LÁZARO SANTOS GIL

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UM SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

G463c
2015

Gil, Lázaro Santos, 1991-

Comportamento assintótico para um Sistema de Timoshenko com História / Lázaro Santos Gil. – Viçosa, MG, 2015.

viii, 98f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Margareth da Silva Alves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.97-98.

1. Semigrupos. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Timoshenko, Sistema de. 4. Vigas. 5. Engenharia estrutural. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.353

LÁZARO SANTOS GIL

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UM SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 06 de Março de 2015

Alexandre Miranda Alves

Ariane Piovezan Entringer

Carlos Alberto Raposo da Cunha

Margareth da Silva Alves
(Orientadora)

Dedico este trabalho aos meus pais,
Carlindo e Arlinda.

Não ande apenas pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram.

Alexander Graham Bell

Agradecimentos

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Carlindo e Arlinda, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são os maiores de todos os meus professores, a minha base, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço ao minha orientadora, Margareth, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço ao meu nobre e exclusivo irmão, Isaac, pelo companheirismo, força e alegria.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

GIL, Lázaro Santos, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Março de 2015. **Comportamento Assintótico para um Sistema de Timoshenko com História**. Orientadora: Margareth da Silva Alves.

No presente trabalho estudamos o comportamento assintótico de um sistema dissipativo com aplicação à modelagem de materiais viscosos. Mais especificamente, estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico de um sistema tipo-Timoshenko com dissipação dada pela história. Usamos semigrupo e propriedades do resolvente de seu gerador infinitesimal para mostrarmos a existência e unicidade de solução para o sistema, assim como o comportamento da solução.

Abstract

GIL, Lázaro Santos, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, March, 2014. **Asymptotic Behavior for a Timoshenko System with History**. Adiviser: Margareth da Silva Alves.

In this paper we study the asymptotic behavior of a dissipative system with application to modeling of viscous materials. More specifically, we study the existence, uniqueness and asymptotic behavior of a type-Timoshenko system dissipation given by history. We use semigroup and resolvent properties of its infinitesimal generator to show the existence and uniqueness of solution to the system and the solution behavior.

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é investigar o comportamento assintótico das soluções dos sistemas de vigas de Timoshenko.

O estudo dos modelos para vigas com cargas atuantes internamente e externamente é de grande impontância para o desenvolvimento da alta engenharia, já que a viga é um modelo estrutural flexível, amplamente utilizado em projetos de estruturas e mecânicos, tais como projetos de pontes [1].

Figura 1: Vigas da estrutura de um viaduto em construção *(fonte: http://www.mtnacopa.com.br/download.php?id=222009)*

Figura 2: Vigas da estrutura de um caminhão *(fonte: http://andrecerberus.com/2012/05/)*

O estudo do comportamento assintótico de sistemas dissipativos é um ramo fértil para a pesquisa em Equações Diferenciais Parciais. Para se obter esse comportamento, diferentes métodos analíticos têm sido utilizados por vários autores, sempre adequados aos problemas em questão. Citamos, como exemplo, o método de Energia (ver [7]) e o que explora as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema (ver [22], [23]) que serão usados neste trabalho.

Definimos uma viga como um membro de estrutura delgada, carregada transversalmente cujo comprimento é grande em relação a largura e seção transversal plana. Para o sistema de vigas de Timoshenko, consideramos uma viga reta de comprimento L em sua posição de equilíbrio, constituída de material linear, isotrópico, linearmente elástico e consideramos, também, que a área da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao eixo z.

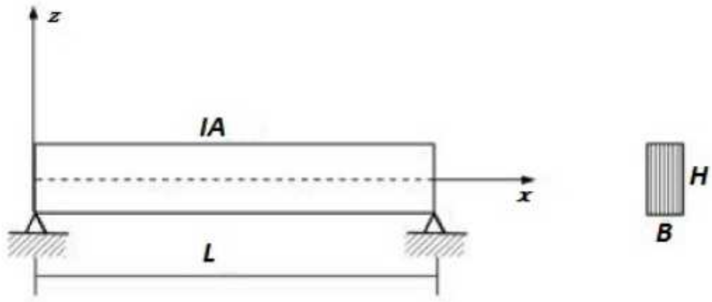

Figura 3: Viga em posição de equilíbrio

O modelo de Timoshenko para uma viga delgada é dado pelo seguinte sistema de equações hiperbólicas acopladas

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty) \tag{1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{2}$$

em que t denota a variável temporal e x é o espaço ao longo da viga de comprimento L, em sua configuração de equilíbrio, $\varphi(x,t)$ é o deslocamento transversal e $\psi(x,t)$ é o ângulo de rotação de um filamento da viga na posição x e no tempo t. Os coeficientes ρ_1, ρ_2, k e b são constantes positivas que dependem da natureza do material. Uma descrição mais detalhada deste modelo pode ser encontrada em [2] e [3].

Se ao sistema (1)-(2) acrescentarmos condições de fronteira homogêneas, definimos a energia total desse modelo por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2\right] \mathrm{d}x \tag{3}$$

onde as duas primeiras parcelas é a energia cinética e as demais é a energia potencial. Se multiplicarmos as equações (1) e (2) por φ_t e ψ_t, respectivamente, integrarmos por partes em $(0,L)$ e adicionarmos os resultados obtidos, encontraremos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = 0 \;\; \text{em} \;\; (0,\infty),$$

ou seja, o sistema (1)-(2) é conservativo, o que significa que sua solução não decai. Contudo, uma questão importante de pesquisa é olhar para uma dissipação mínima para que as soluções do sistema (1) tenha decaimento uniforme para o estado estável quando o tempo vai para o infinito. Neste sentido, foram introduzidos vários tipos de mecanismos de dissipação como, por exemplo, dissipação pelo atrito, viscoelástico ou do tipo memória.

Vários autores estudaram propriedades dissipativas associadas ao sistema (1) - (2). Em [4], Soufyane estudou o sistema de vigas de Timoshenko com atrito presente somente na equação da deformação angular

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + d\,\psi_t = 0 \quad &\text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

com $d = d(x)$ positiva, e mostrou que o sistema possui estabilidade exponencial se, e somente se,

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \tag{4}$$

No caso em que não há decaimento exponecial, Racke e Rivera [6] provaram que o sistema é polinomialmente estável.

Raposo *et al.* [8] utilizaram a dissipação dada pelo atrito agindo em ambas as equações e estabeleceram um resultado de decaimento exponencial para o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \rho u_{tt} - (k(u_x+v))_x + u_t = 0 \quad \text{em} \quad (0,\,L)\times(0,\,+\infty),\\ I_\rho v_{tt} - EIv_{xx} + k(u_x+v) + v_t = 0 \quad \text{em} \quad (0,\,L)\times(0,\,+\infty) \end{array}\right.$$

Kim e Renardy [8] consideraram (1)-(2) junto com dois controles de fronteira da forma

$$\left\{\begin{array}{l} k\,v(L,t) - k\,u_x(L,t) = \alpha\,u_t(L,t) \quad \forall\, t\geq 0\\ EI\,v_x(L,t) = -\beta v_t(L,t) \quad \forall\, t\geq 0 \end{array}\right.$$

e usaram a técnica dos multiplicadores para estabelecer um resultado de decaimento exponencial para a energia $E(t)$.

O sistema com memória

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \int_0^t g(s).\psi_{xx}(\cdot,t-s)ds = 0 \quad &\text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

foi estudado por Ammar-Khodja Ammar, Benabdallab, Rivera e Racke [5]. Eles concluiram que para memória com núcleo do tipo exponencial, o modelo é exponencialmente estável se, e somente se, a condição (4) é satisfeita. Além disso, mostraram a estabilidade polinomial para memória com núcleo polinomial.

Um problema interessante surge quando a dissipação age de maneiras diferentes no domínio. Um modelo matemático com esta situação é o problema de transmissão. Em [9], Raposo estudou a estabilidade uniforme para o correspondente problema de transmissão com memória com componentes elásticos e viscoelásticas.

Em trabalhos mais recentes, Sare e Rivera [7] investigaram a estabilidade do sistema de vigas de Timoshenko, acrescentando um termo de história

$\displaystyle\int_0^L g(s)\psi_{xx}(\cdot,t-s)\mathrm{d}s$ na equação (2), ou seja, consideraram o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \int_0^\infty g(s).\psi_{xx}(\cdot,t-s)ds = 0 \quad &\text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

e concluíram que a dissipação dada pela história é suficientemente forte para produzir estabilidade exponencial se, e somente se, as equações têm a mesma velocidade de onda, ou seja, se, e só se, (4) se verifica. Mostraram também a estabilidade polinomial no caso em que (4) não se verifica. Os mesmos autores, em [7], estudaram o comportamento assintótico de sistemas de Timoshenko com memória de núcleo não dissipativo, atuando apenas na equação (2), onde novamente (4) aparece como condição necessária e suficiente de estabilidade exponencial.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o comportamento assintótico de um sistema de vigas de Timoshenko com a dissipação dada pela história, de acordo com o trabalho de Sare e Rivera [7].

A organização deste trabalho é a seguinte. No Capítulo 1, apresentamos os principais resultados que serão usados nos capítulos posteriores.

No Capítulo 2, estudamos a existência e unicidade de solução para o sistema de vigas de Timoshenko com história, usando como ferramenta a teoria de semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0.

No Capítulo 3, sob a hipótese de que a igualdade (4) seja válida, estudamos o comportamento exponencial do semigrupo associado a este sistema. A estabilidade exponencial será mostrada na Seção 3.1, e na Seção 3.2 mostraremos a não estabilidade exponencial do semigrupo.

Finalmente, no Capítulo 4, mostramos que no caso em que não há decaimento exponencial o sistema é polinomialmente estável.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Análise Funcional

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar Cavalcanti [20], Brezis [12] e Oliveira [13].

Definição 1.1 (Forma Sesquilinear)**.** *Seja V um espaço vetorial complexo. Uma* ***forma sesquilinear de*** *V, é uma aplicação $a : V \times V \to \mathbb{C}$, $(u, v) \to a(u, v)$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$ *para todo* u, v, $w \in V$.

(ii) $a(\lambda u, w) = \lambda a(u, w)$ *para todo* u, $v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$ *para todo* u, v *e* $w \in V$.

(iv) $a(u, \lambda w) = \overline{\lambda} a(u, w)$ *para todo* u, $w \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 1.2. *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado $\mathcal{N}$, $a(\cdot, \cdot)$, é denominda* ***limitada*** *ou* ***contínua*** *se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_{\mathcal{N}}\|v\|_{\mathcal{N}}, \quad \text{para todo } u, v \in \mathcal{N}.$$

Definição 1.3. *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado $\mathcal{N}$, $a(\cdot, \cdot)$, é dita* ***coerciva*** *se existe uma constante $\beta > 0$ tal que*

$$|a(v, v)| \geq \beta\|v\|^2_{\mathcal{N}}, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{N}.$$

Definição 1.4. *Seja V um espaço vetorial complexo. Um funcional $T : V \to \mathbb{C}$ é dito* ***linear*** *se*

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *para todo* u *e* $v \in V$.

(ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ *para todo* $u \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

e é dito ***antilinear*** *se*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ *para todo* u *e* $v \in V$.

(ii) $T(\lambda u) = \overline{\lambda} T(u)$ *para todo* $u \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 1.5. *Um funcional* $T : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$, *sobre um espaço normado* $\mathcal{N}$, *é dito* ***limitado*** *se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|T(u)| \leq C\|u\|_{\mathcal{N}}, \quad \textit{para todo } u \in \mathcal{N}.$$

Teorema 1.6. *Se* $\mathcal{N}$ *é um espaço normado e* X *um espaço de Banach, então* $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, X) = \{f : \mathcal{N} \to X; \quad f \text{ é um operador linear limitado}\}$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver Oliveira [13], p. 27. □

Definição 1.7. *Se* $\mathcal{N}$ *é um espaço vetorial normado, então o espaço de Banach* $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ *será denotado por* $\mathcal{N}'$ *e chamado de espaço dual topológico de* $\mathcal{N}$.

Teorema 1.8 (Hahn-Banach)**.** *Sejam* V *um espaço vetorial complexo e uma aplicação* $p : V \to [0, \infty)$ *satisfazendo*

$$\begin{array}{rcll} p(u+v) & \leq & p(u) + p(v), & \forall\, u, v \in V, \\ p(\alpha u) & = & |\alpha| p(u), & \forall\, u \in V, \;\; \alpha \in \mathbb{C}. \end{array}$$

Se $f : Z \to \mathbb{C}$ *é um funcional linear definido no subespaço* $Z \subset V$ *com* $|f(w)| \leq |p(w)|$, *então* f *possui uma extensão linear* $F : V \to \mathbb{C}$ *dominada por* p, *ou seja,*

$$|F(u)| \leq p(u), \qquad \forall\, u \in V.$$

F *é chamada de extensão de Hahn-Banach de* f.

Demonstração. Ver Botelho *et al.* [21], p. 58. □

Teorema 1.9 (Lax-Milgran)**.** *Sejam* H *é um espaço de Hilbert e* $a : H \times H \to \mathbb{C}$ *uma forma sesquilinear, limitada e coerciva. Então, para todo funcional* $T : H \to \mathbb{C}$ *linear limitado, existe um único* $u \in H$ *talque*

$$a(u, v) = T(v) \quad \textit{para todo } v \in H.$$

Demonstração. Ver Cavalcanti, M. M; Cavalcanti, V. N. D., [20], p. 167. □

Observação 1.10. *O Teorema de Lax-Milgran pode ser usado em* $T : H \to \mathbb{C}$ *antilinear limitado. Basta aplicá-lo para* $\overline{T} : H \to \mathbb{C}$, *que claramente é linear, e* $\overline{a} : H \times H \to \mathbb{C}$ *contínua sendo uma forma sesquilinear, limitada e coerciva.*

Proposição 1.11. *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$. Então*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\leq (2\max\{a,b\})^p\\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\}\\ &\leq 2^p(a^p+b^p).\end{aligned}$$

□

Proposição 1.12 (Desigualdade de Young)**.** *Se $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [16], p. 56. □

Uma variação da desigualdade de Young que será muito utilizado neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 1.13. *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ tem-se*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}ab &= (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab\\ &= \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)\left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b\right).\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young segue

$$\begin{aligned}ab &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)^p + \frac{1}{q}\left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b\right)^q\\ &= \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Tomando $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$ temos,

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

□

Teorema 1.14 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Então para todos u, $v \in V$ temos*

$$|\langle u, v\rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V;$$

a igualdade ocorre se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Demonstração. Ver Oliveira [13], p. 121. □

Teorema 1.15. *Se M é um subespaço fechado do espaço de Hilbert H, então $H = M \oplus M^\perp$, isto é, cada $u \in H$ admite uma única representação na forma*

$$u = p + q \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp,$$

onde $M^\perp = \{q \in H : \langle p, q\rangle_H = 0 \text{ para todo } p \in M\}$.

Demonstração. Ver Botelho *et al.* [21], p. 111. □

Definição 1.16 (Resolvente). *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ está no* ***conjunto resolvente*** *de $\mathcal{A}$, o qual será denotado por $\varrho(\mathcal{A})$, se o operador*

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$$

existe, está bem definido em X e é limitado. Em outras palavras:

$$\begin{aligned}\varrho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad & (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \textit{existe}, \quad D\left((\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right) \textit{ é denso em } X \textit{ e} \\ & (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \textit{é limitado}\}.\end{aligned}$$

Neste caso $R(\lambda, \mathcal{A})$ denomina-se o ***operador resolvente*** *de $\mathcal{A}$.*

Definição 1.17 (Espectro). *O* ***espectro*** *de $\mathcal{A}$ é o conjunto*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \backslash \varrho(\mathcal{A})$$

formado por três subconjuntos disjuntos:

(i) *O* ***espectro pontual*** *de $\mathcal{A}$ é o conjunto de seus autovalores, denotado por $\sigma_p(\mathcal{A})$;*

(ii) *O* ***espectro contínuo*** *de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma_c(\mathcal{A})$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - \mathcal{A}$ é um operador injetivo, tem imagem densa em X, mas $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : R(\lambda I - \mathcal{A}) \to X$ é não limitado;*

(iii) *O* ***espectro residual*** *de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma_r(\mathcal{A})$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - \mathcal{A}$ é um operador injetivo mas sua imagem não é densa em X.*

Definição 1.18. *Um operador linear $T : D(T) \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é* ***fechado*** *se para toda sequência $(v_n) \subset D(T)$ convergente, $v_n \to v \in \mathcal{N}_1$, com $(Tv_n) \subset \mathcal{N}_2$ então Tv_n converge, $Tv_n \to w$, tenha-se $v \in D(T)$ e $Tv = w$.*

Lema 1.19. *Sejam X é um espaço de Banach e $S : X \to X$ um operador linear contínuo com inverso contínuo. Se $B \in \mathfrak{L}(X)$ satisfaz*

$$\|B\|_{\mathfrak{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}},$$

então $S + B$ é um operador linear inversível, com inversa contínua.

