71
2.5	Curva de Jordan α_a para $a = 5$, [12].	75
2.6	Plano P no espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.	77

2.7	Curva $\alpha(s)$ simétrica em relação a Γ .	89
2.8	Curva $\alpha_b(s)$, gerada no caso elíptico para $b = 0.1$, [12].	94
2.9	Curva $\alpha_c(s)$, gerada no caso hiperbólico para $c = 0.1$, [12].	98
2.10	Superfície transversal a cada slice $\mathbb{M}^2 \times \{t\}$.	100

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares	15
1.1 Superfícies totalmente umbílicas em \mathbb{R}^3	15
1.2 A classificação das superfícies totalmente umbílicas em \mathbb{R}^3	17
1.3 Geometria Hiperbólica	20
1.3.1 O modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^2	20
1.3.2 As geodésicas do modelo do semi-plano superior e o disco de Poincaré	26
1.3.3 Descrição das isometrias positivas de \mathbb{H}^2	30
1.4 Geometria Esférica	39
1.5 Geometria Riemanniana	40
2 Classificação das Superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$	51
2.1 Não existência de superfícies totalmente umbílicas em algumas variedades tridimensionais homogêneas	51
2.2 Superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	57
2.3 Superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	75
2.3.1 Caso parabólico	86
2.3.2 Caso elíptico	90
2.3.3 Caso Hiperbólico	95
2.4 Unicidade das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	99

Considerações Finais

108

Referências Bibliográficas

109

Introdução

Durante os últimos anos tem havido um interesse crescente na geometria de superfícies em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, focando em superfícies de curvatura média constante e mínima. Este foi iniciado por H.Rosenberg, [17]. Em geral muitos trabalhos dedicam-se a estudar a geometria de superfícies em variedades tri-dimensionais.

Na teoria clássica de superfícies imersas nas formas espaciais de dimensão três, uma ferramenta importante para o estudo do comportamento geométrico de certas superfícies é que a diferencial quadrática de Hopf é holomorfa se, e somente se, a superfície tem curvatura média constante. Este resultado permite caracterizar tais superfícies. Abresch e Rosenberg estenderam este resultado, inicialmente para alguns tipos de espaços produto e em seguida para as variedades homogêneas, conexas, simplesmente conexas de dimensão três, cujo grupo de isometrias é de dimensão quatro, que na literatura são conhecidos como os espaços $E^3(\kappa, \tau)$. Precisamente eles provaram, para superfícies com curvatura média constante em tais espaços, existe uma certa diferencial quadrática tipo Hopf a qual é holomorfa, veja [13] e claro, isto motivou que a teoria de superfícies fosse profundamente estudada em tais espaços $E^3(\kappa, \tau)$.

A classificação das variedades homogêneas, conexas, simplesmente conexas de dimensão três foi dada em [14]. Tal classificação pode ser dada em termos da dimensão do grupo de isometrias. Precisamente, temos:

- i. As formas espaciais canônicas $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ e \mathbb{S}^3 , cujo grupo de isometrias é 6-dimensional.
- ii. Quando o grupo de isometrias da variedade tridimensional tem dimensão 4, chamamos esses espaços $E^3(\kappa, \tau)$. Assim, temos os seguintes casos,

$$E^3(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}, \text{ se } \kappa < 0 \text{ e } \tau = 0.$$

$$E^3(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}, \text{ se } \kappa > 0 \text{ e } \tau = 0.$$

$$E^3(\kappa, \tau) = Nil_3, \text{ se } \kappa = 0 \text{ e } \tau \neq 0.$$

$$E^3(\kappa, \tau) = PSL_2(\mathbb{R}, \tau), \text{ se } \kappa < 0 \text{ e } \tau \neq 0.$$

Uma importante variedade que não aparece nesta lista é chamada esfera de Berger. As esferas de Berger $E^3(\kappa, \tau) = \mathbb{S}_\tau^3$ estão faltando, dado que seu grupo de isometria está contido no grupo de isometria de \mathbb{S}^3 .

- iii. Quando a dimensão do grupo de isometrias é 3, a variedade possui a geometria do grupo de Lie Sol_3 .

Nas formas espaciais a classificação de superfícies totalmente umbílicas é bem conhecida e muito útil, veja [11]. Em \mathbb{R}^3 são planos e esferas redondas e em \mathbb{S}^3 são esferas redondas. Em \mathbb{H}^3 são planos totalmente geodésicos e seus planos equidistantes, horoesferas e esferas redondas. Em particular todos eles têm curvatura média constante.

Uma pergunta natural é entender as superfícies totalmente umbílicas nas 3-variedades homogêneas restantes. Em [9] foi provado que não existem superfícies totalmente umbílicas em Nil_3 . Nesta dissertação estudamos superfícies totalmente umbílicas nos demais espaços $E^3(\kappa, \tau)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas necessárias para classificar as superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$. Começaremos definindo alguns conceitos de Geometria Diferencial como superfície, curvatura, pontos umbílicos, superfícies completas, dentre outros. Além disso, apresentaremos a classificação das superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$ com $\kappa = \tau = 0$, ou seja, em \mathbb{R}^3 . Em seguida, com o objetivo de obter o teorema de classificação das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, apresentamos de maneira sucinta a geometria das formas espaciais bidimensionais \mathbb{H}^2 e \mathbb{S}^2 . Na última seção, apresentaremos algumas definições básicas da Geometria Riemanniana como variedade diferenciável, métrica Riemanniana, conexão Riemanniana, curvatura de Gauss e curvatura média para superfícies contidas dentro de uma variedade tri-dimensional. As principais referências deste capítulo são [1], [2], [3].

1.1 Superfícies totalmente umbílicas em \mathbb{R}^3

Nesta seção, apresentaremos uma breve revisão de alguns conceitos da geometria diferencial de superfícies no \mathbb{R}^3 , bem como o teorema de classificação das superfícies totalmente umbílicas no \mathbb{R}^3 . A referência utilizada é [1].

Definição 1.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferenciável.
2. X é um homeomorfismo.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação X é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma vizinhança coordenada.



Figura 1.1: Esfera bi-dimensional [3].

O produto interno natural do \mathbb{R}^3 , induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$: Se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em \mathbb{R}^3 . A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Definição 1.2. A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida por (1.1), é chamada a **primeira forma fundamental** da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Definição 1.3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é chamada a **aplicação normal de Gauss** de S .

Observação 1.4. A aplicação de Gauss é diferenciável e a diferencial dN_p de N em $p \in S$ é um operador linear auto-adjunto de $T_p S$.

Dado um operador linear auto-adjunto, existe uma forma quadrática associada. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.5. A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a **segunda forma fundamental** de S em p .

Definição 1.6. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a **curvatura normal** de $C \subset S$ em p .

Definição 1.7. O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 , são chamados **curvaturas principais** em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamadas direções principais em p .

Definição 1.8. Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamada a **curvatura de Gauss** K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamada a **curvatura média** de S em p . Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

1.2 A classificação das superfícies totalmente umbílicas em \mathbb{R}^3

Definição 1.9. Um ponto p de uma superfície S é chamado **ponto umbílico** se $k_1 = k_2$.

Todos os pontos de uma esfera e de um plano são pontos umbílicos. Mostraremos agora o fato interessante que as únicas superfícies constituídas inteiramente de pontos umbílicos são essencialmente esferas e planos.

Proposição 1.10. Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Demonstração: Seja $p \in S$ e seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p tal que a vizinhança coordenada V é conexa. Como cada $q \in V$ é um ponto umbílico temos, para qualquer vetor $w = a_1 X_u + a_2 X_v$ em $T_q S$,

$$dN(w) = \lambda(q)w,$$

onde $\lambda = \lambda(q)$ é uma função diferenciável real em V .

Mostraremos primeiro que $\lambda(q)$ é constante em V . Para isso, escrevemos a equação acima como

$$N_u a_1 + N_v a_2 = \lambda(X_u a_1 + X_v a_2);$$

onde, $N_u = d(N \circ X)_q(e_1)$ e $N_v = d(N \circ X)_q(e_2)$.

Logo, como w é arbitrário

$$\begin{aligned} N_u &= \lambda X_u, \\ N_v &= \lambda X_v, \end{aligned}$$

Derivando a primeira equação em relação a v e a segunda em relação a u , e subtraindo os resultados, obtemos

$$\lambda_u X_v - \lambda_v X_u = 0.$$

Visto que X_u e X_v são linearmente independentes, concluímos que

$$\lambda_u = \lambda_v = 0,$$

para todo $q \in V$. Como V é conexo, λ é constante em V , como havíamos afirmado. Se $\lambda = 0$, $N_u = N_v = 0$ e portanto $N = N_0 = \text{constante}$ em V . Assim,

$$\langle X(u, v), N_0 \rangle_u = \langle X(u, v), N_0 \rangle_v = 0;$$

Logo,

$$\langle X(u, v), N_0 \rangle = \text{const},$$

e todos os pontos $X(u, v)$ de V pertencem a um plano. Se $\lambda \neq 0$, então o ponto $X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) = y(u, v)$ é fixo, pois

$$\left(X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right)_u = \left(X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right)_v = 0.$$

Como

$$|X(u, v) - y(u, v)| = \frac{1}{|\lambda|},$$

todos os pontos de V estão contidos em uma esfera centrada em y com raio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Isto demonstra a proposição localmente, isto é, para uma vizinhança de um ponto $p \in S$. Para completar a prova, observamos que como S é conexa, dado qualquer outro ponto $\gamma \in S$, existe uma curva contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = \gamma$. Para cada ponto $\alpha(t) \in S$ desta curva existe uma vizinhança V_t em S contida ou em uma esfera ou em um plano, e tal que $\alpha^{-1}(V_t)$ é um intervalo aberto de $[0, 1]$. A união $\cup \alpha^{-1}(V_t)$, $t \in [0, 1]$ cobre $[0, 1]$ e, como $[0, 1]$ é um intervalo fechado, é coberto por um número finito de elementos da família $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ (Veja [1], Teorema de Heine-borel, pág 147). Portanto

$\alpha([0, 1])$ é coberto por um número finito de vizinhanças V_t .

Se os pontos de uma destas vizinhanças coordenadas estão em um plano, todas as outras estarão também no mesmo plano. Como γ é arbitrário, todos os pontos de S pertencem a este plano.

Se os pontos de uma destas vizinhanças coordenadas estão em uma esfera, o mesmo argumento mostra que todos os pontos de S pertencem à esfera, e isso completa a demonstração. \square

No que se segue S e \bar{S} denotam sempre superfícies regulares.

Definição 1.11. Uma aplicação $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma **isometria** se φ é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$, temos

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Diz-se então que as superfícies S e \bar{S} são isométricas.

Em outras palavras, um difeomorfismo φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno.

Observação 1.12. Se φ é uma isometria segue-se que

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para todo $w \in T_p S$, onde $I_p(w)$ denota a primeira forma fundamental da superfície S em p . Reciprocamente, se um difeomorfismo φ preserva a primeira forma fundamental, isto é,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \quad \forall w \in T_p S,$$

então

$$\begin{aligned} 2 \langle w_1, w_2 \rangle_p &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &= 2 \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}, \end{aligned}$$

e φ é, portanto, uma isometria.

Definição 1.13. Uma superfície regular conexa S é denominada **completa** quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ de S começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda a reta real \mathbb{R} .

1.3 Geometria Hiperbólica

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos básicos de geometria hiperbólica plana. A principal referência é [2].

A geometria euclideana repousa sobre um sistema de cinco postulados, o mais célebre, o quinto, diz que para toda reta D e p um ponto fora da reta D , existe uma única reta D' que passa por p e é paralela a D . No século XIX se obteve uma geometria que satisfaz os quatro postulados mas o quinto não: a geometria hiperbólica.

1.3.1 O modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^2

Seja o conjunto \mathbb{H}^2 definido por

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}(z) > 0\}$$

chamemos $T_{z_0}\mathbb{H}^2$ o espaço tangente de \mathbb{H}^2 ao ponto z_0 , isto é, o conjunto dos vetores de \mathbb{R}^2 de ponto base z_0 .

O produto escalar entre dois vetores u e v tangentes a z_0 é definido

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle u, v \rangle}{\text{Im}^2(z_0)}$$

onde $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual.

Definição 1.14. 1. A **norma hiperbólica** $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ de \mathbb{H}^2 é definida por

$$\|u\|_{\mathbb{H}} = \frac{\|u\|}{\text{Im}(z_0)}$$

onde $u \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ e $\|\cdot\|$ é a norma usual.

Além disso, a **métrica hiperbólica** $g_{\mathbb{H}}$ de \mathbb{H}^2 é definida

$$g_{\mathbb{H}}(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$$

2. O eixo real $\{y = 0\}$ unido com o infinito $\{\infty\}$ é chamado de **bordo assintótico** e denotado $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$.

$$\partial_{\infty}\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$$

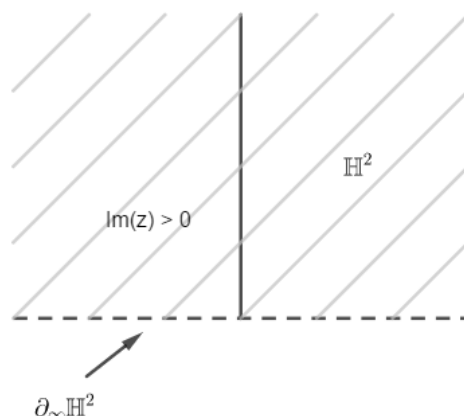


Figura 1.2: Modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^2 .

3. $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ é chamado o semiplano de Poincaré e é um dos modelos do plano hiperbólico.

Definição 1.15. Seja $z_0 \in \mathbb{H}^2$ e $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$. Definimos o **ângulo hiperbólico** entre u e v como sendo o real $\theta \in [0, \pi]$ verificando

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{\mathbb{H}}},$$

e o ângulo orientado entre u e v , denotado $\angle(u, v) \in (-\pi, \pi)$ é definido

$$\cos(\angle(u, v)) = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{\mathbb{H}}}$$

e colocando a condição que $\angle(u, v) > 0$ se, e somente, se $u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$, onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

Definição 1.16. Seja $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva de classe C^1 em \mathbb{H}^2 , $r(t) = (x(t), y(t))$. Diremos que r é uma curva **regular** se para cada $t \in [a, b]$, temos $r'(t) \neq (0, 0)$.

O comprimento hiperbólico de uma curva r de classe C^1 , denotado $L_{\mathbb{H}}(r)$ é definida por

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(r) &= \int_a^b \|r'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt. \end{aligned}$$

Exemplo 1.17. Considere o segmento de reta horizontal

$$c(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_0), \quad t \in [0, 1] \text{ e } y_0 > 0.$$

Então $c'(t) = (x_2 - x_1, 0)$. Daí

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(c) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{y_0} dt \\ &= \frac{|x_2 - x_1|}{y_0}. \end{aligned}$$

Definição 1.18. Sejam U e V dois conjuntos abertos de \mathbb{C} . Diremos que uma aplicação complexa $f : U \rightarrow V$ é uma **aplicação conforme** se ela preserva os ângulos orientados. Mais precisamente, para cada ponto $z_0 \in U$ e cada vetor $u, v \in T_{z_0}U$, o ângulo orientado entre os vetores u e v é igual ao ângulo orientado entre $D_{z_0}f(u)$ e $D_{z_0}f(v)$, isto é,

$$\angle(u, v) = \angle(D_{z_0}f(u), D_{z_0}f(v))$$

No caso particular onde $f : U \rightarrow U$ é uma bijeção conforme, chamaremos tal função transformação conforme de U .

O seguinte resultado estabelece uma relação direta entre aplicações conformes e aplicações holomorfas entre dois abertos de \mathbb{C} .

Lema 1.19. Sejam U e V dois abertos de \mathbb{C} e seja $f : U \rightarrow V$ uma aplicação. A aplicação f é conforme se, e somente se, f é holomorfa e verifica que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

Demonstração: Lembre-se que $f(z) = (P(z), Q(z))$ é holomorfa se, e somente, se f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} P_x &= Q_y \\ P_y &= -Q_x \end{aligned}$$

\Rightarrow)

1. Sejam $f(z) = P(z) + iQ(z)$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Como f é conforme então $D_{z_0}f$ leva e_1 e e_2 em vetores ortogonais. Seja L a rotação que leva $D_{z_0}f(e_1)$ sobre e_1 . Consequentemente $D_{z_0}f(e_2)$ sobre e_2 . Ou seja,

$$L(D_{z_0}f(e_1)) = \lambda e_1 \quad e \quad L(D_{z_0}f(e_2)) = \alpha e_2$$

como f preserva ângulos orientados, temos que $\lambda = \alpha$. Logo

$$L(D_{z_0}f(u)) = \lambda u,$$

isto é, $L(D_{z_0}f(u))$ é uma homotetia. Assim,

$$\begin{aligned} D_{z_0}f(u) &= L^{-1}(\lambda u) \\ &= \lambda L^{-1}(u) \\ &= \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda \cos \theta u_1 - \lambda \operatorname{sen} \theta u_2, \lambda \operatorname{sen} \theta u_1 + \lambda \cos \theta u_2). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Df(u) &= \begin{bmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_x u_1 + P_y u_2 \\ Q_x u_1 + Q_y u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lambda \cos \theta u_1 - \lambda \operatorname{sen} \theta u_2 &= P_x u_1 + P_y u_2 \\ \lambda \operatorname{sen} \theta u_1 + \lambda \cos \theta u_2 &= Q_x u_1 + Q_y u_2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_x &= \lambda \cos \theta, \quad P_y = -\lambda \operatorname{sen} \theta \\ Q_x &= \lambda \operatorname{sen} \theta, \quad Q_y = \lambda \cos \theta \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_x &= Q_y \\ P_y &= -Q_x \end{aligned}$$

Logo, f é holomorfa.

2. Seja f do item 1. Como f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, segue-que

$$D_z f(u) = f'(z)u \quad \forall u \in T_z U.$$

Se $f'(z) = 0$ implica $D_z f(u) = 0$. Logo, $D_z f(u) \notin T_z U$, (Absurdo). Portanto, $f'(z) \neq 0$.

⇐) Note que

$$\begin{aligned} \frac{\langle D_z f(u), D_z f(v) \rangle_{\mathbb{H}}}{\|D_z f(u)\|_{\mathbb{H}} \|D_z f(v)\|_{\mathbb{H}}} &= \frac{\langle f'(z)u, f'(z)v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|f'(z)u\|_{\mathbb{H}} \|f'(z)v\|_{\mathbb{H}}} \\ &= \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{\mathbb{H}}}. \end{aligned}$$

Assim, $\angle(u, v) = \angle(D_z f(u), D_z f(v))$ e portanto f é uma aplicação conforme. \square

Consideremos o disco unitário aberto \mathbb{D} ,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$$

Vamos enunciar o conjunto de transformações conformes de \mathbb{D} , que será denotado $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$. Tal conjunto, munido da operação de composição de funções é um grupo. Este grupo é chamado de grupo de Mobius de \mathbb{D} .

Da mesma forma o conjunto das transformações conformes de \mathbb{H}^2 , denotado $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ é um grupo chamado o grupo de Mobius de \mathbb{H}^2 .

Proposição 1.20. O grupo de transformações conformes de \mathbb{D} é

$$\mathcal{M}_{\mathbb{D}} = \left\{ z \mapsto \frac{e^{i\theta}(z - z_0)}{z\bar{z}_0 - 1} \mid \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| < 1 \right\}.$$

Demonstração: Veja [2], pág 49. \square

Proposição 1.21. O grupo de transformações conformes de \mathbb{H}^2 é

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Demonstração: Veja [2]. \square

Definição 1.22. Uma transformação de Moebius $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é uma aplicação da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

onde $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Observação 1.23. As transformações conformes de \mathbb{D} e \mathbb{H}^2 são transformações de Moebius.

Definição 1.24. Seja $C = C(z_0, r)$ um círculo de centro z_0 e raio r . A **Inversão** com respeito ao círculo C , é a aplicação I_C que leva um número complexo $z \neq z_0$ no número

z^* , que está sobre a semirreta partindo de z_0 passando por z que satisfaz:

$$|z - z_0| |z^* - z_0| = r^2.$$

Se C é uma reta então a inversão por C é definida como sendo a reflexão pela reta C .

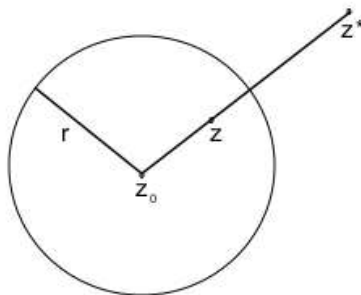


Figura 1.3: Inversão com respeito ao círculo C .

Note que $z^* - z_0 = \lambda (z - z_0)$, $\lambda > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} |z - z_0| |\lambda (z - z_0)| &= r^2 \\ \lambda |z - z_0|^2 &= r^2 \\ \lambda &= \frac{r^2}{|z - z_0|^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $z^* = z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0)$, então

$$\begin{aligned} I_C(z) &= z_0 + \frac{r^2}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}(z - z_0) \\ &= z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \end{aligned}$$

Além disso, os elementos $z \in C(z_0, r)$ são fixados por I_C , pois

$$\begin{aligned} I_C(z) &= z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0) \\ &= z_0 + z - z_0 \\ &= z. \end{aligned}$$

1.3.2 As geodésicas do modelo do semi-plano superior e o disco de Poincaré

Lembremos que a distância euclideana entre dois pontos de \mathbb{R}^2 é igual ao comprimento do segmento de reta conectando esses dois pontos, isto é, o mínimo dos comprimentos das curvas conectando aqueles pontos. Definimos a distância hiperbólica entre dois pontos z_1, z_2 de \mathbb{H}^2 , denotado $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$ como

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \inf\{L_{\mathbb{H}}(c), c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2; c(0) = z_1, c(1) = z_2, c \in C^1 \text{ por partes}\},$$

isto é, $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$ é o mínimo comprimento das curvas que ligam z_1 e z_2 .

Uma pergunta natural é saber se para dois pontos dados de \mathbb{H}^2 , existe sempre uma curva minimizante que liga esses dois pontos.

Definição 1.25. Diremos que uma curva de classe C^1 por partes e regular $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma **geodésica**, se para cada par de pontos em $c([a, b])$ a curva c é minimizante entre esses pontos, isto é,

$$d_{\mathbb{H}}(c(t_1), c(t_2)) = L_{\mathbb{H}}(c)[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \|c'(t)\|_{\mathbb{H}} dt, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

Definição 1.26. Dizemos que um difeomorfismo φ de \mathbb{H}^2 é uma **isometria** de \mathbb{H}^2 , se φ preserva a métrica $g_{\mathbb{H}}$, isto é,

$$g_{\mathbb{H}}(u, v) = g_{\mathbb{H}}(D_z\varphi(u), D_z\varphi(v)) \quad \forall z \in \mathbb{H}^2, u, v \in T_z\mathbb{H}^2.$$

Além disso, φ é uma isometria **positiva** se preserva a orientação. Caso contrário diremos que φ é uma isometria **negativa**.

Observação 1.27. Toda isometria positiva de \mathbb{H}^2 é uma transformação conforme, pois preserva o ângulo orientado entre vetores tangentes.

Teorema 1.28. Toda transformação conforme do modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^2 é uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$. Denotaremos $\ell_{\mathbb{H}^2}$ o grupo das isometrias de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ e consideremos a isometria negativa de \mathbb{H}^2 definida por $h(z) = -\bar{z}$, então

$$\ell_{\mathbb{H}^2} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}; z \mapsto \frac{-a\bar{z} - b}{c\bar{z} + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

Demonstração: Veja [2], pág 57. □

Lema 1.29. As semirretas verticais

$$\gamma(t) = x_0 + it, \quad t \in [0, \infty),$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}$, são as geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$.

Demonstração: Basta provar que para qualquer curva α de \mathbb{H}^2 ligando p e q tem comprimento maior que $L_H(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$. Suponha $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva de classe C^1 por partes tal que $\alpha(0) = \gamma(t_1)$ e $\alpha(1) = \gamma(t_2)$, então

$$\begin{aligned} L_H(\alpha) &= \int_0^1 \|\alpha'(t)\|_H dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &= |\ln(y(1)) - \ln(y(0))|. \end{aligned}$$

Note que por hipóteses $\alpha(0) = \gamma(t_1)$ e $\alpha(1) = \gamma(t_2)$, então

$$\begin{aligned} \text{Im}(\gamma(t_2)) &= t_2 = y(1) \\ \text{Im}(\gamma(t_1)) &= t_1 = y(0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_H(\alpha) &= |\ln(\text{Im}\gamma(t_2)) - \ln(\text{Im}\gamma(t_1))| \\ &= L_H(\gamma)[\gamma(t_1), \gamma(t_2)] \end{aligned}$$

□

Lema 1.30. Os semicírculos ortogonais ao bordo assintótico, são geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$.

