

JULIO CESAR DE PAULA

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ELÍPTICO
USANDO A APLICAÇÃO FIBRAÇÃO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiæ*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2011**

JULIO CESAR DE PAULA

**Existência de soluções para um problema elíptico usando a Aplicação
Fibração**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2011.

Paulo César Carrião

Grey Ercole

Anderson Luís de Araujo
(Co-orientador)

Margareth da Silva Alves
(Co-orientadora)

Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)

Aos meus pais, Paulo e Conceição, dedico esta conquista.

Agradecimentos

Agradeço:

À essa força, que muitos chamam de Deus, pela saúde, pelos meus pais e por me permitir mais essa conquista, especialmente quando me deu forças para continuar estudando nas melhores tardes de sol e me deu forças para continuar acordado, estudando, durante infinitas madrugadas, mesmo com sono.

À Viviane que praticamente cursou este mestrado comigo, que sempre esteve presente, mesmo que do outro lado da linha. Obrigado pelo amor incondicional, pela compreensão, pelo companheirismo e me desculpe pela ausência em momentos importantes.

Aos meus pais, que por diversas vezes abdicaram de um pouco mais de conforto para me proporcionar uma melhor educação e por acreditarem em mim. Ao meu pai Paulo pelo carinho, amizade, pelo exemplo e por tudo que sou hoje, e a minha mãe Conceição pelo carinho, compreensão e apoio e a quem eu devo muito.

Aos meus avós Maria e Manoel, as minhas tias Fátima e Zilda, aos meus tios Amauri, Wilson e Valnei pelo carinho e principalmente pela infância feliz que me proporcionaram. Sem vocês dificilmente eu chegaria até aqui.

Ao meu orientador Prof^o. Olímpio Hiroshi Miyagaki, que dedicou parte de seu precioso tempo para me orientar e quem eu admiro como pessoa e como profissional.

Aos meus primos e amigos, principalmente ao Valtencir e a Teresinha.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, em especial aos meus co-orientadores Prof. Anderson e Prof. Margareth, pelas valiosas considerações sobre a minha dissertação, a professora Simone com quem sempre pude contar e que sempre tentou me ajudar a resolver os problemas que apareceram e aos professores da UFMG, Prof. Carrião e Prof. Grey Ercole, por terem aceitado me avaliar e pelas valiosas sugestões.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Estrutura da dissertação	2
1.3 Notações usadas nesta dissertação	2
2 O Método da Aplicação Fibração e a Variedade de Nehari	4
2.1 Considerações Iniciais	4
2.2 Variedade de Nehari	6
2.3 Aplicação Fibração	8
3 Análise da Aplicação Fibração ϕ_u	12
3.1 Descrição da função m_u	12
3.2 Descrição da função ϕ_u	16
4 Existência de Soluções Positivas	28
4.1 Existência de minimizadores para J_λ	28
4.2 Existência de soluções para o problema elíptico (P)	33
5 O funcional $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$	34
6 Regularidade da Solução fraca do problema (P)	43
7 Resultados Básicos	47
7.1 Minimização de Funcionais Lineares	47
7.2 Resultados da Teoria de Medida e Integração	47
7.3 Definições e resultados de Análise Funcional	48
7.4 Definições e resultados da Teoria Clássica de EDP e dos Espaços de Sobolev	50
Referências Bibliográficas	54

Resumo

PAULA, Julio Cesar de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2011. **Existência de soluções para um problema elíptico usando a Aplicação Fibrção**
Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki. Co-orientadores: Margareth da Silva Alves e Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

Esta dissertação é dedicada ao estudo da Aplicação Fibrção seguindo o trabalho desenvolvido por Kennedth J. Brown e Tsung-Fang Wu [ver [6]]. Neste artigo os autores utilizam a Aplicação Fibrção introduzida por P. Drabek e S. I. Pohozaev [ver [9]] para fornecer uma prova simples de existência de soluções positivas para a classe de problemas elípticos do tipo

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Delta u = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, Ω é uma região limitada do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, com $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, $\lambda > 0$ e $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais, suaves que podem mudar de sinal em Ω .

Abstract

PAULA, Julio Cesar de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February of 2010. **Existence of solutions for an elliptic problem using the Fibered Maps.** Adviser: Olímpio Hiroshi Miyagaki. Co-advisers: Margareth da Silva Alves and Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

This dissertation treat the study of fibery maps as well as its application, following work by K. J. Brown and T. F. Wu [see [6]]. There, the authors apply the fibery maps introduced by P. Drabek and S. I. Pohozaev [see [9]] in order to present a simple proof of the existence of positive solutions for the following class of elliptics problems of the type

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

when $\Delta u = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, Ω é a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, with $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, $\lambda > 0$ e $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are smooth sign changing weight functions.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

Esta dissertação é baseada no artigo de Kenneth J. Brown e Tsung-Fang Wu, intitulado "A Fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem", como pode ser visto em [6].

Analisaremos como aplicar o Método da Aplicação Fibrção, para resolver uma certa classe de problemas elípticos de Equações Diferenciais Parciais, ou seja, queremos encontrar as possíveis soluções da seguinte classe de problemas

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Delta u = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, Ω é uma região limitada do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, com $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, $\lambda > 0$ e $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais, suaves que podem mudar de sinal em Ω .

O Método da Aplicação Fibrção é uma ótima ferramenta para resolução de Problemas Diferenciais Elípticos. Ele é um método variacional e é baseado no Método de Nehari, relacionando a Variedade de Nehari com a Aplicação Fibrção, relação esta introduzida inicialmente em [5] e [9]. Como veremos, o funcional de Euler é melhor comportado sobre esta Variedade.

Este método relaciona o funcional de Euler associado ao problema (P) com uma função real e como veremos adiante, as informações sobre esta função (como pontos de máximo, pontos de mínimo, intervalos de crescimento, intervalos de decrescimento, etc) nos ajudarão a fornecer uma demonstração simples da existência de soluções positivas para o problema (P).

Em 1994, no artigo "Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems"[ver [14]], os pesquisadores A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami começaram a estudar a classe de problemas (P), neste artigo os autores estudaram o problema (P) com $a \equiv 1$ e $b \equiv 1$, onde mostraram alguns resultados de existência e não existência de

soluções, dependendo do parâmetro λ , usando os métodos de sub-solução e super-solução. Após a publicação deste artigo esta classe de problemas tem sido estudada por muitos pesquisadores como em [5], [7], [8], [15], [14] e [10].

O problema (P) também tem sido estudado recentemente em [8] usando o Teorema do Passo da Montanha e em [10] e [15] usando a Variedade de Nehari.

Como pode ser visto em [7], esta classe de problemas elípticos de EDP modela vários problemas da física-matemática e da dinâmica das populações.

1.2 Estrutura da dissertação

Esta dissertação esta organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2, definiremos a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração e veremos como estes dois conceitos se relacionam.

No Capítulo 3, faremos uma completa descrição da Aplicação Fibração associada com o problema (P), ou seja, iremos estudar todos os casos possíveis, para conhecermos o comportamento da Aplicação Fibração.

No Capítulo 4, usaremos as informações obtidas no capítulo 3, para fornecer uma demonstração simples da existência de pelo menos duas soluções positivas para o problema (P), para λ suficientemente pequeno.

No Capítulo 5, mostramos que o funcional de Euler associado ao problema (P) é de classe $\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e encontramos a forma da sua derivada.

No Capítulo 6, usaremos alguns resultados da Teoria Clássica de Regularidade e o argumento "bootstrap" para mostrarmos que as soluções fracas encontradas para o problema (P), são na realidade soluções clássicas.

No Capítulo 7, apresentamos algumas definições e alguns resultados de Teoria da Medida e Integração, de Espaços de Sobolev, de Equações Diferenciais Parciais e de Análise Funcional que foram utilizados nesta dissertação.

1.3 Notações usadas nesta dissertação

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto em Ω
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_\Omega u(x) ^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}$
$W^{1,p}(\Omega)$	munido da norma $ u _p = [\int_\Omega u(x) ^p dx]^{\frac{1}{p}}$ $\{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u \varphi' dx = - \int_\Omega u \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega); \exists g \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u \varphi' dx = - \int_\Omega u \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$
$H_0^1(\Omega)$	munido da norma $\ u\ _{H^1(\Omega)} = [\int_\Omega \nabla u ^2 dx + \int_\Omega u ^2 dx]^{\frac{1}{2}}$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$
(u, v)	munido da norma $\ u\ = \ u\ _{H_0^1(\Omega)} = [\int_\Omega \nabla u ^2 dx]^{\frac{1}{2}}$ denota o produto interno entre u e v , associado a alguma norma
$u_n \rightarrow u$	Convergência forte (em norma)
$u_n \rightharpoonup u$	Convergência fraca
$\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ é Holder-contínua com expoente } \alpha$ e possui extensão contínua em $\overline{\Omega}\}$
$\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in \mathcal{C}^1$ cuja derivada é Holder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1)\}$

Capítulo 2

O Método da Aplicação Fibrção e a Variedade de Nehari

Neste capítulo definiremos o funcional J_λ associado ao problema (P) e a variedade de Nehari e veremos como eles se relacionam.

Mostraremos também que o funcional J_λ é melhor comportado quando definido sobre a Variedade de Nehari, $M_\lambda(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, do que sobre seu domínio todo $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definiremos também a Aplicação Fibrção, como foi dito na introdução, e veremos sua relação com a Variedade de Nehari.

2.1 Considerações Iniciais

O funcional de Euler $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P) é dado por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

O funcional $J_\lambda \in \mathbb{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, como está mostrado no Capitulo 5, com

$$J'_\lambda(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q-1} uv dx - \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} uv dx.$$

Em particular

$$J'_\lambda(u)u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Note que J_λ está bem definido.

De fato:

i) $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 < \infty$

ii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx &\leq \left| \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \right| \leq \int_{\Omega} |a(x)||u|^{q+1}dx \\ &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1}dx < \infty \end{aligned}$$

pois $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ então segue das imersões contínuas de Sobolev ($W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega); r \in [1, 2^*]$ (ver Teorema 7.15)) que $u \in L^{q+1}(\Omega)$. Portanto,

$$\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx < \infty.$$

iii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx &\leq \left| \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \right| \leq \int_{\Omega} |b(x)||u|^{p+1}dx \\ &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |b(x)| \int_{\Omega} |u|^{p+1}dx < \infty \end{aligned}$$

pois $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ então segue das imersões contínuas de Sobolev ($W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega); r \in [1, 2^*]$ (ver Teorema 7.15)) que $u \in L^{p+1}(\Omega)$. Portanto

$$\frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx < \infty.$$

Segue que J_{λ} está bem definido para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lema 2.1 *O funcional J_{λ} não é limitado inferiormente em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração: Considerando sem perda de generalidade que $\int_{\Omega} a(x)|\phi|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|\phi|^{p+1}dx > 0$, para alguma $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, com $\phi > 0$ em Ω e considerando $t > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(t\phi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla t\phi|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|t\phi|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|t\phi|^{p+1}dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|\phi|^{q+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|\phi|^{p+1}dx \\ &= t^{p+1} \left(\frac{1}{2t^{p-1}} \|\phi\|^2 - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x)|\phi|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|\phi|^{p+1}dx \right) \end{aligned}$$

fazendo $t \rightarrow \infty$ e como $0 < q < 1 < p$, concluímos que $J_\lambda(t\phi) \rightarrow -\infty$, ou seja, J_λ não é limitado inferiormente em $W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Estamos procurando um subconjunto de $W_0^{1,2}(\Omega)$ onde o funcional J_λ seja melhor comportado, mais especificamente onde este funcional seja limitado inferiormente.