Demonstração. Temos que $S + B$ é bijetivo. De fato, seja $w \in X$ e denotemos por P o operador

$$P(x) = S^{-1}(w) - S^{-1}B(x).$$

Note que P é uma contração, pois

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\|_X &= \| - S^{-1}B(x) + S^{-1}B(y)\|_X \\ &\leq \|S^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}\|B\|_{\mathfrak{L}(X)}\|x - y\|_X \\ &\leq \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que existe um único $z \in X$ tal que $P(z) = z$, ou seja, existe um único $z \in X$ de modo que

$$z = S^{-1}(w) - S^{-1}B(z) \quad \Leftrightarrow \quad (S + B)(z) = w.$$

Logo, temos que $S + B$ é um operador bijetivo e, consequentemente, inversível.

Por outro lado, como $S + B$ é um operador contínuo, segue, pelo Teorema do Gráfico Fechado, que $(S + B)^{-1}$ também é um operador contínuo. □

Proposição 1.20. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear fechado num espaço de Hilbert H de modo que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Se $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(\mathcal{A})$ então existe $\omega \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathfrak{L}(H)} \leq |\omega| < \infty$ tal que $\{i\beta; |\beta| < |\omega|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$:*

$$\sup\left\{\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega|\right\} = \infty.$$

Se $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $|\omega_0| < |\omega|$ então

$$\sup\left\{\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega_0|\right\} < \infty.$$

Demonstração. Suponha $\{i\beta; |\beta| < |\omega|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$, se

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega|\right\} = M < \infty,$$

então, resulta que o operador

$$(i\beta I - \mathcal{A}) = (i\beta_0 I - \mathcal{A})[I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}],$$

com $|\beta_0| < |\omega|$, é inversível para $|\beta - \beta_0| < M^{-1}$, pois

$$\begin{aligned} \|i(\beta-\beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} &\leq |\beta-\beta_0| \cdot \|(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} \\ &< M^{-1}\|(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} \\ &< M^{-1}M = 1. \end{aligned}$$

Verifica-se que escolhendo β_0 adequado, com $|\beta_0|$ tão próximo de $|\omega|$ quanto possível, concluimos que

$$\left\{i\beta; |\beta| < |\omega| + M^{-1}\right\} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

e como a função

$$\begin{aligned} R(\cdot,\mathcal{A}): \quad \varrho(\mathcal{A}) &\to \mathfrak{L}(H) \\ \lambda &\mapsto R(\lambda,\mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

é contínua, segue que se $|\omega| \leq |\omega_0| < |\omega| + M^{-1}$, então $\{i\beta; |\beta| < |\omega_0|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega_0|\right\} \leq \max\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| \leq |\omega_0|\right\} < \infty.$$

Sabemos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Temos ainda

$$(i\beta I - \mathcal{A}) = \mathcal{A}(i\beta\mathcal{A}^{-1} - I), \tag{1.2}$$

para qualquer número real β satisfazendo

$$\|i\beta\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)}}.$$

De (1.2) concluímos que $i\beta I - \mathcal{A}$ é inversível se $|\beta| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathfrak{L}(H)}$. Portanto, se $|\omega_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathfrak{L}(H)}$ então $\{i\beta; |\beta| < |\omega_0|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega_0|\right\} \leq \max\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| \leq |\omega_0|\right\} < \infty.$$

Como por hipótese $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(\mathcal{A})$. Segue pelo argumento acima que existe $\omega \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathfrak{L}(H)} \leq |\omega| < \infty$ talque $\{i\beta; |\beta| < |\omega|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$:

$$\sup\left\{\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega|\right\} = \infty.$$

Se $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $|\omega_0| < |\omega|$ então

$$\sup\left\{\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| < |\omega_0|\right\} < \infty.$$

Como queriamos mostrar. □

Corolário 1.21. *Com as hipóteses da Proposição 1.20, temos que existem* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sequências de* $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *e* H, *respectivamente, tais que*

$$\lambda_k \to \omega; \qquad \|U_k\|_H = 1 \quad e \quad F_k \to 0,$$

sendo

$$(i\lambda_k I - \mathcal{A})U_k = F_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $\omega \in \mathbb{R}$ dado pela Proposição 1.20. Dado $n \in \mathbb{N}$, com $|\omega| - \dfrac{1}{n} > 0$ segue que $\left[-\left(|\omega| - \dfrac{1}{n}\right), \left(|\omega| - \dfrac{1}{n}\right)\right]$ é compacto. Pela continuidade da função $\lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \varrho(\mathcal{A})$, temos que

$$\sup\left\{\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)}; |\beta| \leq |\omega| - \frac{1}{n}\right\} = S_n < \infty.$$

Segue da Proposição 1.20 que existe uma sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ com $|\omega| - \dfrac{1}{n} <$ $|\beta_n| < |\omega|$ e

$$\left\|(i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathfrak{L}(H)} \geq S_n + n. \tag{1.3}$$

Logo existe uma subsequência de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$ que converge para ω ou $-\omega$. Sem perda de generalidade suponhamos que a subsequência converge para ω, e fazendo abuso de notação escrevemos a subsequência como $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$.

Do exposto até agora temos que existe uma sequência de números reais $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}'\mathbb{N}}$, com $\beta_n \to \omega$ e $|\beta_n| < |\omega|$ talque $\lim\limits_{n\to\infty} \|(i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} = \infty$.

Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} > k, \qquad n \geq n_0.$$

Daí existe $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, subsequência de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, talque

$$\|(i\lambda_k I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} > k.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $G_k \in H$, $G_k \neq 0$, tal que

$$\frac{\|(i\lambda_k I - \mathcal{A})^{-1} G_k\|_H}{\|G_k\|_H} > k,$$

ou seja,

$$\|G_k\|_H < \frac{1}{k}\|(i\lambda_k I - \mathcal{A})^{-1} G_k\|_H. \tag{1.4}$$

Tomando

(i) $U_k = \dfrac{(i\lambda_k I - \mathcal{A})^{-1} G_k}{\|(i\lambda_k I - \mathcal{A})^{-1} G_k\|_H}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$

(ii) $F_k = \dfrac{G_k}{\|(i\lambda_k I - \mathcal{A})^{-1} G_k\|_H}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$

de (1.4) segue que

$$\|F_k\|_H < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mediante a construção feita, concluímos que existem $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequências de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}$ respectivamente, tais que

$$\lambda_k \to \omega; \qquad \|U_k\|_H = 1 \ \text{ e } \ F_k \to 0$$

sendo

$$(i\lambda_k I - \mathcal{A})U_k = F_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

1.2 Espaços Funcionais e Espaço de Sobolev

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços funcionais que serão usados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes consultar Brézis [12].

Definiremos a seguir os espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nestas definições, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Definição 1.22. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u, que será denotado por* $\operatorname{supp}(u)$*, é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se* $\operatorname{supp}(u)$ *for um compacto do Ω então dizemos que u possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ ao espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto.*

Definição 1.23. *$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.*

Definição 1.24. *O conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem todas as derivadas até a ordem m contínuas em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ, é denotado por $C_0^m(\Omega)$ (ou C_0^∞ se $m = \infty$).*

Definição 1.25. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que:*

* $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;
* *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$D^\alpha \varphi_\nu \to 0 \quad \textit{uniformemente em } K,$$

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *e* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Definição 1.26. *O espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *com a noção de convergência definida acima é representado por* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e denominado espaço das funções testes em* Ω.

Definição 1.27. *Seja* $1 \leq p \leq +\infty$. *Denotamos por* $L^p(\Omega)$ *o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em* Ω *com valores em* $\mathbb{R}$, *tais que* $|u|^p$ *é integrável no sentido de Lebesgue em* Ω, *com norma*

$$||u||_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para} \quad 1 \leq p < +\infty$$

e, para $p = \infty$, *denotamos* $L^\infty(\Omega)$ *o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráves de* u *definidas sobre* Ω, *que são essecialmente limitadas, com a norma dada por*

$$||u||_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess}|u(x)| = \inf \{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \;\; q.t.p. \;\; em \; \Omega\}.$$

Definição 1.28. *Sejam* $1 \leq p < \infty$. *Diremos quer* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é localmente integrável em* $L^p(\Omega)$, *e denotaremos por* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, *se* f *for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto* $K \subset \Omega$ *tivermos*

$$\int_K |f_1(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Teorema 1.29 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), f_2 \in L^{p_2}(\Omega), ..., f_n \in L^{p_n}(\Omega), n \in \mathbb{N}$, *com* $p_1, ..., p_n > 1$ *e* $\dfrac{1}{p_1} + ... + \dfrac{1}{p_n} = 1$. *Então* $f_1 \cdot ... \cdot f_n \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f_1 \cdot ... \cdot f_n| \,\mathrm{d}x \leq ||f_1||_{L^{p_1}} \cdot ... \cdot ||f_n||_{L^{p_n}}.$$

Demonstração. Ver H. Brézis [12], p. 92. □

Teorema 1.30. *Sejam* $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *e seja* $u \in L^1_{loc}(I)$ *tal que*

$$\int_I u\varphi_x \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Então existe uma constante C *tal que* $u = C$ *em quase todo ponto de* I.

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 205. □

Definição 1.31. *Sejam* $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, *e* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *O* ***espaço de Sobolev*** $W^{1,p}(I)$ *é definido como sendo o conjunto*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists u_x \in L^p(I) \;\; \textit{tal que} \;\; \int_a^b u\varphi_x \,\mathrm{d}x = -\int_a^b u_x \varphi \,\mathrm{d}x \;\; \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}$$

O espaço $W^{1,p}(I)$ *é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|^p_{L^p} + \|u_x\|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, *denotamos* $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. *O espaço* $H^1(I)$ *é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u_x, v_x\rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u_x v_x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposição 1.32. *O espaço* $W^{1,p}(I)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$ *e separável para* $1 \le p < \infty$.

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 203. □

Definição 1.33. *Dado um inteiro* $m \ge 2$ *e um número real* $1 \le p \le \infty$ *definimos, por indução, o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I); D^1 u \in W^{m-1,p}(I)\right\},$$

com a notação $D^1 u = u_x$, *equipado com a norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{m} \|D^i u\|_{L^p}.$$

E também definimos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

equipado com o produto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^2} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{m} \langle D^i u, D^i v\rangle_{L^2} = \int_a^b uv\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b D^i u D^i v\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 1.34. *Existe uma constante positiva* C *(que depende somente de* $|I| \le \infty$*) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{W^{1,p}}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \le p \le \infty.$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ *com a imersão contínua para todo* $1 \le p \le \infty$.

Além disso, Se I *é um intervalo limitado então*

A imersão $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ *é compacta para todo* $1 < p \le \infty$.

A imersão $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ *é compacta para todo* $1 \le q < \infty$.

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 212. □

Corolário 1.35. *Suponha que* I *seja um intervalo ilimitado e* $u \in W^{1,p}(I)$, *com* $1 \le p < \infty$. *Então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \mapsto \infty}} u(x) = 0.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 214. □

Corolário 1.36. *Sejam u, $v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I)$$

e

$$(uv)_x = u_x v + u v_x.$$

Ademais, vale a formula de integração por partes

$$\int_y^z u_x v \, \mathrm{d}x = u(z)v(z) - u(y)v(y) - \int_y^z u v_x \, \mathrm{d}x, \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 215. □

Corolário 1.37. *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, e seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)_x = (G_x \circ u)u_x.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 215. □

Definição 1.38. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$, equipado com a norma de $W^{1,p}(I)$.*

O espaço $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ é equipado com o produto escalar de $H^1(I)$.

Teorema 1.39. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, somente se, $u = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 217. □

Teorema 1.40 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos I um intervalo limitado. Então existe uma constante $C_p \geq 0$, que depende apenas do comprimento do intervalo I, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_p \|u_x\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Em outras palavras, em $W_0^{1,p}(I)$, $\|u_x\|_{L^p}$ é uma norma equivalente à norma de $W_0^{1,p}(I)$.

Demonstração. Ver H. Brezis [12], p. 218. □

1.3 Semigrupos de Classe C_0

Nesta seção vamos descrever as notações, definições e alguns teoremas sobre semigrupo de classe C_0 que serão usados ao longo do trabalho. Para mais detalhes consultar Gomes [19] ou Pazy [10].

Definição 1.41 (Semigrupo)**.** *Seja X um espaço de Banach e $\mathfrak{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

I) $S(0) = I$, *onde I é o operador identidade de $\mathfrak{L}(X)$,*

II) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t,\ s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

III) $\lim_{t\to 0^+} \| (S(t) - I)\, x\|_X = 0, \quad \forall\, x \in X.$

Definição 1.42 (Gerador Infinitesimal)**.** *Considere*

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X \ ; \ \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \ existe\}.$$

O operador $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A})$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.43. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$.*

i) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então $S(t)x \in D(\mathcal{A})$ $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x;$$

ii) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t \mathcal{A}S(\tau)x \,\mathrm{d}\tau = \int_s^t S(\tau)\mathcal{A}x \,\mathrm{d}\tau;$$

iii) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então $\int_0^t S(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \in D(\mathcal{A})$ e

$$S(t)x - x = \mathcal{A} \int_s^t S(\tau)x \,\mathrm{d}\tau.$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 13. □

Proposição 1.44. *(i) O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

(ii) Um operador liner $\mathcal{A}$, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 15. □

Definição 1.45. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *e* $\mathcal{A}$ *seu gerador infinitesimal. Ponhamos* $\mathcal{A}^0 = I$*,* $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ *e, suponhamos que* $\mathcal{A}^{n-1}$ *esteja definido, consideremos*

$$D(\mathcal{A}^n) = \{x \;;\;\; x \in D(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}^{n-1}x \in D(\mathcal{A})\}.$$

Vamos definir $\mathcal{A}^n$ *como:*

$$\mathcal{A}^n x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}x), \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^n).$$

Proposição 1.46. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *e* $\mathcal{A}$ *seu gerador infinitesimal. Temos:*

i) $D(\mathcal{A}^n)$ *é um subespaço de* X *e* $\mathcal{A}^n$ *é um operador linear de* X*;*

ii) Se $x \in D(\mathcal{A}^n)$*, então* $S(t)x \in D(\mathcal{A}^n)$*,* $\forall t \geq 0$ *e*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} S(t)x = \mathcal{A}^n S(t)x = S(t)\mathcal{A}^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

iii) É valida a fórmula de Taylor: se $x \in D(\mathcal{A}^n)$*, então*

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} \mathcal{A}^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \mathcal{A}^n S(\tau)x \, \mathrm{d}\tau;$$

iv) $$(S(t)-I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 \cdots \tau_n)\mathcal{A}^n x \, \mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_n \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^n);$$

v) $\bigcap_n D(\mathcal{A}^n)$ *é denso em* X*.*

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 20. □

Proposição 1.47. *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador linear fechado de* X*. Pondo, para cada* $x \in D(\mathcal{A}^k)$*,*

$$\|x\|_{D(\mathcal{A})} = \sum_{j=0}^{k} \|\mathcal{A}^j x\|_X, \tag{1.5}$$

o funcional $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ *é uma norma em* $D(\mathcal{A}^k)$*, munido da qual* $D(\mathcal{A}^k)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 22. □

Definição 1.48. *A norma (1.5) é dita* ***norma do gráfico****. O espaço de Banach que se obtém munido* $D(\mathcal{A}^k)$ *da norma (1.5) será representado por* $[D(\mathcal{A}^k)]$*.*

Proposição 1.49. *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de classe C_0, então, $\forall x \in D(\mathcal{A}^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}\left([0,\infty)\,;\,[D(\mathcal{A}^k)]\right)$, $k = 0,1,2,...,n$.*

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 23. □

Teorema 1.50. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. Se $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$, onde*

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)}}{t},$$

então $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, existe a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t \quad \forall x \in X,$$

e

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 30. □

Teorema 1.51 (Hille-Yosida). *Para que um operador linear $\mathcal{A}$, definido em $D(\mathcal{A}) \subset X$ e com valores em X, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classes C_0 tal que $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq e^{\omega t}$, $t > 0$, é necessário e suficiente que:*

i) $\mathcal{A}$ seja fechado e seu domínio seja denso em X.

ii) Exista ω tal que para cada real $\lambda > \omega$ se tenha $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19],4.4 Teorema (Hille-Yosida) p. 32 e 4.5 Corolário p. 36. □

Definição 1.52. *Sejam X um espaço de Banach, X' o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X'. Ponhamos, para cada $x \in X$,*

$$J(x) = \{x^* \;\;;\;\; \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X'}^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X'$ tal que $j(x) \in J(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 1.53. *Diz - se que o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j,*

$$\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Proposição 1.54. *Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$, se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é sobrejetor para algum $\lambda_0 > 0$, então:*

(i) $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ *e* $\mathcal{A}$ *é fechado;*

(ii) $(0,\infty) \subset \varrho(\mathcal{A})$*;*

(iii) $\lambda I - \mathcal{A}$ *é sobrejetor, para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 38. □

Teorema 1.55 (Lummer-Phillips). *Um operador linear* $\mathcal{A}$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de classe* C_0 *com* $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$ *se e somente se:*

(i) O operador $\mathcal{A}$ *é dissipativo;*

(ii) O operador $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ *é um operador sobrejetor, para algum* $\lambda_0 > 0$;

(iii) O operador $\mathcal{A}$ *é densamente definido.*

Demonstração. Suponha inicialmente que o operador linear $\mathcal{A}$ seja gerador de um semigrupo de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$. Segue da Proposição 1.44 que o operador $\mathcal{A}$ é densamente definido e do Teorema 1.50 que o operador $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é um operador sobrejetor para todo $\lambda_0 > 0$. Além disso, para cada aplicação dualidade, j, tem-se

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle \leq |\langle S(t)x, j(x)\rangle| \leq \|S(t)x\|_X \|j(x)\|_{X'} \leq \|x\|_X^2$$

visto que, por hipótese, $\|S(t)x\|_X \leq \|x\|_X$, para todo $x \in X$. Portanto,

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x - x, j(x)\rangle = \operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle - \|x\|_X^2 \leq 0;$$

e dividindo por t e passando ao limite com $t \to 0^+$, pela continuidade da dualidade, temos que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x)\rangle \leq 0 \qquad \forall x \in D(\mathcal{A})$$

e, assim, $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Reciprocamente, suponhamos válido $(i) - (iii)$, segue da Proposição 1.54 que $\mathcal{A}$ é fechado e $(0,\infty) \subset \varrho(\mathcal{A})$, segue da hipótese (iii) que $\mathcal{A}$ é fechado e seu domínio é denso em X.