Demonstração: Sejam $C = C(x_0, r)$ e $C' = C(x_0 + r, 2r)$. Observe que $I_{C'}(C) = L$, pois

$$\begin{aligned} I_{C'}(x_0 - r) &= x_0 + r + \frac{4r^2}{x_0 - r - (x_0 + r)} \\ &= x_0 - r \\ I_{C'}(x_0 + r) &= x_0 + r + \frac{4r^2}{x_0 + r - (x_0 + r)} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como $I_{C'}$ leva círculos em retas ou círculos, temos que $I_{C'}(C) = L$. Daí, como $I_{C'}$ é uma isometria, pois é uma isometria negativa e L é uma geodésica de \mathbb{H}^2 , então $I_{C'}^{-1}(L) = C$ é uma geodésica de \mathbb{H}^2 . \square

Agora enunciaremos quais são todas geodésicas do modelo do semi-plano superior \mathbb{H}^2 .

Teorema 1.31. Por dois pontos de \mathbb{H}^2 passa uma única geodésica. Além disso as únicas geodésicas de \mathbb{H}^2 são as semirretas verticais e os semicírculos ortogonais ao eixo real.

Demonstração: Veja [2], pág 62. \square

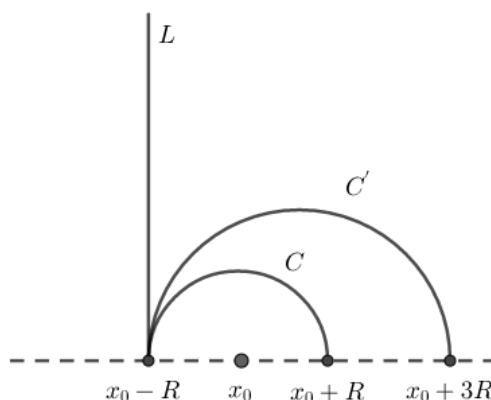


Figura 1.4: Geodésicas do modelo do semi-plano superior.

Observação 1.32. O fato que por dois pontos de \mathbb{H}^2 passa uma única geodésica não é verdade para todas as superfícies. Em (\mathbb{S}^2, g_S) , onde g_S é a métrica induzida por \mathbb{R}^3 , existe uma infinidade de grandes círculos (que são geodésicas) passando pelo polo norte e pelo polo sul.

Definição 1.33. Diremos que uma geodésica γ é **completa** se suas extremidades estão no bordo assintótico de \mathbb{H}^2 .

Denotamos \mathbb{D} o disco unitário aberto

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} ; |w| < 1\}.$$

A aplicação $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$, conhecida na literatura como Transformação de Cayley e definida por $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $z \neq -i$, é um difeomorfismo conforme de \mathbb{D} . De fato, seja $z \in \mathbb{H}^2$, então $\varphi'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$. Assim,

$$\varphi'(z) = 0 \implies i = 0,$$

o que é um absurdo. Logo, $\varphi'(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}^2$. Assim φ é holomorfa e $\varphi'(z) \neq 0$ então φ é conforme de \mathbb{H}^2 em \mathbb{D} .

Vamos agora munir \mathbb{D} de uma métrica $g_{\mathbb{D}}$ tal que φ seja uma isometria entre $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ e $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$. Denotemos por um lado $w = u + iv$ as coordenadas em \mathbb{D} , e por outro lado $z = x + iy$ as coordenadas em \mathbb{H}^2 .

Lema 1.34. A única métrica $g_{\mathbb{D}}$ definida em \mathbb{D} tal que φ seja uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ em $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ é

$$g_{\mathbb{D}} = \frac{4 \langle \cdot, \cdot \rangle}{(1 - |w|^2)^2}; \quad w = u + iv \text{ e } |w| < 1,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano.

Demonstração: Suponhamos que exista uma métrica $g_{\mathbb{D}}$ tal que φ seja uma isometria, então

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{D}}(a, b) &= g_{\mathbb{H}}(D_w \varphi^{-1}(a), D_w \varphi^{-1}(b)) \\ &= \frac{\langle (\varphi^{-1})'(w)a, (\varphi^{-1})'(w)b \rangle}{Im^2(\varphi^{-1}(w))}. \end{aligned}$$

Note que

$$Im(\varphi^{-1}(w)) = \frac{1 - |w|^2}{(1 - w)(1 - \bar{w})} e (\varphi^{-1})'(w) = \frac{2i}{(1 - w)^2}.$$

Daí,

$$g_{\mathbb{D}}(a, b) = \frac{4 \langle a, b \rangle}{(1 - |w|^2)}.$$

□

Observação 1.35. 1. O disco \mathbb{D} munido da métrica $g_{\mathbb{D}}$ é um modelo da geometria hiperbólica plana, conhecido como modelo do disco de Poincaré .

2. O bordo de \mathbb{D} é chamado bordo assintótico de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, denotado $\partial_{\infty} \mathbb{D}$, definido por $\partial_{\infty} \mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\} = \mathbb{S}^1$.

A seguinte proposição classifica todas as geodésicas do disco de Poincaré.

Proposição 1.36. As geodésicas de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais a \mathbb{S}^1 .

Demonstração: Sabemos que φ é uma isometria de \mathbb{H}^2 em \mathbb{D}^2 então φ preserva distância entre os pontos e os comprimentos hiperbólicos das curvas. Como φ é uma transformação de Moebius que envia $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ em $\partial_\infty \mathbb{D}$, então φ envia as semirretas e semicírculos ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ em porções de retas ou de círculos de \mathbb{D} ortogonais ao $\partial_\infty \mathbb{D}$. Daí, como φ leva geodésica em geodésica, segue que os diâmetros e os semicírculos ortogonais a \mathbb{D} são geodésicas. \square

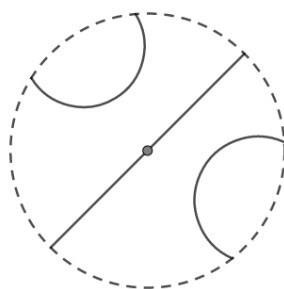


Figura 1.5: Geodésicas do modelo do disco.

Observação 1.37. As propriedades das geodésicas de \mathbb{H}^2 são igualmente válidas para as geodésicas de \mathbb{D} .

O grupo de transformações conformes de \mathbb{D} é o grupo de Moebius $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$, definido

$$\mathcal{M}_{\mathbb{D}} = \left\{ w \rightarrow \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}} \mid a, c \in \mathbb{C}, a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}.$$

Agora queremos saber qual é o grupo de isometrias positivas de \mathbb{D} , denotado $L_{\mathbb{D}^+}$.

Proposição 1.38. O grupo $(L_{\mathbb{D}^+}, o)$ das isometrias positivas de \mathbb{D} é o grupo $\mu_{\mathbb{D}}$ das transformações conformes de \mathbb{D} .

$$L_{\mathbb{D}^+} = \mathcal{M}_{\mathbb{D}} = \left\{ w \rightarrow \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}} \mid a, c \in \mathbb{C}, a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}.$$

Demonstração: Veja [2], pág 72. \square

1.3.3 Descrição das isometrias positivas de \mathbb{H}^2

Nesta seção descreveremos geometricamente as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 , as quais são classificadas em três tipos: isometrias parabólicas, isometrias elípticas e isometrias

hiperbólicas. Tais isometrias serão fundamentais para classificar as superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Definição 1.39. Os **horociclos** de \mathbb{H}^2 são os círculos tangentes ao bordo assintótico e as retas horizontais contidas em \mathbb{H}^2 .



Figura 1.6: Horociclos de \mathbb{H}^2 .

Proposição 1.40. A imagem de todo horociclo de \mathbb{H}^2 por uma isometria qualquer de \mathbb{H}^2 é um horociclo.

Demonstração: Seja $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma isometria e C um círculo tangente ao bordo assintótico. Como f é isometria então f é uma transformação de Moebius, ou seja, leva círculos ou retas em círculos ou retas.

Se $f(x_0) \in \mathbb{R}$ então $f(C)$ não pode ser uma reta de \mathbb{H}^2 , pois nenhuma reta é tangente ao ponto $f(x_0)$, então segue que $f(C)$ é um círculo tangente ao $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Se $f(x_0) = \infty$ então $f(C)$ não pode ser um círculo pois não existe círculo tangente ao ∞ , então $f(C)$ é uma reta e deve ser horizontal tangente ao bordo assintótico.

O caso em que C é uma reta horizontal é análogo. □

As isometrias positivas de \mathbb{H}^2 podem ser classificadas quanto ao número de pontos fixos. Vejamos a seguir esta classificação.

Seja T uma isometria positiva de \mathbb{H}^2 diferente da identidade, isto é,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

1. Suponha $c \neq 0$. Um ponto $z \in \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ é fixo por T se, e somente, se $T(z) = z$, ou seja,

$$\begin{aligned} z &= \frac{az + b}{cz + d} \\ cz^2 + dz - az - b &= 0 \\ cz^2 + (d - a)z - b &= 0 \\ z &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} \end{aligned}$$

2. Se $c = 0$, então T é da forma $T(z) = az + b$. O ∞ é um ponto fixo de T pois $T(\infty) = \infty$.
 Se $a = 1$, $T(z) = z + b$ então $b = 0$.
 Se $a \neq 1$, $T(z) = az + b$ então $z = \frac{b}{1 - a}$.

Definição 1.41. 1. Dizemos que T é uma **isometria hiperbólica** ou **transformação hiperbólica** quando $c \neq 0$ e $\Delta > 0$, a isometria possui dois pontos fixos no eixo real, ou se $T(z) = az + b$, com $a \neq 1$, T possui um ponto fixo no eixo real e o ∞ .

2. Dizemos que T é uma **isometria parabólica** ou **transformação parabólica** quando $c \neq 0$ e $\Delta = 0$. A isometria possui apenas um único ponto no eixo real. Se $T(z) = z + b$, $b \neq 0$ então o único ponto fixo é ∞ .
3. Dizemos que T é uma **isometria elíptica** ou **transformação elíptica** se $c \neq 0$ e $\Delta < 0$, então T possui apenas um único ponto fixo em \mathbb{H}^2 .

A seguir, descreveremos geometricamente as isometrias positivas, isto é, aquelas que preservam a orientação de \mathbb{H}^2 , examinando sua ação sobre as geodésicas e horociclos.

Isometrias hiperbólicas

Sejam f uma isometria hiperbólica de \mathbb{H}^2 , x_1 e x_2 seus pontos fixos de f sobre o bordo de \mathbb{H}^2 , ou seja, $x_1, x_2 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$. Seja r a geodésica completa de \mathbb{H}^2 de extremos x_1 e x_2 . Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então r é um semicírculo ortogonal ao bordo assintótico.

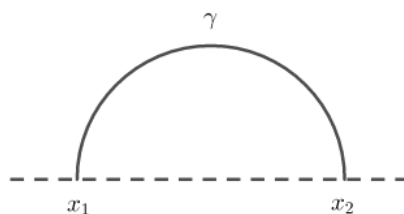


Figura 1.7: Geodésica completa γ com extremos x_1 e x_2 .

Se $x_1 = \infty$ ou $x_2 = \infty$ então r é a semirreta vertical que começa em x_1 ou x_2 .

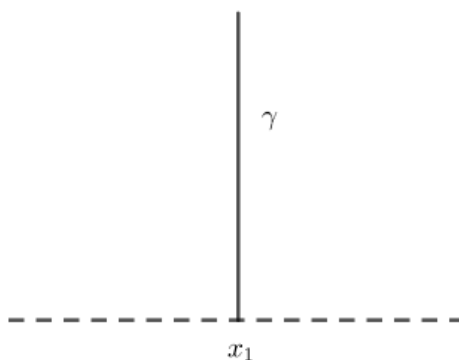


Figura 1.8: Geodésica completa γ com extremos x_1 e ∞ .

Note que a imagem de r pela f é uma geodésica cujas extremidades são x_1 e x_2 , pois x_1 e x_2 são pontos fixos e f é isometria, então a única geodésica com tais extremidades é r . Logo, f é globalmente invariante, isto é, $f(r) = r$.

Seja $p \in r$, temos que $f(p) \in r$. Supondo, sem perda de generalidade, que a orientação é de x_1 a x_2 . Seja $q \neq p \in r$, onde q está entre p e $f(p)$ então $f(q)$ está entre $f(p)$ e x_2 pois f é injetiva.

Proposição 1.42. A distância hiperbólica entre um ponto qualquer de r e sua imagem pela f é constante, onde f é uma translação hiperbólica.

Demonstração: Queremos mostrar que $d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) = cte$, onde $p \in r$. Para isto, basta observar que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(p, f(q)) &= d_{\mathbb{H}}(p, q) + d_{\mathbb{H}}(q, f(q)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(p, f(p)) + d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

Como f é uma isometria então $d_{\mathbb{H}}(p, q) = d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q))$. Assim,

$$d_{\mathbb{H}}(q, f(q)) = d_{\mathbb{H}}(p, f(p)).$$

Logo, $d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) = cte$. □

Portanto a distância hiperbólica entre um ponto qualquer de r e sua imagem pela f é constante, chamemos de λ esta constante, $\lambda > 0$. Concluimos que f envia cada ponto de r sobre o ponto de r situado entre p e x_2 , se encontrando a uma distância hiperbólica λ de p .

Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{H}^2 . Seja α a única geodésica completa de \mathbb{H}^2 passando por z_0 e ortogonal a r . Seja p a interseção de α com r . Necessariamente $f(\alpha)$ é a geodésica passando por $f(p)$ e ortogonal a r . Mas $f(z_0)$ é um dos dois pontos de $f(\alpha)$ situados a uma distância hiperbólica de $f(p)$ igual a $d_{\mathbb{H}}(z_0, p)$ porque $d_{\mathbb{H}}(z_0, p) = d_{\mathbb{H}}(f(z_0), f(p))$. Finalmente como f preserva a orientação de \mathbb{H}^2 , $f(z_0)$ se encontra na mesma componente conexa de $\mathbb{H}^2 - \{r\}$ que z_0 . Isto, determina completamente a imagem de z_0 e determina a descrição geométrica de uma isometria hiperbólica de \mathbb{H}^2 .

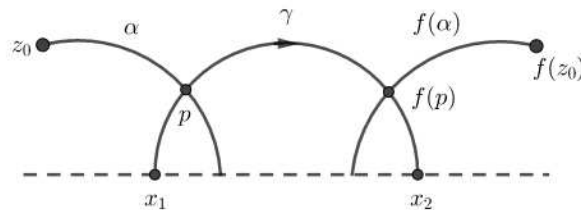


Figura 1.9: Isometria hiperbólica.

Observação 1.43. f definida anteriormente é chamada translação hiperbólica de largura λ ao longo de r no sentido x_1 a x_2 .

Isometrias parabólicas

Suponha f uma isometria parabólica e x_1 o seu único ponto fixo, $x_1 \in \partial_{\infty}\mathbb{H}^2$. Se $x_1 = \infty$ então $f(z) = z + b$, $b \neq 0$. Portanto f é uma translação horizontal euclidiana do vetor $(b, 0)$. Neste caso a descrição geométrica de f se resume a uma translação euclidiana.

Note que os horociclos de \mathbb{H}^2 que são tangentes ao ∞ são as retas horizontais e mais f deixa globalmente fixa cada uma dessas retas.

Consideremos agora um ponto $p = (x, y_0) > 0$ do horociclo $C_{y_0} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) = y_0\}$ de modo que $f(p) = p + b = (x + b, y_0)$.

O comprimento hiperbólico do arco C_{y_0} limitado por p e $f(p)$ é $\frac{|b|}{y_0}$. De fato,

O segmento que liga p e $f(p)$ é

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1-t)p + tf(p), \quad t \in [0, 1] \\ &= (x + tb, y_0)\end{aligned}$$

$$\alpha'(t) = (b, 0),$$

$$\begin{aligned}L_{\mathbb{H}}(\alpha) &= \int_0^1 \|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{b^2}}{y_0} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|b|}{y_0} dt \\ &= \frac{|b|}{y_0}.\end{aligned}$$

Concluimos que f envia cada ponto $p \in \mathbb{H}^2$ em um dos dois pontos do horociclo passando por p , o sinal de b determinará qual dos dois pontos é a imagem de p .

Suponha que $x_1 \neq \infty \in \mathbb{R}$. Observe que fazendo as relações $ad - bc = 1$, $|a + d| = 2$ e $f(x_1) = x_1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} &= x_1 \\ ax_1 + b &= cx_1^2 + dx_1.\end{aligned}$$

Daí, se $|a + d| \geq 0$, então

$$\begin{aligned}cx_1^2 + (d - a)x_1 &= b \\ a + d &= 2 \\ ad - bc &= 1.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}b &= cx_1^2 + (d - a)x_1 \\ &= cx_1^2 + 2(d - 1)x_1.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Então

$$\begin{aligned}(2-d)d - (cx_1^2 + 2(d-1)x_1)c &= 1 \\ cd + c^2(x_1 - 1) &= 0 \\ d &= 1 - cx_1.\end{aligned}\tag{1.4}$$

De (1.2), (1.3) e (1.4), temos $a = 1 + cx_1$, $b = -cx_1^2$. Assim,

$$f(z) = \frac{(1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz + 1 - cx_1}, \quad c \neq 0.$$

Logo, se $a + d = 2$ então

$$f(z) = \frac{(1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz + 1 - cx_1}.$$

Se $a + d = -2$ então

$$f(z) = \frac{(-1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz - 1 - cx_1}.$$

Considere a isometria positiva $g(z) = \frac{1}{x_1 - z}$, temos $g(x_1) = \infty$ e $g^{-1}(z) = -1/z + x_1$.

Seja $R = g \circ f \circ g^{-1}$, observe que R é uma isometria positiva pois f^{-1}, f, g são isometrias positivas. Tome z um ponto fixo de R então $R(z) = z$ se, e somente, se $g(f(g^{-1}(z))) = z$ se, somente, se $z = g(x_1) = \infty$, então R é um a isometria parabólica cujo único ponto fixo é ∞ , então $R(z) = z + k$, $k \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}^2$. Isto vai simplificar consideravelmente a descrição geométrica de f .

Seja C um horociclo tangente ao $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ em $x_1 \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}f &= g^{-1} \circ R \circ g \\ f(c) &= g^{-1}(R(g(c))).\end{aligned}$$

Logo, $g(C)$ é uma reta horizontal então $R(g(c)) = g(C)$ pois R deixa fixa cada uma dessas retas por ser uma isometria parabólica. Assim,

$$\begin{aligned}f(c) &= g^{-1}(g(c)) \\ &= C.\end{aligned}$$

Portanto f deixa globalmente fixo todo horociclo tangente ao $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ no ponto $x_1 \in \mathbb{R}$.

Determinemos agora a imagem de um ponto qualquer de \mathbb{H}^2 . Seja p um ponto de \mathbb{H}^2 , chamemos C_p o único horociclo passando por p e tangente a \mathbb{R} no ponto x_1 . A imagem de p se encontra sobre C_p porque f preserva cada horociclo tangente ao ponto x_1 . Note que o comprimento hiperbólico do arco de C_p limitado por p e $f(p)$ é

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}[p, f(p)] &= L_{\mathbb{H}}g(C_p)[g(p), R(g(p))] \\ &= \frac{|R(g(p)) - g(p)|}{Im(g(p))} \\ &= \frac{|c| \cdot |x_1 - p|^2}{Im(p)} \end{aligned}$$

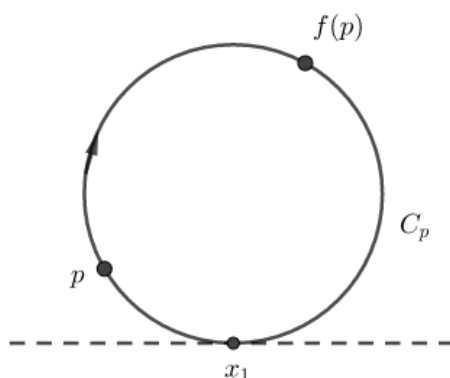


Figura 1.10: Isometria parabólica.

Logo, f envia cada ponto p de \mathbb{H}^2 em um dos dois pontos que se encontram sobre o mesmo horociclo C_p passando por p e tangente ao ponto x_1 a \mathbb{R} e tal que o comprimento hiperbólico do arco C_p limitado por p cada um de seus pontos seja $\frac{|c| \cdot |x_1 - p|^2}{Im(p)}$. A escolha deste ponto é determinada pelo sinal de c .

Isometrias elípticas

Consideremos f uma isometria elíptica. Seja $z_0 \in \mathbb{H}^2$ o ponto fixo de f . Lembremos que se $u \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ é um vetor tangente ao ponto z_0 , sua imagem pela $D_{z_0}f$ é $f'(z_0)u$, isto é, o vetor tangente a z_0 é obtido girando um ângulo igual ao $\arg f'(z_0)$ multiplicando por um real $|f'(z_0)|$. Em consequência se r é a geodésica passando por z_0 e tangente a u , sua imagem pela f é a geodésica passando por z_0 e tangente a $e^{i\theta}u$ onde $\theta = \arg f'(z_0)$. De fato,

Sabemos que $\cos \theta = \frac{\langle f'(z_0)u, u \rangle}{\|f'(z_0)u\| \|u\|}$ e além disso, $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\alpha}$, onde $\alpha = \arg(f'(z_0))$ e $u = u_1 + iu_2$, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0)u &= |f'(z_0)|e^{i\alpha}(u_1 + iu_2) \\ &= (|f'(z_0)|(\cos \alpha u_1 - \text{sen } \alpha u_2), |f'(z_0)|(\cos \alpha u_2 + \text{sen } \alpha u_1)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle f'(z_0)u, u \rangle &= |f'(z_0)|(u_1^2 + u_2^2) \cos \alpha \\ &= |f'(z_0)| \|u\|^2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Daí,

$$\cos \theta = \frac{|f'(z_0)| \|u\|^2 \cos \alpha}{|f'(z_0)| \|u\|^2},$$

isto, implica que $\theta = \alpha = \arg(f'(z_0))$ pois o ângulo orientado está entre $(-\pi, \pi)$.

Seja $z \neq z_0 \in \mathbb{H}^2$. Seja r a única geodésica passando pelos pontos z e z_0 . Seja $u \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ um vetor não nulo tangente a r ao ponto z_0 . Chamemos r^+ a componente conexa de $r - \{z_0\}$ contendo z . Sem perda de generalidade vamos supor que a orientação seja de $z_0 \rightarrow z$, então a imagem de r^+ pela f é a semi-geodésica que termina em z_0 e começa em $f(z)$, onde o vetor $D_{z_0}f(a)$ tangente unitário faz um ângulo orientado $\theta = \arg f'(z_0)$ com u . Por consequência $f(z)$ é o único ponto de $f(r^+)$ tal que $d(f(z), z_0) = d(z, z_0)$, pois z_0 é ponto fixo e f é uma isometria. Isto determina completamente $f(z)$. Note que f se comporta como uma rotação hiperbólica de centro z_0 e de argumento $\theta = \arg f'(z_0)$.

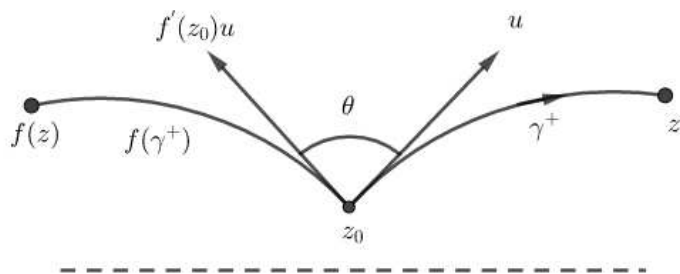


Figura 1.11: Isometria elíptica.