2.2 Variedade de Nehari

Definição 2.2 *A Variedade de Nehari associada ao funcional J_λ é dada por*

$$M_\lambda(\Omega) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0\}$$

onde $\langle, \rangle$ denota a dualidade usual.

Assim,

$$u \in M_\lambda(\Omega) \Leftrightarrow J'_\lambda(u)u = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx = 0$$

Está claro que $M_\lambda(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ e agora vamos caracterizar o funcional definido sobre a Variedade de Nehari. Note que se $u \in M_\lambda(\Omega)$ temos $J'_\lambda(u)u = 0$ e, portanto

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= J_\lambda(u) - \frac{1}{q+1} J'_\lambda(u)u \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= J_\lambda(u) - \frac{1}{p+1} J'_\lambda(u)u \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Proposição 2.3 *O funcional J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $M_\lambda(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $u \in M_\lambda(\Omega)$, temos

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx$$

e temos também que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx &\leq \left| \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \right| \leq \int_{\Omega} |a(x)||u|^{q+1}dx \\ &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1}dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade da Imersão Contínua $|u|_{q+1} \leq C_2\|u\|$ [Ver Teorema 7.15], em que $C_1 = \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| > 0$ e $C_2 > 0$, obtemos

$$\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1}dx \leq C_1 C_2 \|u\|^{q+1}.$$

Consequentemente,

$$- \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} \geq -C_1 C_2 \|u\|^{q+1}$$

$$J_{\lambda}(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) C_1 C_2 \|u\|^{q+1} \geq \|u\|^2 (C_3 - C_4 \|u\|^{(q+1)-2})$$

onde $C_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) > 0$ e $C_4 = \lambda C_1 C_2 \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right)$. Utilizando a desigualdade acima e observando que $0 < q < 1$, concluímos que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J_{\lambda}(u) = +\infty$$

J_{λ} é coercivo.

Vamos mostrar agora que J_{λ} é limitado inferiormente.

Como $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$, então para todo $N > 0$, existe $M > 0$, tal que

$$J_{\lambda}(u) \geq M \text{ para } \|u\| \geq N.$$

Por outro lado, se $\|u\| < N$

$$\begin{aligned} -J_{\lambda}(u) &\leq |J_{\lambda}(u)| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\lambda}{q+1} \max_{\Omega} |a| \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx + \frac{1}{p+1} \max_{\Omega} |b| \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + c_1 \|u\|^{q+1} + c_2 \|u\|^{p+1} \end{aligned}$$

implicando

$$-J_\lambda(u) \leq c$$

ou seja,

$$J_\lambda(u) \geq -c$$

Portanto J_λ é limitado inferiormente.

□

Observação 2.4 *A definição de coercividade está no Capítulo 7.*

Enfatizando o que foi dito inicialmente, mostramos que sobre a variedade de Nehari, o funcional J_λ é melhor comportado (coercivo e limitado inferiormente).

2.3 Aplicação Fibração

A Variedade de Nehari está intimamente relacionada com o comportamento das funções da forma $\phi_u : t \rightarrow J_\lambda(tu)(t > 0)$. As aplicações desta forma são conhecidas como Aplicações Fibração e foram primeiro estudadas por Drabek e Pohozaev [ver [9]] e também discutidas por Brown e Zang [ver [5]]. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos:

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

$$\phi''_u(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda q t^{q-1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - p t^{p-1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

A proposição abaixo relaciona a variedade de Nehari e a Aplicação Fibração.

Proposição 2.5 *Seja ϕ_u a aplicação definida acima e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então:*

(i) $u \in M_\lambda(\Omega)$ se, e somente se, $\phi'_u(1) = 0$.

(ii) Mais geralmente $tu \in M_\lambda(\Omega)$ se, e somente se, $\phi'_u(t) = 0$.

Demonstração:

(i) Note que

$$\phi'_u(1) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx = J'_\lambda(u)u.$$

(ii) ($\Leftarrow$)

$$0 = \phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

e multiplicando esta equação por t , temos

$$0 = t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx = J'_\lambda(tu)tu$$

($\Rightarrow$) Como $tu \in M_\lambda(\Omega)$, temos que

$$0 = J'_\lambda(tu)tu = t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Dividindo esta equação por t , temos

$$0 = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx = \phi'_u(t)$$

□

Desta forma, os elementos em $M_\lambda(\Omega)$, correspondem aos pontos estacionários da Aplicação Fibração. Assim é natural subdividir $M_\lambda(\Omega)$ em subconjuntos, onde para cada $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ fixada, o número 1 é um ponto critico de ϕ_u , ou seja, é um ponto de mínimo local, um ponto de máximo local ou um ponto de inflexão e assim definimos os subconjuntos de $M_\lambda(\Omega)$

$$M_\lambda^+(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega); \phi''_u(1) > 0\}$$

$$M_\lambda^-(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega); \phi''_u(1) < 0\}$$

$$M_\lambda^0(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega); \phi''_u(1) = 0\}$$

Lema 2.6 *Se $u \in M_\lambda(\Omega)$, isto é, $\phi'_u(1) = 0$, então*

$$\begin{aligned} \phi''_u(1) &= (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \\ &= (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Demonstração:

Seja $u \in M_\lambda(\Omega)$ então $\phi'_u(1) = 0$, logo

$$\begin{aligned}\phi''_u(1) &= \phi''_u(1) - q\phi'_u(1) = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx - q \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right) = (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx\end{aligned}$$

Analogamente, fazendo, $\phi''_u(1) = \phi''_u(1) - q\phi'_u(1)$, obtemos

$$\phi''_u(1) = (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$$

□

Como provado em Brown e Zhang [5], temos o seguinte lema

Lema 2.7 *Suponha que u_0 é um mínimo ou máximo local para J_λ em $M_\lambda(\Omega)$, então se u_0 não pertence a $M_\lambda^0(\Omega)$, u_0 é um ponto critico de J_λ .*

Demonstração:

Seja u_0 um ponto de máximo ou mínimo local de J_λ em $M_\lambda(\Omega)$ então pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [Ver Teorema 7.11], existe $\delta \in \mathbb{R}$, tal que

$$J'_\lambda(u_0) = \delta F'(u_0) \quad (2.2)$$

onde

$$F(u_0) = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx = J'_\lambda(u_0)u_0 = 0.$$

Logo

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx + \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx \quad (2.3)$$

e derivando F , temos:

$$\begin{aligned}F'(u_0)u_0 &= 2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda(q+1) \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx - (p+1) \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda q \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx - p \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx -\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1}dx. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) em (2.4), temos

$$F'(u_0)u_0 = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda q \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx - p \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx = \phi''_{u_0}(1)$$

e de (2.2), temos

$$0 = J'_\lambda(u_0)u_0 = \delta F'(u_0)u_0 = \delta \phi''_{u_0}(1).$$

Como u_0 não pertence a $M_\lambda^0(\Omega)$ então $\phi''_{u_0}(1) \neq 0$. Logo $\delta = 0$, e assim $J'_\lambda(u_0) = 0$.

Portanto u_0 é ponto crítico de J_λ .

□

Observação 2.8 *No lema anterior, mostramos que $F'(u_0)u_0 = \phi''_{u_0}(1)$, portanto se o conjunto $M_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$ então $F'(u_0)u_0 \neq 0$, ou seja, se $M_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$ então $M_\lambda(\Omega)$ é de fato uma Variedade.*

Capítulo 3

Análise da Aplicação Fibração ϕ_u

Neste capítulo forneceremos uma completa descrição da Aplicação Fibração associada com o problema elíptico (P).

3.1 Descrição da função m_u

Veremos que a natureza essencial da Aplicação Fibração ϕ_u é determinada pelo sinal de $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx$ e de $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx$.

Para isso consideremos a função

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \quad (3.1)$$

Lema 3.1 *Para $t > 0$, $tu \in M_{\lambda}(\Omega)$ se, e somente se, t é solução de*

$$m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx. \quad (3.2)$$

Demonstração:

Substituindo (3.2) em (3.1), temos:

$$\lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

$$0 = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Multiplicando a equação acima por t^{q+1} , obtemos

$$0 = t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

ou, equivalentemente

$$J'_\lambda(tu)tu = 0.$$

Logo

$$tu \in M_\lambda(\Omega).$$

E derivando (3.1), temos também que

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \quad (3.3)$$

Note que quando $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$, $t > 0$ e $0 < q < 1 < p$ então m_u é uma função estritamente crescente.

De fato, se $t > 0$ então

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$$

sempre que $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$ e $0 < q < 1 < p$. E m_u tem o gráfico como na Figura 3.1.

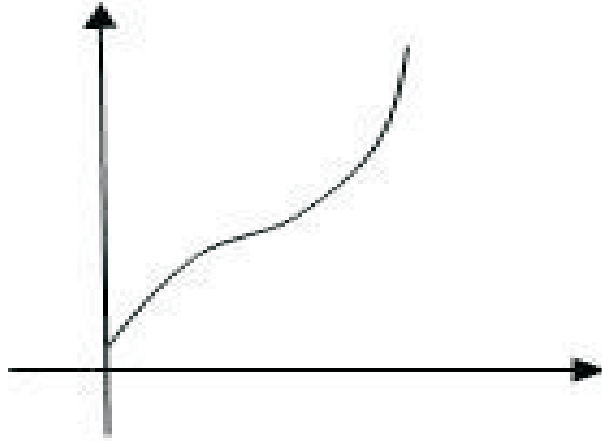


Figura 3.1: Possível forma de m_u quando $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$

Note também que quando $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$, $t \geq 0$ e $0 < q < 1 < p$ então m_u é uma função crescente e depois decrescente com um único "ponto de viragem".

De fato, por (3.1) sabemos que:

$$m_u(t) = t^{1-q}k_1 - t^{p-q}k_2.$$

onde $k_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > 0$ e $k_2 = \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$.

Derivando a expressão acima, temos:

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q}k_1 - (p - q)t^{p-q-1}k_2.$$

Assim

$$m'_u(t) = t^{-q}k_3 - t^{p-q-1}k_4 \quad (3.4)$$

onde $(1 - q)k_1 = k_3 > 0$ e $(p - q)k_2 = k_4 > 0$

Queremos encontrar os intervalos onde a função m_u é crescente e onde ela é decrescente, e também queremos saber se esta função tem pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão. Fazendo $m'_u(t) = 0$, temos

$$t^{-q}k_3 = t^{p-q-1}k_4 \Rightarrow \frac{k_3}{k_4} = t^{p-1}$$

e assim $t = t_0 = \left(\frac{k_3}{k_4}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ é o único ponto critico de m_u .