Dados $x \in D(\mathcal{A})$ e $\lambda > 0$, como $\mathcal{A}$ é dissipativo, então de

$$\langle (\lambda I - \mathcal{A})\, x, j(x)\rangle = \lambda \|x\|_X^2 - \langle \mathcal{A}x, j(x)\rangle$$

vem

$$\lambda\|x\|_X^2 \leq \operatorname{Re}\langle(\lambda I - \mathcal{A})x, j(x)\rangle \leq |\langle(\lambda I - \mathcal{A})x, j(x)\rangle| \leq \|(\lambda I - \mathcal{A})x\|_X \|x\|_X,$$

donde

$$\|x\|_X = \|(\lambda I - \mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X \geq \lambda\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall \lambda > 0,$$

ou seja,

$$\frac{\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}x\|_X}{\|x\|_X}\leq\frac{1}{\lambda},\quad\forall\lambda>0.$$

Tomando $\omega=0$ da desigualdade acima, temos

$$\|R(\lambda,\mathcal{A})\|_{\mathfrak{L}(X)}\leq\frac{1}{\lambda},\quad\forall\lambda\geq 0;$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida, Teorema 1.51, temos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)}\leq 1$. □

Corolário 1.56. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo com domínio $D(\mathcal{A})$ denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que $0\in\varrho(\mathcal{A})$. Então, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0, com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}\leq 1$.*

Demonstração. Por hipótese $0\in\varrho(\mathcal{A})$, portanto existe e é limitado o operador $\mathcal{A}^{-1}$. Recorrendo ao Teorema 1.19, temos que $\lambda I-\mathcal{A}$ é invertível sempre que $0<\lambda<\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}$. Assim, segue do Teorema de Lummer-Phillips, Teorema 1.55, que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{H}$, de modo que $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}\leq 1$. □

Teorema 1.57. *Se $\mathcal{A}:D(\mathcal{A})\to X$, operador linear, é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, para cada $x\in D(\mathcal{A})$ o problema de Cauchy Abstrato,*

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} &= \mathcal{A}u(t)\quad t>0\\ u(0) &= x.\end{cases}$$

tem uma única solução

$$u\in C\left([0,\infty);[D(\mathcal{A})]\right)\cap C^1\left([0,\infty);X\right)$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [19], p. 104. □

1.4 Espaços $L^p(0,T;X)$

Seja X um espaço de Banach separável. Uma função u definida em $(0,T)$ com valores em X é mensurável quando para toda $f\in X'$ (dual topológico de X) a função numérica $t\mapsto\langle f,u(t)\rangle_{X'\times X}$ for mensurável a Lebesgue em $(0,T)$.

A função $u:(0,T)\to X$ é integrável no sentido de Bochner em (0,T), se u for mensurável e a função $t\mapsto\|u(t)\|_X$ for integrável à Lebesgue em $(0,T)$. Neste caso, a integral de Bochner de u é o vetor de X denotado por $\displaystyle\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$ e caracterizado por

$$\left\langle f,\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t\right\rangle_{X'\times X}=\int_0^T\langle f,u(t)\rangle_{X'\times X}\,\mathrm{d}t,\qquad\forall f\in X'.$$

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T > 0$ números reais. Denotamos por $L^p(0,T;X)$ o espaço vetorial das (classes) funções $u : (0,T) \mapsto X$ mensuráveis e tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é a integral de Lebesgue em $(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}},$$

em relação a qual $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.58. *Se $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_X \,\mathrm{d}t, \qquad \forall u, v \in L^2(0,T;X).$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ estaremos denotando o espaço vetorial das (classes) funções mensuráveis $u : (0,t) \mapsto X$ tais que

$$\sup_{t\in(0,T)} \mathrm{ess}\|u(t)\|_X \leq \infty.$$

Neste espaço definimos a norma:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \mathrm{ess}\|u(t)\|_X.$$

em relação a qual $L^\infty(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Se $1 \leq p < \infty$, o dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^{p'}(0,T;X')$, onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$ e X' representa o dual topológico de X. Demonstra-se também que se X for reflexivo (respectivamente separável) e $1 < p < \infty$ (respectivamente $1 \leq p < \infty$) então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo e (respectivamente separável). Com esta identificação temos

$$\langle f, u\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{X'\times X} \,\mathrm{d}t,$$

para todo $f \in L^{p'}(0,T;X')$ e para todo $u \in L^p(0,T;X)$.

Temos também que o dual topológico de $L^1(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^\infty(0,T;X)$.

1.5 Distribuições Vetoriais

No que segue, iremos supor que os espaços de Banach X são sempre reais, sepáraveis e reflexivos. Em muitas situações X será um espaço de Hilbert.

Suponhamos $u \in L^p(0,T;X)$ e para $\varphi \in D(0,T)$ consideremos a aplicação $\widetilde{u} : D(0,t) \to X$ definida por

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \ \in \ X \tag{1.6}$$

onde a integral é entendida como a integral de Bochner em X. A equação (1.6) define uma aplicação linear e contínua de $D(0,T)$ em X. Portanto, $\widetilde{u}$ pertence ao espaço das distribuições vetoriais definidas em $D(0,T)$ com valores em X, o qual representa-se por $D'(0,T;X)$. Além disso, demonstra-se (ver por exemplo, R. Temam [25]) que a distribuição $\widetilde{u}$ é univocamente determinada por u, de modo que pode podemos identificar u com $\widetilde{u}$. Neste sentido, identifica-se $L^p(0,T;X)$ com a parte de $D'(0,T;X)$, isto é, $L^p(0,T;X) \subset D'(0,T;X)$. Desta forma, sendo todo elemento u de $L^p(0,T;X)$ uma distribuição, u possui derivada no sentido das distribuições, isto é, $u' \in D'(0,T;X)$ a qual é definido por:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^T u(s)\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Diz-se que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de $D'(0,T;X)$ converge para a distribuição u em $D'(0,T;X)$, se $\langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in D(0,T)$.

Sejam V e H espaços de Hilbert reais. Suponhamos que V é denso em H e que a injeção V em H é contínua. Escrevemos $V \hookrightarrow H$ para indicar tal situação. Identificando-se H com seu dual topológico H' segue que

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

onde V' é o dual topológico de V.

A seguir enunciaremos resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [25].

Proposição 1.59. *Se u e $v \in L^2(0,T;V)$ e u', $v' \in L^2(0,T;V)$ então a aplicação $t \mapsto (u(t), v(t))_H$ é absolutamente contínua em $[0,T]$ e vale a seguinte igualdade*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} + \langle u(t), v'(t) \rangle_{V' \times V},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $(0,T)$ das funções $(u(t), v(t))_H$.

Demonstração. Ver Teman, [25], p. 261. □

Corolário 1.60. *Se $v \in L^2(0,T;V)$, u, $v' \in L^2(0,T,H)$ e $u' \in L^2(0,T,V')$, então*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} + \langle u(t), v'(t) \rangle_H.$$

Demonstração. Ver Teman, [25], p. 261. □

Corolário 1.61. *Se $u \in L^2(0,T;V)$ e $u' \in L^2(0,T;V')$, então u é, após uma modificação eventual em um conjunto de medida nula, contínua de $[0,T]$ em H, isto é, $u \in C([0,T],H)$. Além disso, temos a seguinte igualdade no sentido das distribuições escalares sobre $(0,T)$*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}.$$

Demonstração. Ver Teman, [25], p. 261. □

1.6 Estabilidade

Definição 1.62. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser **exponencialmetne estável** se existirem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

O próximo teorema, devido a Prüss, caracteriza a estabildiade exponencial de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tal que $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$.

Teorema 1.63. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, de modo que $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ e $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de S. Então $S(t)$ é exponecialmente estável se, somente se,*

$$i\mathbb{R} = \{i\beta \;\; ; \;\; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(\mathcal{A})$$

e

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração. Ver Prüss [22]. □

Definição 1.64. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito polinomialmente estável se existirem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que*

$$\|S(t)u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\gamma}\,\|u\|_{D(\mathcal{A})}, \qquad \forall\, u \in D(\mathcal{A}).$$

O próximo teorema, de A. Borichev e Y. Tomilov, caracteriza a estabilidade polinomial de semigrupos C_0 limitados sobre espaços de Hilbert.

Teorema 1.65. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0, com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, limitado sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Então para $\alpha > 0$ fixado, as seguintes condições são equivalentes:*

(I) $\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} = O\left(|\lambda|^\alpha\right), \qquad \lambda \to \infty.$

(II) $\|S(t)\mathcal{A}\|_{\mathfrak{L}(H)} = O\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}\right), \qquad \lambda \to \infty.$

Demonstração. Ver Borichev, A., Tomilov, Y. [24]. □

Capítulo 2

Sistemas de Timoshenko com História

2.1 Introdução

Consideramos o seguinte sistema de Timoshenko com História

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s)\,\mathrm{d}s + k(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{2.2}$$

para $x \in (0, L)$ e $t \in (0, \infty)$. As funções φ e ψ são, respectivamente, o deslocamento transversal de uma viga e o ângulo de rotação. As constantes ρ_1, ρ_2, k, b são números reais positivos. O sistema está sujeito às condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(0, \cdot) = \varphi(L, \cdot) = 0, \quad \psi(0, \cdot) = \psi(L, \cdot) = 0 \text{ em } (0, \infty), \tag{2.3}$$

às condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \text{ em } (0, L) \tag{2.4}$$

e a condição

$$\psi(\cdot, -s) = \eta_0(\cdot, s), \quad s > 0 \qquad \text{em } (0, L).$$

Nosso interesse principal aqui é estudar o comportamento assintótico das soluções deste sistema. As principais ferramentas usadas são os resultados de Prüss [22] e [23]. Com este objetivo é necessário fazer algumas modificações no sistema (2.1)-(2.4), de tal forma que seja possível usar a teoria de semigrupos. Para isto, introduzimos a seguinte notação

$$\eta^t(x, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t-s). \tag{2.5}$$

Derivando (2.5) duas vezes em relação a x obtemos

$$\eta^t_{xx}(x,s) = \psi_{xx}(x,t) - \psi_{xx}(x,t-s).$$

Substituindo $\psi_{xx}(x,t-s)$ em (2.2) podemos reescrever o sistema (2.1)-(2.5) como

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x = 0 \qquad (2.6)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - \left(b - \int_0^\infty g(s)ds\right)\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}(x,s)\,\mathrm{d}s + k(\varphi_x+\psi) = 0 \qquad (2.7)$$

$$\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0, \qquad (2.8)$$

onde a terceira equação é obtida pela soma das derivadas de (2.5) em relação a t e a s. As condições de fronteira consideradas para o problema (2.6)-(2.8) são

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi(L,\cdot) = 0, \;\; \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) = 0, \;\; \eta^t(0,\cdot) = \eta^t(L,\cdot) = 0 \qquad (2.9)$$

e as condições inciais são dadas por

$$\begin{aligned} &\varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \;\; \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \;\; \psi(\cdot,0) = \psi_0, \;\; \psi_t(\cdot,0) = \psi_1 \;\text{ em } (0,L),\\ &\eta^0(\cdot,s) = \psi_0(\cdot) - \eta_0(\cdot,s) \;\text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned} \qquad (2.10)$$

o que significa que a história é considerada como um dado inicial.

Em relação à função $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, denominada núcleo de defração, consideramos as seguintes hipóteses

$$\begin{aligned} &g(t) > 0, \; \exists\, k_0, \; k_1 \; > 0 :\\ &-k_0 g(t) \le g'(t) \le -k_1 g(t), \qquad \forall t \ge 0 \end{aligned} \qquad (2.11)$$

$$b_0 = \int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s, \; \widetilde{b} := b - b_0 > 0. \qquad (2.12)$$

Observe que multiplicando a desigualdade $g'(t) \le -k_1 g(t)$, $\forall t \ge 0$, por $e^{k_1 t}$, obtemos

$$g'(t)e^{k_1 t} + k_1 e^{k_1 t} g(t) \le 0, \quad \forall t \ge 0,$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{e^{k_1 t} g(t)\right\} \le 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$\begin{aligned} e^{k_1 t} g(t) - g(0) &\le 0, \quad \forall t \ge 0\\ g(t) &\le g(0)e^{-k_1 t}, \quad \forall t \ge 0. \end{aligned} \qquad (2.13)$$

De modo análogo, ao multiplicar $-k_0 g(t) \le g'(t)$, $\forall t \ge 0$, por $e^{k_0 t}$ e integrar de 0 a t a desigualdade resultante, obtemos, juntamente com (2.13),

$$g(0)e^{-k_0 t} \leq g(t) \leq g(0)e^{-k_1 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Que implica

$$\int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s \quad \text{converge.}$$

O objetivo dos próximos capítulos será mostrar que o sistema é exponencialmente estável se, e somente se, a velocidade das ondas das equações (2.1),(2.2) são iguais, isto é

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \tag{2.14}$$

Quando a identidade (2.14) não se verifica, o que é mais interessante do ponto de vista físico, mostramos que a energia de primeira ordem decai de forma polinomial com taxas que dependem da regularidade dos dados iniciais.

2.2 Existência e Unicidade

Pela hipótese (2.11) sobre o núcleo g, é possível definir $L^2_g(\mathbb{R}^+_*, H^1_0(0,L))$ como o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável com valores em $H^1_0(0,L)$ definidas no espaço de medida $(\mathbb{R}^+_*, H^1_0(0,L), |g|ds)$ munido com o produto interno

$$\langle \xi^1, \xi^2 \rangle_{L^2_g} = \int_0^L \int_0^\infty g(s)\xi^1_x(s)\overline{\xi^2_x(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$$

e a norma

$$\|\xi\|_{L^2_g} = \left(\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\xi_x(s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Denotemos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1_0(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1_0(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2_g(\mathbb{R}^+_*, H^1_0(0,L)),$$

com a norma

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{\mathcal{H}} &= \|(u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)\|^2_{\mathcal{H}} \\ &= \rho_1\|u^2\|^2_{L^2} + \rho_2\|u^4\|^2_{L^2} + \widetilde{b}\|u^3_x\|^2_{L^2} + k\|u^1_x + u^3\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Observação 2.1. *A norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente à norma da soma*

$$\|U\|_S = \|u^1\|_{H^1_0} + \|u^2\|_{L^2} + \|u^3\|_{H^1_0} + \|u^4\|_{L^2} + \|\eta\|_{L^2_g}.$$

De fato, segue da desigualdade triangular e do Teorema 1.11 que

$$\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \leq (\|u_x^1\|_{L^2} + \|u^3\|_{L^2})^2 \leq 4(\|u_x^1\|_{L^2}^2 + \|u^3\|_{L^2}^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + 4k(\|u_x^1\|_{L^2}^2 + \|u^3\|_{L^2}^2) + \|\eta\|_{L_g^2}^2 \\
&\leq 4k\|u_x^1\|_{L^2}^2 + \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \max\{4k, \widetilde{b}\}(\|u^3\|_{L^2}^2 + \|u_x^3\|_{L^2}^2) + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \|\eta\|_{L_g^2}^2 \\
&\leq 4k\|u^1\|_{H_0^1}^2 + \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \max\{4k, \widetilde{b}\}\|u^3\|_{H_0^1}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}^2 \\
&\leq \frac{{C_1}^2}{5}\left(\|u^1\|_{H_0^1}^2 + \|u^2\|_{L^2}^2 + \|u^3\|_{H_0^1}^2 + \|u^4\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}\right) \\
&\leq \frac{{C_1}^2}{5}\left(\|U\|_S^2 + \|U\|_S^2 + \|U\|_S^2 + \|U\|_S^2 + \|U\|_S^2\right) \\
&\leq {C_1}^2\|U\|_S^2,
\end{aligned}$$

com $\dfrac{{C_1}^2}{5} = \max\{\rho_1, \rho_2, 1, 4k, \widetilde{b}\}$. *Daí*

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_1\|U\|_S.$$

Reciprocamente, usando a desigualdade de Poincaré, Teorema 1.40, e a desigualdade triangular obtemos a constante de Poincaré C_p*, de modo que*

$$\|u^3\|_{H_0^1} \leq C_p\|u_x^3\|_{L^2} \quad e \quad \|u^1\|_{H_0^1} \leq C_p\|u_x^1\|_{L^2} \leq C_p\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + C_p\|u^3\|_{L^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|U\|_S &\leq \|u^1\|_{H_0^1} + \|u^2\|_{L^2} + \|u^3\|_{H_0^1} + \|u^4\|_{L^2} + \|\eta\|_{L_g^2} \\
&\leq C_p\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + C_p\|u^3\|_{L^2} + \|u^2\|_{L^2} + \|u^3\|_{H_0^1} + \|u^4\|_{L^2} + \|\eta\|_{L_g^2} \\
&\leq C_p\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \|u^2\|_{L^2} + (C_p + 1)\|u^3\|_{H_0^1} + \|u^4\|_{L^2} + \|\eta\|_{L_g^2} \\
&\leq C_p\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \|u^2\|_{L^2} + (C_p + 1)C_p\|u_x^3\|_{L^2} + \|u^4\|_{L^2} + \|\eta\|_{L_g^2} \\
&\leq \frac{C_p}{k}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\rho_1}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{(C_p + 1)C_p}{\widetilde{b}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\rho_2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq {C'}_2\|U\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

com ${C'}_2 = \max\left\{\dfrac{C_p}{k}, \dfrac{1}{\rho_1}, \dfrac{(C_p + 1)C_p}{\widetilde{b}}, \dfrac{1}{\rho_2}, 1\right\}$.