As isometrias do disco de Poincaré \mathbb{D} são classificadas analogamente como no caso do modelo do semi-plano superior, que podem ser explicitas mediante a isometria $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Os três tipos de isometrias são:

- 1 As isometrias (translações) hiperbólicas, que admitem dois pontos fixos distintos no bordo assintótico de \mathbb{D} , são translações sobre a mesma geodésica (se o ponto está na geodésica) ou translações sobre a equidistante que junta os dois pontos fixos (se o ponto não está sobre a geodésica).
- 2 As isometrias (translações parabólicas) que admitem um ponto fixo duplo no bordo assintótico de \mathbb{D} , são isometrias que deixam globalmente fixo cada horociclo tangente ao ponto fixo, isto é, dado um ponto p sua imagem $f(p)$ mora no horociclo que passa por p e é tangente ao ponto fixo.
- 3 As isometrias elípticas que admitem um único ponto fixo em \mathbb{D} , são as rotações hiperbólicas.

1.4 Geometria Esférica

Nesta seção, vamos introduzir alguns conceitos básicos de geometria esférica. A principal referência é [4].

A esfera Euclidiana é o conjunto,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

dotada da métrica induzida do espaço Euclidiano tridimensional.

Considerando a projeção estereográfica, podemos escrever \mathbb{S}^2 na forma intrínseca (isto é, sem menção do espaço ambiente) como:

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty,$$

dotado da métrica,

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2), \quad \lambda = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}.$$

A base natural é dada por $\{\partial_x, \partial_y\}$ e a base ortonormal é dada por $\{e_1 = \lambda^{-1}\partial_x, e_2 = \lambda^{-1}\partial_y\}$.

Denotamos por $Isom(\mathbb{S}^2)$ o grupo de isometrias de \mathbb{S}^2 . É bem conhecido o seguinte resultado:

Proposição 1.44. O grupo de isometrias da esfera Euclidiana é dada por,

$$\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = O(3),$$

onde, $O(3)$ é o grupo de matrizes ortogonais de ordem 3×3 .

Demonstração: Veja [16], pág 36. □

Observação 1.45. As únicas geodésicas de \mathbb{S}^2 são os grandes círculos.

1.5 Geometria Riemanniana

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos básicos de Geometria Riemanniana, bem como apresentar como são as isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e as geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. As principais referências são [3], [4], [5].

A seguinte definição é uma generalização do conceito de superfície no \mathbb{R}^3 .

Definição 1.46. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:

1. $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições (1) e (2).

Observação 1.47. O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Exemplo 1.48. São exemplos de variedades diferenciáveis: as $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$.

Definição 1.49. Sejam M e N variedades diferenciáveis e sejam $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}, \{(V_\beta, y_\beta)\}$ estruturas diferenciáveis de M e N respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e as aplicações $z_{\alpha\beta}(p, q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$, $p \in U_\alpha, q \in V_\beta$. $M \times N$ com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})\}$, na qual as projeções $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ são diferenciáveis é chamada a **variedade produto** de M por N .

Definição 1.50. Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Exemplo 1.51. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ as projeções naturais. Introduza em $M_1 \times M_2$ uma métrica Riemanniana pondo:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q,$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$.

Definição 1.52. Uma aplicação diferenciável $f : \overline{M}^{n+k} \rightarrow M^n$ é uma **submersão** se f é sobrejetiva, e para todo $\bar{p} \in \overline{M}$, $df_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}\overline{M} \rightarrow T_{f(\bar{p})}M$ tem posto n . Neste caso, para todo $p \in M$, a fibra $f^{-1}(p) = F_p$ é uma subvariedade de \overline{M} e um vetor tangente de \overline{M} , tangente a algum F_p , $p \in M$, é chamado um vetor vertical da submersão. Se, além disto, \overline{M} e M tem métricas Riemannianas, a submersão f diz-se **Riemanniana** se, para todo $p \in \overline{M}$, $df_p : T_p\overline{M} \rightarrow T_{f(p)}M$ preserva comprimentos de vetores ortogonais a F_p .

Ao definir uma certa estrutura é interessante estabelecer uma noção de equivalência para esta estrutura.

Definição 1.53. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um **difeomorfismo** $f : M \rightarrow N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_p M$$

A seguir, apresentaremos um resultado sobre as isometrias em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{M}^2 é uma variedade bi-dimensional.

Lema 1.54. Seja $f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ definida por $f(z, t) = (f_1(z), f_2(t))$, então f é uma isometria em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ se, f_1 é isometria de \mathbb{M}^2 e f_2 é isometria de \mathbb{R} .

Demonstração: Seja $p = (p_h, p_v)$ e $v = (v_h, v_v) \in T_p \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
 \|Df_p(v)\|^2 &= \left\| \frac{\partial f_1}{\partial z} v_h + \frac{\partial f_2}{\partial t} v_v \right\|^2 \\
 &= \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial z} v_h, \frac{\partial f_1}{\partial z} v_h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_2}{\partial t} v_v, \frac{\partial f_2}{\partial t} v_v \right\rangle_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}} \\
 &= \|Df_{1p_h}(v_h)\|^2 + \|Df_{2p_v}(v_v)\|^2 \\
 &= \|v_h\|^2 + \|v_v\|^2 \\
 &= \|(v_h, v_v)\|^2 \\
 &= \|v\|^2.
 \end{aligned}$$

Daí, $\|Df_p(v)\| = \|v\|$. □

Observação 1.55. A recíproca do lema anterior, em geral, não é verdadeira. Um contraexemplo é a isometria linear em \mathbb{R}^3 , com coordenadas $((x, y), t)$ dada pela matriz ortogonal representada na base canônica da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas, tal isometria é uma rotação em torno do eixo x dada por

$$T(x, y, t) = (x, y \cos \theta - t \text{sen } \theta, y \text{sen } \theta + t \cos \theta) = (f_1, f_2).$$

Mas observe que $f_1 = (x, y \cos \theta - t \text{sen } \theta)$ e $f_2 = (y \text{sen } \theta + t \cos \theta)$ claramente não são isometrias de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R} , respetivamente.

A recíproca do lema anterior é verdadeira quando $\mathbb{M}^2 = \mathbb{H}^2$, como podemos ver no seguinte lema:

Lema 1.56. Seja $f : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definida por $f(z, t) = (f_1(z), f_2(t))$, então f é uma isometria em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ se, e somente se, f_1 é isometria de \mathbb{H}^2 e f_2 é isometria de \mathbb{R} .

Demonstração: A demonstração da volta é trivial, basta usar o Lema [1.54](#). Para a ida faremos o seguinte: Seja $G = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) / g = (g_1, g_2)\}$ Como G age transitivamente sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, então existe uma isometria $g \in G$; $g(f(0)) = 0$. Note que $d_0(g \circ f)(v) = w$, $w \in T_0 \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Compondo com outra isometria de G , digamos \bar{g} , obtemos $\bar{g} \circ g \circ f$ é a identidade. Logo,

$$f = g^{-1} \circ \bar{g}^{-1} \in G.$$

Portanto f_1 é uma isometria de \mathbb{H}^2 e f_2 é uma isometria de \mathbb{R} . \square

Definição 1.57. Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

que se indica por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.58. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \chi(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Observação 1.59. A proposição anterior mostra que a escolha de uma conexão afim em M dá origem a uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas. A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas, em particular, é possível falar em aceleração de uma curva em M .

Definição 1.60. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado **paralelo** quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Definição 1.61. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita **compatível com a métrica** $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.

A definição anterior é justificada pela proposição seguinte que mostra que se ∇ é compatível com \langle, \rangle , então podemos diferenciar o produto interno pela “regra do produto” usual.

Proposição 1.62. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Demonstração: Veja [3], pág (59). □

Definição 1.63. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável é dita **simétrica** quando

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad \text{para todo } X, Y \in \chi(M).$$

Observação 1.64. Em um sistema de coordenadas (U, x) , o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

Teorema 1.65. Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

- a) ∇ é simétrica.
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração: Suponhamos inicialmente a existência de uma tal ∇ , então

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (1.5)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (1.6)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \quad (1.7)$$

somando (1.5), (1.6) e subtraindo (1.7), teremos usando a propriedade de simetria da conexão ∇ , que

$$\begin{aligned} & X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle\}.$$

A última equação está univocamente determinada pela métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência defina, a conexão como a última equação. Mostre que ela está bem definida e que satisfaz às duas propriedades desejadas. \square

Observação 1.66. A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão Levi-Civita (ou Riemanniana) de M . Além disso, em um sistema de coordenadas (U, x) . É conveniente dizer que as funções $\Gamma_{i,j}^k$ definidas em $U \subset \mathbb{R}^n$ por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão.

Vejamos um resultado que sera muito útil na hora de calcular as conexões dos espaços $E^3(\kappa, \tau)$ que serão explicados mais na frente.

Lema 1.67. As conexões no espaço $E^3(\kappa, \tau)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 - \tau E_3 \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_1 &= -\tau E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 + \tau E_3 \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_2 &= \tau E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= -\tau E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_3 &= \tau E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

onde, $\{E_1, E_2, E_3\}$ é uma base ortonormal de $E^3(\kappa, \tau)$ e λ é o coeficiente de distorção da métrica.

Demonstração: Veja [4] págs (38, 39). \square

O próximo exemplo calculamos a conexão de Levi-Civita da esfera.

Exemplo 1.68. Seja a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Considerando a projeção estereográfica com respeito ao polo norte podemos dotar S^2 da métrica:

$$ds_{\mathbb{S}^2}^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) = \langle \cdot, \cdot \rangle_s, \quad \lambda = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}.$$

A base canônica é dada por $\left\{ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ e a base ortonormal é dada por $\{E_1 = \partial_x/|\partial_x|, E_2 = \partial_y/|\partial_y|\}$.

Sabemos que $\nabla_{\partial_y} \partial_x$ é combinação linear dos vetores da base $B = \{\partial_x, \partial_y\}$, então

$$\nabla_{\partial_y} \partial_x = a \partial_x + b \partial_y \quad (1.8)$$

$$\langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle_s = a \langle \partial_x, \partial_x \rangle_s$$

$$\langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle_s = \frac{4a}{(1+x^2+y^2)^2}. \quad (1.9)$$

Note que

$$\begin{aligned} \partial_y \langle \partial_x, \partial_x \rangle_s &= 2 \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle_s \\ \partial_y \left(\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \right) &= 2 \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle_s \\ \frac{-16y}{(1+x^2+y^2)^3} &= 2 \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle_s \\ \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_x \rangle_s &= \frac{-8y}{(1+x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo em (1.9) temos,

$$\begin{aligned} \frac{-8y}{(1+x^2+y^2)^3} &= \frac{4a}{(1+x^2+y^2)^2} \\ a &= \frac{-2y}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo produto interno em (1.8) com ∂_y temos,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle_s &= b \langle \partial_y, \partial_y \rangle_s \\ \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle_s &= \frac{4b}{(1+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\partial_x \langle \partial_y, \partial_y \rangle_s &= 2 \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle_s \\ \partial_x \left(\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \right) &= 2 \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle_s \\ \frac{-16x}{(1+x^2+y^2)^3} &= 2 \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle_s \\ \langle \nabla_{\partial_y} \partial_x, \partial_y \rangle_s &= \frac{-8x}{(1+x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{-8x}{(1+x^2+y^2)^3} &= \frac{4b}{(1+x^2+y^2)^2} \\ b &= \frac{-2x}{1+x^2+y^2}\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \nabla_{\partial_y} \partial_x = \frac{-2y}{1+x^2+y^2} \partial_x + \frac{-2x}{1+x^2+y^2} \partial_y = \nabla_{\partial_x} \partial_y.$$

Do mesmo jeito feito anteriormente, obtemos as conexões

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_x} \partial_x &= \frac{-2x}{1+x^2+y^2} \partial_x + \frac{2y}{1+x^2+y^2} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_y &= \frac{2x}{1+x^2+y^2} \partial_x + \frac{-2y}{1+x^2+y^2} \partial_y\end{aligned}$$

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.69. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in M$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 (ou seja $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ em t_0); se γ é geodésica em t para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Definição 1.70. Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \chi(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p , e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \rightarrow \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$. X é chamado um **campo de Killing** se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \rightarrow M$ é uma isometria.

Observação 1.71. X é um campo de Killing se, e somente, se $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \chi(M)$.

Agora vamos estudar as geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, para isso vamos entrar em alguns detalhes. Seja $p \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos \mathbb{H}^2 como o modelo do disco unitário com a métrica $g_{\mathbb{D}} = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} dx^2 + dy^2$ e $g_{\mathbb{D} \times \mathbb{R}} = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} (dx^2 + dy^2) + dt^2$. Seja v um vetor tangente inclinado de p , então podemos transladar p na origem do disco unitário mediante uma composta de uma translação vertical ψ com uma translação hiperbólica φ , isto é, $(\varphi \circ \psi)(p) = 0$ e $d(\varphi \circ \psi)(v) = \tilde{v}$ é tangente à origem. Assim, temos dois casos:

- i Se \tilde{v} mora em $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ então existe uma única geodésica (diâmetro) que passa pela origem e é tangente a \tilde{v} .
- ii Se \tilde{v} não mora em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, então relacionando \tilde{v} em torno do eixo t e projetando \tilde{v} no eixo oy , temos que é suficiente estudar as geodésicas que passam pela origem do plano yt .

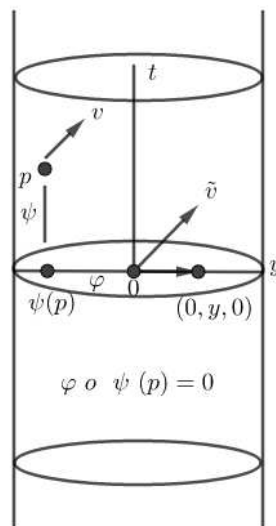


Figura 1.12: Translação do vetor v com ponto p na origem.

Agora vamos construir um plano ρt tal que exista uma isometria entre o plano ρt e o plano yt .

Seja $(0, y, 0) \in \mathbb{H}^2 \times \{0\}$, então $d_{\mathbb{H}}((0, y), (0, 0)) = L_{\mathbb{H}}(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}} dt$, onde $\alpha(t) = (0, ty)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}} &= \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\mathbb{H}}} \\ &= \sqrt{\frac{4y^2}{(1-t^2y^2)}} \\ &= \frac{2y}{1-t^2y^2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2y}{1-t^2y^2} dt &= 2y \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2y^2} \\ &= 2y \frac{\tanh^{-1}(y)}{y} \\ &= 2 \tanh^{-1}(y) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Assim, $y = \tanh(\rho/2)$. Observe que o plano $yt = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} / x = 0\}$. Como $x = 0$ então $dx^2 = 0$. Assim, a métrica induzida no plano yt é dada por

$$g_{yt} = \frac{4}{(1-y^2)^2} dy^2 + dt^2.$$

Sabemos que $y = \tanh(\rho/2)$ então $dy = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2}\right) d\rho$. Logo, a métrica induzida no plano ρt é dada por

$$\begin{aligned} g_{\rho t} &= \frac{4}{(1-\tanh^2(\rho/2))^2} \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho}{2}\right) d\rho^2 + dt^2 \\ &= d\rho^2 + dt^2. \end{aligned}$$

Definamos a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow yt$ por $\varphi(\rho, t) = (\tanh(\rho/2), t)$, então φ claramente é uma isometria de \mathbb{R}^2 em yt , pois preserva métrica. De fato,

Sejam $u, v \in T_{(\rho, t)}\mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned} \langle d\varphi(u), d\varphi(v) \rangle_{yt} &= \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\rho/2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{yt} \\ &= \frac{4}{(1-\tanh^2(\rho/2))^2} \frac{1}{4} u_1 v_1 \operatorname{sech}^4(\rho/2) + u_2 v_2 \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= \langle u, v \rangle_{\rho t}. \end{aligned}$$

Note que dada a reta $r = \{(\rho, t) \in \mathbb{R}^2 / \rho = t\} \subset \mathbb{R}^2$, então $\varphi(r) = \{(y, 2 \tanh^{-1}(y))/y \in \mathbb{R}\}$ e para $r_1 = \{(\rho, 0) \in \mathbb{R}^2\} = \text{eixo } \rho$, temos $\varphi(r_1) = \{(y, 0)/y \in \mathbb{R}\} = \text{eixo } y$. Portanto uma forma de encontrar as geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que passam pela origem é determinar a imagem de retas no plano ρt (que são geodésicas).

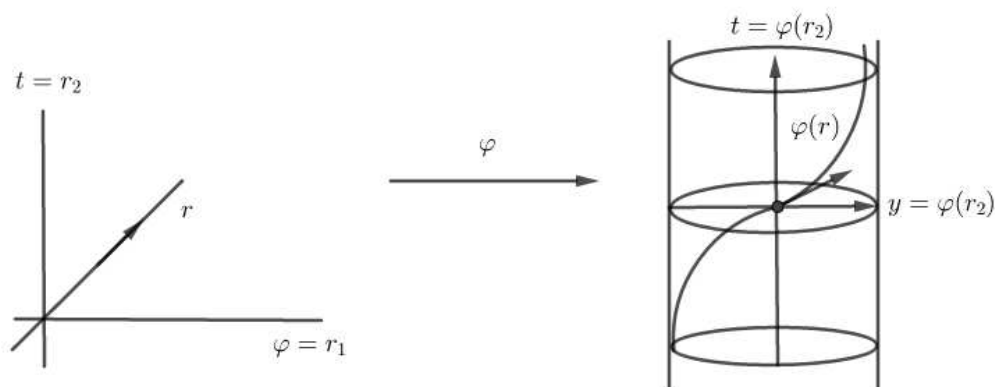


Figura 1.13: Geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Definição 1.72. A **curvatura** R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Observação 1.73. La aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ é dita **operador curvatura**.

Capítulo 2

Classificação das Superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$

Neste capítulo apresentaremos a classificação das superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$. Veremos que para $\tau \neq 0$, não existem superfícies totalmente umbílicas em $E^3(\kappa, \tau)$. Já para $\tau = 0$, apresentamos a classificação para os espaços $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Finalmente provamos a unicidade das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

2.1 Não existência de superfícies totalmente umbílicas em algumas variedades tridimensionais homogêneas

Nesta seção consideramos as variedades tridimensionais homogêneas conexas e simplesmente conexas, cujo grupo de isometrias tem dimensão 4 e que não são produtos Riemannianos. Lembramos que tal variedade é uma fibração sobre alguma superfície simplesmente conexa, $\mathbb{M}^2(\kappa)$, de curvatura constante $\kappa \in \mathbb{R}$ com fibras geodésicas. Na verdade, para cada k , há a uma família a 1-parâmetro $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ de tais fibrações, parametrizadas pela curvatura do feixe $\tau \in \mathbb{R}^*$. O campo vetorial unitário ξ tangente às fibras é um campo de Killing e satisfaz:

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau(X \times \xi), \quad (2.1)$$

para algum vetor tangente $X \in T\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. O campo ξ define a direção vertical da submersão Riemanniana $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$. De fato, a curvatura do feixe τ pode ser zero, mas neste caso $\mathbb{E}^3(\kappa, 0)$ é apenas um produto Riemanniano

$\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$. Estas variedades produto serão abordadas na seções [2.2](#) e [2.3](#). Além disso, assumimos $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, caso contrário a variedade é uma forma espacial e seu grupo de isometrias tem dimensão 6. Estas variedades são de três tipos: quando $k > 0$ são as esferas Berger, para $k = 0$ tem o grupo de isometria do espaço de Heisenberg, Nil_3 , e para $\kappa < 0$ tem o grupo de isometrias de $PSL_2(\mathbb{R})$. Para mais detalhes, veja [\[6\]](#), [\[7\]](#) e [\[8\]](#). Podemos agora apresentar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.1. Não existem superfícies totalmente umbílicas (mesmo não completas) nas variedades tridimensionais $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, com $\tau \neq 0$ e $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. Em particular, não existem superfícies totalmente geodésicas.

Para o caso especial do espaço de Heisenberg ($\kappa = 0, \tau = 1/2$), veja [\[10\]](#).

Demonstração: Seja S uma superfície totalmente umbílica imersa em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Pela definição de variedade, S é imagem de uma imersão $X : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, onde Ω é um disco aberto em \mathbb{R}^2 , isto é, $X(\Omega) = S$. Chamemos (u, v) as coordenadas em Ω e considere o campo normal unitário N em S . Sejam $\beta = \{e_1, e_2\}$ uma base formada por autovetores e A o operador de forma (shape operator) de S , então

$$A(e_1) = \lambda e_1,$$

$$A(e_2) = \lambda_1 e_2,$$

onde λ, λ_1 são as curvaturas principais em $p \in S$ e

$$[A]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Como $\lambda = \lambda_1$, $\bar{\nabla}_{X_u} N = aX_u + bX_v$ e $\bar{\nabla}_{X_v} N = cX_u + dX_v$, segue que

$$\bar{\nabla}_{X_u} N = \lambda X_u \tag{2.2}$$

$$\bar{\nabla}_{X_v} N = \lambda X_v. \tag{2.3}$$

Ao derivar as equações [\(2.2\)](#) e [\(2.3\)](#), nas direções X_u e X_v , respectivamente, obtemos

$$\bar{\nabla}_{X_v}(\bar{\nabla}_{X_u} N) = \lambda_v X_u + \lambda \bar{\nabla}_{X_v} X_u, \tag{2.4}$$

$$\bar{\nabla}_{X_u}(\bar{\nabla}_{X_v} N) = \lambda_u X_v + \lambda \bar{\nabla}_{X_u} X_v. \tag{2.5}$$

Ao subtrair a equação [\(2.4\)](#) da equação [\(2.5\)](#), obtemos,

$$\bar{\nabla}_{X_v}(\bar{\nabla}_{X_u} N) - \bar{\nabla}_{X_u}(\bar{\nabla}_{X_v} N) = \lambda_v X_u - \lambda_u X_v + \lambda \bar{\nabla}_{X_v} X_u - \lambda \bar{\nabla}_{X_u} X_v.$$

Como $\bar{\nabla}$ é simétrica $\bar{\nabla}_{X_v} X_u = \bar{\nabla}_{X_u} X_v$, assim

$$\bar{\nabla}_{X_v}(\bar{\nabla}_{X_u} N) - \bar{\nabla}_{X_u}(\bar{\nabla}_{X_v} N) = \lambda_v X_u - \lambda_u X_v.$$

Isto é,

$$\bar{R}(X_u, X_v)N = \lambda_v X_u - \lambda_u X_v, \quad (2.6)$$

onde \bar{R} é o operador curvatura de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Definimos a função ângulo $\nu : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $\nu = \langle N, \xi \rangle$. Seja T a projeção de ξ no $T_p S$, isto é, $T = \xi - \nu N$. De fato,

$$\text{proj}_N \xi = \frac{\langle N, \xi \rangle}{\|N\|^2} N = \nu N,$$

daí $\xi = T + \nu N$, ou seja, $T = \xi - \nu N$.

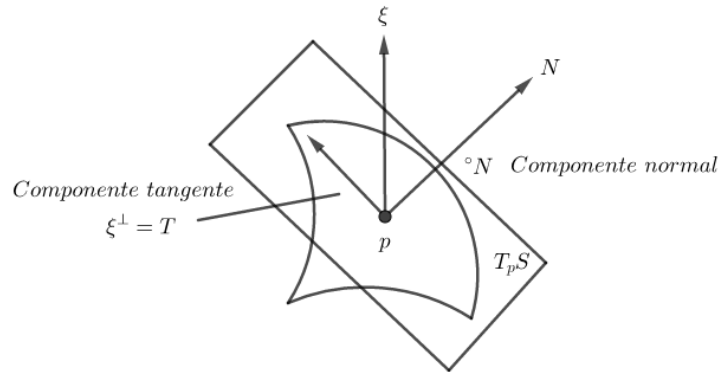


Figura 2.1: Decomposição do campo ξ .