(i) Para

$$t < t_0 = \left(\frac{k_3}{k_4}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (3.5)$$

temos

$$\frac{1}{t^q} > \left(\frac{k_4}{k_3}\right)^{\frac{q}{p-1}}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por k_3 , obtemos

$$\frac{k_3}{t^q} > k_3 \left(\frac{k_4}{k_3}\right)^{\frac{q}{p-1}} \quad (3.6)$$

de (3.5), segue que

$$t^{p-q-1} < \left(\frac{k_3}{k_4}\right)^{\frac{p-q-1}{p-1}}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por $-k_4$, temos

$$-k_4 t^{p-q-1} > -k_4^{\frac{q}{p-1}} k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \quad (3.7)$$

e substituindo (3.6) e (3.7) em (3.4), temos

$$\begin{aligned}
m'_u(t) &= t^{-q}k_3 - t^{p-q-1}k_4 > k_3 \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}} k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} > \\
&> k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} k_4^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}} k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo para $t < t_0$, temos que $m'_u(t) > 0$ e portanto m_u é crescente em $(0, t_0)$.

(ii) Para

$$t > t_0 = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (3.8)$$

temos

$$\frac{1}{t^q} < \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{\frac{q}{p-1}}.$$

Multiplicando esta ultima desigualdade por k_3 , obtemos

$$\frac{k_3}{t^q} < k_3 \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{\frac{q}{p-1}} = k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} k_4^{\frac{q}{p-1}} \quad (3.9)$$

de (3.8), segue que

$$t^{p-q-1} > \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{p-q-1}{p-1}}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por $-k_4$, temos

$$-k_4 t^{p-q-1} < -k_4^{\frac{q}{p-1}} k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \quad (3.10)$$

e substituindo (3.9) e (3.10) em (3.4), resulta que

$$\begin{aligned}
m'_u(t) &= t^{-q}k_3 - t^{p-q-1}k_4 \\
&< k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} k_4^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}} k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo para $t > t_0$, temos que $m'_u(t) < 0$ e, portanto, m_u é decrescente em $(t_0, +\infty)$.

Resumidamente, temos

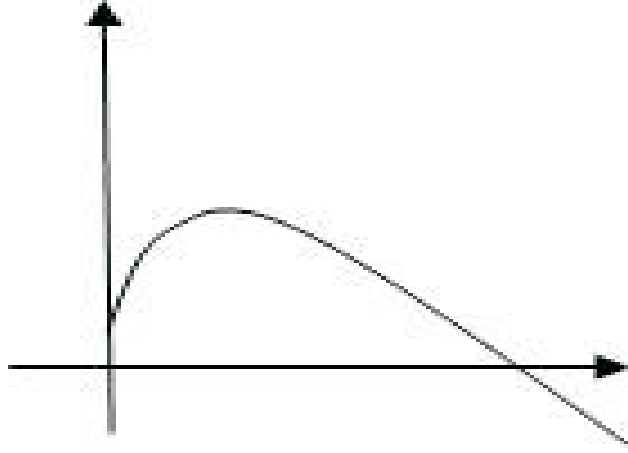


Figura 3.2: Possível forma de m_u quando $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

$$\begin{cases} m'_u(t) > 0 & \text{se } t < t_0 \\ m'_u(t) < 0 & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

e observando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty$$

podemos concluir que m_u tem o gráfico como na Figura 3.2.

Uma importante observação é que, se $tu \in M_{\lambda}(\Omega)$, segue de (2.1) e (3.3) que

$$\phi''_{tu}(1) = t^{q+2}m'_u(t) \tag{3.11}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi''_{tu}(1) &= (1-q)t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \\ &= t^{q+2} \left((1-q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right) \\ &= t^{q+2}m'_u(t). \end{aligned}$$

Esta observação tem uma grande importância para este capítulo, pois se conhecermos o sinal de $m'_u(t)$, conheceremos o sinal de $\phi''_{tu}(1)$, e assim podemos saber se ϕ_{tu} tem um ponto de máximo local, de mínimo local ou um ponto de inflexão.

Resumidamente, temos

$$\begin{cases} tu \in M_{\lambda}^+(\Omega) & \text{se } m'_u(t) > 0 \\ tu \in M_{\lambda}^-(\Omega) & \text{se } m'_u(t) < 0. \end{cases}$$

3.2 Descrição da função ϕ_u

A partir de agora iremos descrever a natureza da Aplicação Fibração (como foi dito no início deste capítulo) para todos os possíveis sinais de $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx$ e de $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx$.

1º Caso: Quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$.

Relembrando que

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx$$

temos

$$\phi'_u(t) > 0$$

pois $t > 0$. Logo ϕ_u é crescente e como $\phi'_u(t) > 0$ pela Proposição 2.5, concluímos que $tu \notin M_{\lambda}(\Omega)$, isto é, nenhum múltiplo de u está em $M_{\lambda}(\Omega)$. E o gráfico de ϕ_u tem a forma mostrada na Figura 3.3.

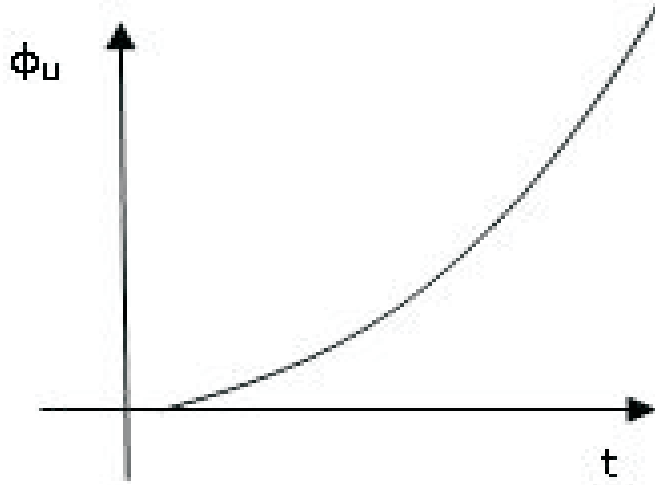


Figura 3.3: Possível forma de ϕ_u quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$.

2º Caso: Quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$.

Relembrando que

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx$$

e

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

temos

$$m'_u(t) > 0,$$

pois $t > 0$ e $0 < q < 1 < p$. Logo m_u é uma função crescente e observando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = +\infty$$

concluimos que seu gráfico tem a forma da Figura 3.1

Afirmamos que a equação (3.2) tem uma única solução.

De fato, como m_u é contínua e $\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0$, para t_1 suficientemente pequeno temos que

$$m_u(t_1) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$$

e como $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \infty$, existe t_2 suficientemente grande tal que

$$m_u(t_2) > \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx.$$

Definindo $m_u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que m_u é uma função contínua com

$$m_u(t_1) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx < m_u(t_2)$$

Resulta do Teorema do Valor Intermediário que existe $t_u \in (t_1, t_2)$, tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$$

e como m_u é uma função estritamente crescente, concluimos que t_u é único, ou seja, a equação $m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$, tem uma única solução.

Desta forma, existe exatamente uma única solução t_u de (3.2) e, de acordo com o Lema 3.1, segue que $t_u u \in M_{\lambda}(\Omega)$.

Como $t_u u \in M_{\lambda}(\Omega)$, $m'_u(t_u) > 0$ e $t_u > 0$, segue de (3.11), que

$$\phi''_{t_u u}(1) = t_u^{q+2} m'_u(t_u) > 0$$

isto é, $t_u u \in M_{\lambda}^+(\Omega)$.

Note, também que $\phi'_u(t_u) = 0$, ou seja, a aplicação ϕ_u tem um único ponto critico $t = t_u$ que é um ponto de mínimo local.

De fato, uma vez que $J'_{\lambda}(t_u u) \cdot (t_u u) = 0$, temos

$$t_u^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_u^{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t_u^{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx = 0$$

e multiplicando a equação acima por t_u^{-1} , temos

$$0 = t_u \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_u^q \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t_u^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx = \phi'_u(t_u).$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \phi_u(t) = 0$$

(mais especificamente, quando $t \rightarrow 0$ a função ϕ_u se aproxima do zero, por valores negativos).

De fato,

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

e colocando t^{q+1} em evidência, obtemos

$$\phi_u(t) = t^{q+1} \left(\frac{t^{1-q}}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p-q}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right).$$

Lembrando que $0 < q < 1 < p$, é fácil ver pelas duas equações acima que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \phi_u(t) = 0.$$

Vamos supor por absurdo que $\phi_u(t) > 0$ para valores pequenos de t , logo

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > \frac{\lambda t^{(q+1)-2}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx + \frac{t^{(p+1)-2}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

pois $t^2 > 0$. Passando o limite quando $t \rightarrow 0$ na desigualdade acima, obtemos $\alpha \geq +\infty$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, o que é um absurdo. Logo para valores pequenos de t , ϕ_u se aproxima do zero por valores negativos.

Do que foi observado acima, segue que ϕ_u , tem seu gráfico como mostrado na Figura 3.4.

3º Caso: Quando $\int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx \leq 0$ e $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$.

Como $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$, provamos no início deste capítulo que,

$$\begin{cases} m'_u(t) > 0 & \text{se } t < t_0 \\ m'_u(t) < 0 & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

e

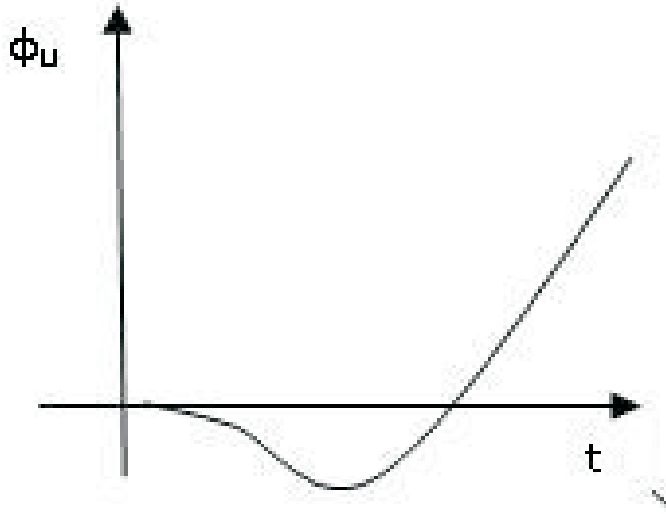


Figura 3.4: Possível forma de ϕ_u quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty.$$

Logo, podemos concluir que m_u tem o gráfico como na Figura 3.2.

Assim para $t > t_0$ temos $m'_u(t) < 0$, ou seja, a função m_u é decrescente a direita de t_0 , e provamos também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty.$$

Como nesse item (iii) estamos considerando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$, então

$$\lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0.$$

Sendo m_u uma função contínua, existe um único $t_u > 0$ tal que

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0.$$

Portanto, existe exatamente uma única solução t_u de (3.2) e, de acordo com o Lema 3.1, segue que $t_u u \in M_{\lambda}(\Omega)$.

Como $t_u u \in M_{\lambda}(\Omega)$, $m'_u(t_u) < 0$ e $t_u > 0$, segue de (3.11), que

$$\phi''_{t_u u}(1) = t_u^{q+2} m'_u(t_u) < 0$$

isto é, $t_u u \in M_{\lambda}^{-}(\Omega)$.