Portanto, existem constantes positivas C_1 *e* C_2 *tais que*

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_1\|U\|_S \leq C_2\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Em outras palavras, as normas são equivalentes.

Mostraremos a existência e unicidade de soluções para (2.6)-(2.8) usando o Teorema de Lummer-Phillips 1.55. Com este fim, reescrevemos esse problema como um problema de Cauchy.

Consideremos $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta)^t$. Não é difícil mostrar que o sistema (2.6)-(2.8) é equivalente a

$$U_t = \mathcal{A}U, \qquad U(0) = U_0 \tag{2.16}$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0)^t$ e o operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x(\cdot) & 0 & \left(\frac{\widetilde{b}}{\rho_2}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k}{\rho_2}I\right)(\cdot) & 0 & \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\partial_x^2(\cdot, s)ds \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & -\partial_s(\cdot) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

O operador $\mathcal{A}$ possui o seguinte domínio

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{U = \big(u^1, u^2, u^3, u^4, \eta\big) \in \mathcal{H} : u^1 \in H^2(0,L); u^2, u^4 \in H_0^1(0,L); \eta(0) = 0;$$
$$\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1); \left(\widetilde{b}u^3 \; + \int_0^\infty g(s)\eta^t(s)\,\mathrm{d}s\right)_{xx} ds \in L^2(0,L)\Big\}.$$

Lema 2.2. *Suponha que g satisfaz (2.11)-(2.12). Então, para toda $w \in L_g^2\left((\mathbb{R}_*^+\,;\, H_0^1(0,L)\right)$ com $w_s \in L_g^2\left(\mathbb{R}_*^+\,;\, H_0^1(0,L)\right)$, $w(0) = 0$, temos:*

$$\lim_{s\to\infty} g(s)\|w_x(s)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Demonstração. Seja

$$f(s) = g(s)\|w_x(s)\|_{L^2}^2.$$

Por hipótese, $f \in L^1(0,\infty)$. Pelo Lema 1.59 temos:

$$f'(s) = g'(s)\|w_x(s)\|_{L^2}^2 + 2g(s)\langle w_x\,,\, w_{xs}\rangle_{L^2}.$$

Pelas hipóteses sobre a função g, resulta que

$$f' \in L^1(0,\infty).$$

Consequentemente, $f \in W^{1,1}(0,\infty)$ e pelo Corolário 1.35 concluímos que $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 0$, ou seja,

$$\lim_{s\to\infty} g(s)\|w_x(s)\|_{L^2}^2 = 0.$$

□

O seguinte lema contém desigualdades usadas recorrentemente nos próximos capítulos.

Lema 2.3. *Suponhamos $\omega \in L^2_g(\mathbb{R}^+_*, H^1_0(0,L))$, com $\omega_s \in L^2_g(\mathbb{R}^+_*, H^1_0(0,L))$ e $\omega(0) = 0$, e seja $v \in L^2(0,L)$, então as seguintes desigualdades são válidas*

$$\begin{aligned}
&\textit{(i)} \quad \int_0^L \left| \int_0^\infty g(s)\omega \,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \leq b_0 \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\omega|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x,\\
&\textit{(ii)} \quad \int_0^\infty g(s) \int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s = -\int_0^\infty g'(s) \int_0^L \omega u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Além disso, existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned}
&\textit{(iii)} \quad Re\left\{ \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\omega_x} v \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x \right\} \leq C\|v\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2_g},\\
&\textit{(iv)} \quad Re\left\{ \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\omega} v \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x \right\} \leq C\|v\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2_g},
\end{aligned}$$

e, para cada $\epsilon > 0$, existe um $C_\epsilon := C(\epsilon) > 0$ de modo que,

$$\begin{aligned}
&\textit{(v)} \quad Re\left\{ \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\omega_x} v \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x \right\} \leq \epsilon \int_0^L |v|^2 \mathrm{d}x + C_\epsilon \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\omega_x|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x,\\
&\textit{(vi)} \quad Re\left\{ \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\omega} v \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x \right\} \leq \epsilon \int_0^L |v|^2 \mathrm{d}x + C_\epsilon \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\omega_x|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Demonstração. (i) Decorre da propriedade da integral de Bochner, juntamente com a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e o fato de $g(s) > 0$ para qualquer s não negativo, que

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left| \int_0^\infty g(s)\omega \,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x &= \left\| \int_0^\infty g(s)\omega \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2}^2\\
&\leq \left[\int_0^\infty \|g(s)\omega\|_{L^2} \,\mathrm{d}s \right]^2\\
&= \left[\int_0^\infty \left(g^{\frac{1}{2}}(s) \right) \left(g^{\frac{1}{2}}(s) \|\omega\|_{L^2} \,\mathrm{d}s \right) \right]^2\\
&\leq \left[\left(\int_0^\infty g(s) \,\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(s) \|\omega\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2\\
&\leq \int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\omega|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(*ii*) Como

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s &= \int_0^L v\int_0^\infty g(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^L v\lim_{A\to\infty}\left(\int_0^A g(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^L v\lim_{A\to\infty}\left(g(s)\omega|_0^A-\int_0^A g'(s)\omega\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^L v\lim_{A\to\infty}\left(g(A)\omega(A)-g(0)\omega(0)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
&- \int_0^L v\int_0^\infty g'(s)\omega\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Do fato que $\omega(0)=0$ e pelo Lema 2.2, temos

$$
\int_0^L v\lim_{A\to\infty}\left(g(A)\omega(A)-g(0)\omega(0)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x,
$$

pois, como $\lim\limits_{A\to\infty} g(A)\|w_x(A)\|_{L^2}^2$, resulta da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e da desigualdade de Poincré, Teorema 1.40, que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^L vg(A)w(A)\,\mathrm{d}x\right| &= g(A)\left|\int_0^L vw(A)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq g(A)\|v\|_{L^2}\|w(A)\|_{L^2}\\
&\leq C_p g(A)\|v\|_{L^2}\|w(A)\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

onde C_p é a constante de Poincaré. Portanto,

$$
\int_0^\infty g(s)\int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\omega v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = -\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\omega v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
$$

(*iii*) Pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, em $L^2(0,L)$ e depois em $L^2(0,\infty)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\omega_x}v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\} &\leq \int_0^\infty g(s)\int_0^L|\omega_x v|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\
&\leq \int_0^\infty g(s)\|\omega_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\,\mathrm{d}s\\
&= \int_0^\infty\left[(g(s))^{\frac12}\|\omega_x\|_{L^2}\right]\left[(g(s))^{\frac12}\|v\|_{L^2}\right]\mathrm{d}s\\
&\leq \left(\int_0^\infty g(s)\|\omega_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\cdot\left(\int_0^\infty g(s)\|v\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\\
&= \sqrt{b_0}\|v\|_{L^2}\cdot\left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\omega_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\
&= \sqrt{b_0}\|v\|_{L^2}\|\omega\|_{L_g^2}.
\end{aligned}
$$

(iv) Da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e da desigualdade de Poincáre, Teorema 1.40, existe uma constante $C_p > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left\{\int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\omega} v \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\} &\leq \int_0^\infty g(s)\int_0^L |\omega v| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^\infty g(s)\|\omega\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^\infty g(s)C_p\|\omega_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\
&= C_p\int_0^\infty \left[(g(s))^{\frac{1}{2}}\,\|\omega_x\|_{L^2}\right]\left[(g(s))^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2}\right]\,\mathrm{d}s \\
&\leq C_p\left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\omega_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{b_0}\|v\|_{L^2} \\
&= C_p\sqrt{b_0}\,\|v\|_{L^2}\,\|\omega\|_{L^2_g}.
\end{aligned}$$

(v) Pelo item (iii) e pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, dado $\epsilon > 0$ existem constantes $C > 0$ e $C_\epsilon > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left\{\int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\omega_x} v \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\} &\leq C\|v\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2_g} \\
&\leq \epsilon\|v\|_{L^2}^2 + C_\epsilon\|\omega\|_{L^2_g}^2,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

(vi) A demonstração de (vi) é análoga à do item (v), usando o item (iv) e a Desigualdade de Young, Corolário 1.13.

□

Proposição 2.4. *Se* $U \in D(\mathcal{A})$ *então*

$$\operatorname{Re}\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.$$

Demonstração. Seja $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta) \in D(\mathcal{A})$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= k\int_0^L (u^1_{xx} + u^3_x)\overline{u^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \left(\widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta ds\right)_{xx}\overline{u^4}dx \\
&- k\int_0^L (u^1_x + u^3)\overline{u^4}\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L u^4_x\overline{u^3_x}\,\mathrm{d}x + k\int_0^L (u^2_x + u^4)(\overline{u^1_x + u^3})\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_0^L\int_0^\infty g(s)(u^4_x - \eta_{sx})\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Como $U \in D(\mathcal{A})$ segue que u^2 e $u^4 \in H^1_0(0, L)$. Integrando por partes e usando a Proposição 1.39, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= (u_x^1 + u^3)\overline{u^2}\Big|_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L (u_x^1+u^3)\overline{u_x^2}\,\mathrm{d}x \\
&+ \left(\widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_x \overline{u^4}\Big|_{x=0}^{x=L} - \widetilde{b}\int_0^L u_x^3\overline{u_x^4}\,\mathrm{d}x \\
&- \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^4}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x - k\int_0^L (u_x^1+u^3)\overline{u^4}\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L u_x^4\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x \\
&+ k\int_0^L (u_x^2+u^4)(\overline{u_x^1+u^3})\,\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^\infty g(s)(u_x^4 - \eta_{sx})\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&= -k\int_0^L (u_x^1+u^3)(\overline{u_x^2+u^4})\,\mathrm{d}x - \widetilde{b}\int_0^L u_x^3\overline{u_x^4}\,\mathrm{d}x \\
&- \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^4}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L u_x^4\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x \\
&+ k\int_0^L (u_x^2+u^4)(\overline{u_x^1+u^3})\,\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^\infty g(s)u_x^4\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&- \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_{sx}\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&= k\int_0^L \Big[(u_x^2+u^4)(\overline{u_x^1+u^3}) - (\overline{u_x^2+u^4})(u_x^1+u^3)\Big]\,\mathrm{d}x \\
&+ \widetilde{b}\int_0^L \left(u_x^4\overline{u_x^3} - \overline{u_x^4}u_x^3\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^\infty g(s)(u_x^4\overline{\eta_x} - \overline{u_x^4}\eta_x)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&- \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_{sx}\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real da igualdade acima resulta que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -\,\mathrm{Re}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_{sx}\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&= -\,\mathrm{Re}\int_0^\infty g(s)\int_0^L \eta_{sx}\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&= -\,\mathrm{Re}\int_0^\infty g(s)\langle \eta_{sx}, \overline{\eta_x}\rangle_{L^2}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Do fato que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \eta_x, \eta_x\rangle_{L^2} = 2\ \mathrm{Re}\,\langle \eta_{xs}, \eta_x\rangle_{L^2}$, $\eta_x(0) = 0$, e do Lema 2.3, segue que

$$
\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2 ds.
$$

Portanto,

$$
\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.
$$

□

Lema 2.5. *Se $U \in D(\mathcal{A})$ então $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Demonstração. Seja $U \in D(\mathcal{A})$. Segue pela Proposição 2.4 e pelas hipóteses sobre o núcleo g, dadas em (2.11), que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \\ &\leq -\frac{k_1}{2}\int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{A}$ é dissipativo. □

Lema 2.6. *O operador $\mathcal{A}$ é bijetivo e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Considere $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, \omega) \in \mathcal{H}$. Vamos mostrar que existe um único $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$, ou seja,

$$u^2 = f^1 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,L) \tag{2.18}$$

$$k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \quad \text{em} \quad L^2(0,L) \tag{2.19}$$

$$u^4 = f^3 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,L) \tag{2.20}$$

$$\left(\widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx} - k(u_x^1 + u^3) = \rho_2 f^4 \quad \text{em} \quad L^2(0,L) \tag{2.21}$$

$$u^4 - \eta_s = \omega \quad \text{em} \quad L_g^2(\mathbb{R}_*^+; H_0^1(0,L)) \tag{2.22}$$

Por (2.18) e (2.20) devemos tomar $u^2 = f^1$ e $u^4 = f^3$. Substituindo u^4 em (2.22) obtemos que

$$\eta_s = f^3 - \omega$$

e encontramos

$$\eta(s) = -\int_0^s w(r)\mathrm{d}r + sf^3 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,L).$$

Note que $\eta(0) = 0$ e $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+; H_0^1(0,L))$ pois, decorre da desigualdade triângular e da Proposição 1.4, que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)\|\eta_{xs}(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s &\leq \int_0^\infty g(s)\|f_x^3-\omega_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\leq \int_0^\infty g(s)\left(\|f_x^3\|_{L^2}+\|\omega_x\|_{L^2}\right)^2\,\mathrm{d}s\\ &\leq \int_0^\infty g(s)\left(4\|f_x^3\|_{L^2}^2+4\|\omega_x\|_{L^2}^2\right)\,\mathrm{d}s\\ &\leq 4\int_0^\infty g(s)\|f_x^3\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s+4\int_0^\infty g(s)\|\omega_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\leq 4\,b_0\,\|f_x^3\|_{L^2}^2+4\int_0^\infty g(s)\|\omega_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Como $f^3\in H_0^1(0,L)$ e $\omega\in L_g^2(\mathbb{R}_*^+,H_0^1(0,L))$, temos que $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\|\eta_{xs}(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s$ é convergente e, consequentemente, $\eta_s\in L_g^2(\mathbb{R}_*^+;H_0^1(0,L))$.

Agora, vamos mostrar que $\eta\in L_g^2(\mathbb{R}_*^+;H_0^1(0,L))$. Se $A>0$, por (2.11), temos que

$$\begin{aligned}\int_0^A g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s &\leq -\frac{1}{k_1}\int_0^A g'(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &= -\frac{1}{k_1}\left(\underbrace{g(A)\|\eta_x(A)\|_{L^2}^2}_{\geq 0}-\underbrace{g(0)\|\eta_x(0)\|_{L^2}^2}_{=0}-\int_0^A g(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\right)\\ &\leq \frac{1}{k_1}\int_0^A g(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Usando que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\eta_x\|_{L^2}^2=2\ \mathrm{Re}\ \langle\eta_{xs},\eta_x\rangle_{L^2}$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Teorema 1.14, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^A g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s &\leq \frac{2}{k_1}\int_0^A g(s)\,\mathrm{Re}\langle\eta_{xs},\eta_x\rangle_{L^2}\,\mathrm{d}s\\ &\leq \frac{2}{k_1}\int_0^A g(s)\|\eta_{xs}\|_{L^2}\|\eta_x\|_{L^2}\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, existe $C>0$, de modo que

$$\int_0^A g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{2}\int_0^A g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s+C\int_0^A g(s)\|\eta_{xs}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.$$

Assim, obtemos

$$\int_0^A g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \leq 2C\int_0^A g(s)\|\eta_{xs}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.$$

Passando o limite, fazendo $A \to \infty$, temos

$$\int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \leq 2C\int_0^\infty g(s)\|\eta_{xs}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s.$$

Como $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1(0,L))$, concluímos pelo teste de comparação de integrais que $\eta \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+, H_0^1(0,L))$.