Benoit Daniel, mostra que as equações de Gauss e Codazzi (veja [9]), relacionam a métrica de S , o shape operator A , a projeção tangencial T de ξ e a função ângulo ν . Tais equações são dadas por

$$\kappa = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2, \quad (2.7)$$

$$\bar{R}(X, Y)N = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y), \quad \forall X, Y \in \chi(S). \quad (2.8)$$

Usando a equação (2.8) para $X_u, X_v, N \in \chi(\mathbb{E}^3(\kappa, \tau))$, temos

$$\bar{R}(X_u, X_v)N = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle X_v, T \rangle X_u - \langle X_u, T \rangle X_v). \quad (2.9)$$

Ao igualar as equações (2.6) e (2.9), obtemos

$$\lambda_v X_u - \lambda_u X_v = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle X_v, T \rangle X_u - \langle X_u, T \rangle X_v).$$

Note que,

$$\begin{aligned}\langle \text{grad } \lambda, X_u \rangle &= d\lambda_p(X_u) = \lambda_u, \\ \langle \text{grad } \lambda, X_v \rangle &= d\lambda_p(X_v) = \lambda_v,\end{aligned}$$

onde $\text{grad } \lambda$ é o gradiente da função λ em S . Assim,

$$\begin{aligned}\langle \text{grad } \lambda, X_v \rangle X_u - \langle \text{grad } \lambda, X_u \rangle X_v &= \langle X_v, (\kappa - 4\tau^2)\nu T \rangle X_u - \langle X_u, (\kappa - 4\tau^2)\nu T \rangle X_v \\ (\langle \text{grad } \lambda, X_v \rangle - \langle X_v, (\kappa - 4\tau^2)\nu T \rangle) X_u - (\langle \text{grad } \lambda, X_u \rangle - \langle X_u, (\kappa - 4\tau^2)\nu T \rangle) X_v &= 0 \\ \langle \text{grad } \lambda - (\kappa - 4\tau^2)\nu T, X_v \rangle &= 0 \text{ e } \langle \text{grad } \lambda - (\kappa - 4\tau^2)\nu T, X_u \rangle = 0,\end{aligned}$$

pois X_u e X_v são linearmente independentes. Portanto

$$\text{grad } \lambda = (\kappa - 4\tau^2)\nu T. \quad (2.10)$$

Observe que, se $T = 0$ em um subconjunto não vazio, então podemos tomar $N = \xi$ neste conjunto. Assim, temos de (2.1) que

$$\bar{\nabla}_{X_u} N = \tau(X_u \times N),$$

como $X_u \times N$ não é paralelo a X_u , segue que $\bar{\nabla}_{X_u} N \neq \lambda X_u$. Logo, S não pode ser totalmente umbílica.

Assumamos agora que $T \neq 0$. Seja $JT = N \times T$, onde $JT \in T_p S$, então $[T, JT] = 0$. De fato, lembre que $[T, JT] = \bar{\nabla}_T JT - \bar{\nabla}_{JT} T$, daí

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_T JT &= \bar{\nabla}_T N \times T \\ &= \bar{\nabla}_T N \times (\xi - \nu N) \\ &= \bar{\nabla}_T(N \times \xi) - N \times \nu N \\ &= \bar{\nabla}_T(N \times \xi + N \times \bar{\nabla}_T \xi) \\ &= \lambda(T \times \xi) + \tau(N \times (T \times \xi)).\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} T \times \xi &= T \times (T + \nu N) \\ &= \nu(T \times N) \\ &= -\nu JT. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T JT &= -\nu\lambda JT - \nu\tau(N \times JT) \\ &= -\nu\lambda JT + \nu\tau T. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{JT} T &= \bar{\nabla}_{JT}(\xi - \nu N) \\ &= \bar{\nabla}_{JT}\xi - \bar{\nabla}_{JT}\nu N \\ &= \tau(JT \times \xi) - JT(\nu)N - \nu\bar{\nabla}_{JT}N \\ &= \tau(JT \times \xi) - JT(\nu)N - \nu\lambda JT. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} JT \times \xi &= JT \times (T + \nu N) \\ &= JT \times T + \nu JT \times N \\ &= -|T|^2 N + \nu T \end{aligned} \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned} JT(\nu) &= JT(\langle N, \xi \rangle) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{JT} N, \xi \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{JT} \xi \rangle \\ &= \lambda \langle JT, \xi \rangle + \tau \langle N, JT \times \xi \rangle \\ &= \lambda \langle JT, T - \nu N \rangle + \tau \langle N, JT \times \xi \rangle \\ &= \tau \langle N, JT \times \xi \rangle. \end{aligned}$$

Usando (2.11), temos

$$\begin{aligned} JT(\nu) &= \tau \langle N, -|T|^2 N + \nu T \rangle \\ &= -|T|^2 \tau \langle N, N \rangle + \nu \langle N, T \rangle \\ &= -|T|^2 \tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{JT}T &= \tau(-|T|^2N + \nu T) + |T|^2\tau N - \nu\lambda JT \\ &= -|T|^2\tau N + \nu\tau T + |T|^2\tau N - \nu\lambda JT \\ &= \nu\tau T - \nu\lambda JT.\end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{\nabla}_T JT = \bar{\nabla}_{JT} T.$$

Agora usando (2.10) temos,

$$\begin{aligned}JT(\lambda) &= \langle \text{grad } \lambda, JT \rangle \\ &= \langle (\kappa - 4\tau^2)\nu T, JT \rangle \\ &= (\kappa - 4\tau^2)\nu \langle T, JT \rangle \\ &= 0. \\ T(\lambda) &= \langle \text{grad } \lambda, T \rangle \\ &= \langle (\kappa - 4\tau^2)\nu T, T \rangle \\ &= (\kappa - 4\tau^2)\nu |T|^2 \\ &= (\kappa - 4\tau^2)\nu(1 - \nu^2).\end{aligned}$$

Dado que $[JT, T] = 0$ e por outro lado

$$\begin{aligned}[JT, T](\lambda) &= JT(T(\lambda)) - T(JT(\lambda)) \\ &= JT((\kappa - 4\tau^2)(\nu - \nu^3)) \\ &= (\kappa - 4\tau^2)JT(\nu - \nu^3).\end{aligned}$$

Daí, $(\kappa - 4\tau^2)JT(\nu - \nu^3) = 0$. Como $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned}JT(\nu - \nu^3) &= 0 \\ JT(\nu) - JT(\nu^3) &= 0 \\ JT(\nu) - JT(\nu)3\nu^2 &= 0 \\ JT(\nu)(1 - 3\nu^2) &= 0.\end{aligned}$$

Então $(1 - 3\nu^2) = 0$ ou $JT(\nu) = 0$. Se $(1 - 3\nu^2) = 0$ então $\nu = \pm\sqrt{3}/3$. Como ν é constante temos, $JT(\nu) = 0$. Por outro lado, $JT(\nu) = -\tau|T|^2$. Daí, $-\tau|T|^2 = 0$ e por hipótese $\tau \neq 0$, então $T = 0$. Logo, $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ não possui superfícies totalmente umbílicas.

Para finalizar, suponha que existe uma superfície totalmente geodésica em $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ com $\tau \neq 0$, então as curvaturas principais, digamos λ_1 e λ_2 , são tais que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (absurdo), pois por hipótese não existem superfícies totalmente umbílicas ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Logo, não existem superfícies totalmente geodésicas. \square

2.2 Superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção apresentaremos o teorema de classificação das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Mostraremos que existem três tipos de tais superfícies, a primeira é rotacional, analítica, imersa, homeomorfa à esfera e não homóloga a zero. A segunda é rotacional, completa, propriamente imersa e homeomorfa a \mathbb{R}^2 e a terceira é analítica, imersa, homeomorfa à esfera e homóloga a zero em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. A principal referência para este capítulo é [12].

Uma **superfície rotacional** em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é uma superfície obtida pela rotação de uma curva em um cilindro totalmente geodésico $\mathcal{C} = \Gamma \times \mathbb{R}$, onde $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ é uma geodésica, em torno de um eixo $R = \{p\} \times \mathbb{R}$, onde p é um ponto fixo de Γ .

Nas coordenadas (x, y, t) dada pela projeção estereográfica com respeito ao polo norte, a métrica em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é definida:

$$d\tilde{s}^2 = \left(\frac{2}{1+x^2+y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2) + dt^2,$$

onde $x, y, t \in \mathbb{R}$.

A menos de isometrias podemos assumir que $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ corresponde à geodésica completa definida por $y = 0$ e que $p = (0, 0, 0) \in \Gamma$ é o polo sul de \mathbb{S}^2 . Assim podemos considerar o eixo de rotação $R = \{(0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Observação 2.2. Observe que para qualquer curva α , dada no cilindro \mathcal{C} , a superfície gerada pela rotação de α em torno do eixo $R = (0, 0, t)$ é a mesma superfície que a gerada pelo eixo obtido pelo polo norte, ou seja, por $(0, 0, 2t), t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.3. Seja $\varphi : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 2)\} \rightarrow \pi$ a projeção estereográfica, onde π é um plano, então a única métrica g_π de π tal que φ seja uma isometria entre $\mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 2)\}$ e π é

$$g_\pi(u, v) = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} (u_1v_1 + u_2v_2)$$

onde $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in T_p\pi$ com $p = (x, y)$.

Demonstração: Lembre que

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z} \right)$$

e

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

De modo análogo ao aplicado no Lema [1.34](#), temos o desejado. \square

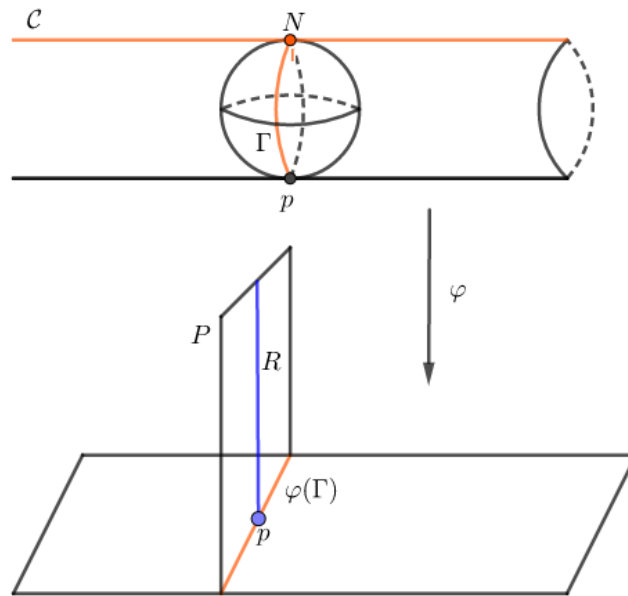


Figura 2.2: Superfície rotacional em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Consideremos o plano vertical geodésico (não completo) $P = \{y = 0\} \in \mathcal{C}$, isto é, $\mathcal{C} = P \cup (\{N\} \times \mathbb{R})$, onde $N \in \mathbb{S}^2$ é o polo norte.

Seja $\rho \in (-\pi, \pi)$ a distância da origem $(0, 0)$ a $(x, 0)$, onde $(x, 0)$ é a imagem por φ de um ponto que pertence à geodésica Γ definida por $\{y = 0\}$. Seja a curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \pi$ definida por $\alpha(s) = s(x, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho &= L_\pi(\alpha) \\ &= \int_0^1 \|\alpha'(s)\|_{g_\pi} ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{(1+s^2x^2)^2}} x^2 ds \\ &= 2 \int_0^1 \frac{x}{1+(sx)^2} ds \\ &= 2 \arctan(x) \end{aligned}$$

Daí,

$$x = \tan\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Nas coordenadas (ρ, t) a métrica no plano P é $ds^2 = d\rho^2 + dt^2$. De fato, como a métrica de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é dada por

$$ds^2 = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2 + dy^2) + dt^2$$

como $x = \tan(\rho/2)$ e $y = 0$, então $dx = \frac{1}{2} \sec^2(\rho/2)d\rho$. Assim,

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\sec^4(\rho/2)} \frac{\sec^4(\rho/2)}{4} d\rho^2 + dt^2 \\ &= d\rho^2 + dt^2. \end{aligned}$$

Considere agora a curva $\alpha(s) = (\tan(\rho(s)/2), 0, t(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco no plano P . Seja $\theta(s)$ o ângulo orientado entre o eixo ρ e $\alpha'(s)$. Como $\alpha'(s)$ é um vetor unitário segue que $\rho'^2(s) + t'^2(s) = 1$, portanto podemos escrever:

$$\rho'(s) = \cos \theta(s) \tag{2.12}$$

$$t'(s) = \sen \theta(s) \tag{2.13}$$

No plano P , seja $n(s)$ o vetor normal unitário à curva α , de modo que a base $\{\alpha'(s), n(s)\}$ é positivamente orientada para cada s . Seja X a parametrização da superfície gerada pela rotação em relação ao eixo t , definida por:

$$X(s, w) = (\cos w \tan(\rho(s)/2), \sen w \tan(\rho(s)/2), t(s)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} X_s &= \left(\frac{\rho'}{2} \sec^2(\rho/2) \cos w, \frac{\rho'}{2} \sec^2(\rho/2) \sen w, t' \right) \\ X_w &= (-\sen w \tan(\rho/2), \cos w \tan(\rho/2), 0). \end{aligned}$$

Seja $p \in X(s, w)$ e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ campos locais adaptados a X , então chamando de E_1, E_2 e E_3 os vetores normalizados de

e_1, e_2 e e_3 , isto é, $E_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, $E_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}$ e $E_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}$ temos,

$$e_1 = \frac{2}{\sec^2(\rho/2)} E_1 \quad (2.14)$$

$$e_2 = \frac{2}{\sec^2(\rho/2)} E_2 \quad (2.15)$$

$$e_3 = E_3. \quad (2.16)$$

Note que X_s e $X_w \in T_p \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ são dados por

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\rho'}{2} \sec^2(\rho/2) \cos w e_1 + \frac{\rho'}{2} \sec^2(\rho/2) \sin w e_2 + t' e_3 \\ X_w &= -\sin w \tan(\rho/2) e_1 + \cos w \tan(\rho/2) e_2. \end{aligned}$$

Usando (2.14), (2.15) e (2.16) temos,

$$\begin{aligned} X_s &= \rho' \cos w E_1 + \rho' \sin w E_2 + t' E_3. \\ X_w &= -\sin w \tan(\rho) E_1 + \cos w \tan(\rho) E_2. \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle \\ &= \rho'^2 + t'^2 \\ &= 1. \\ F &= \langle X_s, X_w \rangle \\ &= 0. \\ G &= \langle X_w, X_w \rangle \\ &= \tan^2(\rho). \end{aligned}$$

Para calcular o vetor normal na base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$, achamos: $X_s \times X_w$ e $\|X_s \times X_w\|$. Assim,

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_s \times X_w}{\|X_s \times X_w\|} \\ &= -t' \cos w E_1 - t' \sin w E_2 + \rho' E_3. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\bar{\nabla}_{X_s} X_s = \bar{\nabla}_{X_s} (\rho' \cos w E_1 + \rho' \sen w E_2 + t' E_3) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{\nabla}_{X_s} \rho' \cos w E_1 + \bar{\nabla}_{X_s} \rho' \sen w E_2 + \bar{\nabla}_{X_s} t' E_3 \\ &= \rho'' \cos w E_1 + \rho' \cos w \bar{\nabla}_{X_s} E_1 + \rho'' \sen w E_2 + \rho' \sen w \bar{\nabla}_{X_s} E_2 + t'' E_3 \\ &\quad + t' \bar{\nabla}_{X_s} E_3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2}{1+x^2+y^2} = \frac{2}{\sec^2(\rho/2)} \\ \lambda_x &= \frac{-4x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4 \cos w \tan(\rho/2)}{\sec^4(\rho/2)} \\ \frac{\lambda_x}{\lambda^2} &= -\cos w \tan(\rho/2) \\ \lambda_y &= \frac{-4y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4 \sen w \tan(\rho/2)}{\sec^4(\rho/2)} \\ \frac{\lambda_y}{\lambda^2} &= -\sen w \tan(\rho/2). \end{aligned}$$

Daí, usando o Lema [1.67](#) temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= \sen w \tan(\rho/2) E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= -\cos w \tan(\rho/2) E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_1 &= 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= -\sen w \tan(\rho/2) E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= \cos w \tan(\rho/2) E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_2 &= 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= \bar{\nabla}_{E_2} E_3 = \bar{\nabla}_{E_3} E_3 = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_s} E_1 &= \bar{\nabla}_{\rho'} \cos w E_1 + \rho' \operatorname{sen} w E_2 + t' E_3 E_1 \\ &= \rho' \cos w \bar{\nabla}_{E_1} E_1 + \rho' \operatorname{sen} w \bar{\nabla}_{E_2} E_1 + t' \bar{\nabla}_{E_3} E_1 \\ &= \rho' \cos w \operatorname{sen} w \tan(\rho/2) E_2 - \rho' \operatorname{sen} w \cos w \tan(\rho/2) E_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_s} E_2 &= \rho' \cos w \bar{\nabla}_{E_1} E_2 + \rho' \operatorname{sen} w \bar{\nabla}_{E_2} E_2 + t' \bar{\nabla}_{E_3} E_2 \\ &= -\rho' \cos w \operatorname{sen} w \tan(\rho/2) E_1 + \rho' \operatorname{sen} w \cos w \tan(\rho/2) E_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_s} E_3 &= \rho' \cos w \bar{\nabla}_{E_1} E_3 + \rho' \operatorname{sen} w \bar{\nabla}_{E_2} E_3 + t' \bar{\nabla}_{E_3} E_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Da equação (2.18), temos,

$$\bar{\nabla}_{X_s} X_s = \rho'' \cos w E_1 + \rho'' \operatorname{sen} w E_2 + t'' E_3.$$

Logo,

$$\begin{aligned}e &= \langle N, \bar{\nabla}_{X_s} X_s \rangle \\ &= -\rho'' t' \cos^2 w - \rho'' t' \operatorname{sen}^2 w + \rho' t'' \\ &= -\rho'' t' + \rho' t''.\end{aligned}$$

De modo análogo, temos,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_w} X_s &= (-\rho' \operatorname{sen} w + \rho' \operatorname{sen} w \operatorname{sen}(\rho) \tan(\rho/2)) E_1 \\ &\quad + (\rho' \cos w - \rho' \cos w \operatorname{sen}(\rho) \tan(\rho/2)) E_2\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}f &= \langle N, \bar{\nabla}_{X_w} X_s \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_w} X_w &= (-\cos w \operatorname{sen}(\rho) + \cos w \operatorname{sen}^2(\rho) \tan(\rho/2)) E_1 + (\operatorname{sen} w \operatorname{sen}^2(\rho) \tan(\rho/2) \\ &\quad - \operatorname{sen} w \operatorname{sen}(\rho)) E_2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} g &= \langle N, \overline{\nabla}_{X_w} X_w \rangle \\ &= t' \operatorname{sen}(\rho) (1 - 2 \operatorname{sen}^2(\rho/2)) \\ &= t' \operatorname{sen}(\rho) \cos(\rho). \end{aligned}$$

Como a superfície $X(s, w)$ é duplamente ortogonal, isto é, $F = f = 0$, então as curvaturas principais são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{e}{E} \\ &= -\rho'' t'' + \rho' t''' \\ \kappa_2 &= \frac{g}{G} \\ &= t' \cot(\rho). \end{aligned}$$

Das equações (2.12) e (2.13), temos $\rho'' = -\operatorname{sen} \theta(s) \theta'(s)$ e $t'' = \cos \theta(s) \theta'(s)$. Portanto, a condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \frac{\operatorname{sen} \theta(s)}{\tan \rho(s)}. \quad (2.19)$$

Da equação (2.12), temos

$$\rho'' = -\operatorname{sen} \theta \theta',$$

substituindo em (2.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{-\rho''}{\operatorname{sen} \theta} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\tan \rho} \\ \rho'' &= -\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\tan \rho} \\ \rho'' &= \frac{\cos^2 \theta - 1}{\tan \rho} \\ \rho'' &= \frac{\rho'^2 - 1}{\tan \rho}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assuma que $\rho'(s_0) = 1$ para algum s_0 , onde $\rho(s_0) \neq 0$, então a função $f(s) = \rho(s) + s - s_0$ é solução de (2.20) com a condição inicial que $f'(s_0) = 1$ para algum s_0 e $f(s_0) \neq 0$, pois $f'(s) = 1$ então $f''(s) = 0$ e por outro lado

$$\frac{f'(s)^2 - 1}{\tan \rho} = \frac{1 - 1}{\tan \rho} = 0.$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), temos $\rho = f$. Como $t'(s) = \text{sen } \theta(s)$ e $\rho'(s) = 1 \quad \forall s \in I$ então $\cos \theta(s) = 1$. Assim $t'(s) = 0$. Daí, $t(s) = t_0$, então a superfície $X(s, w) = (\rho(s) \cos w, \rho(s) \text{sen } w, t_0)$ é parte de um slice $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$.

Analogamente quando a condição inicial é $\rho'(s_0) = -1$, tomando a função $g(s) = \rho(s_0) - s - s_0$, temos que $X(s, w)$ é parte de um slice $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$.

Daqui em diante, assumiremos que $\rho'^2(s) \neq 1$ para todo s e portanto, a equação (2.20) é equivalente a

$$\frac{\rho''}{\rho'^2 - 1} = \frac{\cos \rho}{\text{sen } \rho}.$$

Daí, ao integrar com relação a s , obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{2\rho' \rho''}{(\rho'^2 - 1)} ds &= \int \frac{2\rho' \cos \rho}{\text{sen } \rho} ds \\ \ln(\rho'^2 - 1) &= 2 \ln(\text{sen } \rho) + c \\ \ln(u) &= 2 \ln(u) + c \\ u &= e^{2 \ln(u) + c} \\ \rho'^2 - 1 &= e^{2 \ln(\text{sen } \rho) + c} \\ \rho'^2 - 1 &= \lambda \text{sen}^2 \rho, \end{aligned}$$

onde λ é uma constante positiva. Dado que α é p.p.c.a ($\rho'^2 + t'^2 = 1$), temos que $\rho'^2 < 1$. Assim,

$$\lambda = \frac{\rho'^2 - 1}{\text{sen}^2 \rho}.$$

Portanto $\lambda = -a^2$ para algum $a < 0$.

Seja ρ uma solução de (2.20), satisfazendo $\rho'^2 < 1$. Se $\rho'(s) = 0$, Então por (2.12) e (2.13), temos

$$\begin{aligned} \cos \theta(s) &= 0 \\ t'(s) &= \text{sen } \theta(s). \end{aligned}$$

Como $\cos \theta(s) = 0$ então $\theta(s) = \pi/2$ ou $3\pi/2$. Se $\theta(s) = \pi/2$, temos $t'(s) = 1$, o que implica que $t(s) = s + c$. De (2.19), temos

$$\theta'(s) = \frac{\text{sen } \theta(s)}{\tan \theta(s)} = \frac{1}{\tan \rho(s)} = \frac{1}{\tan c}. \quad (2.21)$$

Como $\theta'(s) = 0$ e por (2.21), temos que $c = \pi/2$. Logo, $\rho(s) = \pi/2$. Assim, $\alpha(s) = (\pi/2, 0, s + c)$ é a curva que gera a superfície que é parte de um cilindro totalmente geodésico $\rho = \pi/2$ tal que $\rho'(s) = 0$.

Daqui em diante, assumiremos que ρ não é está solução trivial e portanto a menos de restringir o domínio de ρ , podemos supor que ρ toma valores em $(0, \pi/2)$ ou $(\pi/2, \pi)$.

Assim, considerando um intervalo no qual ρ' nunca se anula. Mudando s por $-s$ e supondo que $\rho' > 0$, temos

$$\begin{aligned}\rho'^2 - 1 &= -a^2 \operatorname{sen}^2 \rho \\ \rho'^2 &= 1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \rho \\ \rho' &= \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \rho}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Observe que a transformação $(\rho, t) \rightarrow (\pi - \rho, t)$ é uma isometria que muda rotações ao redor do eixo através do polo norte. Portanto, tomando em conta a observação 2.2, podemos assumir que a menos de isometrias, ρ toma valores em $(0, \pi/2)$.

Chamaremos ρ_a a solução maximal de (2.22) estendendo ρ sem restrições em seus valores, isto é, pelo momento não precisamos que ρ_a tome seus valores em $(-\pi, \pi)$.

No que segue, apresentaremos uma série de resultados a fim de obter o teorema de classificação. Inicialmente, mostraremos que a solução maximal ρ_a de (2.22) é ímpar e passa pela origem. Além disso, veremos que, distintos valores da constante a , dão origem a uma curva α_a que gera uma superfície rotacional totalmente umbílica em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Lema 2.4. A menos de reparametrizações, a solução maximal ρ_a é definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, onde $\delta \in (0, +\infty]$. Além disso, ρ_a é ímpar e assim satisfaz $\rho_a(0) = 0$ e $\rho'_a(0) = 1$.

Demonstração: Definamos (u, v) o domínio de ρ_a , onde $-\infty \leq u < v \leq \infty$. Para provar que ρ_a é uma função ímpar, precisaremos provar que ρ_a se anula em algum ponto do domínio. De fato, como α está p.p.c.a, segue que $\rho'_a \leq 1$. Se $u = -\infty$, temos

$$\begin{aligned}\rho'_a(s) &\leq 1 \\ \rho_a(s) &\leq \int ds \\ \rho_a(s) &\leq s + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Como $u = -\infty$, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \rho_a(s) \leq -\infty$, ou seja, ρ_a tem imagens negativas e como o domínio de ρ está contido no domínio de ρ_a e ρ tem imagens positivas segue que ρ_a também tem imagens positivas. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $s_0 \in (u, v)$ tal que $\rho_a(s_0) = 0$.