Como feito no item (ii), mostra-se que $\phi'_u(t_u) = 0$, ou seja, a aplicação ϕ_u tem um único ponto critico $t = t_u$ que, neste caso, é um ponto de máximo local.

Além disso, podemos ver que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \phi_u(t) = 0$$

(mais especificamente quando $t \rightarrow 0$ a função ϕ_u se aproxima do zero, por valores positivos).

Do que foi observado acima, segue que ϕ_u tem seu gráfico como mostrado na Figura 3.5.

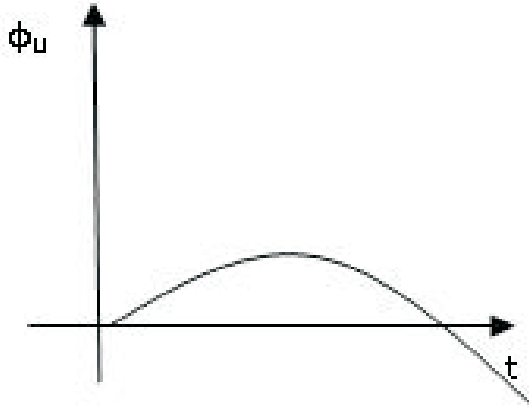


Figura 3.5: Possível forma de ϕ_u quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

4º Caso: Quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$.

Neste caso, a situação é mais complicada, como veremos adiante.

Como $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$, provamos no início deste capítulo que,

$$\begin{cases} m'_u(t) > 0 & \text{se } t < t_0 \\ m'_u(t) < 0 & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty.$$

Logo, podemos concluir que m_u tem o gráfico como na Figura 3.2.

Se $\lambda > 0$ é suficientemente grande então a equação (3.2) não tem solução e daí ϕ_u não tem ponto crítico para todo $t > 0$.

De fato, podemos tomar $\lambda^* > 0$, de forma que:

$$m_u(t_0) = \max_{t > 0} m_u(t) < \lambda^* \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx, \forall \lambda^* \leq \lambda.$$

Portanto a equação m_u não tem solução para todo $\lambda^* \leq \lambda$, pois

$$m_u(t) \leq m_u(t_0) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx, \forall \lambda^* \leq \lambda.$$

Assim para $\lambda > 0$ suficientemente grande, temos

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx < 0,$$

pois quando $\lambda > 0$ é suficientemente grande, o seguinte termo da igualdade acima

$$-\lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx$$

fica "muito negativo". Neste caso, ϕ_u é uma função decrescente, e como

$$\phi'_u(t) < 0, \forall t > 0 \text{ então, pela Proposição 2.5, } tu \notin M_{\lambda}(\Omega),$$

ou seja, nenhum múltiplo de u está em $M_{\lambda}(\Omega)$, para λ suficientemente grande.

Se por outro lado, $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, existem exatamente duas soluções $t_1(u) < t_2(u)$ para a equação (3.2), com $m'_u(t_1(u)) > 0$ e $m'_u(t_2(u)) < 0$. Logo ϕ_u tem exatamente dois pontos críticos, um mínimo local em $t = t_1(u)$ e um máximo local em $t = t_2(u)$ e pela Proposição 2.5, existem exatamente dois múltiplos de $u \in M_{\lambda}(\Omega)$, a saber $t_1(u)u \in M_{\lambda}^+(\Omega)$ e $t_2(u)u \in M_{\lambda}^-(\Omega)$. Além disso ϕ_u é decrescente em $(0, t_1(u))$, crescente em $(t_1(u), t_2(u))$ e decrescente em $(t_2(u), +\infty)$, como na Figura 3.6.

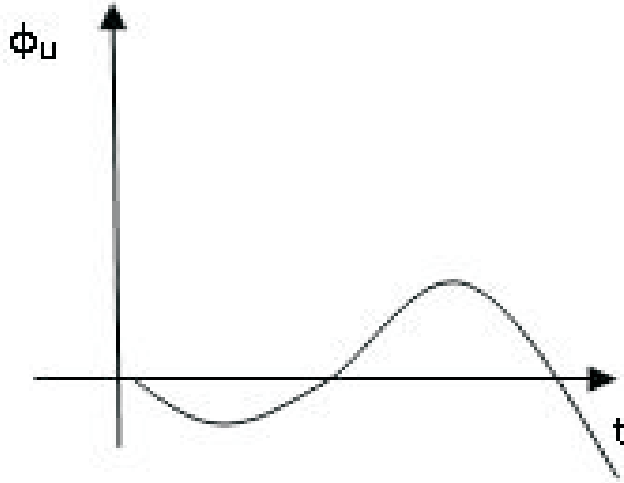


Figura 3.6: Possível forma de ϕ_u quando $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

Lema 3.2 *Existe $\lambda_1 > 0$ e $\bar{t} > 0$, tal que quando $\lambda < \lambda_1$, $\phi_u(\bar{t})$ assume valores positivos para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (sendo u não nula).*

Demonstração:

Relembrando que

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

colocando t^{p+1} em evidência, temos

$$\phi_u(t) = t^{p+1} \left(\frac{1}{2t^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right)$$

(a) Se $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \leq 0$, então para t suficientemente grande $\phi_u(t) \geq 0$, ou seja, existe $\bar{t}$, tal que, para todo $t > \bar{t}$, $\phi_u(t) \geq 0$.

(b) Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$, definimos

$$h_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

como uma parte da função ϕ_u , e derivando a aplicação acima

$$h'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

Vamos encontrar o valor máximo que h_u assume para $t > 0$. Fazendo $h'_u(t) = 0$, temos

$$t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

e,

$$t^{p-1} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \Rightarrow t = \bar{t} = \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

é ponto crítico de h_u .

Vamos mostrar que $\bar{t}$ é ponto de máximo. Segue que

$$\begin{aligned} h''_u(\bar{t}) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - p \bar{t}^{p-1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - p \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right) \cdot \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \\ &= (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < 0 \end{aligned}$$

pois $p > 1$. Logo $\bar{t}$ é ponto de máximo para h_u .

Vamos determinar $h_u(\bar{t})$:

$$\begin{aligned}
h_u(\bar{t}) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \\
&\quad - \frac{1}{p+1} \left[\left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]^{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{p+1}{p-1}}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^{\frac{2}{p-1}}} - \frac{1}{p+1} \frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{p+1}{p-1}}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^{\frac{2}{p-1}}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{p+1}{p-1}}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^{\frac{2}{p-1}}} \\
&= \left(\frac{p-1}{2(p+1)} \right) \left[\frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^2} \right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Logo,

$$h_u(\bar{t}) = \left(\frac{p-1}{2(p+1)} \right) \left[\frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^2} \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

é o valor máximo que h_u assume.

Contudo,

$$\frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx)^2} \geq \frac{1}{S_{p+1}^{2(p+1)}}$$

onde S_{p+1} denota a constante de Sobolev da imersão contínua $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ (ver Teorema 7.15).

Consequentemente,

$$h_u(\bar{t}) \geq \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\frac{1}{\|b^+\|_{\infty}^2 S_{p+1}^{2(p+1)}} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \delta$$

onde δ não depende de u e $b^+(x) = \max\{b(x), 0\}$.

Mostraremos agora que existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\phi_u(\bar{t}) > 0, \forall \lambda < \lambda_1$, isto é,

$$\phi_u(\bar{t}) = \frac{\bar{t}^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda \bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{\bar{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0,$$

ou seja, mostraremos que

$$h_u(\bar{t}) - \frac{\lambda \bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx > 0,$$

$\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}$, sempre que $\lambda < \lambda_1$.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx &\leq \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_{\infty} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \\ &\leq \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_{\infty} \|u\|_{q+1}^{q+1} \leq \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \|u\|^{q+1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde a última desigualdade provém da desigualdade da imersão contínua $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e S_{q+1} denota a constante de Sobolev desta imersão [ver Teorema 7.15].

Substituindo $\bar{t} = \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}$, na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx &\leq \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left[\left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]^{q+1} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{q+1}{p-1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{1}{\left(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{q+1}{p-1}}} \right) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{(q+1)(p+1)}{2(p-1)}} \\ &= \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{p+1}}{\left(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right)^2} \right)^{\frac{(q+1)}{2(p-1)}} \end{aligned}$$

Disso vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx &\leq \frac{1}{q+1} \|a(x)\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^2} \right)^{\frac{(q+1)}{2(p-1)}} \\
&= \frac{1}{q+1} \|a(x)\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} \left(\frac{2(p+1)}{p-1} \right)^{\frac{q+1}{2}} \\
&= c \cdot h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}}
\end{aligned}$$

onde

$$h_u(\bar{t}) = \left(\frac{p-1}{2(p+1)} \right) \left[\frac{(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{p+1}}{(\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx)^2} \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

e

$$c = \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{2(p+1)}{p-1} \right)^{\frac{q+1}{2}}.$$

Contudo

$$\begin{aligned}
\phi_u(\bar{t}) &= h_u(\bar{t}) - \frac{\lambda \bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx \\
&\geq h_u(\bar{t}) - \lambda c h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} \\
&\geq h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} (h_u(\bar{t})^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c)
\end{aligned}$$

e assim como $h_u(\bar{t}) \geq \delta$, segue que

$$\phi_u(\bar{t}) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} (\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c)$$

Tomando $\lambda < \lambda_1 = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c}$, temos que $\forall \lambda < \lambda_1$

$$\phi_u(\bar{t}) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} (\delta^{\frac{1-q}{2}} - \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c} c) = \delta^{\frac{q+1}{2}} \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} > 0.$$

□

O Lema acima assegura que quando $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, o gráfico de ϕ_u deve ser como mostrado na Figura 3.6, mais especificamente, $\phi_u \rightarrow 0$ (quando $t \rightarrow 0$), ou seja, ϕ_u se aproxima de zero por valores negativos (ϕ_u "sai da origem por baixo do eixo t"),

De fato, vamos supor por absurdo que $\phi_u(t) > 0$ para valores pequenos de t , assim

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$$

logo,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > \frac{\lambda t^{(q+1)-2}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx + \frac{t^{(p+1)-2}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

pois $t^2 > 0$. Passando o limite quando $t \rightarrow 0$ na desigualdade acima chegamos a uma contradição.

O lema acima garante que ϕ_u assume um valor máximo, por outro lado ϕ_u é contínua e ϕ_u se aproxima do zero por valores negativos, assim podemos garantir que ϕ_u corta o eixo t duas vezes, e assim devem existir exatamente dois pontos críticos (pois $\phi_u \rightarrow -\infty$ (quando $t \rightarrow \infty$)), um de mínimo local em $t = t_1(u)$ e um de máximo local em $t = t_2(u)$

Contudo quando $\lambda \leq \lambda_1$, obtivemos um completo conhecimento do número de pontos críticos de ϕ_u , dos intervalos nos quais ϕ_u é crescente e decrescente e dos múltiplos de u que estão em $M_{\lambda}(\Omega)$ para cada escolha possível de sinais de $\int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$.

Em particular, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.3 $M_{\lambda}^0(\Omega) = \emptyset$ quando $\lambda \leq \lambda_1$.

Demonstração:

Para $\lambda \leq \lambda_1$, conhecemos completamente a Aplicação Fibração ϕ_u , e pela análise feita nos itens (i), (ii), (iii) e (iv), a aplicação fibração ϕ_u não tem pontos de inflexão. Logo $M_{\lambda}^0(\Omega) = \emptyset$.