Portanto, temos η e $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}_*^+; H_0^1(0,L))$.

Considere a forma sesquilinear $\mathcal{B} : [H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)]^2 \to \mathbb{C}$ dada por

$$\mathcal{B}((v^1,v^2),(\phi^1,\phi^2)) \;=\; \widetilde{b}\int_0^L v_x^2\,\overline{\phi_x^2}\,\mathrm{d}x + k\int_0^L (v_x^1+v^2)\overline{(\phi_x^1+\phi^2)}\,dx$$

e o funcional antilinear $\mathcal{F} : H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\mathcal{F}(\phi^1,\phi^2) \;=\; -\rho_1\int_0^L f^2\,\overline{\phi^1}\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L f^4\,\overline{\phi^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty g(s)\int_0^L \eta_x\overline{\phi_x^2}dxds.$$

Não é difícil mostrar que $\mathcal{B}$ é contínua e coerciva e que $\mathcal{F}$ é contínuo.

Segue pelo Teorema de Lax-Milgran, Teorema 1.9, que existe um único par (u^1,u^3) pertencente a $H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ tal que $\mathcal{B}((u^1,u^3),(\phi^1,\phi^2)) = \mathcal{F}(\phi^1,\phi^2)$ para todo $(\phi^1,\phi^2) \in H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$. De

$$\mathcal{B}((u^1,u^3),(\phi^1,0)) = \mathcal{F}(\phi^1,0), \;\; \forall\, \phi^1 \in H_0^1(0,L)$$

e

$$\mathcal{B}((u^1,u^3),(0,\phi^2)) = \mathcal{F}(0,\phi^2), \;\; \forall\, \phi^2 \in H_0^1(0,L)$$

resulta que

$$k\int_0^L (u_x^1+u^3)\overline{\phi_x^1}\,dx = -\rho_1\int_0^L f^2\,\overline{\phi^1}\,\mathrm{d}x, \;\forall\, \phi^1 \in H_0^1(0,L) \tag{2.23}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{b}\int_0^L u_x^3\,\overline{\phi_x^2}\,\mathrm{d}x + k\int_0^L (u_x^1+u^3)\overline{\phi^2}\,dx \;&=\; -\rho_2\int_0^L f^4\,\overline{\phi^2}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\infty g(s)\int_0^L \eta_x\overline{\phi_x^2}dxds,\end{aligned} \tag{2.24}$$

$\forall\, \phi^2 \in H_0^1(0,L)$. Tomando $\phi^1 \in C_0^\infty((0,L):\mathbb{R})$ em (2.23) obtemos que

$$k(u_x^1+u^3)_x = \rho_1 f^2 \quad \text{em} \quad L^2(0,L).$$

Como $u_x^3 \in L^2(0,L)$ resulta que $u_{xx}^1 \in L^2(0,L)$, ou seja, $u^1 \in H^2(0,L)$.

Por outro lado, tomando $\phi^2 \in C_0^\infty((0,L):\mathbb{R})$ em (2.24) segue que

$$\int_0^L \left(\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds\right)\phi_x^2 dx = -\int_0^L \left(k(u_x^1+u^3)+\rho_2 f^4\right)\phi^2 dx,$$

ou seja,

$$\left(\widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta ds\right)_{xx} \in L^2(0,L)$$

e

$$\left(\widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta ds\right)_{xx} = k(u_x^1 + u^3) + \rho_2 f^4 \quad \text{em} \quad L^2(0,L).$$

Resulta dos comentários anteriores que $\mathcal{A}$ é bijetivo.

Para mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ resta mostrar que A^{-1} é limitado.

Multiplicando (2.19) por $\overline{u^1}$, (2.21) por $\overline{u^3}$, integrando de 0 a L, usando integração por partes e somando os resultados obtidos, encontramos

$$\begin{aligned}\widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 &= -\rho_1 \int_0^L f^1\overline{u^1}\,\mathrm{d}x - \rho_2 \int_0^L f^2\overline{u^3}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\infty g(s) \int_0^L \eta_x(s)\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e as equivalências das normas em $\mathcal{H}$, observação 2.1, podemos encontrar uma constante positiva C_1, tal que

$$\widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \left|\int_0^\infty g(s)\int_0^L \eta_x\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right|. \quad (2.25)$$

Usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e a de Young, Corolário 1.13, podemos encontrar uma constante positiva C_2, de modo que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty g(s)\int_0^L \eta_x\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| &\leq \int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|_{L^2}\|u_x^3\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty g(s)\|u_x^3\|_{L^2}\|\eta_x\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^\infty g(s)\left(\frac{\widetilde{b}}{2b_0}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + C_2\|\eta_x\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + C_2\|\eta\|_{L_g^2}^2.\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.25) obtemos

$$\frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_2\|\eta\|_{L_g^2}.$$

Resulta de (2.11) e da Proposição 2.4 que

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s = |Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}| = |Re\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

o que implica em

$$\frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2} \leq C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.26}$$

para alguma constante $C_3 > 0$.
Por outro lado, $u^2 = f^1$ e $u^4 = f^3$, logo

$$\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 = \rho_1\|f^1\|_{L^2}^2 + \rho_2\|f^3\|_{L^2}^2 \leq (\rho_1+\rho_2)\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.27}$$

Somando (2.26) e (2.27) temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}\\ &\leq C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + (\rho_1+\rho_2)\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, podemos encontrar uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como $\mathcal{A}U = F$, temos que $U = \mathcal{A}^{-1}F$, e da desigualdade acima concluímos que

$$\|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq 2\sqrt{C}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } F \in \mathcal{H},$$

isto é, $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador limitado. Portanto $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. □

Lema 2.7. *O domínio do operador $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})$, é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. De fato, como $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ e $(\beta\mathcal{A}^{-1} - I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se $|\beta| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, Lema 1.19, segue, da igualdade

$$(\beta I - \mathcal{A}) = (\beta\mathcal{A}^{-1} - I)\mathcal{A}$$

que, $]-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[\subset \varrho(\mathcal{A})$. Portanto, existe $0 < \beta_0 \in \varrho(\mathcal{A})$.

Seja $F \in \overline{D(\mathcal{A})}^{\perp}$, isto é, $F \in \mathcal{H}$ e

$$\langle F, G\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, G \in \overline{D(\mathcal{A})}. \tag{2.28}$$

Então, existe $V \in D(\mathcal{A})$ tal que $(\beta_0 I - \mathcal{A})V = F$. Portanto, de (2.28) resulta que

$$\langle \beta_0 V - \mathcal{A}V, G\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\ G \in \overline{D(\mathcal{A})}. \tag{2.29}$$

Tomando $G = V$ em (2.29), obtemos

$$\beta_0\langle V, V\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}V, V\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Segue do Lema 2.5 que

$$0 \leq \beta_0 \|V\|_{\mathcal{H}}^2 = \text{Re } \langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0,$$

ou seja, $V = 0$ e, portanto, $F = 0$.

Como $\overline{D(\mathcal{A})}^{\perp} = \{0\}$, segue pelo Teorema 1.15 que $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. □

Resulta pelos lemas anteriores e pelo Teorema de Lumer-Phillips, Teorema 1.55, os seguintes resultados:

Proposição 2.8. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$.*

Teorema 2.9. *Seja $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0) \in D(\mathcal{A})$. Então existe uma única solução do problema de Cauchy* (2.16)*, $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0 = (\varphi(t), \varphi_t(t), \psi(t), \psi_t(t), \eta^t)$ satisfazendo*

$$U \in C\left([0,\infty); D(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0,\infty); \mathcal{H}\right),$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ temos

$$U \in C^{n-k}\left([0,\infty); D(\mathcal{A}^k)\right) \cap C^n\left([0,\infty); \mathcal{H}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

Capítulo 3

Estabilidade Exponencial do Sistema de Timoshenko com História

3.1 Estabilidade Exponencial

Este capítulo trata da estabilidade exponencial do sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - \left(b - \int_0^\infty g(s)ds\right)\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}(x,s)\,\mathrm{d}s + k(\varphi_x + \psi) = 0 \tag{3.2}$$

$$\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0, \tag{3.3}$$

sujeito as condições de fronteira

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi(L,\cdot) = 0, \;\; \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) = 0, \;\; \eta^t(0,\cdot) = \eta^t(L,\cdot) = 0, \tag{3.4}$$

as condições inciais

$$\begin{gathered} \varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \;\; \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \;\; \psi(\cdot,0) = \psi_0, \;\; \psi_t(\cdot,0) = \psi_1 \;\text{ em } (0,L), \\ \eta^0(\cdot,s) = \psi_0(\cdot) - \eta_0(\cdot,s) \;\text{ em } (0,L)\times(0,\infty). \end{gathered} \tag{3.5}$$

e às hipóteses

$$\begin{gathered} g(t) > 0, \; \exists\, k_0, \; k_1 > 0 : \\ -k_0 g(t) \le g'(t) \le -k_1 g(t), \qquad \forall t \ge 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$b_0 = \int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s, \; \widetilde{b} := b - b_0 > 0. \tag{3.7}$$

Analisando o sistema (3.1) - (3.3), multiplicando (3.1) e (3.2) por φ_t e ψ_t respectivamente, e integrando de 0 a L temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t \,\mathrm{d}x - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\varphi_t \,\mathrm{d}x &= 0 \\ \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}\psi_t \,\mathrm{d}x - \int_0^L \left(\widetilde{b}\psi + \int_0^\infty g(s)\eta \,\mathrm{d}s\right)_{xx} \psi_t \,\mathrm{d}x + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi_t \,\mathrm{d}x &= 0, \end{aligned}$$

integrando por partes, e usando as condições de fronteira dada em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t \,\mathrm{d}x + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\varphi_{xt} \,\mathrm{d}x &= 0 \\ \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}\psi_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L \left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x \,\mathrm{d}s\right) \psi_{xt} \,\mathrm{d}x + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi_t \,\mathrm{d}x &= 0. \end{aligned}$$

Somando as equações acima e usando que $\psi_{xt} = \eta_{xt} + \eta_{xs}$, obtida pela equação 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} &\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t \,\mathrm{d}x + \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}\psi_t \,\mathrm{d}x + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)(\varphi_x+\psi)_t \,\mathrm{d}x \\ &+\widetilde{b}\int_0^L \psi_x\psi_{xt}\,\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = -\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\eta_{xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Segue, da Proposição 1.59, que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\rho_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L |\varphi_t|^2\,\mathrm{d}x + \rho_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x + k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L |\psi_x|^2\,\mathrm{d}x \right.\\ &\left. +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

e pela Proposição 2.3, temos

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\left(\rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L |\psi_x|^2\,\mathrm{d}x \right.\right.\\ &\left.\left. +\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)\right\} = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x. \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Defina a energia associada ao sistema como

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \widetilde{b}\psi_x^2 + k|\varphi_x+\psi|^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x. \qquad (3.9)$$

Segue de (3.8) e das hipóteses sobre o núcleo g, (4.6), que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leq -\frac{k_1}{2}\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x, \tag{3.10}$$

ou seja, a energia do sistema é decrescente.

Mostraremos neste capítulo que a condição

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b} \tag{3.11}$$

é necessária e suficiente para que a energia $E(t)$ decaia para zero exponencialmente quando o tempo vai para o infinito. Para mostrar isto, usaremos o Teorema 1.63 que afirma que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições se verificam.

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \text{ (conjunto resolvente)} \tag{3.12}$$

e

$$\exists\, C > 0\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \;:\; \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq C. \tag{3.13}$$

Teorema 3.1. *O eixo imaginário está contido no resolvente de $\mathcal{A}$, isto é, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que o eixo imaginário não esteja contido no resolvente. Segue do Corolário 1.21 que existem $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}$, respectivamente, tais que

$$\lambda_n \to \omega; \qquad \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \;\text{ e }\; F_n \to 0,$$

sendo

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

De (3.14) segue que

$$\begin{aligned} \langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \\ i\lambda_n \|U_n\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real na igualdade acima e lembrando a hipótese (4.6) sobre o núcleo g, temos

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re}\langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\\
-\frac{1}{2}\int_0^L \int_0^\infty g'(s)|\eta_{nx}|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Re}\langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\\
\frac{k_1}{2}\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_{nx}|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x &\leq \left|\operatorname{Re}\langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}}\right|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Como $F_n \to 0$ em $\mathcal{H}$ e $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, resulta que $\langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_{nx}|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = 0.
$$

Em outras palavras,

$$
\eta_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2_g(\mathbb{R}^+_*; H^1_0(0,L)). \tag{3.15}
$$

De (3.14) resulta que:

$$
\begin{aligned}
i\lambda_n u_n^1 - u_n^2 &= f_n^1 && (3.16)\\
i\lambda_n \rho_1 u_n^1 - k(u_{nx}^1 + u_n^3)_x &= \rho_1 f_n^2 && (3.17)\\
i\lambda_n u_n^3 - u_n^4 &= f_n^3 && (3.18)\\
i\lambda_n \rho_2 u_n^4 - \left(\widetilde{b}u_n^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_n \,\mathrm{d}s\right)_{xx} + k(u_{nx}^1 + u_n^3) &= \rho_2 f_n^4 && (3.19)
\end{aligned}
$$

com as igualdades (3.16) e (3.18) em $H^1_0(0,L)$ e (3.17) e (3.19) em $L^2(0,L)$. Além disso,

$$
i\lambda_n \eta_n + \eta_{ns} - u_n^4 = f_n^5 \text{ em } L^2_g(\mathbb{R}^+_*; H^1_0(0,L)) \hookrightarrow L^2_g(\mathbb{R}^+_*; L^2(0,L)). \tag{3.20}
$$

Como $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $(u_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências limitadas em $H^1_0(0,L)$. Desde que $H^1_0(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ com imersão compacta, existem subsequências $(u_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes, denotadas da mesma maneira para simplificar a notação, tais que

$$
u_n^1 \to u^1 \quad \text{e} \quad u_n^3 \to u^3 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.21}
$$

De (3.16) e (3.18) resulta que

$$
u_n^2 \to u^2 \quad \text{e} \quad u_n^4 \to u^4 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.22}
$$

De (3.20)

$$
\begin{aligned}
i\lambda_n \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_{nx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x + \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_{nsx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
-b_0 \|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 = \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_{nx}^5 u_{nx}^4 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
b_0 \|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 &= \Bigg| i\lambda_n \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_{nx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x + \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_{nsx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_{nx}^5 u_{nx}^4 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \Bigg| \\
&\leq |\lambda_n| \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^L |\eta_{nx} u_{nx}^4| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s + \left| \int_0^\infty g(s) \int_0^L \eta_{nsx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right| \\
&\quad + \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^L |f_{nx}^5 u_{nx}^4| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, em $L^2(0, L)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
b_0 \|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 &\leq |\lambda_n| \int_0^\infty g(s) \left(\|\eta_{nx}\|_{L^2} \|u_{nx}^4\|_{L^2} \right) \mathrm{d}s \qquad (3.24) \\
&\quad + \left| \int_0^\infty g(s) \int_0^L \eta_{nsx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right| + \int_0^\infty g(s) \left(\|f_{nx}^5\|_{L^2} \|u_{nx}^4\|_{L^2} \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Para o primeiro termo do lado direito da desigualdade, temos em $L^2(0, \infty)$,

$$
\begin{aligned}
|\lambda_n| \int_0^\infty g(s) \left(\|\eta_{nx}\|_{L^2} \|u_{nx}^4\|_{L^2} \right) \mathrm{d}s &= |\lambda_n| \left(\|u_{nx}^4\|_{L^2} \int_0^\infty g(s) \|\eta_{nx}\|_{L^2} \, \mathrm{d}s \right) \\
&\leq |\lambda_n| \|u_{nx}^4\|_{L^2} \, (b_0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g(s) \|\eta_{nx}\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Corolário 1.13 da desigualdade de Young, escolhendo $\epsilon = \dfrac{b_0}{6}$, existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$
|\lambda_n| \int_0^\infty g(s) \left(\|\eta_{nx}\|_{L^2} \|u_{nx}^4\|_{L^2} \right) \mathrm{d}s \leq \frac{b_0}{6} \|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 + C_1 \|\eta_{nx}\|_{L_g^2}^2 |\lambda_n|^2. \qquad (3.25)
$$