Se u é finito, como ρ_a é não decrescente pois $\rho'_a(s) \geq 0$ para todo $s \in (u, v)$, segue que $\lim_{s \rightarrow u} \rho_a(s) = L$ com $L \in [-\infty, \infty)$.

Se $L < 0$, então ρ_a possui imagens negativas e como ρ é positiva, novamente pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que $\rho_a(s_0) = 0$.

Se $L \geq 0$, seja $I \subset (u, v)$ o domínio de ρ . Suponha que s decresce em I , ρ_a nunca se anula. Dado que $\rho(I) \subset (0, \pi/2)$, ou seja, os valores de ρ são positivos e ρ_a é não decrescente então $\lim_{s \rightarrow u} \rho_a(s) \geq 0$, o qual nos permite estender o intervalo (u, v) da ρ_a , mediante a extensão $\tilde{\rho}_a(s) = \rho_a(s)$, se $s \neq u$ e $\tilde{\rho}_a(s) = L$, se $s = u$ com $s \in [u, v)$, o que contradiz a maximalidade de ρ_a . Portanto $\rho_a(s_0) = 0$ para algum $s_0 \in (u, v)$. Através de uma translação ($s \mapsto s - s_0$) podemos assumir $\rho_a(0) = 0$. A função $f(s) = -\rho_a(-s)$ é solução de

$$\rho' = \sqrt{1 - a^2 \sen^2 \rho}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} f'(s) &= \sqrt{1 - a^2 \sen^2(f(s))} \\ \rho'_a(-s) &= \sqrt{1 - a^2 \sen^2(-\rho_a(-s))}, \end{aligned}$$

como ρ_a é solução maximal de (2.22), então f é solução de (2.22). Além disso, $f(0) = -\rho_a(-0) = 0$ e pelo Teorema de Existência e Unicidade de e.d.o.s, temos que $f = \rho_a$. Assim, $\rho_a(-s) = -f(s) = -\rho_a(s)$, logo ρ_a é ímpar e $\rho'_a(0) = \sqrt{1 - a^2 \sen^2 \rho_a(0)} = \sqrt{1 - a^2 \sen^2(0)} = 1$. \square

Lema 2.5. Suponha que $a \in (0, 1)$, então ρ_a é definida em toda reta e dá origem a uma única, a menos de isometria ambiente, curva α_a , gerando uma superfície rotacional totalmente umbílica. Esta curva é uma curva de Jordan, analítica no cilindro \mathcal{C} , não homologa a zero e simétrica em relação ao eixo de rotação R . A superfície rotacional totalmente umbílica, $S_1(a)$, gerada por α_a é analítica, imersa e homeomorfa à esfera. Além disso, $S_1(a)$ é não homologa a zero em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja ρ_a como no Lema 2.4. Se $\delta < +\infty$, Como $\rho'_a > 0$ e $\rho'_a \leq 1$, então $\rho'_a \in (0, 1]$. Dado que $\bar{c} \leq \rho_a \leq s + c$ onde c e \bar{c} são constantes reais, temos que $\lim_{s \rightarrow \delta} \rho_a(s) = L$, onde L é finito. Dado que $a \in (0, 1)$, temos $1 - a^2 \sen^2(L) > 0$ e novamente como no Lema 2.4, podemos estender ρ_a além de δ , contradizendo a maximalidade de ρ_a . Isto mostra que $\delta = +\infty$.

Dado que $\rho'_a = \sqrt{1 - a^2 \sen^2 \rho_a} \geq \sqrt{1 - a^2} > 0$, pois $\sen^2 \rho_a \leq 1$ e já que $\rho_a(0) = 0$, e ρ_a é crescente e contínua, segue que existe um menor $s_1 > 0$ tal que $\rho_a(s_1) = \pi$.

Agora consideremos a função $f(s) = 2\pi - \rho_a(2s_1 - s)$, $s \in \mathbb{R}$, então f é solução de

(2.22), já que $f' = \rho'_a(2s_1 - s)$ e $\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2(2\pi - \rho_a(2s_1 - s))} = \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2(\rho_a(2s_1 - s))} = f'$. Além disso,

$$\begin{aligned} f(s_1) &= 2\pi - \rho_a(2s_1 - s_1) \\ &= 2\pi - \rho_a(s_1) \\ &= \pi \\ &= \rho_a(s_1). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de unicidade e existência de e.d.o, temos $f = \rho_a$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho_a(2s_1 - s) &= f(2s_1 - s) \\ &= 2\pi - \rho_a(2s_1 - 2s_1 + s) \\ &= 2\pi - \rho_a(s). \end{aligned} \tag{2.23}$$

No caso da função t , sabemos que ela satisfaz $t'^2 = 1 - \rho_a'^2 = 1 - 1 + a^2 \operatorname{sen}^2 \rho_a = a^2 \operatorname{sen}^2 \rho_a$. Assim, seja t_a a função definida em \mathbb{R} tal que,

$$\begin{aligned} t'_a(s) &= a \operatorname{sen} \rho_a(s) \\ t_a(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dado que ρ_a é ímpar, temos que $t'_a(s)$ é ímpar. Lembre que se uma função é par então sua derivada é ímpar e se é ímpar então sua derivada é par. Assim, a função t_a não pode ser ímpar. Defina a função $f(s) = t_a(-s) - t_a(s)$ então

$$\begin{aligned} f'(s) &= -t'_a(-s) - t'_a(s) \\ &= t'_a(s) - t'_a(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $f(s) = c$. Mas $f(0) = 0$ então $f(s) = 0$. Logo $t_a(-s) = t_a(s)$. Isto é, t_a é par. Seja a função $g(s) = t_a(2s_1 - s)$ então

$$\begin{aligned} g'(s) &= -t'_a(2s_1 - s) \\ &= -a \operatorname{sen} \rho_a(2s_1 - s) \\ &= -a \operatorname{sen}(2\pi - \rho_a(s)) \\ &= a \operatorname{sen} \rho_a(s) \\ &= t'_a(s) \end{aligned}$$

e $g(s_1) = t_a(s_1)$. Assim, pelo Teorema de existência e unicidade de e.d.o, temos $g = t_a$. Assim, $t_a(2s_1 - s) = t_a(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando que t_a é par, temos

$$\begin{aligned}
 t_a(s + 2s_1) &= g(s + 2s_1) \\
 &= t_a(2s_1 - (s + 2s_1)) \\
 &= t_a(-((s + 2s_1) - 2s_1)) \\
 &= t_a(s + 2s_1 - 2s_1) \\
 &= t_a(s).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Usando a equação (2.23) e que ρ_a é ímpar, temos para algum $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 -(2\pi - \rho_a(2s_1 + s)) &= -2\pi + \rho_a(2s_1 + s) \\
 &= -2\pi + \rho_a(2s_1 - (-s)) \\
 &= -2\pi + 2\pi - \rho_a(-s) \\
 &= -\rho_a(-s) \\
 &= \rho_a(s).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

logo,

$$\rho_a(2s_1 + s) = \rho_a(s) + 2\pi \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Agora a curva $\tilde{\alpha}_a(s) = (\rho_a(s), t_a(s))$, $s \in \mathbb{R}$, é uma curva no recobrimento universal $\tilde{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} . Observe que as equações (2.24) e (2.25) mostram que restringindo s para $[-s_1, s_1]$, $\tilde{\alpha}_a$ da origem a uma curva analítica, fechada α_a em \mathcal{C} . Dado que ρ_a é crescente em $[-s_1, s_1]$ e $\rho_a(-s_1) = -\rho_a(s_1) = -\pi$, deduzimos que α_a é imersa e não homologa a zero.

Como ρ_a é ímpar e t_a é par, a curva α_a tem a simetria desejada. É claro que para outra escolha $t'_a(s) = -a \operatorname{sen} \rho_a(s)$ conduz à curva deduzida por α_a pela isometria $(\rho, t) \rightarrow (\rho, -t)$. \square

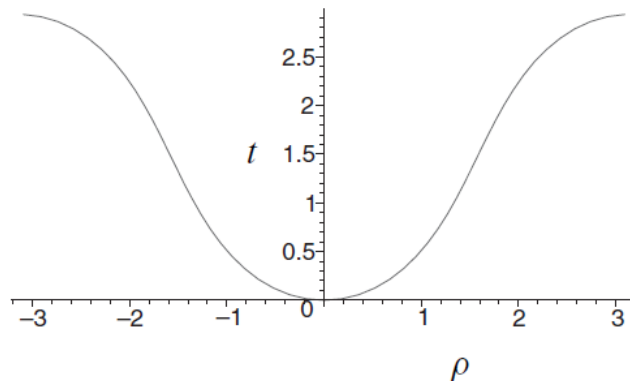


Figura 2.3: Curva α_a gerada para $a = 0.9$, [12].

Lema 2.6. Assuma $a = 1$, então $\rho_1(s) = \pi/2 - 2 \arctan(e^{-s})$, $s \in \mathbb{R}$. Esta curva dá origem à uma única, a menos de isometria ambiente, curva α_1 em $P \subset \mathcal{C}$, gerando uma superfície rotacional totalmente umbílica. A curva α_1 é completa, aberta, imersa e simétrica com relação ao eixo de rotação R . A superfície rotacional totalmente umbílica S_1 , gerada por α_1 em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é completa, propriamente imersa, analítica e homeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Demonstração: Dado que $a = 1$, então $\rho' = \sqrt{1 - \sin^2 \rho}$, satisfazendo $\rho(0) = 0$. Assim ρ_1 é solução maximal de $\rho' = \cos \rho$ com $\rho(0) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\rho'}{\cos \rho} &= 1 \\ \ln |\sec(\rho(s)) + \tan(\rho(s))| &= s + c, \end{aligned} \quad (2.26)$$

como $\rho(0) = 0$, segue de (2.26) que $c = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} -\ln |\sec(\rho(s)) + \tan(\rho(s))| &= -s \\ \frac{1}{|\sec \rho(s) + \tan \rho(s)|} &= e^{-s} \\ \frac{\cos \rho(s)}{1 + \sin \rho(s)} &= e^{-s} \\ \arctan \left(\frac{\cos \rho(s)}{1 + \sin \rho(s)} \right) &= \arctan(e^{-s}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Note que

$$\begin{aligned} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) &= \frac{\tan(\pi/4) - \tan(\rho/2)}{1 + \tan(\pi/4) \tan(\rho/2)} \\ &= \frac{1 - \tan(\rho/2)}{1 + \tan(\rho/2)} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - \cos \rho}{1 + \cos \rho}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \rho}{1 + \cos \rho}}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \cos \rho} - \sqrt{1 - \cos \rho}}{\sqrt{1 + \cos \rho} + \sqrt{1 - \cos \rho}} \\ &= \frac{(\sqrt{1 + \cos \rho} - \sqrt{1 - \cos \rho})^2}{2 \cos \rho} \\ &= \frac{1 - \sin \rho}{\cos \rho} \\ &= \frac{1 - \sin \rho}{\cos \rho} \frac{1 + \sin \rho}{1 + \sin \rho} \\ &= \frac{\cos \rho}{1 + \sin \rho} \end{aligned}$$

logo,

$$\arctan\left(\frac{\cos \rho}{1 + \sin \rho}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right).$$

Usando (2.27), temos

$$\begin{aligned} 2 \arctan(e^{-s}) &= \frac{\pi}{2} - \rho \\ \rho(s) &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(e^{-s}) \end{aligned}$$

Assim,

$$\rho_1(s) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(e^{-s}) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Note que ρ_1 toma valores em $(-\pi/2, \pi/2)$. Como no Lema 2.28, definamos a função t satisfazendo $t'(s) = \sin \rho_1(s)$, a menos de isometria ambiente. Consideremos a função t_1 definida por colocar $t'_1(s) = \sin \rho_1(s)$ e $t_1(0) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} \sin \rho_1(s) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2 \arctan(e^{-s})\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2 \arctan(e^{-s})) - \sin(2 \arctan(e^{-s})) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(2 \arctan(e^{-s})) \\ &= \cos^2(\arctan(e^{-s})) - \sin^2(\arctan(e^{-s})) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2s}}}\right)^2 - \left(\frac{e^{-s}}{\sqrt{1+e^{-2s}}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{1+e^{-2s}} - \frac{e^{-2s}}{1+e^{-2s}} \\ &= \frac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}} \\ &= \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \\ &= \tanh(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int t'_1(s) ds &= \int \tanh(s) ds \\ t_1(s) &= \log(\cosh(s)) + c, \end{aligned}$$

onde, $c \in \mathbb{R}$. Como $t_1(0) = 0$, segue que $c = 0$. Por outro lado ρ_1 é ímpar e t_1 é par, então a curva $\alpha_1(s) = (\pi/2 - 2 \arctan(e^{-s}), \log(\cosh(s)))$ tem a simetria desejada. De fato, α_1 é o gráfico da função $t(\rho) = -\log(\cos(\rho))$, $\rho \in (-\pi/2, \pi/2)$. Isto conclui a prova.

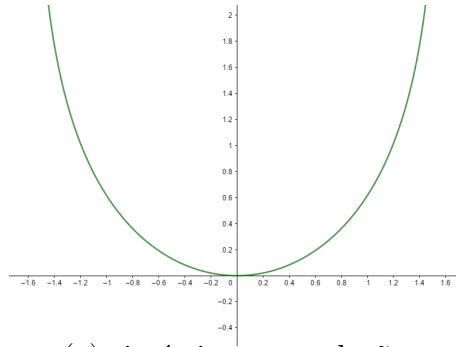


Figura 2.4: Curva $\alpha_1(s)$ simétrica com relação ao eixo de rotação R .

□

Lema 2.7. Assuma $a > 1$, então a solução maximal ρ_a é definida em um intervalo limitado $(-\delta_a, \delta_a)$, onde δ_a é um número positivo. Isto dá, origem a uma única, a menos de isometria ambiente, curva de Jordan α_a em $P \subset \mathcal{C}$, gerando uma superfície rotacional totalmente umbílica. Esta curva é analítica e simétrica em relação ao eixo de rotação R . A superfície rotacional totalmente umbílica, $S_2(a)$, gerada por α_a é analítica, imersa e homeomorfa à esfera. Além disso, $S_2(a)$ é homologa a zero em $S_2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração: Dado que $\rho'_a(s) > 0$, segue que $1 - a^2 \sin^2 \rho_a(s) > 0$ e como $a > 1$, temos $-\sqrt{1/a^2} < \sin \rho_a(s) < \sqrt{1/a^2}$, isto implica que $-\arcsen(1/a) < \rho_a(s) < \arcsen(1/a)$. Lembremos que ρ_a é definido em um intervalo aberto $(-\delta_a, \delta_a)$, pelo Lema 2.4. Assuma por contradição que $\delta_a = +\infty$. Dado que ρ_a é crescente, pois $\rho'_a > 0$ então admite um limite $l \in (0, \arcsen(1/a))$ quando $s \rightarrow +\infty$. Necessariamente $l = \arcsen(1/a)$, no caso contrario seguiria da equação (2.22) que

$$\begin{aligned} \rho_a(s) &< l \\ \sin^2 \rho_a(s) &< \sin^2 l \\ \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \rho_a(s)} &> \sqrt{1 - a^2 \sin^2 l} \\ \rho'_a &> \sqrt{1 - a^2 \sin^2 l} \end{aligned}$$

e já que $l < \arcsen(1/a)$, temos que $\rho'_a > \sqrt{1 - a^2 \sin^2 l} > 0$ para todo $s > 0$. Daí, $\rho_a(s) > \sqrt{1 - a^2 \sin^2 l} s + c$ e fazendo o limite quando $s \rightarrow +\infty$, temos que $\sqrt{1 - a^2 \sin^2 l} s + c \rightarrow +\infty$ o que implica que $\rho_a(s) \rightarrow +\infty$ o que é uma contradição, pois ρ_a é limitada. Usando a equação (2.22), temos que

$$\begin{aligned} \rho_a'' &= \frac{\rho_a'^2 - 1}{\tan \rho} \\ &= \frac{-a^2 \sin^2 \rho_a}{\tan \rho}, \end{aligned}$$

fazendo o limite quando $s \rightarrow +\infty$, temos que $\rho_a''(s) \rightarrow -1/\tan l$, como $\tan l$ é positivo então $\rho_a''(s) \leq -1/(2 \tan l) < 0$. Assim, integrando temos que ρ_a' deveria ser negativo o qual é uma contradição. Portanto δ_a é finito.

Agora, seja l o limite de ρ_a quando $s \rightarrow \delta_a$. Se $l < \arcsen(1/a)$ então podemos estender a solução ρ_a , além de δ_a mediante a função $\hat{\rho}_a : (-\delta_a, \delta_a] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{\rho}_a(s) = \rho_a(s)$ se $s < \delta_a$ e $\hat{\rho}_a(s) = l$ se $s = \delta_a$. Mas ρ_a é solução maximal, o que é um absurdo. Portanto $l = \arcsen(1/a)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \delta_a} \rho_a'(s) &= \lim_{s \rightarrow \delta_a} \sqrt{1 - a^2 \sen^2 \rho_a(s)} \\ &= \sqrt{1 - a^2 \lim_{s \rightarrow \delta_a} \sen^2 \rho_a(s)} \\ &= \sqrt{1 - a^2 (\sen \arcsen(1/a))^2} \\ &= \sqrt{1 - a^2 \frac{1}{a^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que a função ρ_a satisfaz (2.22) e (2.20), temos

$$\begin{aligned} \rho'' &= \frac{\rho'^2 - 1}{\tan \rho} \\ &= \frac{-a^2 \sen^2 \rho}{\tan \rho} \\ &= -a^2 \sen \rho \cos \rho \end{aligned} \tag{2.28}$$

Como o segundo membro de (2.28) é limitado, sua solução maximal é definida na reta toda. Chamemos $\bar{\rho}_a$ a solução maximal de (2.28) estendendo ρ_a . Seja $f(s) = \bar{\rho}_a(2\delta_a - s)$, então f e $\bar{\rho}_a$ satisfazem a equação (2.28) com a mesma condição inicial em δ_a . De fato,

$$\begin{aligned} f'' &= \bar{\rho}_a(2\delta_a - s) \\ &= -a^2 \sen \bar{\rho}_a(s_1) \cos \bar{\rho}_a(s_1) \\ &= -a^2 \sen \bar{\rho}_a(2\delta_a - s) \cos \bar{\rho}_a(2\delta_a - s) \end{aligned}$$

e

$$-a^2 \sen f \cos f = -a^2 \sen \bar{\rho}_a(2\delta_a - s) \cos \bar{\rho}_a(2\delta_a - s). \tag{2.29}$$

Logo, $f'' = -a^2 \sen f \cos f$. Além disso, $f(\delta_a) = \bar{\rho}_a(2\delta_a - \delta_a) = \bar{\rho}_a(\delta_a)$. Então pelo Teorema de Existência e Unicidade de e.d.o.s $\bar{\rho}_a = f$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_a(s) &= f(s) \\ &= \bar{\rho}_a(2\delta_a - s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Já a função t satisfaz

$$\begin{aligned} t'^2 &= 1 - \bar{\rho}_a'^2 \\ &= 1 - (\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \bar{\rho}_a})^2 \\ &= 1 - 1 + a^2 \operatorname{sen}^2 \bar{\rho}_a \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 \bar{\rho}_a. \end{aligned}$$

Assim, se t_a é a função definida por $t'_a = a \operatorname{sen} \bar{\rho}_a$ e $t_a(0) = 0$, então

$$\begin{aligned} t'_a(-s) &= a \operatorname{sen} \bar{\rho}_a(-s) \\ &= a \operatorname{sen}(-\bar{\rho}_a(s)) \\ &= -a \operatorname{sen}(\bar{\rho}_a(s)) \\ &= -t'_a(s). \end{aligned}$$

Assim, t'_a é ímpar. Se t_a é ímpar então t'_a é par, o que é uma contradição. Defina a função $f(s) = t_a(-s) - t_a(s)$ então

$$\begin{aligned} f'(s) &= -t'_a(-s) - t'_a(s) \\ &= t'_a(s) - t'_a(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, $f(s) = c$, com $c \in \mathbb{R}$. Mas $f(0) = 0$ então $f(s) = 0$. Logo $t_a(-s) = t_a(s)$. Isto é, t_a é par. Seja a função $g(s) = 2 t_a(\delta_a) - t_a(2\delta_a - s)$ a qual satisfaz

$$\begin{aligned} g'(s) &= t'_a(2\delta_a - s) \\ &= a \operatorname{sen} \bar{\rho}_a(2\delta_a - s) \\ &= a \operatorname{sen} \bar{\rho}_a(s) \\ &= t'_a(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\delta_a) &= 2t_a(\delta_a) - t_a(2\delta_a - \delta_a) \\ &= 2t_a(\delta_a) - t_a(\delta_a) \\ &= t_a(\delta_a). \end{aligned}$$

Como $g'(s) = t'_a(s)$ então g é solução de $t'_a = a \operatorname{sen} \bar{\rho}_a$. Assim $g = t_a$. Logo,

$$\begin{aligned} t_a(2\delta_a - s) &= g(2\delta_a - s) \\ &= 2t_a(\delta_a) - t_a(2\delta_a - 2\delta_a + s) \\ &= 2t_a(\delta_a) - t_a(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Usando (2.30) e que $\bar{\rho}_a$ é ímpar, temos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_a(s + 4\delta_a) &= \bar{\rho}_a(2\delta_a - s - 4\delta_a) \\ &= \bar{\rho}_a(-2\delta_a - s) \\ &= -\bar{\rho}_a(2\delta_a + s) \\ &= -(\bar{\rho}_a(-s)) \\ &= \bar{\rho}_a(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Usando (2.31) e que t_a é par, temos

$$\begin{aligned} t_a(4\delta_a + s) &= 2t_a(\delta_a) - t_a(2\delta_a - 4\delta_a - s) \\ &= 2t_a(\delta_a) - t_a(-2\delta_a - s) \\ &= 2t_a(\delta_a) - t_a(2\delta_a + s) \\ &= 2t_a(\delta_a) - 2t_a(\delta_a) + t_a(-s) \\ &= t_a(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Agora a curva $\alpha_a(s) = (\bar{\rho}_a(s), t_a(s))$, $s \in \mathbb{R}$, parametriza uma curva fechada e analítica em $P \subset \mathcal{C}$. Tomando em conta (2.30), $\bar{\rho}_a$ é ímpar, (2.31) e t_a é par, deduzimos que a curva α_a é simétrica em relação ao eixo R .

Considerando o fato que t_a é crescente em $[0, 2\delta_a]$ e a simetria de α_a , inferimos que α_a define uma curva de Jordan em P .

Para concluir a prova observemos que a outra escolha para t_a , isto é, $t'_a = -a \operatorname{sen} \bar{\rho}_a$, conduz à curva obtida de α_a pela isometria $(\rho, t) \rightarrow (\rho, -t)$. \square

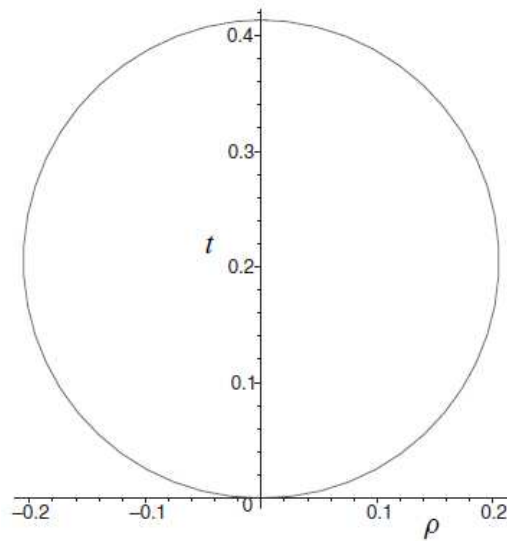


Figura 2.5: Curva de Jordan α_a para $a = 5$, [12].

A seguir, apresentamos o principal resultado desta seção, ou seja, o Teorema de Classificação das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 2.8. Além dos slices totalmente geodésicos $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$ e os cilindros verticais $\Gamma \times \mathbb{R}$, onde $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ é uma geodésica, as superfícies introduzidas pelos Lemas 2.5, 2.6 e 2.7 são a menos de isometrias ambientes, as únicas superfícies rotacionais completas totalmente umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Em particular elas são imersas e homeomorfas a \mathbb{R}^2 ou a \mathbb{S}^2 . Entre as superfícies homeomorfas a \mathbb{S}^2 algumas são homologas a zero e outras não.