□

Corolário 3.4 Se $\lambda \leq \lambda_1$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que $J_{\lambda}(u) \geq \delta_1$, $\forall u \in M_{\lambda}^{-}(\Omega)$.

Demonstração:

Seja $u \in M_{\lambda}^{-}(\Omega)$, assim ϕ_u tem um máximo global em $t = 1$. Além disso, conforme os casos estudados nesta seção e, em particular, dos casos (iii) e (iv), temos que $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$. Assim

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(u) = \phi_u(1) \geq \phi_u(\bar{t}) &\geq h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} (h_u(\bar{t})^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c) \\ &\geq \delta^{\frac{q+1}{2}} (\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c) \end{aligned}$$

escolhendo $\lambda_1 = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c}$, temos que,

$$J_{\lambda}(u) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} > 0, \forall \lambda \leq \lambda_1.$$

□

Capítulo 4

Existência de Soluções Positivas

Neste capítulo usaremos a descrição completa da Aplicação Fibrção, feita no capítulo anterior, para fornecer uma demonstração simples da existência de duas soluções positivas para o problema elíptico (P) .

4.1 Existência de minimizadores para J_λ

Teorema 4.1 *Se $\lambda < \lambda_1$ existe $u \in M_\lambda^+(\Omega)$ tal que $J_\lambda(u) = \min_{v \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(v)$.*

Demonstração:

Como J_λ é limitado inferiormente em $M_\lambda(\Omega)$ e $M_\lambda^+(\Omega) \subset M_\lambda(\Omega)$, concluímos que J_λ é limitado inferiormente em $M_\lambda^+(\Omega)$ e segue que o conjunto $\{J_\lambda(u); u \in M_\lambda^+(\Omega)\}$ tem ínfimo.

Pela definição de ínfimo existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset M_\lambda^+(\Omega)$, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$$

Pela Proposição 2.3 sabemos que J_λ é coercivo e $J_\lambda(u_n) \geq \|u_n\|^2(C_1 - C_3\|u_n\|^{(q+1)-2})$. Levando-se em conta que $J_\lambda(u_n) \rightarrow \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$, concluímos que $J_\lambda(u_n)$ é convergente, logo é limitada. Contudo concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Pela consequência do Teorema 7.17 existe uma subsequência (ainda denotada por u_n), tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^r, \text{ para } 1 < r < \frac{2N}{N-2} = 2^*$$

Vamos mostrar que $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e daí concluiremos que

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Para isso vamos supor por absurdo que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Já vimos que $\forall u \in M_\lambda^+(\Omega)$, $\phi_u''(1) > 0$, e como $\{u_n\} \subset M_\lambda^+(\Omega)$, temos que $\phi_{u_n}''(1) > 0$, ou seja,

$$\phi_{u_n}''(1) = (1-p) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda(q-p) \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx > 0$$

logo,

$$\lambda(p-q) \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx = (p-1) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \phi_{u_n}''(1) > 0. \quad (4.1)$$

Consequentemente

$$\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Note que se existir $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx > 0$, então o gráfico da aplicação fibração ϕ_u deve ser como na Figura (3.4) e (3.6). Portanto em qualquer dos dois casos existe $t_1(u)u \in M_\lambda^+(\Omega)$ com

$$\phi_u(t_1(u)) = J_\lambda(t_1(u)u) < 0.$$

Consequentemente, devemos ter

$$\inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) < 0. \quad (4.3)$$

Assim, de (4.2) concluímos (4.3).

Por outro lado,

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx,$$

ou seja,

$$\lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - J_\lambda(u_n).$$

Tomando o $\liminf$ na igualdade acima, resulta que:

$$\lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega a(x)|u_0|^{q+1} dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) > 0.$$

$$\int_\Omega a(x)|u_0|^{q+1} dx > 0$$

e como temos duas possibilidades de sinal para $\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1} dx$, devemos analisar dois casos:

(a) Se $\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1}dx \leq 0$ então ϕ_{u_0} tem o gráfico como visto na Figura 4.1.

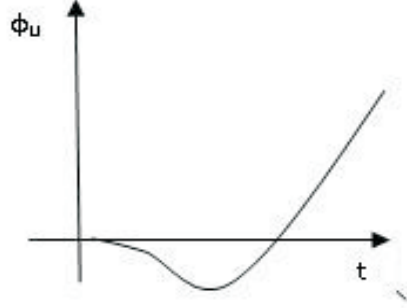


Figura 4.1: Forma de ϕ_{u_0} quando $\int_\Omega a(x)|u_0|^{q+1}dx > 0$ e $\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1}dx \leq 0$

(b) Se $\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1}dx > 0$ então ϕ_{u_0} tem o gráfico como visto na Figura 4.2.

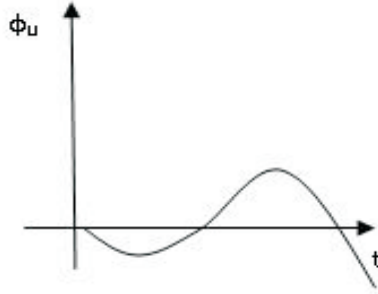


Figura 4.2: Forma de ϕ_{u_0} quando $\int_\Omega a(x)|u_0|^{q+1}dx > 0$ e $\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1}dx > 0$

Em ambos os casos (a) e (b), observamos que existe $t_0 > 0$ tal que $t_0 u_0 \in M_\lambda^+(\Omega)$, onde ϕ_{u_0} é decrescente em $(0, t_0)$, com $\phi'_{u_0}(t_0) = 0$

Como foi dito anteriormente, vamos supor por absurdo que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, de forma que $u_{n_j} \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, para toda subsequência $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$, pois caso contrário, ou seja, se alguma subsequência $u_{n_j} \rightarrow u_0$, já teríamos o resultado. Desta forma podemos considerar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx > \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx$$

Por outro lado, sabemos que

$$\phi'_{u_n}(t_0) = t_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda t_0^q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - t_0^p \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Tomando o $\liminf$, na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi'_{u_n}(t_0) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[t_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_0^q \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - t_0^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right] \\
&> t_0 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda t_0^q \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - t_0^p \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx \\
&= \phi'_{u_0}(t_0) = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Logo, $\phi'_{u_n}(t_0) > 0$ para n suficientemente grande. Mas como $\{u_n\} \subset M_\lambda^+(\Omega)$, devemos ter $\phi'_{u_n}(t) < 0$, $t \in (0, 1)$ e $\phi'_{u_n}(1) = 0, \forall n$, conseqüentemente $t_0 > 1$, e pelos gráficos 4.1 e 4.2, ϕ_{u_0} é decrescente em $(0, t_0)$, daí:

$$J_\lambda(t_0 u_0) < J_\lambda(u_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$$

o que é um absurdo pois, encontramos $t_0 u_0 \in M_\lambda^+(\Omega)$ tal que $J_\lambda(t_0 u_0) < \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$.

Logo $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim,

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Portanto, u_0 é um mínimo de J_λ sobre $M_\lambda^+(\Omega)$

□

Teorema 4.2 *Se $\lambda < \lambda_1$ existe $u \in M_\lambda^-(\Omega)$ tal que $J_\lambda(u) = \min_{v \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(v)$.*

Demonstração:

Pelo Corolário 3.4

$$J_\lambda(u) \geq \delta_1, \forall u \in M_\lambda^-(\Omega)$$

e,

$$\inf_{v \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(v) \geq \delta_1 > 0$$

Pela definição de ínfimo existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset M_\lambda^-(\Omega)$, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) > 0$$

Pela Proposição 2.3 sabemos que J_λ é coercivo e limitado e portanto a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$, pela consequência do Teorema 7.17 existe uma subsequência (ainda denotada por u_n), tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^r(\Omega), \text{ para } 1 < r < \frac{2N}{N-2} = 2^*$$

Vamos mostrar que $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e daí concluiremos que

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$$

Já vimos que $\forall u \in M_\lambda^-(\Omega)$, $\phi_u''(1) < 0$ e como $\{u_n\} \subset M_\lambda^-(\Omega)$, temos que $\phi_{u_n}''(1) < 0$, ou seja,

$$\phi_{u_n}''(1) = (1-q) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - (p-q) \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx,$$

isto é,

$$(p-q) \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx = (1-q) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \phi_{u_n}''(1) > 0$$

Daí, $\int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e temos também que $\inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) \geq \delta_1 > 0$
Por outro lado,

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx,$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega b(x)|u_n|^{q+1} dx = \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + J_\lambda(u_n).$$

Tomando o $\liminf$ na igualdade acima, resulta que:

$$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega b(x)|u_0|^{q+1} dx \geq \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) > 0.$$

$$\int_\Omega b(x)|u_0|^{q+1} dx > 0$$

- (a) Se $\int_\Omega a(x)|u_0|^{q+1} dx \leq 0$ então ϕ_{u_0} tem o gráfico como visto na Figura 4.3.
- (b) Se $\int_\Omega a(x)|u_0|^{q+1} dx > 0$ então ϕ_{u_0} tem o gráfico como visto na Figura 4.4.

Em ambos os casos (a) e (b), observamos que existe $\hat{t} > 0$ tal que $\hat{t}u_0 \in M_\lambda^-(\Omega)$.

Novamente, vamos supor por absurdo que $u_n \not\rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, de forma que $u_{n_j} \not\rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ para toda subsequência $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$, pois caso contrário, ou seja, se alguma subsequência $u_{n_j} \rightarrow u_0$, já teríamos o resultado. Desta forma podemos considerar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx > \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx.$$

Como $u_n \in M_\lambda^-(\Omega)$, ϕ_{u_n} tem um máximo global em 1, ou seja:

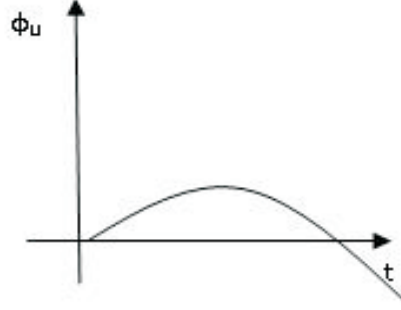


Figura 4.3: Forma de ϕ_{u_0} quando $\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1}dx \leq 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

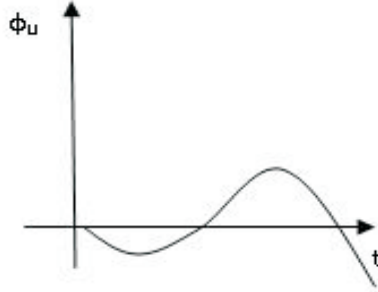


Figura 4.4: Forma de ϕ_{u_0} quando $\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$

$$\phi_{u_n}(1) \geq \phi_{u_n}(s), \forall s > 0$$

e

$$J_\lambda(u_n) \geq J_\lambda(su_n), \forall s > 0$$

$$\begin{aligned} J_\lambda(\hat{t}u_0) &= \frac{\hat{t}}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx - \frac{\hat{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u_0|^{p+1} dx \\ &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\hat{t}}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx - \frac{\hat{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u_n|^{p+1} dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(\hat{t}u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois, encontramos $\hat{t}u_0 \in M_\lambda^-(\Omega)$ tal que $J_\lambda(\hat{t}u_0) < \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u)$.