Analogamente, obtemos para o terceiro termo após o sinal da desigualdade em (3.24),

$$
\int_0^\infty g(s) \left(\|f_{nx}^5\|_{L^2} \|u_{nx}^4\|_{L^2} \right) \mathrm{d}s \leq \frac{b_0}{6} \|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 + C_2 \|f_{nx}^5\|_{L_g^2}^2, \qquad (3.26)
$$

para alguma constante positiva C_2. Também, pela proposição 2.3 temos

$$
\int_0^\infty g(s) \int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \eta_{nx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s = - \int_0^\infty g'(s) \int_0^L \eta_{nx} u_{nx}^4 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s.
$$

Aplicando módulo e usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, as hipóteses sobre o núcleo g (4.6) e usando a proposição 2.3 temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty g(s)\int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\eta_{nx}u^4_{nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_0^\infty g'(s)\int_0^L \eta_{nx}u^4_{nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^\infty |g'(s)|\int_0^L |\eta_{nx}||u^4_{nx}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^\infty |g'(s)|\|\eta_{nx}\|_{L^2}\|u^4_{nx}\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|u^4_{nx}\|_{L^2}\int_0^\infty |g'(s)|\|\eta_{nx}\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|u^4_{nx}\|_{L^2}\,k_0\int_0^\infty g(s)\|\eta_{nx}\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\
&\leq k_0\,\|u^4_{nx}\|_{L^2}\left(\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\|\eta_n\|_{L^2_g}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, escolhendo $\epsilon = \dfrac{b_0}{6}$ existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\left|\int_0^\infty g(s)\int_0^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\eta_{kx}u^4_{kx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{b_0}{6}\|u^4_{kx}\|^2_{L^2} + C_3\,\|\eta_k\|^2_{L^2_g} \tag{3.27}$$

Assim, de (3.24) - (3.27), temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u^4_{nx}\|^2_{L^2} \leq C\|\eta_n\|^2_{L^2_g}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Por (3.15) obtemos

$$u^4_n \to 0 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,L). \tag{3.29}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (3.18) obtemos

$$u^3_n \to 0 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,L). \tag{3.30}$$

De (3.29) e (3.30) temos que $u^4 = u^3 = 0$ em $H^1_0(0,L)$.
Multiplicando (3.19) por $\varphi \in H^1_0(0,L)$ e integrando em $(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\rho_2\int_0^L u^4_n\varphi\,\mathrm{d}x - \int_0^L \left(\widetilde{b}u^3_n + \int_0^\infty g(s)\eta_n\,\mathrm{d}s\right)_{xx}\varphi\,\mathrm{d}x \\
+k\int_0^L u^1_{nx}\varphi\,\mathrm{d}x + k\int_0^L u^3_n\varphi\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L f^4_n\varphi\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} i\lambda_n\rho_2\int_0^L u_n^4\varphi\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L u_{nx}^3\varphi_x\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty g(s)\int_0^L \eta_{nx}\varphi_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ +k\int_0^L u_{nx}^1\varphi\,\mathrm{d}x + k\int_0^L u_n^3\varphi\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L f_n^4\varphi\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lembrando que $\lambda_n \to \omega$, tomando limite e usando o fato de $\varphi \in H_0^1(0,L)$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n^1, \varphi_x\rangle_{L^2} = 0, \qquad \forall\varphi \in H_0^1(0,L).$$

Segue da continuidade do produto interno que

$$\langle u^1, \varphi_x\rangle_{L^2} = 0, \qquad \forall\varphi \in C_0^1(0,L).$$

Pelo Teorema 1.30 segue que u^1 é contante quase sempre em $(0,L)$. Como $u^1 \in H_0^1(0,L)$ segue que $u^1(0) = u^1(L) = 0$, logo $u^1 = 0$.

De (3.16) segue que

$$u_n^2 \to 0 \qquad \text{em} \quad H_0^1(0,L) \tag{3.31}$$

Logo, $u^2 = 0$.

Concluímos que

$$U_n = \left(u_n^1, u_n^2, u_n^3, u_n^4, \eta_n\right) \to (0,0,0,0,0) \quad \text{em} \quad \mathcal{H}; \tag{3.32}$$

Mas $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo.

Portanto, $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$. □

Para mostrar a condição (3.13) observe as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq C \;&\Leftrightarrow\; \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow\; \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

com $U = (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$.

Portanto, nosso objetivo será mostrar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}, \tag{3.33}$$

onde $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, para uma constante positiva C.

Observe que a equação resolvente $(i\lambda - \mathcal{A})U = F$ é equivalente à

$$\begin{aligned} i\lambda u^1 - u^2 &= f^1 & (3.34)\\ i\lambda\rho_1 u^2 - k(u^1_x + u^3)_x &= \rho_1 f^2 & (3.35)\\ i\lambda u^3 - u^4 &= f^3 & (3.36)\\ i\lambda\rho_2 u^4 - \widetilde{b}u^3_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}(x,s)\,\mathrm{d}s + k(u^1_x + u^3) &= \rho_2 f^4 & (3.37)\\ i\lambda\eta + \eta_s - u^4 &= f^5 & (3.38)\end{aligned}$$

Para mostrar (3.33) usaremos os seguintes lemas:

Lema 3.2. *Suponha que as hipóteses* (4.6) *e* (4.7) *sobre o núcleo g se verificam. Então para cada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Se $U \in D(\mathcal{A})$ é tal que $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, então

$$\begin{aligned} \langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}\\ i\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Tomando a parte real da igualdade acima e usando a Proposição 2.4, encontramos que

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s = \mathrm{Re}\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Usando as hipóteses sobre o núcleo g, (4.6), e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, Teorema 1.14, obtemos

$$\frac{k_1}{2}\int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}s \quad\leq\quad \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

concluindo assim a demonstração. □

Lema 3.3. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.2, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}\left(\|u^3_x\|_{L^2} + \|u^1_x + u^3\|_{L^2}\right).$$

Demonstração. Multiplicando (3.37) por $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}\,\mathrm{d}s \in H_0^1(0,L)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
i\lambda\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}u^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x - \int_0^L\left(\widetilde{b}u^3+\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx}\left(\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
+k\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}(u_x^1+u^3)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes em $(0,L)$ e lembrando que $\eta(0,s)=\eta(L,s)=0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)(i\lambda\overline{\eta})u^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \widetilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
&+\int_0^L\left|\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x + k\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}(u_x^1+u^3)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
&= \rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Substituindo η, dado por (3.38), em I_1 encontramos

$$
\begin{aligned}
\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)(-\overline{u^4}+\overline{\eta_s}-\overline{f^5})u^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
+\int_0^L\left|\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x + k\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}(u_x^1+u^3)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
= \rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Usando a proposição 2.3 e reorganizando os termos

$$
\begin{aligned}
\rho_2 b_0\int_0^L|u^4|^2\,\mathrm{d}x &= -\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\overline{\eta}u^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^L\left|\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x + k\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}(u_x^1+u^3)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{f_5}u^4\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Usando (2.11) e a Proposição 2.3 obtemos que existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\rho_2 b_0\int_0^L|u^4|^2\,\mathrm{d}x\\
&\le k_0\,\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta||u^4|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\,C_1\|u_x^3\|_{L^2}\left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+C_1\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^L\left|\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\\
&+\rho_2\,C_1\|f^4\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2} + \rho_2\|u^4\|_{L^2}\|f^5\|_{L_g^2}.
\end{aligned}
$$

Segue da Proposição 2.3 que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\rho_2 b_0 \int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x \;\leq\; & \frac{\rho_2 b_0}{2}\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x + C_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\overline{\eta_x}|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ & + \widetilde{b}\,C_1\|u_x^3\|_{L^2}\left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} \\ & + C_1\,\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\left(\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} \\ & + b_0\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ & + \rho_2\,C_1\,\|f^4\|_{L^2}\,\|\eta\|_{L^2_g} + \rho_2\,\|u^4\|_{L^2}\,\|f^5\|_{L^2_g}.\end{aligned}$$

Resulta pelo lema 3.2, proposição 2.3 e pela equivalência das normas, dada na observação 2.1, que

$$\rho_2 b_0\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\left(\|u_x^3\|_{L^2} + \|u_x^1+u^3\|_{L^2}\right),$$

para uma constante positiva C. □

Observação 3.4. *Para estimar u^3 introduzimos o seguinte multiplicador*

$$-\,w_{xx} = u_x^3, \qquad w(0)=w(L)=0. \tag{3.39}$$

Note que w pode ser expresso como

$$w(x) = -\int_0^x u^3(y)\,\mathrm{d}y + \frac{x}{L}\int_0^L u^3(y)\mathrm{d}y \equiv G(u^3)(x).$$

É fácil verificar que $G : L^2(0,L) \to H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$ é uma aplicação linear.

Note também, que para quaisquer $u,\ v \in L^2(0,L)$ temos a seguinte desigualdade

$$\mathrm{Re}\left\{\int_0^L u\,G(v)\,\mathrm{d}x\right\} \leq 2\,L\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2}.$$

De fato, dados $u,\ v\in L^2(0,L)$, $0\leq x\leq L$, temos

$$\begin{aligned}|G(v)(x)| &= \left|-\int_0^x v(y)\,\mathrm{d}y + \frac{x}{L}\int_0^L v(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \int_0^x |v(y)|\,\mathrm{d}y + \left|\frac{x}{L}\right|\int_0^L |v(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq 2\int_0^L |v(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, obtemos

$$|G(v)(x)| \;\leq\; 2\sqrt{L}\|v\|_{L^2}, \quad x\in(0,L) \quad q.t.p,$$

e segue da desiguadade acima e da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, que

$$\mathrm{Re}\left\{\int_0^L u\, G(v)\,\mathrm{d}x\right\} \leq \int_0^L |u|\,|G(v)|\,\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{L}\|v\|_{L^2}\int_0^L |u|\,dx \leq 2L\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Da observação acima, obtemos o seguinte lema.

Lema 3.5. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.2, para cada $\epsilon_1 > 0$ existe $C_{\epsilon_1} > 0$ tal que*

$$\widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x \leq C_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. Multiplicando (3.37) por $\overline{u^3}$ resulta que

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_2\int_0^L u^4\overline{u^3}\,\mathrm{d}x - \int_0^L\left(\widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx}\overline{u^3}\,\mathrm{d}x \\ +k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^3}\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

e integrando por partes, lembrando que $u^3 \in H_0^1(0,L)$, temos

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^L u^4(i\lambda\rho_2\overline{u^3})\,\mathrm{d}x}_{I_2} + \widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ +k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^3}\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substituindo u^3, dado por (3.36), em I_2 temos que

$$\begin{aligned} \rho_2\int_0^L u^4(-\overline{u^4} - \overline{f^3})\,\mathrm{d}x + \widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ +k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^3}\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos temos

$$\begin{aligned} \widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x + k\int_0^L u_x^1\overline{u^3}\,\mathrm{d}x + k\int_0^L |u^3|^2\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L |u^4|^2\mathrm{d}x \\ -\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Por outro lado, multiplicando (3.35) por $\overline{w}$, dado em (3.39) ,obtemos

$$i\lambda\rho_1\int_0^L u^2\overline{w}\,\mathrm{d}x - k\int_0^L (u_x^1 + u^3)_x\overline{w}\,\mathrm{d}x = \rho_1\int_0^L f^2\overline{w}\,\mathrm{d}x$$

e integrando por partes, como $w(L) = w(0) = 0$, resulta que

$$i\lambda\rho_1 \int_0^L u^2\overline{w}\,\mathrm{d}x + k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{w_x}\,\mathrm{d}x = \rho_1\int_0^L f^2\overline{w}\,\mathrm{d}x. \tag{3.41}$$

Note que:

(i) de (3.39) temos que $u^3 = -w_x + w_x(0)$. Multiplicando por $k\overline{w_x}$ e integrando em $(0, L)$, como $w(L) = w(0) = 0$, temos,

$$\begin{aligned} k\int_0^L u^3\overline{w_x}\,\mathrm{d}x &= -k\int_0^L w_x\overline{w_x}\,\mathrm{d}x + kw_x(0)\int_0^L \overline{w_x}\,\mathrm{d}x \\ &= -k\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(ii) aplicando G em (3.36) temos,

$$i\lambda\overline{w} = i\lambda\overline{G(u^3)} = -\overline{G(u^4)} - \overline{G(f^3)}.$$

(iii) Como $u^1 \in H_0^1(0, L)$

$$k\int_0^L u_x^1\overline{w_x}\,\mathrm{d}x = -k\int_0^L u^1\overline{w_{xx}}\,\mathrm{d}x = k\int_0^L u^1\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x = -k\int_0^L u_x^1\overline{u^3}\,\mathrm{d}x.$$

Usando (i), (ii) e (iii) em (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} -k\int_0^L u_x^1\overline{u^3}\,\mathrm{d}x - k\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x &= \rho_1\int_0^L u^2\left[\overline{G(u^4)} + \overline{G(f^3)}\right]\mathrm{d}x \\ &\quad + \rho_1\int_0^L f^2\overline{w}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Somando (3.40) e (3.42), temos

$$\begin{aligned} &\widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x - k\left(\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x - \int_0^L |u^3|^2\,\mathrm{d}x\right) = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}\mathrm{d}x \\ &+ \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L u^2\overline{G(f^3)}\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L f^2\overline{w}\,\mathrm{d}x \\ &+ \rho_2\int_0^L |u^4|^2\mathrm{d}x - \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L u^2\overline{G(u^4)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Note que, como $-w_{xx} = u_x^3$, então

$$-\int_0^L w_{xx}\overline{w}\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_x^3\overline{w}\,\mathrm{d}x;$$

Por integração por partes e pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, como

$w(L) = w(0) = 0$, resulta que

$$\|w_x\|_{L^2}^2 = \int_0^L |w_x|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^L u^3 \overline{w_x} \,\mathrm{d}x \leq \|u^3\|_{L^2} \|w_x\|_{L^2}.$$

Daí

$$\int_0^L |w_x|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^L |u^3|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.44}$$

Segue, desta desigualdade e da parte real de (3.43), que

$$\begin{aligned}
\widetilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 \,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad \rho_2 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L f^4 \overline{u^3} \mathrm{d}x\right\} + \rho_2 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 \overline{f^3} \,\mathrm{d}x\right\} \\
&+ \rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2 \overline{G(f^3)} \,\mathrm{d}x\right\} + \rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L f^2 \overline{w} \,\mathrm{d}x\right\} \\
&+ \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 \mathrm{d}x - \operatorname{Re}\left\{\int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{u_x^3} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x\right\} \\
&+ \rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} \,\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}$$

De acordo com a observação 3.4 e a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 \,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad \rho_2 \|f^4\|_{L^2} \|u^3\|_{L^2} + \rho_2 \|u^4\|_{L^2} \|f^3\|_{L^2} + 2\rho_1 L \|u^2\|_{L^2} \|f^3\|_{L^2} \\
&+ \rho_1 \|f^2\|_{L^2} \|w\|_{L^2} + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 \mathrm{d}x \\
&- \operatorname{Re}\left\{\int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{u_x^3} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x\right\} + \rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} \,\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, Teorema 1.40, usando (3.44) em w, e usando a Proposição 2.3, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 \,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad \rho_2 \|f^4\|_{L^2} \|u^3\|_{L^2} + \rho_2 \|u^4\|_{L^2} \|f^3\|_{L^2} + 2\rho_1 L \|u^2\|_{L^2} \|f^3\|_{L^2} \\
&+ \rho_1 C_1 \|f^2\|_{L^2} \|u^3\|_{L^2} + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 \mathrm{d}x \\
&+ C_1 \|u_x^3\|_{L^2} \|\eta_x\|_{L_g^2} + \rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} \,\mathrm{d}x\right\},
\end{aligned}$$

para uma contante positiva C_1.

Pela equivalência das normas, fornecida pela Observação 2.1, temos que existe um $C_2 > 0$ tal que:

$$\widetilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 \mathrm{d}x \leq C_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 \mathrm{d}x + \rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} \mathrm{d}x\right\}. \tag{3.45}$$

Pela Observação 3.4 temos

$$\rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2\overline{G(u^4)}\,\mathrm{d}x\right\} \leq \rho_1 \int_0^L |u^2||G(u^4)|\,\mathrm{d}x \leq 2\rho_1\sqrt{L}\|u^4\|_{L^2}\int_0^L |u^2|\,\mathrm{d}x,$$

e, a desigualdade de Hölder ,Teorema 1.29, implica que

$$\rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2\overline{G(u^4)}\,\mathrm{d}x\right\} \leq 2\rho_1 L\|u^4\|_{L^2}\|u^2\|_{L^2}.$$

Dado $\epsilon_1 > 0$, pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, existe uma constante $C'_{\epsilon_1} > 0$ tal que

$$\rho_1 \operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^2\overline{G(u^4)}\,\mathrm{d}x\right\} \leq \frac{\rho_1\epsilon_1}{2}\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x + C'_{\epsilon_1}\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x$$

Desta desigualdade e de (3.45), obtemos

$$\widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x \leq C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + (\rho_2 + C'_{\epsilon_1})\int_0^L |u^4|^2\mathrm{d}x + \frac{\rho_1\epsilon_1}{2}\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x.$$

Pelo Lema 3.3, existe uma constante positiva C''_{ϵ_1}, tal que

$$\begin{aligned}\widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x &\leq C''_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C''_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \\ &\quad + C''_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^3\|_{L^2} + \frac{\rho_1\epsilon_1}{2}\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Segue novamente da desigualdade de Young, Corolário 1.13, que

$$\begin{aligned}\widetilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x &\leq C_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \\ &\quad + \frac{\widetilde{b}}{2}\int_0^L |u_x^3|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\rho_1\epsilon_1}{2}\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

para alguma constante positiva C_{ϵ_1}.