2.3 Superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo classificaremos as superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, as quais são invariantes sobre um grupo de isometrias. Lembre que existem 3 tipos de isometrias positivas em \mathbb{H}^2 então pelo Lema 1.56, as isometrias positivas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são de 3 tipos: elíptico, parabólico e hiperbólico que serão explicadas mais na frente. No caso elíptico, existe uma única superfície não geodésica, totalmente umbílica, completa e homeomorfa a \mathbb{S}^2 . Além disso, os slices $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$ são as únicas superfícies rotacionais completas, totalmente umbílicas. Para o caso parabólico, existe uma única superfície totalmente umbílica, completa, analítica, propriamente imersa e homeomorfa ao plano. No último caso, o hiperbólico, dá origem a uma superfície não geodésica, completa, totalmente umbílica e além disso existe uma família de tais superfícies que são analíticas, propriamente imersas e homeomorfas ao plano. A principal referência para esta seção é [12].

Seja o modelo do disco para \mathbb{H}^2 , definido

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

e a métrica

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = \left(\frac{2}{1 - x^2 - y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2),$$

então a métrica produto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é definida por

$$d\hat{s}^2 = \left(\frac{2}{1 - x^2 - y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2) + dt^2,$$

onde $(x, y) \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$. Consideremos as seguintes geodésicas particulares de \mathbb{D} :

$$\Gamma = \{(x, 0), x \in (-1, 1)\} \subset \mathbb{D},$$

$$L = \{(0, y), y \in (-1, 1)\} \subset \mathbb{D}.$$

A menos de isometrias do ambiente, podemos assumir que as superfícies simétricas são geradas por curvas no plano geodésico $P = \Gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Na geodésica Γ denotamos por $\rho \in \mathbb{R}$ a distância até a origem. Assim, $x = \tanh(\rho/2)$. De fato, seja $(x, 0) \in \Gamma$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$, definida por $\gamma(t) = t(x, 0)$ tal que $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(1) = (x, 0)$, então

$$\begin{aligned} \rho &= L_{\mathbb{H}}(\gamma(t)) \\ &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{4x^2}{(1 - (tx)^2)^2}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{1 - (tx)^2} dt \\ &= 2 \tanh^{-1}(x) - 2 \tanh^{-1}(0) \\ &= 2 \tanh^{-1}(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \tanh^{-1}(x) \\ \frac{\rho}{2} &= \tanh^{-1}(x) \\ x &= \tanh(\rho/2). \end{aligned}$$

Logo, a métrica em P é

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{2}{1-x^2-y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2) + dt^2 \\ &= \left(\frac{2}{1-x^2} \right)^2 dx^2 + dt^2. \end{aligned}$$

Como $x = \tanh(\rho/2)$, então $dx = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\rho/2) d\rho$. Assim,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4}{(1 - \tanh^2(\rho/2))^2} \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4(\rho/2) d\rho^2 + dt^2 \\ &= d\rho^2 + dt^2 \end{aligned}$$

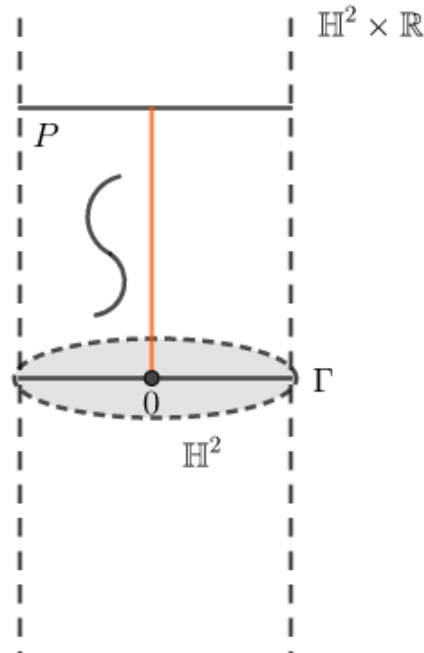


Figura 2.6: Plano P no espaço ambiente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Dada a curva $\alpha(s) = (\rho(s), t(s))$ p.p.c.a em P . Seja $\theta(s)$ o ângulo orientado entre o eixo ρ e $\alpha'(s)$. Definimos

$$\rho'(s) = \cos \theta(s), \quad (2.32)$$

$$t'(s) = \operatorname{sen} \theta(s). \quad (2.33)$$

No caso elíptico as isometrias de $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ são as rotações ao redor do eixo vertical $R = \{(0,0) \times \mathbb{R}\}$. No caso parabólico as isometrias são os horociclos com ponto fixo

$(-1, 0)$ no bordo de \mathbb{D} . Finalmente as isometrias no caso hiperbólico são translações ao longo de L em \mathbb{D} .

No plano P , consideramos o vetor normal unitário N à curva α , de modo que a base $(\alpha'(s), N(s))$ é orientada positivamente para cada s . A seguir, vamos a calcular as curvaturas principais (em cada caso) das famílias a um parâmetro das isometrias positivas de $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$.

1. Caso elíptico: Seja α p.p.c.a a curva que mora no plano P , definida da forma $\alpha(s) = (0, \tanh(\rho(s)/2), t(s))$. Note que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\|^2 &= \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_{\mathbb{D} \times \mathbb{R}} \\ &= \lambda^2 \frac{\rho'(s)^2}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) + t'(s)^2 \\ &= \frac{4}{(1 - \tanh^2(\rho(s)/2))} \frac{\rho'(s)^2}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) + t'(s)^2 \\ &= \rho'^2 + t'^2. \end{aligned}$$

Como α é p.p.c.a então $\rho'^2 + t'^2 = 1$. Considere a superfície invariante por rotação elíptica

$$\begin{aligned} X(s, w) &= \begin{bmatrix} \cos w & \operatorname{sen} w & 0 \\ -\operatorname{sen} w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tanh(\rho(s)/2) \\ t(s) \end{bmatrix} \\ X(s, w) &= (\operatorname{sen} w \tanh(\rho(s)/2), \cos w \tanh(\rho(s)/2), t(s)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} X_s &= \left(\frac{\rho'}{2} \operatorname{sech}^2(\rho/2) \operatorname{sen} w, \frac{\rho'}{2} \operatorname{sech}^2(\rho/2) \cos w, t' \right) \\ X_w &= (\cos w \tanh(\rho/2), -\operatorname{sen} w \tanh(\rho/2), 0) \end{aligned}$$

Seja $p \in X(s, w)$ e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ campos locais adaptados a X , então chamando de E_1, E_2 e E_3 os vetores normalizados de e_1, e_2 e e_3 , isto é, $E_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, $E_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}$ e $E_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}$ temos,

$$e_1 = \frac{2}{\operatorname{sech}^2(\rho/2)} E_1 \quad (2.34)$$

$$e_2 = \frac{2}{\operatorname{sech}^2(\rho/2)} E_2 \quad (2.35)$$

$$e_3 = E_3. \quad (2.36)$$

Note que X_s e $X_w \in T_p\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\rho'}{2} \operatorname{sech}^2(\rho/2) \sin w e_1 + \frac{\rho'}{2} \operatorname{sech}^2(\rho/2) \cos w e_2 + t' e_3 \\ X_w &= \cos w \tanh(\rho/2) e_1 + -\sin w \tanh(\rho/2) e_2 \end{aligned}$$

Usando (2.34), (2.35) e (2.36), temos

$$\begin{aligned} X_s &= \rho' \sin w E_1 + \rho' \cos w E_2 + t' E_3. \\ X_w &= \cos w \sinh(\rho) E_1 - \sin w \sinh(\rho) E_2. \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle \\ &= \rho'^2 + t'^2 \\ &= 1. \\ F &= \langle X_s, X_w \rangle \\ &= 0. \\ G &= \langle X_w, X_w \rangle \\ &= \sinh^2(\rho). \end{aligned}$$

Para calcular o vetor normal na base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$, calculamos: $X_s \times X_w$ e $\|X_s \times X_w\|$. Assim,

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_s \times X_w}{\|X_s \times X_w\|} \\ &= \frac{1}{\sinh \rho} (t' \sin w \sinh \rho, t' \cos w \sinh \rho, -\rho' \sinh \rho) \\ &= t' \sin w E_1 + t' \cos w E_2 - \rho' E_3. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_s} X_s &= \bar{\nabla}_{X_s} (\rho' \sin w E_1 + \rho' \cos w E_2 + t' E_3) \\ &= \bar{\nabla}_{X_s} \rho' \sin w E_1 + \bar{\nabla}_{X_s} \rho' \cos w E_2 + \bar{\nabla}_{X_s} t' E_3 \\ &= \rho'' \sin w E_1 + \rho' \sin w \bar{\nabla}_{X_s} E_1 + \rho'' \cos w E_2 + \rho' \cos w \bar{\nabla}_{X_s} E_2 \\ &\quad + t'' E_3 + t' \bar{\nabla}_{X_s} E_3. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Note que

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2}{1-x^2-y^2} = \frac{2}{\operatorname{sech}^2(\rho/2)} \\ \lambda_x &= \frac{4x}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{4 \operatorname{sen} w \tanh(\rho/2)}{\operatorname{sech}^4(\rho/2)} \\ \frac{\lambda_x}{\lambda^2} &= \operatorname{sen} w \tanh(\rho/2) \\ \lambda_y &= \frac{-4y}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{4 \operatorname{cos} w \tanh(\rho/2)}{\operatorname{sech}^4(\rho/2)} \\ \frac{\lambda_y}{\lambda^2} &= \operatorname{cos} w \tanh(\rho/2)\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= -\operatorname{cos} w \tanh(\rho/2) E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= \operatorname{sen} w \tanh(\rho/2) E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_1 &= 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \operatorname{cos} w \tanh(\rho/2) E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= -\operatorname{sen} w \tanh(\rho/2) E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_2 &= 0, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= \bar{\nabla}_{E_2} E_3 = \bar{\nabla}_{E_3} E_3 = 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_s} E_1 &= \bar{\nabla}_{\rho'} \operatorname{sen} w E_1 + \rho' \operatorname{cos} w E_2 + t' E_3 E_1 \\ &= \rho' \operatorname{sen} w \bar{\nabla}_{E_1} E_1 + \rho' \operatorname{cos} w \bar{\nabla}_{E_2} E_1 + t' \bar{\nabla}_{E_3} E_1 \\ &= -\rho' \operatorname{cos} w \operatorname{sen} w \tanh(\rho/2) E_2 + \rho' \operatorname{sen} w \operatorname{cos} w \tanh(\rho/2) E_2 \\ &= 0. \\ \bar{\nabla}_{X_s} E_2 &= \rho' \operatorname{sen} w \bar{\nabla}_{E_1} E_2 + \rho' \operatorname{cos} w \bar{\nabla}_{E_2} E_2 + t' \bar{\nabla}_{E_3} E_2 \\ &= \rho' \operatorname{cos} w \operatorname{sen} w \tanh(\rho/2) E_1 - \rho' \operatorname{sen} w \operatorname{cos} w \tanh(\rho/2) E_1 \\ &= 0. \\ \bar{\nabla}_{X_s} E_3 &= \rho' \operatorname{sen} w \bar{\nabla}_{E_1} E_3 + \rho' \operatorname{cos} w \bar{\nabla}_{E_2} E_3 + t' \bar{\nabla}_{E_3} E_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Continuando em (2.37), temos,

$$\bar{\nabla}_{X_s} X_s = \rho'' \operatorname{sen} w E_1 + \rho'' \operatorname{cos} w E_2 + t'' E_3. \quad (2.38)$$

Logo,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \bar{\nabla}_{X_s} X_s \rangle \\ &= \rho'' t' \sin^2 w + \rho'' t' \cos^2 w - \rho' t'' \\ &= \rho'' t' - \rho' t''. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_w} X_s &= (\rho' \cos w + \rho' \cos w \sinh(\rho) \tanh(\rho/2))E_1 \\ &+ (-\rho' \sin w - \rho' \sin w \sinh(\rho) \tanh(\rho/2))E_2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f &= \langle N, \bar{\nabla}_{X_w} X_s \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_w} X_w &= (-\sin w \sinh(\rho) - \sin w \sinh^2(\rho) \tanh(\rho/2))E_1 \\ &+ (-\cos w \sinh(\rho) - \cos w \sinh^2(\rho) \tanh(\rho/2))E_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} g &= \langle N, \bar{\nabla}_{X_w} X_w \rangle \\ &= t' \sinh(\rho) (-1 - 2 \sinh^2(\rho/2)) \\ &= -t' \sinh(\rho) \cosh(\rho). \end{aligned}$$

Como a superfície $X(s, w)$ é duplamente ortogonal, isto é, $F = f = 0$, segue que as curvaturas principais são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{e}{E} \\ &= \frac{\rho'' t' - \rho' t''}{E} \\ \kappa_2 &= \frac{g}{G} \\ &= \frac{-t' \sinh(\rho) \cosh(\rho)}{G}. \end{aligned}$$

Das equações (2.12) e (2.13), temos $\rho'' = -\sin \theta(s) \theta'(s)$ e $t'' = \cos \theta(s) \theta'(s)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= -\theta'(s), \\ \kappa_2 &= \frac{-\operatorname{sen} \theta(s)}{\tanh(\rho(s))}.\end{aligned}$$

Assim, a condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \frac{\operatorname{sen} \theta(s)}{\tanh \rho(s)}. \quad (2.39)$$

2. Caso parabólico: Seja $z \in \mathbb{D}$. Vamos descrever a única translação parabólica que passa por z e tem ponto fixo $(-1, 0)$. Lembre que uma isometria de \mathbb{H}^2 a \mathbb{D} é definida por $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ e sua inversa é $\varphi^{-1}(z) = \frac{i(1+z)}{1-z}$. Assim, definimos $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ por $f = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$, onde T é uma isometria parabólica de \mathbb{H}^2 em \mathbb{H}^2 , com as condições iniciais que $|a+d| = 2$, $ad - bc = 1$ e $T(x_1) = x_1$, da forma

$$T(z) = \frac{(1+cx_1)z - cx_1^2}{cz + 1 - cx_1}, \quad c \neq 0.$$

Se $x_1 = 0$, temos

$$T(z) = \frac{z}{1+cz}, \quad c \neq 0,$$

então

$$\begin{aligned}f(z) &= (\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(z) \\ &= (\varphi \circ T)(\varphi^{-1}(z)) \\ &= \varphi \left(\frac{\varphi^{-1}(z)}{1+c\varphi^{-1}(z)} \right) \\ &= \varphi \left(\frac{i(1+z)}{(1-z) + ci(1+z)} \right) \\ &= \frac{i(1+z) - i(1-z) + c(1+z)}{i(1+z) + i(1-z) - c(1+z)} \\ &= \frac{2iz + c(1+z)}{2i - c(1+z)}.\end{aligned}$$

Além disso, $f(-1) = -1$ e normalizando f , temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2iz + c(1+z)}{2i - c(1+z)} \frac{1/2i}{1/2i} \\ &= \frac{z + \frac{c}{2i}(1+z)}{1 - \frac{c}{2i}(1+z)} \\ &= \frac{z - \frac{c}{2}i(1+z)}{1 + \frac{c}{2}i(1+z)}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = c/2$, temos

$$f(z) = \frac{z - \lambda i(1+z)}{1 + \lambda i(1+z)}.$$

Em coordenadas $z = (x, 0)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \lambda i(1+x)}{1 + \lambda i(1+x)} \frac{1 - \lambda i(1+x)}{1 - \lambda i(1+x)} \\ &= \frac{x - \lambda^2(1+x)^2 - \lambda(1+x)^2}{1 + \lambda^2(1+x)^2} \\ &= \left(\frac{x - \lambda^2(1+x)^2}{1 + \lambda^2(1+x)^2}, \frac{-\lambda(1+x)^2}{1 + \lambda^2(1+x)^2} \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$X(s, \lambda) = \left(\frac{\rho(s) - \lambda^2(1 + \rho(s))^2}{1 + \lambda^2(1 + \rho(s))^2}, \frac{-\lambda(1 + \rho(s))^2}{1 + \lambda^2(1 + \rho(s))^2}, t \right).$$

Calculando analogamente como no caso elíptico, temos

$$\begin{aligned} E &= 1 & e &= -t''\rho' + t'\rho'' \\ F &= 0 & f &= 0 \\ G &= 4e^{2e} & g &= -4e^{2e}t', \end{aligned}$$

como X é duplamente ortogonal ($F = f = 0$), então $k_1 = \frac{e}{E}$ e $k_2 = \frac{g}{G}$. Assim,

$$\begin{aligned} k_1 &= -t''\rho' + t'\rho'' \\ k_2 &= -t'. \end{aligned}$$

Novamente usando que $\rho'' = -\sin \theta \theta'(s)$ e $t'' = \cos \theta \theta'(s)$, temos

$$\begin{aligned} k_1 &= -\theta'(s) \\ k_2 &= -\sin \theta(s). \end{aligned}$$

Logo, a condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \text{sen } \theta(s).$$

3. Caso hiperbólico: Dada a curva $\alpha(s) = (\tanh(\rho(s)/2), 0, t(s))$ que mora no plano $P = \Gamma \times \mathbb{R}$. Vamos obter a superfície gerada por uma translação parabólica ao longo de L em \mathbb{D} .

Lembre que toda isometria positiva em \mathbb{H}^2 é dá forma $T(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}$, com $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Como toda isometria hiperbólica fixa dois pontos no $\partial_\infty \mathbb{D}$, temos

$$T(i) = i \tag{2.40}$$

$$T(-i) = -i. \tag{2.41}$$

Por (2.41)

$$\frac{-ai + \bar{b}}{-bi + \bar{a}} = -i$$

$$-ai + \bar{b} = -i(-bi + \bar{a})$$

$$\bar{a}i - ai + \bar{b} + b = 0$$

$$i(\bar{a} - a) + \bar{b} + b = 0$$

$$2 \text{Im}(a) + 2 \text{Re}(b) = 0$$

$$\text{Im}(a) + \text{Re}(b) = 0. \tag{2.42}$$

Por (2.40)

$$\frac{ai + \bar{b}}{bi + \bar{a}} = i$$

$$i(a - \bar{a}) + \bar{b} + b = 0$$

$$-2 \text{Im}(a) + 2 \text{Re}(b) = 0$$

$$-\text{Im}(a) + \text{Re}(b) = 0. \tag{2.43}$$

Daí, somando (2.42) e (2.43), temos $\text{Im}(a) = 0$ e $\text{Re}(b) = 0$, ou seja, $a = x$, $b = i\bar{y}$, $\bar{a} = x$, $\bar{b} = -i\bar{y}$ e $a\bar{a} - b\bar{b} = x^2 + i^2\bar{y}^2 = 1$.

Logo,

$$x = \cosh w$$

$$\bar{y} = \text{senh } w.$$

Assim,

$$T(z) = \frac{\cosh w z - i \sinh w}{i \sinh w z + \cosh w}.$$

Portanto,

$$X(s, w) = \left(\frac{\cosh w \rho(s) - i \sinh w}{i \sinh w \rho(s) + \cosh w}, t(s) \right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\cosh w \rho - i \sinh w}{i \sinh w \rho + \cosh w} &= \frac{\cosh w \rho - i \sinh w}{i \sinh w \rho + \cosh w} \frac{\cosh w - i \sinh w \rho}{\cosh w - i \sinh w \rho} \\ &= \frac{\rho(\cosh^2 w - \sinh^2 w) - i(\cosh w \sinh w \rho^2 + \sinh w \cosh w)}{\cosh^2 w + \sinh^2 w \rho^2} \\ &= \frac{\rho - i(\rho^2 + 1) \sinh w \cosh w}{\cosh^2 w + \sinh^2 w \rho^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$X(s, w) = \left(\frac{\rho(s)}{\cosh^2 w + \sinh^2 w \rho(s)^2}, \frac{-\cosh w \sinh w (\rho(s)^2 + 1)}{\cosh^2 w + \sinh^2 w \rho(s)^2}, t(s) \right).$$

Calculando analogamente como no caso elíptico, temos

$$\begin{aligned} E &= 1 & e &= -t'' \rho' + t' \rho'' \\ F &= 0 & f &= 0 \\ G &= 4 \cosh^2(\rho) & g &= -4 t' \cosh(\rho) \sinh(\rho), \end{aligned}$$

como X é duplamente ortogonal ($F = f = 0$), então $k_1 = \frac{e}{E}$ e $k_2 = \frac{g}{G}$. Assim,

$$\begin{aligned} k_1 &= -t'' \rho' + t' \rho'' \\ k_2 &= -t' \tanh(\rho). \end{aligned}$$

Novamente usando que $\rho'' = -\sin \theta \theta'(s)$ e $t'' = \cos \theta \theta'(s)$, temos

$$\begin{aligned} k_1 &= -\theta'(s) \\ k_2 &= -\sin \theta(s) \tanh \rho(s). \end{aligned}$$

Logo, a condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \sin \theta(s) \tanh \rho(s).$$

A seguir, descreveremos as superfícies totalmente umbílicas para os três casos: para-

bólico, elíptico e hiperbólico. Para isto, usaremos as condições de umbilicidade calculadas anteriormente, a fim de definirmos as curvas geratrizes das superfícies.

2.3.1 Caso parabólico.

A condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \text{sen } \theta(s).$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned} \frac{\theta'}{\text{sen } \theta} &= 1 \\ \int \frac{\theta'(s)}{\text{sen } \theta(s)} ds &= \int ds \\ -\ln(\cot \theta(s) + \csc \theta(s)) &= s + c \\ e^{-\ln(\cot \theta(s) + \csc \theta(s))} &= e^{s+c} \\ \frac{1}{\cot \theta(s) + \csc \theta(s)} &= e^{s+c} \\ \frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta} &= e^{s+c} \\ \arctan\left(\frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta}\right) &= \arctan(\lambda e^s). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Note que

$$\tan(\theta/2) = \frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta},$$

daí, $\arctan\left(\frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos \theta}\right) = \frac{\theta}{2}$ e por (2.44), temos

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} &= \arctan(\lambda e^s) \\ \theta(s) &= 2 \arctan(\lambda e^s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$ então $\theta(s) = 0$. Como $\theta(s)$ é o ângulo entre o eixo ρ e $\alpha'(s) \forall s \in \mathbb{R}$, então $\alpha(s)$ tem que ser a curva Γ , a qual pela translação parabólica, isto é, os pontos da curva caminham sobre um horociclo com ponto fixo $(-1, 0) \in \partial_\infty \mathbb{D}$, gera o slice $\mathbb{D} \times \{t_0\}$. Se $\lambda < 0$ então $\theta(s) = 2 \arctan(\lambda e^s) < 0$, pois \arctan de um número negativo é um número negativo. Observe que a simetria $f : P \rightarrow P$, definida por $f(\rho, t) = (\rho, -t)$ faz que o ângulo θ mude a $-\theta$, devido à segunda coordenada de $f(\rho, t)$, isto é, $-t$. Portanto a menos de isometrias, podemos assumir que θ é positivo, ou seja, $2 \arctan(\lambda e^s) > 0$, isto

implica que $\lambda > 0$ pois se $\lambda = 0$ então $\theta = 0$ o que é um absurdo e se $\lambda < 0$ então $\theta < 0$ (absurdo).