Logo $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim,

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u).$$

Portanto, u_0 é um mínimo de J_λ sobre $M_\lambda^-(\Omega)$

□

4.2 Existência de soluções para o problema elíptico (P)

Corolário 4.3 *A equação (P) tem pelo menos duas soluções positivas quando $0 < \lambda < \lambda_1$*

Demonstração:

Pelos Teoremas 4.1 e 4.2 existem $u_1 \in M_\lambda^+(\Omega)$ e $u_2 \in M_\lambda^-(\Omega)$, tais que

$$J_\lambda(u_1) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$$

e

$$J_\lambda(u_2) = \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u)$$

Pelo Lema 2.7, u_1 e u_2 são pontos críticos de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e portanto soluções fracas do problema (P).

E como $J_\lambda(u_1) = J_\lambda(|u_1|)$ e $J_\lambda(u_2) = J_\lambda(|u_2|)$, então pelo Teorema 7.19, podemos considerar $u_1 \geq 0$ e $u_2 \geq 0$.

Pelo Teorema 7.20 e pela Observação 7.21, que tratam da desigualdade de Harnack para casos gerais, obtemos $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$.

E finalmente pelos resultados clássicos de regularização de soluções fracas, como mostrado no Capítulo 6, obtemos que $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$ são soluções fortes para o problema elíptico considerado.

□

Capítulo 5

O funcional $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$

Neste capítulo mostraremos a regularidade do funcional de Euler associado com o problema elíptico (P), ou seja, mostraremos que este funcional é de classe $\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Relembremos que o funcional de Euler associado ao problema elíptico é dado por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Já vimos que este funcional está bem definido para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Iremos mostrar que ele é de classe $\mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Para isso, consideramos $J_1, J_2, J_3 : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dados por:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \\ J_2 &= \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx, \\ J_3 &= \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx, \end{aligned}$$

Mostraremos que existem as derivadas de Gateaux de J_1, J_2 e J_3 e que elas são contínuas e, pela Proposição 7.7 concluiremos que J_1, J_2 e $J_3 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

(i) Afirmamos que $J_1 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato. Sabemos que

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2$$

Vamos mostrar que J_1 é Gateaux-diferenciável, ou seja, vamos encontrar $J'_1(u)v$.

$$\begin{aligned}
J'_1(u)v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \|u+tv\|^2 - \frac{1}{2} \|u\|^2}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\|u\|^2}{2} + t(u,v) + \frac{t^2\|v\|^2}{2} - \frac{\|u\|^2}{2}}{t} = (u,v) \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.
\end{aligned}$$

Portanto a derivada de Gateaux existe em u , com

$$J'_1(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Provaremos, agora, a continuidade da derivada de Gateaux de J_1 . Para isso devemos mostrar que se $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ então $J'_1(u_n) \rightarrow J'_1(u)$, ou equivalentemente, se $\|u_n - u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0$ então $\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} \rightarrow 0$, onde $(W_0^{1,2}(\Omega))'$ é o espaço dual de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

A norma no espaço dual é dada por:

$$\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_1(u_n) - J'_1(u))(v)|.$$

Para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned}
|(J'_1(u_n) - J'_1(u))(v)| &= |J'_1(u_n)(v) - J'_1(u)(v)| = |(u_n, v) - (u, v)| \\
&= |(u_n - u, v)| \leq \|u_n - u\| \|v\| \\
&\leq \|u_n - u\|.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_1(u_n) - J'_1(u))(v)| \leq \|u_n - u\| \rightarrow 0$$

Portanto, J'_1 é contínuo e pelo Teorema 7.7, $J_1 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

(ii) Afirmamos que $J_2 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Para mostrar que $J_2 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, consideremos a seguinte função:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(s) = \frac{\lambda}{q+1} a(x) |u + stv|^{q+1},$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$(a) \quad f(1) = \frac{\lambda}{q+1} a(x) |u + tv|^{q+1},$$

$$(b) \quad f(0) = \frac{\lambda}{q+1} a(x) |u|^{q+1},$$

$$(c) \quad f'(s) = \lambda a(x)|u + stv|^{q-1}(u + stv)tv.$$

De fato,

$$(c)_I \text{ se } u + stv \geq 0 \text{ então } f(s) = \frac{\lambda}{q+1}a(x)(u + stv)^{q+1}, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} f'(s) &= \lambda a(x)(u + stv)^q tv \\ &= \lambda a(x)(u + stv)^{q-1}(u + stv)tv \\ &= \lambda a(x)|u + stv|^{q-1}(u + stv)tv. \end{aligned}$$

$$(c)_{II} \text{ se } u + stv < 0 \text{ então } f(s) = \frac{\lambda}{q+1}a(x)[-(u + stv)]^{q+1}, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} f'(s) &= \lambda a(x)[-(u + stv)]^q (-tv) \\ &= \lambda a(x)[-(u + stv)]^{q-1}[-(u + stv)](-tv) \\ &= \lambda a(x)|u + stv|^{q-1}(u + stv)tv. \end{aligned}$$

Como f é diferenciável em $(0, 1)$ então pelo Teorema do Valor Médio existe $\delta \in (0, 1)$ tal que,

$$f(1) - f(0) = f'(\delta)(1 - 0)$$

e segue,

$$\frac{\lambda}{q+1}a(x)|u + tv|^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1}a(x)|u|^{q+1} = \lambda a(x)|u + \delta tv|^{q-1}(u + \delta tv)tv.$$

Dividindo a equação acima por t (pois $0 < |t| < 1$), encontramos

$$\frac{\lambda}{q+1}a(x)\frac{|u + tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} = \lambda a(x)|u + \delta tv|^{q-1}(u + \delta tv)v$$

e passando o limite, quando $t \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{q+1}a(x)\frac{|u + tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} = \lambda a(x)|u|^{q-1}uv, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\lambda}{q+1} a(x) \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} \right| &= \lambda |a(x)| |u + \delta tv|^q |v| \\
&\leq \lambda |a(x)| (|u| + \delta |t| |v|)^q |v| \\
&\leq \lambda |a(x)| (|u| + |v|)^q |v| \\
&\leq \lambda K (|u| + |v|)^q |v| \\
&\leq \lambda K 2^q (|u|^q + |v|^q) |v| \\
&\leq C_1 |u|^q |v| + C_1 |v|^{q+1}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a desigualdade

$$\left| \frac{\lambda}{q+1} a(x) \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} \right| \leq C_1 |u|^q |v| + C_1 |v|^{q+1}.$$

Como $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ segue das imersões contínuas de Sobolev ($W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega); r \in [1, 2^*]$ (ver Teorema 7.15)) que $v \in L^{q+1}(\Omega)$, pois $q+1 \in [1, 2^*]$.

Agora vamos mostrar que $|u|^q |v| \in L^1(\Omega)$.

Usando a desigualdade Holder [Ver Teorema 7.1] com expoentes $\frac{q}{q+1}$ e $\frac{1}{q+1}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^q |v| dx &\leq \left[\int_{\Omega} (|u|^q)^{\frac{q+1}{q}} dx \right]^{\frac{q}{q+1}} \cdot \left[\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx \right]^{\frac{1}{q+1}} \\
&= \left[\int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \right]^{\frac{q}{q+1}} \cdot \left[\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx \right]^{\frac{1}{q+1}} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

pois usando argumento análogo ao usando anteriormente concluímos que $u, v \in L^{q+1}(\Omega)$. Logo $|u|^q |v| \in L^1(\Omega)$.

Como

$$\left| \frac{\lambda}{q+1} a(x) \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} \right| \leq C_1 |u|^q |v| + C_1 |v|^{q+1} \in L^1(\Omega)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{q+1} a(x) \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} = \lambda a(x) |u|^{q-1} uv, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [ver Teorema 7.2], que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} = \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q-1} uv dx.$$

Portanto

$$J'_2(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_2(u + tv) - J_2(u)}{t} = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q-1}uv dx$$

e, conseqüentemente, a derivada de Gateaux existe em u , com

$$J'_2(u)v = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q-1}uv dx.$$

Provaremos, agora, a continuidade da derivada de Gateaux de J_2 , para isso devemos mostrar que $J'_2(u_n) \rightarrow J'_2(u)$.

Seja $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, com $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Das imersões contínuas de Sobolev (ver Teorema 7.15), e passando a subsequência se necessário, segue que $u_n \rightarrow u$ em $L^r(\Omega)$, $r \in [1, 2^*]$ Então pelo Teorema 7.8, e passando a subsequência se necessário, ainda denotada por $\{u_n\}$, existe $h \in L^r(\Omega)$ tal que:

$$\|u_n\| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (5.1)$$

A norma no espaço dual é dada por:

$$\|J'_2(u_n) - J'_2(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_2(u_n) - J'_2(u))(v)|,$$

e, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |J'_2(u_n)(v) - J'_2(u)(v)| &= \left| \lambda \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q-1}u v dx \right| \\ &= \left| \lambda \int_{\Omega} a(x)(|u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u) v dx \right| \\ &\leq K \int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u| |v| dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder [Ver Teorema 7.1] com expoentes $\frac{q+1}{q}$ e $q+1$, na desigualdade acima, obtemos:

$$|J'_2(u_n)(v) - J'_2(u)(v)| \leq K \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}}$$

Como $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ e pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde $r \in [1, 2^*]$ concluímos que $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e $|u|_{L^{q+1}} \leq C\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ [Ver desigualdade 7.2]. Daí

$$\begin{aligned}
|J'_2(u_n)(v) - J'_2(u)(v)| &\leq K \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}} dx \\
&\leq KC \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

E como $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω então

$$||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u| \rightarrow 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left(||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{2^*}{q+1}} &\leq \left(||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u| \right)^{\frac{2^*}{q}} \\
&\leq (|u_n|^{q-1}|u_n| + |u|^{q-1}|u|)^{\frac{2^*}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{q}} (|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{q}} (h(x)^{2^*} + |u|^{2^*})
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} &\leq \left(2^{\frac{2^*}{q}} |u_n|^{2^*} + |u|^{2^*} \right)^{\frac{q+1}{2^*}} \\
&\leq K (h(x)^{q+1} + |u|^{q+1}) \in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

para obter a ultima desigualdade acima usamos (5.1).