□

Nosso seguinte passo é estimar o termo $\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2$. Aqui usaremos a condição (2.14).

Lema 3.6. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.2 e com a condição* (2.14), *para cada* $\epsilon_2 > 0$ *existe* $C_{\epsilon_1,\epsilon_2} > 0$ *de modo que*

$$\begin{aligned}k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2\,\mathrm{d}x &\leq C_{\epsilon_1,\epsilon_2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\|u^2\|_{L^2} \\ &\quad + 2\operatorname{Re}\left(\left[\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L},\end{aligned}$$

onde ϵ_1 é dado pelo Lema 3.5.

Demonstração. Multiplicando (3.37) por $\overline{u_x^1 + u^3}$ temos

$$i\lambda\rho_2 \int_0^L u^4(\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^L \widetilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx} (\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x$$
$$k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2\,\mathrm{d}x = \rho_2 \int_0^L f^4(\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x.$$

Integrando por partes e observando que $u^3 \in H_0^L(0,L)$, obtemos

$$i\lambda\rho_2 \int_0^L u^4(\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x - \left(\left[\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L} + k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2\,\mathrm{d}x$$
$$+\underbrace{\int_0^L \left[\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x u_x^1\,\mathrm{d}s\right](\overline{u_x^1 + u^3})_x\,\mathrm{d}x}_{I_3} = \rho_2\int_0^L f^4(\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x.$$

Substituindo $(u_x^1 + u^3)_x$ dado por (3.35) em I_3, e lembrando que $\widetilde{b} = b - b_0$, resulta

$$\underbrace{\rho_2\int_0^L u^4(i\lambda\overline{u_x^1})\,\mathrm{d}x}_{I_4} + \underbrace{\rho_2\int_0^L u^4(i\lambda\overline{u^3})\,\mathrm{d}x}_{I_5} - \left(\left[\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L}$$
$$-i\lambda\frac{(b-b_0)\rho_1}{k}\int_0^L u_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)(-i\lambda\eta_x)\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x}_{I_6}$$
$$-\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x - \frac{\widetilde{b}\rho_1}{k}\int_0^L u_x^3\overline{f^2}\,\mathrm{d}x$$
$$+k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2\,\mathrm{d}x = \rho_2\int_0^L f^4(\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x. \tag{3.46}$$

Substituindo u^1, dado por (3.34), em I_4 resulta

$$I_4 = \rho_2\int_0^L u^4(-\overline{u_x^2} - \overline{f_x^1})\,\mathrm{d}x = -\rho_2\int_0^L u^4\overline{u_x^2}\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x;$$

substituindo também u^4, dado por (3.36), temos

$$\begin{aligned} I_4 &= -\rho_2\int_0^L (i\lambda u^3 - f^3)\overline{u_x^2}\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x \\ &= -i\lambda\rho_2\int_0^L u^3\overline{u_x^2}\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L f^3\overline{u_x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando o fato de $u^2 \in H_0^1(0,L)$, obtemos

$$I_4 = i\lambda\rho_2\int_0^L u_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x - \rho_2\int_0^L f_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.47}$$

Usando u^3, dado por (3.36), em I_5 obtemos

$$I_5 = \rho_2 \int_0^L u^4(-\overline{u^4} - \overline{f^3})\,\mathrm{d}x = -\rho_2 \int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x - \rho_2 \int_0^L u^4\overline{f^3}\,\mathrm{d}x. \tag{3.48}$$

Finalmente, substituindo η, dado por (3.38), em I_6 obtemos

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g(s)(-u_x^4 + \eta_{xs} - f_x^5)\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_{xs}\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x - \frac{\rho_1 b_0}{k}\int_0^L u_x^4\overline{u^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

e substituindo u^4, dado por (3.36), e usando a Proposição 2.3 temos:

$$\begin{aligned} I_6 = & -\frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x - i\lambda\frac{\rho_1 b_0}{k}\int_0^L u_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x \\ & -\frac{\rho_1 b_0}{k}\int_0^L f_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Retornando à equação (3.46) , segue de (3.47), (3.48) e de (3.49) que

$$\begin{aligned} k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2\,\mathrm{d}x = \; & i\lambda b\underbrace{\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)}_{=0}\int_0^L u_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x \\ & + \mathrm{Re}\left(\left[\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L} \\ & + \rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ & + \frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\int_0^L u_x^3\overline{f^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ & + \rho_2\int_0^L f^4(\overline{u_x^1 + u^3})\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}\,\mathrm{d}x \\ & + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x + \left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k}\right)\int_0^L f_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x \\ & + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L \int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Considere a parte real da igualdade acima encontramos. Temos

$$\begin{aligned}
k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Re}\left(\left[\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L}\\
&+\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\rho_1}{k}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&+\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u_x^3\overline{f^2}\,\mathrm{d}x\right\}+\frac{\rho_1}{k}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&+\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L f^4(\overline{u_x^1+u^3})\,\mathrm{d}x\right\}+\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4\overline{f^3}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&+\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x\right\}+\left(\rho_2-\frac{\rho_1 b_0}{k}\right)\operatorname{Re}\left\{\int_0^L f_x^3\overline{u^2}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&+\frac{\rho_1}{k}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}$$

O Teorema de Hölder, Teorema 1.29, juntamente com a Proposição 2.3 e a equivalência das normas, Observação 2.1, garante a existência de uma constante $C_1>0$ de modo que

$$\begin{aligned}
k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2\,\mathrm{d}x &\le \operatorname{Re}\left(\left[\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L}\\
&+\operatorname{Re}\left\{\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&+\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x+C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Vamos, agora, majorar o termo $\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2$.

Pelo lema 3.3, temos, a existência de uma constante $C_2>0$ tal que

$$\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x\le C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|f\|_{\mathcal{H}}+C_2\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|f\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|u_x^3\|_{L^2}+C_2\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|f\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}.$$

Pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, existe uma contante $C_3>0$ de modo que

$$\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x\le C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|f\|_{\mathcal{H}}+\widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2+\frac{k}{4}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2.$$

Pelo lema 3.5, dado $\dfrac{\epsilon_1}{2\rho_1}$, exite uma constante positiva C'_{ϵ_1} de maneira que

$$\begin{aligned}
\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x &\le C'_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|f\|_{\mathcal{H}}+\frac{k}{4}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2\\
&+C'_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|f\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}+\left(\frac{\epsilon_1}{2\rho_1}\right)\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Segue, novamente da Desiagualdade de Young, Corolário 1.13, que

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L |u^4|^2\,\mathrm{d}x &\leq C''_{\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|f\|_{\mathcal{H}}+\frac{k}{4}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2\\ &+\frac{k}{4}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2+\frac{\epsilon_1}{2}\|u^2\|_{L^2}^2, \end{aligned}\tag{3.51}$$

para alguma contante positiva C''_{ϵ_1}.
Observe, também, que usando a hipótese sobre o núcleo, (4.6), e a Proposição 2.3, dado $\frac{\epsilon_2}{2}>0$ existe uma constante $C'_{\epsilon_2}>0$ tal que

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\leq\frac{\epsilon_2}{2}\|u^2\|_{L^2}^2+C'_{\epsilon_2}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

O Lema 3.2 nos garante que existe $C''_{\epsilon_2}>0$ tal que

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\leq\frac{\epsilon_2}{2}\|u^2\|_{L^2}^2+C''_{\epsilon_2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.\tag{3.52}$$

As estimativas (3.51) e (3.52) juntamente com (3.50) implicam

$$\begin{aligned}k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2\,\mathrm{d}x &\leq \operatorname{Re}\left(\left[\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L}+\frac{k}{2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2\\ &+\left(\frac{\epsilon_1}{2}+\frac{\epsilon_2}{2}\right)\|u^2\|_{L^2}^2+(C_1+C''_{\epsilon_1}+C''_{\epsilon_2})\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração. □

Lema 3.7. *Considere as mesmas condições do Lema 3.6 e seja $q\in C^1([0,L])$ tal que $q(0)=-q(L)=1$. Então existem C_{q,ϵ_1}, $C_q>0$ tais que*

$$\begin{aligned}&\textit{(i)}\quad -\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L}\leq C_{q,\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\quad +C_{q,\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac12}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}+\epsilon_1C_q\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2+C_q\|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\end{aligned}$$

e

$$\textit{(ii)}\quad -\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L}\leq C_q\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+C_q\left(\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2+\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2\right).$$

Demonstração. Para mobter (i), multiplique (3.37) por

$$q(x)\overline{\left(\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)}$$

e integre sobre $[0,L]$,

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\rho_2\int_0^L u^4 q(x)\left(\widetilde{b}(i\lambda\overline{u_x^3})+\int_0^\infty g(s)(i\lambda\overline{\eta_x})\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x}_{I_7}\\
&\underbrace{-\int_0^L\left(\widetilde{b}u^3+\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx} q(x)\overline{\left(\widetilde{b}u^3+\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_x}\,\mathrm{d}x}_{I_8}\\
&+k\int_0^L q(x)(u_x^1+u^3)\left(\widetilde{b}\overline{u_x^3}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
&=\rho_2\int_0^L f^4 q(x)\left(\widetilde{b}\overline{u_x^3}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Usando u^3 e η dados por (3.36) e (3.38), respectivamente, na parte real de I_7 obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} I_7 &= \rho_2\widetilde{b}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x) i\lambda\overline{u_x^3}\,\mathrm{d}x\right\}+\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)\int_0^\infty g(s)(i\lambda\overline{\eta_x})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \rho_2\widetilde{b}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)(-\overline{u_x^4}-\overline{f_x^3})\,\mathrm{d}x\right\}\\
&\quad+\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)\int_0^\infty g(s)(\overline{\eta_{xs}}-\overline{u_x^4}-\overline{f_x^5})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\rho_2\widetilde{b}\int_0^L \frac{q(x)}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(|u^4|^2\right)\mathrm{d}x-\rho_2\widetilde{b}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L q(x)u^4\overline{f_x^3}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&\quad+\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_{xs}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&\quad-\rho_2 b_0\int_0^L \frac{q(x)}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(|u^4|^2\right)\mathrm{d}x-\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)\int_0^\infty g(s)\overline{f_x^5}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes, lembrando que $u^4\in H_0^1(0,L)$, $\widetilde{b}=b-b_0$ e usando a Proposição 2.3 temos o seguinte

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} I_7 &= \frac{\rho_2 b}{2}\int_0^L q'(x)|u^4|^2\,\mathrm{d}x-\rho_2\widetilde{b}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L q(x)u^4\overline{f_x^3}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&\quad-\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)\int_0^\infty g'(s)\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&\quad-\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)q(x)u^4\overline{f_x^5}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Integrando $\operatorname{Re} I_8$ por partes temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} I_8 &= -\int_0^L \frac{q(x)}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_x \mathrm{d}x\\
&= -\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L}\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}x. \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.54) e (3.55) na parte real de (3.53) temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_2 b}{2}\int_0^L q'(x)|u^4|^2\,\mathrm{d}x-\rho_2\widetilde{b}\operatorname{Re}\left\{\int_0^L q(x)u^4\overline{f_x^3}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&-\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L u^4 q(x)\int_0^\infty g'(s)\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}-\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)q(x)u^4\overline{f_x^5}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right\}\\
&-\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L}+\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\\
&+k\operatorname{Re}\left\{\int_0^L q(x)(u_x^1+u^3)\left(\widetilde{\overline{bu_x^3}}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\right\}\\
&=\rho_2\operatorname{Re}\left\{\int_0^L f^4 q(x)\left(\widetilde{\overline{bu_x^3}}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
$$

Como $q\in C^1([0,L])$ e $[0,L]$ é um intervalo compacto, existe a constante $C_1:=C_1(q)=\max\limits_{x\in[0,L]}\{|q(x)|,|q'(x)|,|k_1q(x)|\}>0$. Por (4.6) obtemos na igualdade anterior, que

$$
\begin{aligned}
-&\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L}\\
&\le\frac{\rho_2 b}{2}C_1\int_0^L|u^4|^2\,\mathrm{d}x+\rho_2\widetilde{b}C_1\int_0^L|u^4\overline{f_x^3}|\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\underbrace{\rho_2C_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|u^4\overline{\eta_x}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x}_{I_9}\\
&\quad+\rho_2C_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|u^4\overline{f_x^5}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x+\frac{C_1}{2}\int_0^L\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\underbrace{kC_1\int_0^L\left|u_x^1+u^3\right|\left|\widetilde{\overline{bu_x^3}}\right|\mathrm{d}x}_{I_{10}}+\underbrace{kC_1\widetilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\left|u_x^1+u^3\right||\overline{\eta_x}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x}_{I_{11}}\\
&\quad+\rho_2C_1\widetilde{b}\int_0^L|f^4\overline{u_x^3}|\,\mathrm{d}x+\rho_2C_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|f^4\overline{\eta_x}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Segue, do Lema 2.3, que:

$$I_9 \leq \int_0^L |u^4|^2 \, \mathrm{d}x + C_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \tag{3.56}$$

$$I_{10} \leq C_2 \left(|u_x^1 + u^3|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(|u_x^3|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.57}$$

$$I_{11} \leq C_2 \left(|u_x^1 + u^3|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.58}$$

para alguma $C_2 := C_2(q) > 0$.
Substituindo as desigualdades (3.56)-(3.58) na desigualdade (3.56), pelos Lema 3.2 e Lema 2.3, segue existe uma constante $C_3 := C_3(q) > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} -\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x \, \mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L} &\leq C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \underbrace{C_3\int_0^L |u^4|^2 \, \mathrm{d}x}_{I_{12}} \\ + \underbrace{C_3\int_0^L \left|\widetilde{b}\, u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x \, \mathrm{d}s\right| \, \mathrm{d}x}_{I_{13}} &+ C_3\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \\ &+ C_3\|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \end{aligned} \tag{3.59}$$

Pelo Lema 3.3 temos que existe uma constante $C_4 := C_4(q) > 0$, tal que

$$I_{12} \leq C_4\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_4\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^3\|_{L^2} + C_4\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2},$$

usando a desigualdade de Young, Corolário 1.13, existe uma constante $C_5 := C_5(q) > 0$ de modo que

$$I_{12} \leq C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + C_5\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}$$

De acordo com a Proposição 1.11, o Lema 2.3 e o Lema 3.2, conseguimos

$$\begin{aligned} I_{13} &\leq 4C_3\widetilde{b}^2 \int_0^L \left|u_x^3\right|^2 \, \mathrm{d}x + 4C_3\int_0^L \left|\int_0^\infty g(s)\eta_x \, \mathrm{d}s\right| \, \mathrm{d}x \\ &\leq 4C_3\widetilde{b}^2 \int_0^L \left|u_x^3\right|^2 \, \mathrm{d}x + C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Segue de I_{12} e I_{13} que (3.59) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x \, \mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L} \\ &\leq (C_3 + 2C_5)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \left(4C_3\widetilde{b} + 1\right)\widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \\ &+(C_3 + C_5)\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + C_3\|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.5, dado ϵ_1 existe C_{q,ϵ_1} tal que

$$-\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L}\leq C_{q,\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$$

$$+C_{q,\epsilon_1}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}+\epsilon_1\left(4C_3\widetilde{b}+1\right)\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2+C_3\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\|u_x^3\|_{L^2},$$

escrevendo $C_q=4C_3\widetilde{b}+1+C_3$, concluimos a demonstração deste item.