Finalmente observe que a menos da reparametrização $s \rightarrow s - \ln \lambda$, podemos assumir que $\lambda = 1$, então

$$\theta(s) = 2 \arctan(e^s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

Usando a equação (2.12) e (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \cos \theta(s) \\ &= \cos(2 \arctan(e^s)) \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\arctan(e^s)) \\ &= 1 - 2 \frac{\tan^2(\arctan(e^s))}{1 + \tan^2(\arctan(e^s))} \\ &= 1 - \frac{2e^{2s}}{1 + e^{2s}} \\ &= \frac{e^{-s}(1 - e^{2s})}{e^{-s}(1 + e^{2s})} \\ &= \frac{e^{-s} - e^s}{e^{-s} + e^s} \\ &= -\tanh(s). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \rho(s) &= -\int \tanh(s) \\ &= -\ln(\cosh(s)) + \mu \quad \forall s \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Note que as isometrias de $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, obtidas da translação hiperbólica ao longo da geodésica Γ em \mathbb{D} , envia qualquer superfície invariante sobre a isometria parabólica fixando o ponto no infinito $(-1, 0) \in \partial_\infty \mathbb{D}$ à uma superfície do mesmo tipo. Conseqüentemente a menos de isometrias, podemos assumir $\mu = 0$. Assim,

$$\rho(s) = -\ln(\cosh(s)) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Para a função t , usando a equação (2.13) e (2.45), temos

$$\begin{aligned} t'(s) &= \operatorname{sen} \theta(s) \\ &= \operatorname{sen}(2 \arctan(e^s)) \\ &= 2 \operatorname{sen}(\arctan(e^s)) \cos(\arctan(e^s)) \\ &= 2 \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}} \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}} \\ &= \frac{2e^s}{1+e^{2s}}. \end{aligned}$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned} t(s) &= \int \frac{2e^s}{1+e^{2s}} ds \\ &= 2 \arctan(e^s) + c. \end{aligned}$$

A menos de uma translação vertical, podemos assumir que $c = -\pi/2$, pois translações verticais são isometrias de $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. Assim,

$$t(s) = 2 \arctan(e^s) - \frac{\pi}{2}$$

e

$$\begin{aligned} t(0) &= 2 \arctan(1) - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Note que t é ímpar e ρ é par. De fato,

$$\begin{aligned} t'(s) &= \frac{2e^s}{1+e^{2s}} \\ &= \frac{2e^s}{e^s(e^{-s}+e^s)} \\ &= \frac{2}{e^{-s}+e^s} \\ &= t'(-s), \end{aligned}$$

ou seja, t' é par. Se t é par então t' é ímpar (absurdo). Defina a função $f(s) = t(-s) + t(s) = 2(\arctan(e^{-s}) + \arctan(e^s)) - \pi$, então

$$f'(s) = 0.$$

Ou seja, $f(s) = c$. Mas $f(0) = 0$ então $f(s) = 0$. Logo $t(-s) = -t(s)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\rho(-s) &= -\ln(\cosh(-s)) \\ &= -\ln(\cosh(s)) \\ &= \rho(s).\end{aligned}$$

Seja a curva $\alpha : I \rightarrow P$ parametrizada por

$$\alpha(s) = (\rho(s), t(s)) = (-\ln(\cosh(s)), 2 \arctan(e^s) - (\pi/2)),$$

então a curva α é simétrica em relação a Γ pois

$$\begin{aligned}\alpha(-s) &= (\rho(-s), t(-s)) \\ &= (\rho(s), -t(s)) \\ &= \alpha(s).\end{aligned}$$

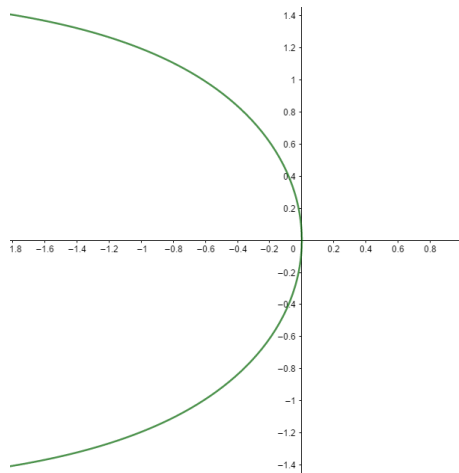


Figura 2.7: Curva $\alpha(s)$ simétrica em relação a Γ .

Resumindo, temos o seguinte:

Proposição 2.9. Além dos slices $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$, a menos de isometria ambiente, existe uma única superfície totalmente umbílica completa S_p em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ invariante sobre isometrias parabólicas. Esta superfície é analítica, propriamente imersa, homeomorfa ao plano e invariante sobre reflexões em relação ao slice horizontal. Além disso, qualquer superfície totalmente umbílica invariante sobre isometrias parabólicas é parte de um slice ou a menos de uma isometria ambiente é parte desta superfície.

2.3.2 Caso elíptico

A condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \frac{\operatorname{sen} \theta(s)}{\tanh \rho(s)}. \quad (2.46)$$

Diferenciando (2.12) e substituindo em (2.46), temos

$$\begin{aligned} \rho''(s) &= \frac{-\operatorname{sen}^2 \theta(s)}{\tanh \rho(s)} \\ &= \frac{\cos^2 \theta(s) - 1}{\tanh \rho(s)} \\ &= \frac{(\rho'^2 - 1)}{\tanh \rho(s)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Assumindo $\rho'(s_0) = 1$, para algum s_0 , onde $\rho(s_0) \neq 0$. Podemos provar como em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ que $f(s) = \rho(s_0) + s - s_0$ é solução de (2.47) com a condição inicial que $f'(s_0) = 1$ para algum s_0 e $f(s_0) \neq 0$. Assim, $f = g$ e $t' = 0$. Daí, $t(s) = t_1$, então a superfície $X(s, w) = (\rho(s) \cos w, \rho(s) \operatorname{sen} w, t_1)$ é parte de um slice $\mathbb{D} \times \{t_1\}$. Analogamente, acontece quando $\rho'(s_0) = -1$. Assim, vamos assumir que $\rho'^2(s) \neq 1$ para qualquer s tal que $\rho(s) \neq 0$. Dado que $\alpha(s) = (\rho(s), t(s))$ é p.p.c.a, temos $\rho'^2 + t'^2 = 1$ então $\rho'^2 < 1$. Podemos afirmar o seguinte.

Proposição 2.10. Qualquer solução local de (2.47) satisfazendo $\rho'^2 < 1$ da origem a uma única, a menos de isometria ambiente, uma superfície completa rotacional totalmente umbílica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, existe uma família a um parâmetro de tais superfícies e todas elas são analíticas, imersas e homeomorfas à esfera.

Além dos slices totalmente geodésicos $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$, estas superfícies são as únicas completas, rotacionais e totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Mais, qualquer superfície totalmente umbílica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, é a menos de isometria ambiente parte de uma destas superfícies.

Demonstração: Seja ρ uma solução local de (2.47), então (2.47) é equivalente a

$$\frac{\rho''}{\rho'^2 - 1} = \frac{\cosh \rho}{\operatorname{senh} \rho},$$

multiplicando por $2\rho'$ e integrando, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{2\rho'\rho''}{\rho'^2 - 1} ds &= \int \frac{2\rho' \cosh \rho}{\sinh \rho} ds \\ \ln(\rho'^2 - 1) &= 2 \ln(\sinh \rho) + c \\ \rho'^2 - 1 &= e^{2 \ln(\sinh \rho) + c} \\ \rho'^2 - 1 &= \lambda \sinh^2 \rho \\ \lambda &= \frac{\rho'^2 - 1}{\sinh^2 \rho}. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda = -b^2$, para algum $b > 0$. De forma análoga como em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, se $\rho'(s) = 0$ então a superfície gerada é parte de um cilindro totalmente geodésico $\rho = \pi/2$. Assim, assumiremos que ρ não é esta solução trivial. Considerando um intervalo no qual ρ' nunca se anula, mudando s por $-s$ podemos supor que $\rho' > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho'^2 - 1 &= -b^2 \sinh^2 \rho \\ \rho'^2 &= -b^2 \sinh^2 \rho + 1 \\ \rho' &= \sqrt{1 - b^2 \sinh^2 \rho}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

para algum $b > 0$. Seja ρ_b a solução maximal de (2.48) estendendo ρ . Analogamente como no Lema 2.4, pode-se provar que $\rho_b(s_0) = 0$ para algum $s_0 \in (u, v)$. Assim, a menos de reparametrização podemos assumir que $\rho_b(0) = 0$. Defina a função $f(s) = -\rho_b(-s)$ então f é solução de (2.48). Além disso, $f(0) = -\rho_b(0) = 0$. Logo, $f = \rho_b$. Assim,

$$\rho_b(-s) = f(-s) = -\rho_b(-s),$$

isto é, ρ_b é ímpar. Além disso,

$$\begin{aligned} \rho_b(0) &= \rho_b(-s_0) \\ &= -\rho_b(s_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \rho_b'(0) &= \sqrt{1 - b^2 \sinh^2 \rho} \\ &= \sqrt{1 - b^2 \sinh^2(0)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto como no Lema 2.4, ρ_b é definida no intervalo $(-\delta_b, \delta_b)$. Analogamente, como

no Lema 2.7, pode-se provar que δ_b é um número positivo finito, $l = \text{sen}^{-1}(1/b)$ é o limite de ρ_b quando $s \rightarrow \delta_b$ e $\lim_{s \rightarrow \delta_b} \rho_b'(s) = 0$.

Das equações (2.47) e (2.48), deduzimos que ρ_b satisfaz

$$\begin{aligned} \rho'' &= \frac{\rho'^2 - 1}{\tanh \rho} \\ &= \frac{1 - b^2 \text{senh}^2 - 1}{\tanh \rho} \\ &= \frac{-b^2 \text{senh}^2 \rho}{\tanh \rho} \\ &= -b^2 \text{senh} \rho \cosh \rho. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Com as condições iniciais $\rho(0) = 0$ e $\rho'(0) = 1$, então podemos estender a solução ρ_b de (2.49), mediante a solução $\tilde{\rho}_b : (-\delta_b, \delta_b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\tilde{\rho}_b(s) = \rho_b(s)$ se $s \neq \delta_b$ e $\tilde{\rho}_b = \text{sen}^{-1}(1/b)$ se $s = \delta_b$. Defina por $f(s) = \tilde{\rho}_b(2s_0 - s)$, então f é solução de (2.49), pois

$$\begin{aligned} f' &= -\tilde{\rho}_b'(2s_0 - s) \\ f'' &= \tilde{\rho}_b''(2s_0 - s). \end{aligned}$$

Como $\tilde{\rho}_b$ é solução de (2.49), então

$$f'' = -b^2 \cosh(\tilde{\rho}_b(2s_0 - s)) \text{senh}(\tilde{\rho}_b(2s_0 - s))$$

e além disso,

$$f(s_0) = \tilde{\rho}_b(2s_0 - s_0) = \tilde{\rho}_b(s_0).$$

Logo, $f = \tilde{\rho}_b$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_b(s) &= f(s) \\ &= \tilde{\rho}_b(2s_0 - s). \end{aligned}$$

Como $\tilde{\rho}_b(s) = \text{sen}^{-1}(1/b)$ quando $s = \delta_b$ então $\tilde{\rho}_b(\delta_b) = 0$ e $\tilde{\rho}_b$ é ímpar, pois se $s = \delta_b$ então $\tilde{\rho}_b(s) = \text{sen}^{-1}(1/b)$ é ímpar. Se $s \neq \delta_b$ então $\tilde{\rho}_b(s) = \rho_b'(s)$ é ímpar. Assim, deduzimos que $\tilde{\rho}_b$ é definida em todo \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_b(4\delta_b + s) &= \tilde{\rho}_b(2\delta_b + \delta_b + s) \\ &= \tilde{\rho}_b(2\delta_b - (-2\delta_b - s)) \\ &= \tilde{\rho}_b(-2\delta_b - s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\rho}_b$ é $4\delta_b$ -periódica.

Agora, estudaremos a função t , a qual satisfaz

$$\begin{aligned} t'^2 &= 1 - \tilde{\rho}_b'^2 \\ &= 1 - 1 + b^2 \sinh^2 \tilde{\rho}_b \\ &= b^2 \sinh^2 \tilde{\rho}_b. \end{aligned}$$

Seja t_b a função definida por

$$\begin{aligned} t_b' &= b \sinh \tilde{\rho}_b \\ t_b(0) &= 0, \end{aligned}$$

então t_b é uma função par. De fato, note que

$$\begin{aligned} t_b'(-s) &= b \sinh \tilde{\rho}_b(-s) \\ &= b \sinh(-\tilde{\rho}_b(s)) \\ &= -b \sinh(\tilde{\rho}_b(s)) \\ &= -t_b'(s), \end{aligned}$$

ou seja, t_b' é ímpar. Se t_b é ímpar então t_b' é par (absurdo). Defina $g(s) = t_b(-s) - t_b(s)$ então

$$\begin{aligned} g'(s) &= -t_b'(-s) - t_b'(s) \\ &= t_b'(s) - t_b'(s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $g(s) = c \forall s \in \mathbb{R}$. Mas $g(0) = t_b(0) - t_b(0) = 0$. Logo, $g(s) = 0$, o que implica que $t_b(-s) = t_b(s)$. Por outro lado, seja a função $g(s) = 2 t_b(\delta_b) - t_b(2\delta_b - s)$, então

$$\begin{aligned} g'(s) &= t_b'(2\delta_b - s) \\ &= b \sinh b\tilde{\rho}_b(2\delta_b - s) \\ &= b \sinh \tilde{\rho}_b(s) \\ &= t_b'(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\delta_b) &= 2 t_b(\delta_b) - t_b(2 \delta_b - \delta_b) \\ &= 2 t_b(\delta_b) - t_b(\delta_b) \\ &= t_b(\delta_b). \end{aligned}$$

Assim, $g = t_b$. Logo,

$$\begin{aligned} t_b(2 \delta_b - s) &= g(2 \delta_b - s) \\ &= 2 t_b(\delta_b) - t_b(2 \delta_b - 2 \delta_b + s) \\ &= 2 t_b(\delta_b) - t_b(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} t_b(4 \delta_b + s) &= t_b(2 \delta_b + 2 \delta_b + s) \\ &= t_b(2 \delta_b - (-2 \delta_b - s)) \\ &= 2 t_b(\delta_b) - t_b(-2 \delta_b - s) \\ &= 2 t_b(\delta_b) - 2 t_b(\delta_b) + t_b(s) \\ &= t_b(s), \end{aligned}$$

isto é, t_b é $4 \delta_b$ -periódica.

Tomando em conta que t_b é crescente em $[0, 2 \delta_b]$, deduzimos que a curva $\alpha_b(s) = (\tilde{\rho}_b(s), t_b(s))$, $s \in \mathbb{R}$, parametriza uma curva de Jordan, analítica em P , e simétrica em relação ao eixo pois $\alpha_b(-s) = (\tilde{\rho}_b(-s), t_b(-s)) = (-\tilde{\rho}_b(s), t_b(s))$.

Para concluir a prova, observe que para outra escolha para t_b , isto é, $t'_b = -b \sinh \tilde{\rho}_b$, conduz à curva deduzida de α_b pela isometria $(\rho, t) \rightarrow (\rho, -t)$. \square

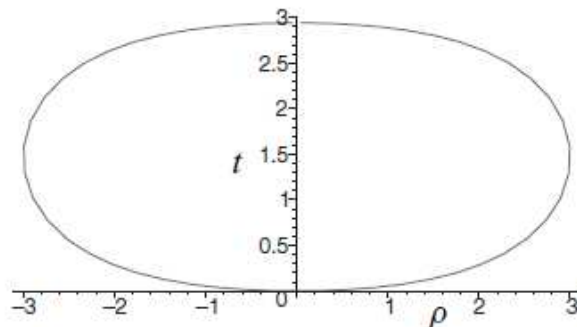


Figura 2.8: Curva $\alpha_b(s)$, gerada no caso elíptico para $b = 0.1$, [12].

2.3.3 Caso Hiperbólico

A condição de umbilicidade é

$$\theta'(s) = \text{sen } \theta(s) \tanh(\rho(s)). \quad (2.50)$$

Igualmente como no caso elíptico, descartamos as superfícies totalmente umbílicas $\mathbb{D} \times \{t\}$ e portanto assumimos que ρ satisfaz $\rho'^2 < 1$. Derivando (2.12) e usando (2.50), temos

$$\begin{aligned} \rho''(s) &= -\text{sen}^2 \theta(s) \tanh \rho(s) \\ &= (\cos^2 \theta(s) - 1) \tanh(\rho(s)) \\ &= (\rho'^2 - 1) \tanh(\rho(s)). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Seja ρ uma solução local de (2.51), então (2.51) é equivalente à

$$\frac{\rho''}{\rho'^2 - 1} = \frac{\text{senh } \rho}{\cosh \rho}.$$

Novamente multiplicando por $2 \rho'$ e integrando, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \rho' \rho''}{\rho'^2 - 1} ds &= \int \frac{2 \rho' \text{senh } \rho}{\cosh \rho} ds \\ \ln(\rho'^2 - 1) &= 2 \ln(\cosh \rho) + c \\ \rho'^2 - 1 &= e^{2 \ln(\cosh \rho) + c} \\ \rho'^2 - 1 &= \lambda \cosh^2 \rho. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = -c^2$ para algum $c \in (0, 1)$, concluimos que

$$\rho'^2 - 1 = -c^2 \cosh^2 \rho. \quad (2.52)$$

Das equações (2.51) e (2.52), deduzimos que

$$\begin{aligned} \rho'' &= (\rho'^2 - 1) \tanh \rho \\ &= -c^2 \cosh^2 \rho \frac{\text{senh } \rho}{\cosh \rho} \\ &= -c^2 \cosh \rho \text{senh } \rho. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Se $\rho = 0$, então $\alpha(s) = (0, 0, t(s))$ é uma reta vertical, assim a superfície gerada pela

isometria hiperbólica é um plano vertical totalmente geodésico, isto é, $\{(0, y, t) / -1 < y < 1, t \in \mathbb{R}\}$. Descartando este caso, consideramos unicamente as soluções não triviais de (2.53).

Analogamente como no caso elíptico, para qualquer solução maximal ρ_c de (2.53), podemos provar que ρ_c é definida na reta toda e $\rho_c(s_0) = 0$ para algum $s_0 \in \mathbb{R}$. Assim, a menos de reparametrização podemos assumir que $\rho_c(0) = 0$. Defina a função $g(s) = -\rho_c(-s)$ então g é solução de (2.53) e $g(0) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} g''(s) &= -\rho_c''(-s) \\ &= c^2 \cosh(\rho_c(-s)) \sinh(\rho_c(-s)) \\ &= -c^2 \cosh g \sinh g. \end{aligned}$$

Além disso,

$$g(0) = -\rho_c(0) = 0 = \rho_c(0).$$

Logo, $g = \rho_c$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_c(-s) &= g(-s) \\ &= -\rho_c(-s) \end{aligned}$$

então ρ_c é ímpar. Por outro lado $\rho(0) = 0$ e $\rho'(0) = \sqrt{1 - c^2 \cosh^2 \rho(0)} = \sqrt{1 - c^2}$. Já para a função t , temos que a mesma satisfaz

$$\begin{aligned} t'^2 &= 1 - \rho_c'^2 \\ &= 1 - 1 + c^2 \cosh^2 \rho_c \\ &= c^2 \cosh^2 \rho_c. \end{aligned}$$

Seja t_c a função definida por

$$\begin{aligned} t_c' &= c \cosh \rho_c \\ t_c(0) &= 0, \end{aligned}$$

então t_c é ímpar. De fato,

$$\begin{aligned} t_c'(-s) &= c \cosh(\rho_c(-s)) \\ &= c \cosh(-\rho_c(s)) \\ &= c \cosh(\rho_c(s)) \\ &= t_c'(s) \end{aligned}$$

então t'_c é par. Se t_c é par então t'_c é ímpar (absurdo). Defina a função $f(s) = t_c(-s) + t_c(s)$ então

$$\begin{aligned} f'(s) &= -t'_c(-s) + t'_c(s) \\ &= -t'_c(s) + t'_c(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $f(s) = c$. Mas $f(0) = 0$ então $f(s) = 0$. Logo $t_c(-s) = -t_c(s)$. Agora considere qualquer $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\rho'_c(s_0) = 0$. Defina a função $g(s) = \rho_c(2s_0 - s)$, então $g(s)$ é solução de (2.53), pois

$$\begin{aligned} g''(s) &= \rho''_c(2s_0 - s) \\ &= -c^2 \cosh(\rho_c(2s_0 - s)) \sinh(\rho_c(2s_0 - s)) \\ &= -c^2 \cosh(g(s)) \sinh(g(s)) \end{aligned}$$

e $g(s_0) = \rho_c(2s_0 - s_0) = \rho_c(s_0)$. Logo, $\rho_c = g$. Assim, $\rho_c(s) = \rho_c(2s_0 - s)$. Seja $T(s) = -t_c(2s_0 - s) + 2 t_c(s_0)$, então

$$\begin{aligned} T'(s) &= t'_c(2s_0 - s) \\ &= c \cosh(\rho_c(2s_0 - s)) \\ &= c \cosh(\rho_c(s)) \\ &= t'_c(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(s_0) &= -t_c(s_0) + 2 t_c(s_0) \\ &= t_c(s_0). \end{aligned}$$

Logo, $T = t_c$. Assim,

$$\begin{aligned} t_c(s + 4s_0) &= T(s + 4s_0) \\ &= -t_c(2s_0 - s - 4s_0 + 2t_c(s_0)) \\ &= -t_c(-2s_0 - s) + 2t_c(s_0) \\ &= t_c(2s_0 + s) + 2t_c(s_0) \\ &= T(2s_0 + s) + 2t_c(s_0) \\ &= -t_c(2s_0 - 2s_0 - s) + 4t_c(s_0) \\ &= t_c(s) + 4t_c(s_0). \end{aligned}$$

Como $t'_c = c \cosh \rho_c > 0$, pois $c \in (0, 1)$ então t_c é crescente. Suponha que t_c é limitada. Já que o contradomínio de $\cosh \rho_c(s) \in [1, +\infty)$ então

$$\begin{aligned} t'_c(s) &\geq c \\ \int t'_c(s) ds &\geq \int c ds \\ t_c(s) &\geq \int cs + c_1 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} &\geq +\infty. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{s \rightarrow +\infty} t_c(s) = +\infty$. (absurdo). pois t_c é limitada. Portanto t_c não é limitada. Isto mostra que a curva $\alpha_c = (\rho_c, t_c)$ é propriamente imersa. Analogamente para outra escolha $t' = -c \cosh \rho_c$ muda a curva $\alpha_c = (\rho_c, t_c)$ na curva simétrica $\alpha_c = (\rho_c, -t_c)$ em relação a Γ .

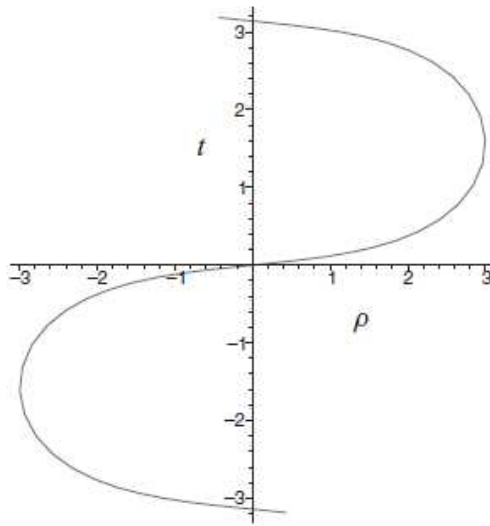


Figura 2.9: Curva $\alpha_c(s)$, gerada no caso hiperbólico para $c = 0.1$, [12].

O próximo resultado sintetiza todo o exposto anteriormente.

Proposição 2.11. Qualquer solução local não nula de (2.53), satisfazendo $\rho'^2 < 1$, da origem a uma única a menos de isometria ambiente, superfície S_c , $c > 0$ completa não geodésica totalmente umbílica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ invariante sobre isometrias parabólicas. Além disso, existe uma família a um parâmetro de tais superfícies e todas elas são analíticas, propriamente imersas e homeomorfas ao plano. Estas superfícies são periódicas na direção vertical e simétrica em relação ao conjunto discreto de slices horizontais. Mais, qualquer superfície em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ invariante sobre isometrias hiperbólicas é parte de um plano geodésico totalmente vertical, o slice $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$ ou a menos de isometria ambiente, é parte de uma destas superfícies S_c .

2.4 Unicidade das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção, mostraremos que as únicas superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ são as dadas nas Seções 2.2 e 2.3.

Lema 2.12. Seja (M, ∇) uma variedade bi-dimensional e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva tal que $\nabla_{\gamma_u} \gamma_u$ é paralelo a γ_u , então γ é uma geodésica de M .