Portanto pelo Teorema Convergência Dominada de Lebesgue [ver Teorema 7.2], temos

$$\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \rightarrow 0.$$

Por (5.2), temos

$$|J'_2(u_n)(v) - J'_2(u)(v)| \rightarrow 0.$$

Portanto, J'_2 é contínuo e pelo Teorema 7.7, $J_2 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

(iii) Afirmamos que $J_3 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Para mostrar que $J_3 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega))$, consideremos a seguinte função

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(s) = \frac{1}{p+1} b(x) |u + stv|^{p+1}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Analogamente ao que foi feito anteriormente, temos:

- (a) $f(1) = \frac{1}{p+1}b(x)|u + tv|^{p+1}$,
- (b) $f(0) = \frac{1}{p+1}b(x)|u|^{p+1}$,
- (c) $f'(s) = b(x)|u + stv|^{p-1}(u + stv)tv$,

Como f é diferenciável em $(0, 1)$ então pelo Teorema do Valor Médio existe $\delta \in (0, 1)$ tal que, $f(1) - f(0) = f'(\delta)(1 - 0)$. Segue que

$$\frac{1}{p+1}b(x)|u + tv|^{p+1} - \frac{1}{p+1}b(x)|u|^{p+1} = b(x)|u + \delta tv|^{p-1}(u + \delta tv)tv.$$

Dividindo a equação acima por t ($0 < |t| < 1$), encontramos

$$\frac{1}{p+1}b(x)\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} = b(x)|u + \delta tv|^{p-1}(u + \delta tv)v$$

e passando o limite, quando $t \rightarrow 0$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1}b(x)\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} = b(x)|u|^{p-1}uv, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Como foi para o caso anterior

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{p+1}b(x)\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} \right| &= |b(x)||u + \delta tv|^p|v| \\ &\leq |b(x)|(|u| + \delta|t||v|)^p|v| \\ &\leq |b(x)|(|u| + |v|)^p|v| \\ &\leq K(|u| + |v|)^p|v|, \end{aligned} \tag{5.3}$$

e, temos a desigualdade

$$\left| \frac{1}{p+1}b(x)\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} \right| \leq K(|u| + |v|)^p|v|.$$

Como $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ então segue das imersões contínuas de Sobolev ($W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega); r \in [1, 2^*]$) (ver Teorema 7.15)) que $u, v \in L^{p+1}(\Omega)$, pois $p+1 \in [1, 2^*]$ e $u + v \in L^{p+1}(\Omega)$ e $(|u| + |v|)^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Holder com expoentes p e $\frac{p+1}{p}$ em (5.3), temos

$$\int_{\Omega} (|u| + |v|)^p|v| \leq \left(\int_{\Omega} (|u| + |v|)^p dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

assim,

$$K(|u| + |v|)^p|v| \in L^1(\Omega)$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [ver Teorema 7.2], segue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) \frac{|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} dx = \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} u v dx.$$

Portanto

$$J'_3(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) \frac{|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} dx = \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} u v dx,$$

consequentemente, a derivada de Gateaux existe em u , com

$$J'_3(u)v = \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} u v dx.$$

Provaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de J_3 , para isso devemos mostrar que $J'_3(u_n) \rightarrow J'_3(u)$.

Seja $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, com $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Das imersões contínuas de Sobolev (ver Teorema 7.15), segue que $u_n \rightarrow u$ em $L^r(\Omega)$, $r \in [1, 2^*]$, em particular $u_n \rightarrow u$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Pelo Teorema 7.8, e passando a subsequência se necessário, ainda denotada por $\{u_n\}$, existe $h \in L^r(\Omega)$, tal que:

$$|u_n| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad (5.4)$$

A norma no espaço dual é dada por:

$$\|J'_3(u_n) - J'_3(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_3(u_n) - J'_3(u))(v)|.$$

Para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, com $\|v\| \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |J'_3(u_n)(v) - J'_3(u)(v)| &= \left| \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{p-1} u_n v dx - \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} u v dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} b(x) (|u_n|^{p-1} u_n - |u|^{p-1} u) v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |b(x)| |u_n|^{p-1} u_n - |u|^{p-1} u |v| dx \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder [Ver Teorema 7.1] para $\frac{p+1}{p}$ e $p+1$, na desigualdade acima, obtemos

$$|J'_3(u_n)(v) - J'_3(u)(v)| \leq K \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{p-1} u_n - |u|^{p-1} u|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} dx$$

Como $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ e pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde $r \in [1, 2^*]$ concluímos que $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ e $|u|_{L^{p+1}} \leq C \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

[Ver desigualdade 7.2]. Daí

$$|J'_3(u_n)(v) - J'_3(u)(v)| \leq KC \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|v\| \quad (5.5)$$

e como $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω [Ver Teorema 7.8], então

$$||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u| \rightarrow 0, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

E observemos que

$$\begin{aligned} \left(||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{2^*}{p+1}} &\leq \left(||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p+1}u|^{\frac{2^*}{p}} \right)^{\frac{2^*}{p}} \\ &\leq \left(|u_n|^{p+1}|u_n| + |u|^{p+1}|u| \right)^{\frac{2^*}{q}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{p}} (|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{p}} (h(x)^{2^*} + |u|^{2^*}) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} ||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u|^{\frac{p+1}{p}} &\leq \left(2^{\frac{2^*}{p}} h(x)^{2^*} + |u|^{2^*} \right)^{\frac{p+1}{2^*}} \\ &\leq K (h(x)^{p+1} + |u|^{p+1}) \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

para obter a ultima desigualdade acima usamos (5.4).

Portanto, pelo Teorema Convergência Dominada de Lebesgue [ver Teorema 7.2], temos

$$\int_{\Omega} ||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u|^{\frac{p+1}{p}} \rightarrow 0$$

e por (5.5), temos

$$|J'_3(u_n)(v) - J'_3(u)(v)| \rightarrow 0.$$

Portanto, J'_3 é contínuo e pelo Teorema 7.7 $J_3 \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

De (i), (ii) e (iii), concluímos que

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v &= J'_1(u)v + J'_2(u)v + J'_3(u)v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q-1}uv dx - \int_{\Omega} b(x)|u|^{p-1}uv dx \end{aligned}$$

e, em particular, temos

$$J'_\lambda(u)u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

Capítulo 6

Regularidade da Solução fraca do problema (P)

Neste capítulo mostraremos que as soluções fracas do problema elíptico considerado são na verdade soluções clássicas do referido problema, para isso usaremos alguns resultados clássicos da Teoria da Regularidade, enunciados no Capítulo 7.

Encontramos soluções fracas para o problema elíptico

Relembremos que

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^q, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Temos $f(x, u(x)) = \lambda a(x)u^q + b(x)u^q$ é uma aplicação contínua e

$$|f(x, u(x))| \leq \lambda |a(x)| |u|^q + |b(x)| |u|^q$$

(i) Se $|u(x)| \leq 1$ então $|u(x)|^p \leq |u(x)|^q \leq 1$, então

$$|f(x, u(x))| \leq \lambda |a(x)| + |b(x)|. \quad (6.1)$$

(ii) Se $|u(x)| > 1$ então $|u(x)|^q \leq |u(x)|^p$, então

$$|f(x, u(x))| \leq (\lambda |a(x)| + |b(x)|) |u(x)|^p. \quad (6.2)$$

De (6.1) e (6.2), temos:

$$|f(x, u(x))| \leq (\lambda |a(x)| + |b(x)|) (1 + |u(x)|^p). \quad (6.3)$$

Temos que $f \in L^{\frac{2^*}{p}}$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f|^{\frac{2^*}{p}} dx &\leq \int_{\Omega} (\lambda |a(x)| + |b(x)|)^{\frac{2^*}{p}} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} dx \\
&\leq C \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} dx \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{p}} C \int_{\Omega} 1 + |u(x)|^{2^*} dx
\end{aligned}$$

Como $u \in W^{1,2}(\Omega)$, segue da imersão contínua de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ [Ver Teorema 7.15], que $u \in L^{2^*}(\Omega)$, daí concluímos que $\int_{\Omega} |f|^{\frac{2^*}{p}} dx < \infty$ e, portanto, $f \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)$. Pelo Teorema 7.12, concluímos que $u \in W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega)$.

Devemos analisar dois casos, conforme pode ser visto em [16].

a) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \leq 0$.

Pelo Teorema 7.15, temos a imersão contínua $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, com $s \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$. Como $u \in W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega)$ segue que $u \in L^s, \forall s \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$.

Por 6.3, segue que $f \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f|^{\frac{s}{p}} dx &= \int_{\Omega} (\lambda |a(x)| + |b(x)|)^{\frac{s}{p}} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{s}{p}} dx \\
&\leq C \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{s}{p}} dx \\
&\leq 2^{\frac{s}{p}} C \int_{\Omega} 1 + |u(x)|^s dx < +\infty
\end{aligned}$$

já que $u \in L^s(\Omega)$. Novamente pelo Teorema 7.12, temos que $u \in W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega), \forall s \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$

E pelo Teorema da imersão compacta de Rellich (ver Teorema 7.17) $W^{2, \frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$, tomando $s > Np$ temos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$.

b) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} > 0$.

Pelo Teorema 7.15, temos a imersão contínua $W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega)$, onde $\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$. Logo $u \in L^{t_1}(\Omega)$ e por 6.3 concluímos que $f \in L^{\frac{t_1}{p}}(\Omega)$, e pelo Teorema 7.12, segue que $u \in W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega)$.

c) Se $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} \leq 0$.

Pelo Teorema 7.15, temos a imersão contínua $W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{s_1}(\Omega), \forall s_1 \in \left[\frac{t_1}{p}, +\infty\right)$, assim $u \in L^{s_1}(\Omega), \forall s_1 \in \left[\frac{t_1}{p}, +\infty\right)$ e por 6.3, segue que $f \in L^{\frac{s_1}{p}}(\Omega)$, e pelo Teorema 7.12, segue que $u \in W^{2, \frac{s_1}{p}}(\Omega), \forall s_1 \in \left[\frac{t_1}{p}, +\infty\right)$. E pelo Teorema da imersão compacta de Rellich (ver Teorema 7.17) $W^{2, \frac{s_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1, \alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$, tomando $s_1 > Np$ temos que $u \in C^{1, \alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$.

d) Se $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} > 0$.

Pelo Teorema 7.15, temos a imersão contínua $W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega)$, onde $\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N}$. Logo $u \in L^{t_2}(\Omega)$ e por 6.3 concluímos que $f \in L^{\frac{t_2}{p}}(\Omega)$, e pelo Teorema 7.12, segue que $u \in W^{2, \frac{t_2}{p}}(\Omega)$.

Continuando este processo teríamos que analisar dois novos casos $\frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} \leq 0$ e $\frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} > 0$.

De maneira geral, repetindo este processo, conhecido como método "bootstrap", é possível mostrar que fazendo um número finito de interações obtemos que $u \in C^{1, \alpha}(\overline{\Omega})$.

De maneira geral, vamos encontrar

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p}{t_{j-1}} - \frac{2}{N}$$

e assim

$$\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$$

e

$$\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} = p \left(\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \right) - \frac{2}{N} = \frac{p^2}{2^*} - \frac{2(p+1)}{N}$$

logo,

$$\frac{1}{t_3} = \frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2(p+1)p}{N} - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2 + p + 1)$$

e

$$\frac{1}{t_4} = \frac{p}{t_3} - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2p(p^2 + p + 1)p}{N} - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2}{N}(p^3 + p^2 + p + 1)$$

no caso geral temos

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{j-1} p^k = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N} \left(\frac{p^j - 1}{p - 1} \right) = \left(\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} \right) p^j + \frac{2}{N(p-1)} \quad (6.4)$$

Uma vez que, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $1 < p < 2^* - 1$ podemos concluir que $\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} < 0$.

Temos que em (6.4), fixando a dimensão N , existe $j \in N$, tal que $\frac{1}{t_j} < 0$. Usando o mesmo raciocínio de (a) e (c), concluímos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$.