Demonstração: Seja s o parâmetro de comprimento de arco, então

$$\gamma(u) = \gamma(s(u)).$$

Note que $\gamma_u = \gamma_s s_u$. Daí,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma_u} \gamma_u &= \nabla_{\gamma_u} \gamma_s s_u \\ &= s_{uu} \gamma_s + s_u^2 \nabla_{\gamma_s} \gamma_s. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Como $\nabla_{\gamma_u} \gamma_u$ é paralelo a γ_u , segue que $\nabla_{\gamma_u} \gamma_u$ também é paralelo a γ_s , pois $\gamma_u = \gamma_s s_u$. Logo, usando (2.54), concluímos que $\nabla_{\gamma_s} \gamma_s$ é paralelo a γ_s . Portanto γ é geodésica de M , pois

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) &= \langle n, \nabla_{\gamma_s} \gamma_s \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde n é o normal unitário da curva γ . □

Proposição 2.13. Seja $S \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície orientável, transversal¹ a cada slice $\mathbb{M}^2 \times \{t\}$. Suponha que:

- (i) A curvatura geodésica de cada curva horizontal $S_t = S \cap (\mathbb{M}^2 \times \{t\})$ em \mathbb{M}^2 é constante (dependendo de t).
- (ii) O ângulo entre S e $\mathbb{M}^2 \times \{t\}$ é constante ao longo de S_t para cada t .

Então, caso $\mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2$, a superfície S é parte de uma superfície rotacional. No caso de $\mathbb{M}^2 = \mathbb{H}^2$, a superfícies S é parte de: uma superfície rotacional; ou uma superfície invariante por uma família de isometrias parabólicas tendo o mesmo ponto fixo no infinito;

¹Def.: Uma superfície $S \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ intersecta transversalmente outra superfície ou curva de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, se para cada ponto da interseção, seus espaços tangentes, geram o espaço tangente de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

ou uma superfície invariante por uma família de isometrias hiperbólicas ao longo da mesma geodésica de \mathbb{H}^2 .

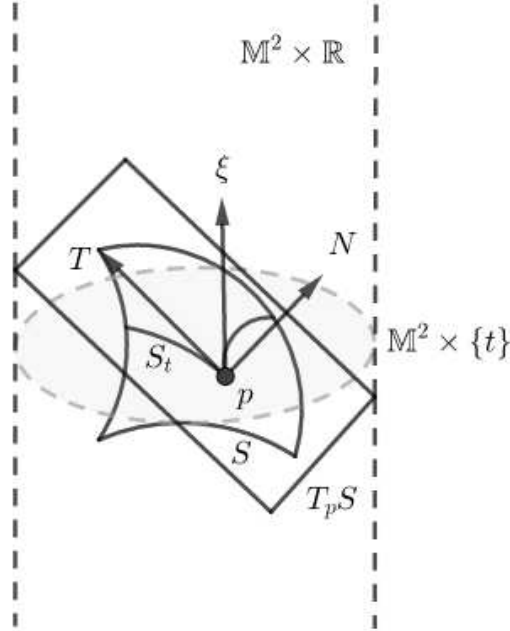


Figura 2.10: Superfície transversal a cada slice $M^2 \times \{t\}$.

Demonstração: Seja N o campo normal unitário de S . Definimos ν em S , como $\nu = \langle N, \xi \rangle$, onde ξ é uma direção vertical. Denotamos por T a projeção de ξ em S , então $T = \xi - \nu N$. Note que usando o fato de que o ângulo entre S e $M^2 \times \{t\}$ é constante ao longo de S_t , temos que S_t é uma linha de curvatura. De fato, seja $\gamma : s \in I \mapsto \gamma(s) \in S_t$, uma parametrização regular de S_t , como ξ é um campo paralelo ao longo da curva, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds} \nu \\
&= \frac{d}{ds} \langle N, \xi \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, \xi \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, T + \nu N \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, T \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, \nu N \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, T \rangle + \frac{\nu}{2} \frac{d}{ds} \langle N, N \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, T \rangle,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Mas

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N, \gamma'(s) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\xi - T}{\nu}, \gamma'(s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\nu} (\langle \xi, \gamma'(s) \rangle - \langle T, \gamma'(s) \rangle) \\ &= \frac{-1}{\nu} \langle T, \gamma'(s) \rangle, \end{aligned}$$

isto é, $\langle T, \gamma'(s) \rangle = 0$ e por (2.55), temos

$$\bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N = \lambda \gamma'(s).$$

Como $\bar{\nabla} N$ é auto-adjunta

$$\langle \bar{\nabla}_T N, \gamma'(s) \rangle = \langle T, \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N \rangle = 0.$$

Assim, $\bar{\nabla}_T N$ é paralelo a T , ou seja, T é uma direção principal em S .

Seja $c : u \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow c(u) \in S$ a linha de curvatura associada ao campo T , isto é, $c' = T$.

Vamos mostrar que $c(I)$ está contido em um plano totalmente geodésico, o que é equivalente a mostrar que a projeção horizontal $c_h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2$ é uma geodésica de \mathbb{M}^2 . De fato, assumamos que c não é vertical, isto é, $\nu \neq 0$ ao longo de c . Seja ∇ a conexão em \mathbb{M}^2 . Dado que $c' = c'_h + a\xi$, então

$$\begin{aligned} a &= \langle c', \xi \rangle \\ &= \langle T, \xi \rangle \\ &= \langle T, T + \nu N \rangle \\ &= \langle T, T \rangle + \nu \langle T, N \rangle \\ &= \langle T, T \rangle \\ &= \langle \xi - \nu N, \xi - \nu N \rangle \\ &= 1 - \nu^2. \end{aligned}$$

Ou seja, $c' = c'_h + (1 - \nu^2)\xi$. Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_T T &= \bar{\nabla}_{c'} c' \\
&= \bar{\nabla}_{c'} c'_h + (1 - \nu^2)\xi \\
&= \bar{\nabla}_{c'} c'_h + \bar{\nabla}_{c'}(1 - \nu^2)\xi \\
&= \bar{\nabla}_{c'_h + (1 - \nu^2)\xi} c'_h + \bar{\nabla}_{c'}(1 - \nu^2)\xi \\
&= \nabla_{c'_h} c'_h + (1 - \nu^2)\bar{\nabla}_\xi c'_h + \frac{d}{du}(1 - \nu^2)\xi + (1 - \nu^2)\bar{\nabla}_{c'} \xi \\
&= \nabla_{c'_h} c'_h + \frac{d}{du}(1 - \nu^2)\xi. \\
&= \nabla_{c'_h} c'_h - 2\nu\nu' \xi.
\end{aligned}$$

Como T é uma direção principal, então existe uma função λ tal que $\bar{\nabla}_T N = \lambda T$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu' &= \frac{d}{du} \langle N, \xi \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{c'(u)} N, \xi \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{c'(u)} \xi \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_T N, \xi \rangle + \langle N, \underbrace{\bar{\nabla}_T \xi}_{\star} \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_T N, \xi \rangle \\
&= \lambda \langle T, \xi \rangle \\
&= \lambda \langle T, T + \nu N \rangle \\
&= \lambda(1 - \nu^2),
\end{aligned}$$

em \star usa-se o Lema [1.67](#).

Assim,

$$\bar{\nabla}_T T = \nabla_{c'_h} c'_h - 2\lambda\nu(1 - \nu^2)\xi. \quad (2.56)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_T T &= \bar{\nabla}_T(\xi - \nu N) \\
&= \bar{\nabla}_T \xi - \bar{\nabla}_T \nu N \\
&= -\bar{\nabla}_T \nu N \\
&= -\nu' N - \nu \bar{\nabla}_T N \\
&= -\nu' N - \lambda \nu T \\
&= -\nu' \left(\frac{\xi - T}{\nu} \right) - \lambda \nu T \\
&= \frac{-\nu'}{\nu} \xi + \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) T \\
&= \frac{-\nu'}{\nu} \xi + \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) (c'_h + (1 - \nu^2) \xi) \\
&= \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) c'_h + \left(\frac{-\nu'}{\nu} + \frac{\nu'}{\nu} (1 - \nu^2) - \lambda \nu (1 - \nu^2) \right) \xi \\
&= \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) c'_h + (-\nu \nu' - \lambda \nu (1 - \nu^2)) \xi \\
&= \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) c'_h + (-\lambda (1 - \nu^2) \nu - \lambda \nu (1 - \nu^2)) \xi \\
&= \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) c'_h + ((1 - \nu^2)(-\lambda \nu - \lambda \nu)) \xi \\
&= \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) c'_h - 2 \lambda \nu (1 - \nu^2) \xi.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Por (2.56) e (2.57), temos

$$\nabla_{c'_h} c'_h = \left(\frac{\nu'}{\nu} - \lambda \nu \right) c'_h.$$

Ou seja, $\nabla_{c'_h} c'_h$ é paralelo a c'_h então pelo Lema 2.12, temos que c_h é uma geodésica de \mathbb{M}^2 .

Denote por w o campo horizontal unitário ao longo de c tangente a S e para cada $u \in I$ seja $P(u)$ o plano vertical totalmente geodésico contendo $c(u)$ e ortogonal a $c(u)$ em $w(u)$.

Suponha agora que ν é zero em um intervalo aberto $J \subset I$. Seja $u_0 \in J$. Observe que ao longo da curva horizontal de S passando por $c(u_0)$, o campo vetorial N é horizontal. Isto significa que um conjunto aberto de S , incluindo $c(J)$, é parte de um cilindro $\gamma \times \mathbb{R}$ onde $\gamma \subset \mathbb{M}^2$ é alguma curva horizontal. Claramente isto implica que w é constante ao longo de J , e portanto também em P .

Por estes dois argumentos vemos que P é localmente constante em um subconjunto aberto e denso de I . Como $P(u)$ depende de um caminho diferenciável em u , concluímos que P é constante.

Agora considere a curva horizontal $\gamma : I \rightarrow S_t$ parametrizada pelo comprimento de arco. Sejam $s_1, s_2 \in I$ e chamemos $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ a curva integral de T tal que $c(0) = \gamma(s_1)$ e $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ a curva integral de T tal que $\tilde{c}(0) = \gamma(s_2)$.

Chamemos c_3 (resp. \tilde{c}_3) a coordenada vertical de c (resp. \tilde{c}). Chamemos de novo u o parâmetro em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, então

$$\begin{aligned} c_3'(u) &= \langle c'(u), \xi \rangle \\ &= \langle T(c(u)), \xi \rangle \\ &= 1 - \nu^2(c(u)) \\ &= 1 - \nu^2(c_3(u)). \end{aligned}$$

Assim, c_3 e \tilde{c}_3 verificam a mesma equação diferencial de primeira ordem com a condição inicial que $u = 0$. Daí, pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, segue que $c_3 = \tilde{c}_3$.

Lembramos que c e \tilde{c} estão contidos nos planos verticais totalmente geodésicos P e \tilde{P} .

Chamemos $\Gamma \subset \mathbb{M}^2$ a linha de curvatura geodésica constante completa definida por γ , isto é $\gamma \subset \Gamma$.

Observe que existe uma única isometria positiva φ de \mathbb{M}^2 tal que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$, $\varphi(c(0)) = \tilde{c}(0)$ e preservando a orientação de Γ . Portanto a isometria $\Phi(z, t) = (\varphi(z), t)$ de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ leva P em \tilde{P} . Note que a curva \tilde{c} e $\Phi \circ c$ no plano vertical \tilde{P} têm a mesma componente vertical e fazem o mesmo ângulo com a horizontal para cada $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Deduzimos que estas curvas coincidem $\Phi \circ c = \tilde{c}$, o que conclui a prova. \square

Enfim, podemos enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.14. Seja $S \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície imersa totalmente umbílica, então S é parte de uma superfície \tilde{S} completa e imersa totalmente umbílica, a qual é invariante por um grupo a um parâmetro de isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Mais precisamente, a menos de isometrias do ambiente, no caso $\mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2$ então \tilde{S} é um dos exemplos descritos na Seção 2.2 e no caso $\mathbb{M}^2 = \mathbb{H}^2$ então \tilde{S} é um dos exemplos descritos na Seção 2.3. Em particular, qualquer superfície totalmente geodésica é parte de um slice $\mathbb{M}^2 \times \{t\}$ ou parte de um produto $\Gamma \times \mathbb{R}$, onde $\Gamma \subset \mathbb{M}^2$ é uma geodésica.

Demonstração: Seja $S \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ uma superfície totalmente umbílica, pela definição

de superfície, S é imagem de uma imersão $X : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, onde Ω é um disco aberto em \mathbb{R}^2 . Como S é totalmente umbílica, então as curvaturas principais λ, λ_1 são iguais. Além disso, $\bar{\nabla}_w N = aX_u + bX_v$ para qualquer vetor w tangente a S , então

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_w N &= \bar{\nabla}_{aX_u + bX_v} N \\
 &= a\bar{\nabla}_{X_u} N + b\bar{\nabla}_{X_v} N \\
 &= \lambda aX_u + \lambda bX_v \\
 &= \lambda(aX_u + bX_v) \\
 &= \lambda w.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

De modo análogo ao realizado no Teorema [2.1](#), temos

$$\text{grad } \lambda = (\kappa - 4\tau^2)\nu T.$$

Como $\tau = 0$, segue que

$$\text{grad } \lambda = \kappa \nu T, \tag{2.59}$$

onde κ é a curvatura Gaussiana de \mathbb{M}^2 e T a projeção da direção vertical ξ no plano tangente à superfície S .

Suponha que λ não possui pontos críticos, isto é, $\text{grad } \lambda \neq 0$, então $\text{grad } \lambda$ é ortogonal à curva de nível λ . Como $\text{grad } \lambda$ é paralelo a T pela equação [\(2.59\)](#), então T é ortogonal às curvas de nível de λ . Daí, se γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma curva de nível, então

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle T, \gamma' \rangle \\
 &= \langle \xi - \nu N, \gamma' \rangle,
 \end{aligned}$$

então $\langle \gamma', \xi \rangle = 0$, pois $\gamma' \in T_{\gamma(s)}S$. Assim, as curvas de nível são horizontais, isto é, pertencem algum $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$.

Agora, como $\nu = \langle N, \xi \rangle$, então

$$\begin{aligned}
 \frac{d\nu}{ds} &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, \xi \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \xi \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, \xi \rangle.
 \end{aligned}$$

Por (2.58), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{ds} &= \langle \lambda(\gamma(s)) \gamma'(s), \xi \rangle \\ &= \lambda(\gamma(s)) \langle \gamma'(s), \xi \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, ν é constante ao longo de γ .

Chamamos n o campo normal unitário em $T(\mathbb{M}^2 \times \{t_0\})$ ao longo de γ com a orientação induzida por N . Seja $\theta = \langle N, n \rangle$. Como $N(\gamma(s)) = \cos \theta(s) n(r(s)) + \sin \theta(s) \xi(\gamma(s))$. Mas $\sin(\theta(s)) = \langle N, \xi \rangle = \nu$. Logo, θ também é constante ao longo de γ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma(s)) &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} N, \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} (\cos \theta n + \sin \theta \xi), \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \cos \theta n + \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \sin \theta \xi, \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \cos \theta n, \gamma'(s) \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \sin \theta \xi, \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle \cos \theta \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} n, \gamma'(s) \rangle + \langle \sin \theta \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \xi, \gamma'(s) \rangle \\ &= \cos \theta \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} n, \gamma'(s) \rangle + \sin \theta \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \xi, \gamma'(s) \rangle \\ &= \cos \theta \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} n, \gamma'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Dado que λ e θ são constantes, temos

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} n, \gamma'(s) \rangle \\ &= \frac{\lambda(\gamma(s))}{\cos \theta} \\ &= cte. \end{aligned}$$

Como $\kappa_g(s) = cte$ e θ são constantes ao longo da curva γ então usando a Proposição 2.13, temos no caso $\mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2$ que S é parte de uma superfície rotacional e como S é totalmente umbílica então pelo Teorema 2.8, S é uma das superfícies introduzidas pelos Lemas 2.5, 2.6 e 2.7. No caso $\mathbb{M}^2 = \mathbb{H}^2$, S é parte de uma superfície rotacional ou uma superfície invariante por uma família de isometrias parabólicas ou uma superfície invariante por uma família de isometrias hiperbólicas. Novamente como S é totalmente umbílica então pelas Proposições 2.10, 2.9 e 2.11, temos o desejado.

Suponha agora que λ tem algum ponto crítico.

Seja $U \subset S$ uma componente conexa qualquer do interior do conjunto de pontos críticos de λ . A fórmula (2.59) mostra que N é sempre vertical ou sempre horizontal em U . De fato, $\text{grad } \lambda(p) = \kappa\nu T$ então $\kappa\nu T = 0$. Se $\nu = 0$ então $N \perp \xi$, ou seja N é horizontal em U . Se $T = 0$ então N é sempre vertical em U . No primeiro caso U é parte de um slice $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$ e no segundo caso U é parte de um cilindro, que é parte de um produto $\Gamma \times \mathbb{R}$ onde Γ é alguma curva em \mathbb{M}^2 . Como S é totalmente umbílica então $\bar{\nabla}_{\Gamma'} N = \lambda \Gamma'$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\Gamma'} N &= \bar{\nabla}_{\Gamma'} \cos \theta n + \text{sen } \theta \xi \\ &= \cos \theta \bar{\nabla}_{\Gamma'} n \\ &= \pm \cos \theta \bar{\nabla}_{\Gamma'} \Gamma'. \end{aligned}$$

Assim, $\bar{\nabla}_{\Gamma'} \Gamma'$ é paralelo a Γ' e por (2.12), Γ é geodésica em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Como Γ é geodésica então U é totalmente geodésica, pois para cada $p \in U$ e dada uma direção $v \in T_p S$ a geodésica de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ (Diâmetro no caso de \mathbb{H}^2) está contido em U .

Seja agora $V \subset S$ uma componente conexa qualquer do conjunto de pontos regulares de λ . Da primeira parte da demonstração, sabemos que V é parte de um dos exemplos simétricos dados na Seção 2.2 e 2.3.

Portanto S é obtido colando pedaços de superfícies totalmente geodésicas e pedaços dos exemplos simétricos construídos na Seção 2.2 e 2.3. Um exame mais detalhado desses tipos diferentes de superfícies mostram que todo S é totalmente geodésico ou parte de um dos exemplos simétricos completos, que conclui a prova. \square

Considerações Finais

O estudo de superfícies com propriedades preestabelecidas é muito importante para o desenvolvimento da Geometria Diferencial. Em particular, o estudo das superfícies totalmente umbílicas imersas em variedades homogêneas tridimensionais.

No presente trabalho se estudou, quais são as superfícies totalmente umbílicas no espaço tri-dimensional $E^3(\kappa, \tau)$. A classificação se fez segundo o τ . Se $\tau \neq 0$ que neste caso são os espaços Nil_3 e $PSL_2(\mathbb{R}, \tau)$ então não existem superfícies totalmente umbílicas. Se $\tau = 0$, ou seja, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, então para o caso de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ com ajuda dos Lemas [2.5](#), [2.6](#) e [2.7](#) ajudaram a saber que as superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ são rotacionais, imersas, homeomorfas a \mathbb{R}^2 ou a \mathbb{S}^2 e homologas ou não a zero. No caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ baseado nos Lemas [2.5](#), [2.6](#) e [2.7](#), se fez a classificação para cada tipo de isometria. No caso parabólico existe uma única superfície totalmente umbílica que é analítica, imersa e homeomorfa ao plano. No caso elíptico existe uma família a um parâmetro de superfícies totalmente umbílicas que são completas, rotacionais e homeomorfas à esfera. No caso hiperbólico existe uma família a um parâmetro de superfícies totalmente umbílicas que são analíticas, propriamente imersas e homeomorfas ao plano. Para finalizar desenvolvemos o teorema da unicidade de tais superfícies.

Um problema interessante seria atacar a classificação de superfícies totalmente umbílicas em espaços distorcidos conhecidos como Warped Products. Precisamente, sejam $B = (B^m, g_B)$ e $F = (F^k, g_F)$ duas variedades Riemannianas. Denotamos por π e σ as projeções de $B \times F$ em B e F , respetivamente. Para uma aplicação suave f em B o Warped Product $M = B \times_f F$ é o produto $M = B \times F$ dotado com o tensor métrico definido por $g = \pi^*g_B + f^2\sigma^*g_F$, onde $(*)$ denota o pull back. A função f é chamada a função warping. Para mais informação, veja [\[15\]](#).

Referências Bibliográficas

- [1] DO CARMO, MANFREDO PERDIGÃO. **Geometria diferencial de curvas y superficies**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [2] TOUBIANA, ERIC; SÁ EARP, RICARDO. **Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann**. Bibliothèque des sciences, 1997.
- [3] DO CARMO, MANFREDO PERDIGÃO. **Geometria Riemanniana**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [4] ESPINOZA PEÑAFIEL, CARLOS. **Surfaces of constant mean curvature in homogeneous three manifolds with emphasis in $PSL_2(\mathbb{R}, \tau)$** . Doctoral Thesis-PUC, 2010.
- [5] JUNIOR, ADY CAMBRAIA. **Imersões mínimas e conformes em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$** . Diss. PUC-Rio, 2009.
- [6] BONAHOON, FRANCIS. **Geometric structures on 3-manifolds, from: "Handbook of geometric topology"**. RJ Daverman, RB Sher, editors. 2002.
- [7] SCOTT, PETER. **The geometries of 3-manifolds**. Bulletin of the London Mathematical Society, 1983, 15.5: 401-487.
- [8] THURSTON, WILLIAM P. **Three-dimensional geometry and topology**. Princeton university press, 1997.
- [9] DANIEL, BENOÎT. **Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds**. Commentarii Mathematici Helvetici 82.1 (2007): 87-131.
- [10] SANINI, A. **Gauss map of a surface of the Heisenberg group**. Bollettino della Unione Matematica Italiana-B, 1997, 2: 79-94.
- [11] SPIVAK, MICHAEL D. **A comprehensive introduction to differential geometry**. Publish or perish, 1970.
- [12] SOUAM, RABAH; TOUBIANA, ERIC. **Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds**. Commentarii Mathematici Helvetici, 2009, vol. 84, no 3, p. 673-704.
- [13] ABRESCH, UWE; ROSENBERG, HAROLD. **Generalized Hopf differentials**. Mat. Contemp, 2005.

-
- [14] MEEKS III, WILLIAM H; PÉREZ, JOAQUÍN. **Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups**. Geometric Analysis, 2012.
- [15] O'NEILL, BARRETT. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. Academic press, 1983.
- [16] DORIA, CELSO MELCHIADES. **Geometrias Nao-Euclideanas Exemplos**. Bie-nal de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2004.
- [17] ROSENBERG, HAROLD. **Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$** . Illinois J. Math. 46 (2002), 1177-1195.

Índice Remissivo

- ângulo hiperbólico, [21](#)
- aplicação
 - conforme, [22](#)
 - normal de Gauss, [16](#)
- bordo assintótico, [20](#)
- campo
 - Killing, [47](#)
 - paralelo, [43](#)
- conexão
 - afim, [43](#)
 - compatível com a métrica, [43](#)
 - Riemanniana, [45](#)
 - simétrica, [44](#)
- curva regular, [21](#)
- curvatura
 - Gauss, [17](#)
 - média, [17](#)
 - normal, [17](#)
- curvaturas principais, [17](#)
- derivada covariante, [43](#)
- disco unitário aberto \mathbb{D} , [28](#)
- distância hiperbólica, [26](#)
- esfera Euclidiana \mathbb{S}^2 , [39](#)
- espaço $E^3(\kappa, \tau)$, [13](#)
- geodésicas
 - \mathbb{D} , [29](#)
 - $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, [49](#)
 - \mathbb{S}^2 , [40](#)
 - \mathbb{H}^2 , [26](#)
- grupo
 - isometrias de \mathbb{S}^2 , [39](#)
 - Moebius $\mathcal{M}_{\mathbb{D}}$, [30](#)
- horociclos, [31](#)
- inversão, [24](#)
- isometria
 - \mathbb{H}^2 , [26](#)
 - hiperbólica, [32](#)
 - negativa, [26](#)
 - parabólica, [32](#)
 - positiva, [26](#)
 - superfícies, [19](#)
- isometria elíptica, [32](#)
- métrica
 - hiperbólica, [20](#)
 - Riemanniana, [41](#)
- modelo do disco de Poincaré, [29](#)
- norma hiperbólica, [20](#)
- operador curvatura, [50](#)
- ponto umbílico, [17](#)
- primeira forma fundamental, [16](#)
- rotações hiperbólicas, [39](#)
- segunda forma fundamental, [16](#)
- semi-plano superior \mathbb{H}^2 , [20](#)
- submersão, [41](#)
- superfície
 - completa, [19](#)
 - duplamente ortogonal, [63](#)
 - regular, [15](#)

- rotacional, [57](#)
- transversal, [99](#)

- transformação
 - Cayley, [28](#)
 - Moebius, [24](#)

- translação
 - hiperbólica, [39](#)
 - parabólica, [39](#)

- variedade
 - diferenciável, [40](#)
 - produto, [40](#)