Vamos mostrar agora que $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que:

$$\begin{aligned} |f(x, u(x)) - f(y, u(y))| &= | \langle \nabla f(z_0, u(z_0)), (x - y, u(x) - u(y)) \rangle | \\ &\leq \| \nabla f(z_0, u(z_0)) \| \| (x - y, u(x) - u(y)) \| \\ &\leq K \| (x - y, u(x) - u(y)) \| \\ &\leq K(|x - y| + |u(x) - u(y)|) \\ &\leq K(|x - y| + k_1|x - y|^\alpha) \end{aligned}$$

pois $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Para $x \neq y$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x, u(x)) - f(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} &\leq \frac{K(|x - y| + k_1|x - y|^\alpha)}{|x - y|^\alpha} \\ &= K(|x - y|^{1-\alpha} + k_1) \\ &\leq K(\sup |x - y|^{1-\alpha} + k_1) \\ &\leq K(\text{diam}(\Omega))^{1-\alpha} + k_2 = k_3 < \infty \end{aligned}$$

já que Ω é limitado, concluímos que $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Como $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, pelo Teorema 7.14, concluímos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e portanto $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$, ou seja, u é uma solução clássica para o problema (P).

Capítulo 7

Resultados Básicos

7.1 Minimização de Funcionais Lineares

Dado um problema elíptico da forma

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^q, & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

O funcional de Euler $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P) é dado por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Uma solução $u \in W^{1,2}(\Omega)$, do problema (P), é dita solução fraca do problema elíptico acima, se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q-1} u v dx + \int_\Omega b(x)|u|^{p-1} u v dx, \forall v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Mostramos no Capítulo 5, que $J_\lambda \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$J'_\lambda(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q-1} u v dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p-1} u v dx.$$

Das considerações acima, podemos concluir que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é ponto crítico de J_λ , isto é, $J'_\lambda(u)v = 0, \forall v \in W^{1,2}(\Omega)$ se, e somente se, u é uma solução fraca de (P). Veja [16].

7.2 Resultados da Teoria de Medida e Integração

Teorema 7.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Veja [2]. □

Teorema 7.2 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p., $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f.$$

Demonstração: Veja [2]. □

7.3 Definições e resultados de Análise Funcional

Definição 7.3 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, com $x, z \in X$ e $\varphi : X \rightarrow Y$. Dizemos que φ é Gâteaux-diferenciável em x na direção z , se existir o limite*

$$D_{\varphi}(x)z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \alpha z) - \varphi(x)}{\alpha}.$$

Observação 7.4 *O conceito de derivada de Gâteaux não requer qualquer noção de convergência no espaço do domínio. Para assegurar que funções diferenciáveis sejam contínuas, introduziremos o conceito de derivada forte (que é a derivada de Fréchet).*

Definição 7.5 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, e a aplicação $\varphi : X \rightarrow Y$. Dizemos que φ é Fréchet-diferenciável em $x \in X$, se existe um operador linear contínuo*

$$d_{\varphi}(x) = X \rightarrow Y, \text{ dado por } h \mapsto d_{\varphi}(x)h \text{ e tal que}$$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x + h) - \varphi(x) - d_{\varphi}(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

$d_{\varphi}(x)h$ é chamado de diferencial de Fréchet de φ em x com crescimento h .

Como $d_{\varphi}(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos que se o diferencial de Fréchet existe então existe também o diferencial de Gâteaux, e ambos são iguais. Além disso, se φ tem derivada de Fréchet em x , então φ é contínua.

Definição 7.6 *Dizemos que o funcional $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de φ existe e é contínua em X .*

Proposição 7.7 *Seja $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X . Se φ possui uma derivada de Gâteaux contínua em A , então $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$.*

Demonstração:

Seja $u \in A$ e $\varphi'(u)$ a derivada de Gateaux de φ em u . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)h| &= |\varphi'(u+\alpha h)(h) - \varphi'(u)(h)| \\ &\leq \|\varphi'(u+\alpha h) - \varphi'(u)\|_{X'} \|h\| \end{aligned} \quad (7.1)$$

dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, com a seguinte propriedade; sempre que $\|h\| < \epsilon$, temos

$$\|\varphi'(u+\alpha h) - \varphi'(u)\|_{X'} < \epsilon$$

pois φ possui derivada de Gâteaux contínua em A .

Por (7.1), concluímos que

$$|\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)h| < \epsilon \|h\|$$

de onde segue que φ possui derivada de Fréchet contínua.

□

Teorema 7.8 *Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$. Então existe uma subsequência (u_{n_j}) tal que:*

(i) $u_{n_j} \rightarrow u$ q.t.p. em Ω .

(ii) $|u_{n_j}| \leq h(x), \forall n_j \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω , com $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Veja [4].

□

Teorema 7.9 *Seja E um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E^*$.

(ii) Se $x_n \rightarrow x$ então $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\{x_n\}$ é limitada, e além disso,

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ então $x_n \rightarrow x$.

Demonstração: Veja [4].

□

7.4 Definições e resultados da Teoria Clássica de EDP e dos Espaços de Sobolev

Definição 7.10 *Um funcional $J_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é dito coercivo se $J_\lambda(u) \rightarrow +\infty$, sempre que $\|u\| \rightarrow +\infty$.*

Teorema 7.11 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $M = \{u \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) = 0, \forall u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0).$$

Demonstração: Veja [11]. □

Teorema 7.12 (Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$, com $r > 1$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca do problema*

$$(P_L) \begin{cases} -\Delta u = f(x), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}.$$

Então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^r(\Omega)}.$$

O Teorema acima afirma que dado $f \in L^r(\Omega)$ então existe uma única solução $u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W^{1,r}(\Omega)$ do (P_L) . Além disso vale a seguinte afirmação

$$f \in W^{k,r}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{k+2,r}(\Omega)$$

Demonstração: Ver [17] □

Teorema 7.13 (Teorema de Schauder) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então existe $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução do problema (P_L) .*

Além disso, existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

e vale a seguinte afirmação

$$f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Veja [17]. □

Teorema 7.14 *Seja $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$ e suponhamos que $u \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ seja uma solução fraca do seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases},$$

então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Veja [17]. □

Teorema 7.15 (Imersões de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira suave, $m > 1$ um inteiro e $1 < p < \infty$. Então valem as seguintes imersões contínuas*

- (i) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$.*
- (ii) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$.*
- (iii) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\Omega)$ para $0 \leq \lambda \leq m - \frac{N}{p}$.*

Demonstração: Veja [1] e [19]. □

Teorema 7.16 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, as imersões:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são contínuas, quando

$$1 \leq s \leq 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

e existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^s} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (7.2)$$

Demonstração: Veja [4] e [16] □

Teorema 7.17 (Imersões de Rellich) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, suponha que $r > N$. Então vale a seguinte imersão compacta .*

$$W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$$

para $0 \leq \mu \leq 1 - \frac{N}{r}$.

Demonstração: Veja [1]. □

Teorema 7.18 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, as imersões:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

são compactas, quando

$$1 \leq s < 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 1, 2 \end{cases}$$

Demonstração: Veja [4] e [16]. □

Uma consequência importante das imersões compactas é que se $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ e $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ existe $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_{n_j} \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega) \quad (7.3)$$

Teorema 7.19 *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então se $u \in W_p^1(\Omega)$ então $|u| \in W_p^1(\Omega)$ e*

$$\nabla_{|u|} = 1_{|u|>0} \nabla u - 1_{|u|=0} \nabla u$$

Demonstração: Veja [11]. □

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$. Sejam $A(x, u, p) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $B(x, u, p) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que:

$$\begin{cases} |A(x, u, p)| \leq a|p|^{\alpha-1} + b|u|^{\alpha-1} \\ |B(x, u, p)| \leq c|p|^{\alpha-1} + d|p|^{\alpha-1} \\ (p, A(x, u, p)) \geq |p|^\alpha - d|u|^\alpha \end{cases} \quad (7.4)$$

para q.t.p. $x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}^N$. Onde α é uma constante positiva dada em $(1, N)$, e as funções $a(x), b(x), c(x)$ e $d(x)$ são limitadas, isto é, $|a(x)|, |b(x)|, |c(x)|, |d(x)| \leq \mu$, onde μ é uma constante positiva.

Teorema 7.20 (Desigualdade de Harnack) *Seja $u \geq 0$ uma solução fraca de:*

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$$

em alguma bola aberta $B(3\rho) \subset \Omega$ e suponha que são satisfeitas as condições 7.4. Então:

$$\max_{B(\rho)} u(x) \leq C \min_{B(\rho)} u(x)$$

onde $C = C(\alpha, N, \epsilon, a(x), \|b\|, \rho^\epsilon \|c\|, \rho^\epsilon \|d\|)$ e $B(x, \rho)$ é a bola de centro x e raio ρ , que é denotada por $B(\rho)$.

Demonstração:

Veja [17] e [18].

□

Observação 7.21 *Por conveniência a estimativa acima foi provada em [18], para o conjunto $B(3\rho)$. Para conjuntos mais gerais a estimativa acima segue de argumento de cobertura padrão [Veja [17] e [18]].*

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A. and Fournier, J. F. *Sobolev Spaces*. Academy Press, New York, 1975.
- [2] Bartle, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley and Sons, New York , 1995.
- [3] Binding, P. A.; Drabek, P. and Huang, Y. X. *On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*. Eletron. J. Differential Equations, 1997, No. 5, 1-11.
- [4] Brezis, H. *Analisis Funcional, Teoria y aplicaciones . .* Version espanola de Juan Ramon Esteban, Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.
- [5] Brown, K.J. and Zhang, Y. *The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign changing weight function*. J. Differential Equations, 2003, No. 193, 481-499.
- [6] Brown, K.J. and Wu, T.-F. *A Fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem*. Eletronic J. Differential Equations, 2007, No. 69, 1-9.
- [7] Chen, K. J. *On multiple solutions of concave e convex nonlinearities in elliptic equation on R^N* . BVP ID 147008, 2009.
- [8] Figueiredo, D. G.; Gossez, J. P. and Ubilla, P. *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*. J. Funct. Anal, 2003, 452-467.
- [9] Drabek, P. and Pohozaev, S. I. *Positive solutions for the p -Laplacian: application of the fibering method*. Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A, 1997, 703-726.
- [10] Ilyasov, Y. *On non-local existence results for elliptic operators with convexconcave nonlinearities*. Nonlinear Analysis, 2005, No. 61, 211-236.
- [11] Kavian O. *Introduction á la théorie des points critiques at applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, Madrid. Heidelberg, 1993.
- [12] Lima, E. L. *Analise Real*. Volume 1, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [13] Lima, E. L. *Analise Real*. Volume 2, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [14] Ambrosetti, A. ; Brezis, H. and Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*. J. Funct. Anal, 2005, No. 122, 519-543.
- [15] Wu, T.F. *Multiplicity results for a semilinear elliptic equation involving sign-changing weight function*. Rock Montain J. Math.

- [16] Alves, C. O. *Introdução às Equações Elípticas*. Apostila I ENAMA, UFRJ, 2007.
- [17] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, 1977.
- [18] Trudinger, N. S. *On Harnack types inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Applied Math., 1967.
- [19] Medeiros, L. A. e Miranda, M. M. *Espaços de Sobolev*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 1997.