Para mostrar (ii) multiplicamos (3.35) por $q(x)\overline{u_x^1}$

$$\underbrace{\rho_1\int_0^L q(x)u^2(i\lambda\overline{u_x^1})\,\mathrm{d}x}_{I_{14}}\underbrace{-k\int_0^L q(x)u_{xx}^1\overline{u_x^1}\,\mathrm{d}x}_{I_{15}}$$
$$-k\int_0^L q(x)u_x^3\overline{u_x^1}\,\mathrm{d}x=\rho_1\int_0^L q(x)f^2\overline{u_x^1}\,\mathrm{d}x. \tag{3.60}$$

Substituindo u^1, dado por (3.34), podemos reescrever I_{14} como

$$\begin{aligned} I_{14} &= \rho_1\int_0^L q(x)u^2(-\overline{u_x^2}-\overline{f_x^1})\,\mathrm{d}x\\ &= -\rho_1\int_0^L \frac{q(x)}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|u^2|^2\,\mathrm{d}x-\rho_1\int_0^L q(x)u^2\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.61}$$

integrando por partes e observando que $u^2\in H_0^1(0,L)$ temos

$$I_{14}=\rho_1\int_0^L\frac{q'(x)}{2}|u^2|^2\,\mathrm{d}x-\rho_1\int_0^L q(x)u^2\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x.$$

Integrando I_{15} por partes, encontramos

$$\begin{aligned} I_{15} &= -k\int_0^L\frac{q(x)}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|u_x^1|^2\,\mathrm{d}x\\ &= -k\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L}+k\int_0^L\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

e substituindo I_{14} e I_{15} em (3.60)

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L} &= -\,k\int_0^L\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\,\mathrm{d}x-\rho_1\int_0^L q'(x)|u^2|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\rho_1\int_0^L q(x)u^2\overline{f_x^1}\,\mathrm{d}x+k\int_0^L q(x)u_x^3\overline{u_x^1}\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\rho_1\int_0^L q(x)f^2\overline{u_x^1}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tomando a parte real da igualdade acima, como $q\in C^1([0,L])$ existe uma constante $C_6 := C_6(q) > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
-k\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L} \leq & \underbrace{C_6\int_0^L |u_x^1|^2\,\mathrm{d}x + C_6\int_0^L \left|u_x^3\overline{u_x^1}\right|\,\mathrm{d}x}_{I_{16}} + C_6\rho_1\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x \\
& + C_6\int_0^L \left|u^2\overline{f_x^1}\right|\,\mathrm{d}x + C_6\int_0^L \left|f^2\overline{u_x^1}\right|\,\mathrm{d}x. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

A desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, aplicada em I_{16} implica

$$
I_{16} \leq C_6\left(\|u_x^1\|_{L^2}^2 + \|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1\|_{L^2}\right),
$$

Do fato de $2ab \leq a^2 + b^2$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e a Proposição 1.11, resulta que

$$
\begin{aligned}
I_{16} & \leq \frac{C_6}{2}\left(3\|u_x^1\|_{L^2}^2 + \|u_x^3\|_{L^2}^2\right) \\
& \leq \frac{C_6}{2}\left[3\left(\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \|u^3\|_{L^2}\right)^2 + \|u_x^3\|_{L^2}^2\right] \\
& \leq \frac{C_6}{2}\left(12\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + 12\|u^3\|_{L^2}^2 + \|u_x^3\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}
$$

Pela da desigualdade de Poicaré, Teorema 1.40, obtemos

$$
I_{16} \leq \frac{C_6}{2}\left[12\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \left(12C_P + 1\right)\|u_x^3\|_{L^2}^2\right],
$$

onde C_p é a constante de Poincaré. Por fim, com o objetivo de majoramos $\|u_x^3\|_{L^2}^2$, tomando ϵ_1 adquado e fixo, segue do lema 3.5 que existe uma constante C_7 tal que

$$
\begin{aligned}
I_{16} \leq & \ 6C_6\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + C_7\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
& + C_7\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + C_6\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Novamente usando que $2ab \leq a^2 + b^2$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, temos

$$
I_{16} \leq \left(6C_6 + \frac{C_7}{2}\right)\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2}C_7\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_6\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.
$$

Substituindo I_{16} em (3.62) temos

$$
\begin{aligned}
-k\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L} \leq & \left(6C_6 + \frac{C_7}{2}\right)\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2}C_7\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
& + 2\ C_q^6\ \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + C_6\int_0^L \left|u^2\overline{f_x^1}\right|\,\mathrm{d}x + C_6\int_0^L \left|f^2\overline{u_x^1}\right|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Segue da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, que

$$
-k\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L} \leq C_q\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_q\left(\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2\right),
$$

para alguma constante positiva C_q.

□

Lema 3.8. *Com as notações anteriores existe $C > 0$ tal que*

$$\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 \,\mathrm{d}x \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + 4k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \tag{3.63}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.35) por $\overline{u^1}$ e integrando sobre $(0, L)$ temos

$$i\lambda\rho_1 \int_0^L u^2\overline{u^1} \,\mathrm{d}x - k\int_0^L (u_x^1 + u^3)_x\overline{u^1} \,\mathrm{d}x = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1} \,\mathrm{d}x$$

e integrando por partes, como $u^1 \in H_0^1(0, L)$, segue que

$$\underbrace{\rho_1 \int_0^L u^2(i\lambda\overline{u^1}) \,\mathrm{d}x}_{I_{17}} + k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u_x^1} \,\mathrm{d}x = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1} \,\mathrm{d}x. \tag{3.64}$$

Substituindo u^1, dado por (3.34), em I_{17}, vem que

$$\begin{aligned} I_{17} &= \rho_1 \int_0^L u^2(i\lambda\overline{u^1}) \,\mathrm{d}x \\ &= \rho_1 \int_0^L u^2(-\overline{u^2} - \overline{f^2}) \,\mathrm{d}x \\ &= -\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 \,\mathrm{d}x - \rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^2} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substituindo I_{17} em (3.64) encontramos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L |u^2|^2 \,\mathrm{d}x &= -\rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^2} \,\mathrm{d}x + k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u_x^1} \,\mathrm{d}x - \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1} \,\mathrm{d}x \\ &= -\rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^2} \,\mathrm{d}x + k\int_0^L (u_x^1 + u^3)(\overline{u_x^1 + u^3} - \overline{u^3}) \,\mathrm{d}x \\ &\quad -\rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1} \,\mathrm{d}x \\ &= -\rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^2} \,\mathrm{d}x + k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad -k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^3} \,\mathrm{d}x - \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tomando a parte real na igualdade acima e usando a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e a equivalência das normas, obtemos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 \,\mathrm{d}x \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}\|u^3\|_{L^2}.$$

Pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, e a desigualdade de Poincaré, Teorema 1.40, que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x &\leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2\\ &+\frac{k}{2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2 + C_2\|u_x^3\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.65}$$

para alguma constante positiva $C_2>0$. Agora, pelo Lema 3.5, para $\epsilon_1 = \dfrac{\widetilde{b}}{2C_2}$ existe uma constante C_3 tal que

$$C_2\|u^3\|_{L^2} \leq C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_3\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|u_x^1+u^3\|_{L^2} + \frac{\rho_1}{2}\|u^2\|_{L^2}^2.$$

Segue novamente da desigualdade de Young, Corolário 1.13, que

$$C_2\|u^3\|_{L^2} \leq C_4\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|u^2\|_{L^2},$$

para alguma constante positiva C_4. Por fim, substituindo a última estimativa em (3.65) obtemos

$$\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |u^2|^2\,\mathrm{d}x \leq (C_1+C_4)\,\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + 2k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}.$$

□

De posse dos Lemas 3.2, 3.3 e 3.5 - 3.8 provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Suponha que as hipóteses* (4.6) *e* (4.7), *sobre o núcleo g, sejam válidas, que os dados iniciais satisfazem*

$$\varphi_0,\psi_0\in H_0^1(0,L),\quad \eta_0\in L_g^2(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)\quad e\quad \varphi_1,\psi_1\in L^2(0,L).$$

Suponha ainda que a condição (3.11) *se verifica. Então a energia $E(t)$ decai exponencialmente para zero, isto é, existem constantes positivas C e α, independentes dos dados iniciais, tais que*

$$E(t)\leq CE(0)e^{-\alpha t};\qquad \forall t\geq 0.$$

Demonstração. Sejam $U = (u^1,u^2,u^3,u^4,\eta)^t$ e $F = (f^1,f^2,f^3,f^4,f^5)^t$ satisfazendo (3.34) - (3.38) e $\widetilde{b} := b-b_0$. Do Lema 3.2 existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$\|\eta\|_{L_g^2}^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.66}$$

Segue do Lema 3.3, e da desigualdade de Young, dada pelo Teorema 1.13, que para cada $\epsilon_2 > 0$, existe $C_2 := C_2(\epsilon_2) > 0$ tal que

$$\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 \leq C_2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_2}{2}k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \tag{3.67}$$

Do Lema 3.5, e da Desigualdade de Young, Teorema 1.13, segue que para cada $\epsilon_2 > 0$, existe $C_3 := C_3(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ tal que

$$\widetilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_2}{2}k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \tag{3.68}$$

Somando (3.67) e (3.68) obtemos

$$\begin{aligned}\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad (C_2 + C_3)\,\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \epsilon_2 k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Dado $\widetilde{N} > 0$, aplicando a desigualdade de Young, Teorema 1.13, no Lema 3.7 (i) temos que existem constantes $C_4 := C_4(q, \widetilde{N})$ e $C_5 := C_5(\widetilde{N}, q, \epsilon_1)$ de tal modo que

$$\begin{aligned}-\widetilde{N}\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L} \quad &\leq \quad C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{8}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \\ &\quad + \epsilon_1 C_4\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + C_4\|u_x^3\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, Teorema 1.13, no Lema 3.5 afim de majorar $\|u_x^3\|_{L^2}^2$ temos que existe uma constante $C_6 := C_6(\epsilon_1)$ tal que

$$C_4\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_6\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{8}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \epsilon_1 C_4\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.$$

Substituindo na desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}-\,\widetilde{N}\left(\frac{q(x)}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right|^2\right)_{x=0}^{x=L} \quad &\leq \quad (C_5 + C_6)\,\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{4}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2\,\epsilon_1\,C_4\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Agora, multiplique o item (ii) do Lema 3.7 por δ, com $0 < \delta C_4 < \dfrac{k}{4}$,

$$-\,\delta\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L} \leq \delta C_4\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{4}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \delta C_4\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2. \tag{3.71}$$

Somando (3.70) e (3.71) e observando que $q(0) = -q(L) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{2}|u_x^1(L)|^2 + \frac{\widetilde{N}}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)\,\mathrm{d}s\right|^2 \\
&+\frac{\delta}{2}|u_x^1(0)|^2 + \frac{\widetilde{N}}{2}\left|\widetilde{b}u_x^3(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0)\,\mathrm{d}s\right|^2 \\
&\leq (C_5 + C_6 + \delta C_4)\,\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \\
&\quad + (2\epsilon_1 + \delta)\,C_4\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2. \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, Teorema 1.13, temos que dado $\delta > 0$ existe um $C_7 := C_7(\delta) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)\,\mathrm{d}s\right| |u_x^1(L)| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}|u_x^1(L)|^2\right. \\
&\left. +C_7\left|\widetilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)\,\mathrm{d}s\right|^2\right).
\end{aligned}$$

A mesma estimativa é válida em 0. Tomando $\widetilde{N} = 2C_7$ de (3.72) temos

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\left(\left[\widetilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right]\overline{u_x^1}\right)_{x=0}^{x=L} &\leq 2\left|\widetilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)\,\mathrm{d}s\right| |u_x^1(L)| \\
&\quad +2\left|\widetilde{b}u_x^3(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0)\,\mathrm{d}s\right| |u_x^1(0)| \\
&\leq (C_5 + C_6 + \delta C_4)\,\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad +\frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + (2\epsilon_1 + \delta)\,C_4\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e pelo Lema 3.6, existe uma constante $C_8 := C_8(\epsilon_1, \epsilon_2)$ dada pelo lema, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 &\leq (C_5 + C_6 + \delta C_4 + C_8)\,\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \left[(2\epsilon_1 + \delta)\,C_4 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\rho_1}\right]\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Escrevendo

$$\tau = \left((2\epsilon_1 + \delta)\,C_4 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\rho_1}\right),$$

obtemos da igualdade acima uma constante $C_9 = C_9(\epsilon_1, \epsilon_2, q, \delta)$ tal que

$$\frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \leq C_9\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2. \qquad (3.73)$$

Multiplicando (3.63) por 2τ encontramos

$$2\tau\rho_1\|u^2\|_{L^2} \leq 2\tau C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + 8\tau k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2, \qquad (3.74)$$

onde C_{10} é dada pelo Lema 3.8.
Agora, somando (3.73) e (3.74) obtemos

$$\left(\frac{1}{2}-8\tau\right)k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2+\tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2\leq\left(2\tau C_{10}+C_9\right)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.75}$$

somando (3.66), (3.69) e (3.75) encontramos

$$\begin{aligned}(\tau-\epsilon_1)\,\rho_1\|u^2\|_{L^2}+\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2+\frac{\widetilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2+\left(\frac{1}{2}-8\tau-\epsilon_2\right)k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2\\ +\|\eta\|_{L_g^2}^2\leq\left(C_1+C_2+C_3+2\tau C_{10}+C_9\right)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Tomamos os números reais positivos ϵ_1, ϵ_2 e δ, suficientemente pequenos, de modo que tenhamos

$$\frac{1}{2}-8\tau-\epsilon_2>0$$

e

$$\tau-\epsilon_1>0,$$

concluimos, portanto, que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\quad\forall\, U\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

para alguma constante positiva C, o que demonstra o teorema. □

3.2 A Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção vamos mostrar a necessidade da condição

$$\frac{\rho_1}{k}=\frac{\rho_2}{b},$$

dada em (3.11), para a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema

$$\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi)_x=0, \tag{3.76}$$

$$\rho_2\psi_{tt}-\widetilde{b}\left(\psi-\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)\,\mathrm{d}s\right)_{xx}+k(\varphi_x+\psi)=0, \tag{3.77}$$

$$\eta_t+\eta_s-\psi_t=0, \tag{3.78}$$

em que $(x,t)\in(0,L)\times(0,\infty)$, $s>0$, com condições iniciais

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot,0)=\varphi_0,\quad \varphi_t(\cdot,0)=\varphi_1,\quad \psi(\cdot,0)=\psi_0,\quad &\text{em}\quad (0,L),\\ \psi_t(\cdot,0)=\psi_1,\quad \eta^0(\cdot,-s)=\psi_0(\cdot)-\eta_0(\cdot,s),\quad s>0\ &\text{em}\quad (0,L),\end{aligned} \tag{3.79}$$

no caso em que as condições de fronteira são do tipo misto, isto é, são dadas por

$$\varphi_x(0,t)=\varphi_x(L,t)=\psi(0,t)=\psi(L,t)=\eta^t(0,s)=\eta^t(L,s)=0,\ s,\,t>0. \tag{3.80}$$

O mesmo resultado para condições de Dirichlet constitui um problema em aberto.

Com esta finalidade introduzimos os seguintes espaços de Hilbert

$$L^2_*(0,L)=\left\{u\in L^2(0,L);\ \int_0^L u(x)dx=0\right\}$$
$$H^1_*(0,L)=H^1(0,L)\cap L^2_*(0,L),$$

munidos com as normas

$$\|u\|_{L^2_*(0,L)}=\|u\|_{L^2(0,L)}=\left\{\int_0^L |u(x)|^2dx\right\}^{1/2},$$
$$\|u\|_{H^1_*(0,L)}=\left\{\int_0^L |u_x(x)|^2dx\right\}^{1/2}.$$

Neste caso, o espaço de fase $\mathcal{H}$ é o espaço de Hilbert dado por

$$\mathcal{H}=H^1_*(0,L)\times L^2_*(0,L)\times H^1_0(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2_g(\mathbb{R}^+_*;H^1_0(0,L)),$$

equipado com o produto interno

$$\big\langle(u^1,u^2,u^3,u^4,\eta),(v^1,v^2,v^3,v^4,\xi)\big\rangle=\rho_1\int_0^L u^2\overline{v^2}\mathrm{d}x\ +\ \rho_2\int_0^L u^4\overline{v^4}\mathrm{d}x$$
$$+\widetilde{b}\int_0^L u^3\overline{v^3}\mathrm{d}x\ +\ k\int_0^L (u^1_x+u^3)(\overline{v^1_x+v^3})\mathrm{d}x\ +\ \int_0^L\int_0^\infty \eta\overline{\xi}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

O sistema (3.76)-(3.80) é equivalente ao problema de Cauchy

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}U & t>0\\ U(0)=U_0,\end{cases}$$

em que o operador é dado por (2.17) com domínio

$$D(\mathcal{A})=\big\{(u^1,u^2,u^3,u^4,\eta)\in\mathcal{H}:u^1\in H^2(0,L);u^2\in H^1_*(0,L),u^4\in H^1_0(0,L);$$
$$\eta_s\in L^2_g(\mathbb{R}^*_+;H^1_0);\eta(0)=0;\left(\widetilde{b}u^3\ +\ \int_0^\infty g(s)\eta^t(s)\,\mathrm{d}s\right)_{xx}ds\in L^2(0,L)\Big\}.$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, podemos mostrar que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, densamente definido e que $0\in\rho(\mathcal{A})$. Utilizando, novamente, a teoria de semigrupos lineares de classe C_0 concluímos que $\mathcal{A}$ é o gerador de um semigrupo de contrações $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geq 0}$. Resulta, portanto, que quando os iniciais pertencem ao domínio do operador $\mathcal{A}$ o sistema (3.76)-(3.80) tem uma única solução $(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\eta)$ satisfazendo

$$\varphi\in C([0,\infty);H^1_*(0,L)\cap H^2(0,L)),\quad \varphi_t\in C([0,\infty);H^1_*(0,L)),$$
$$\psi\in C([0,\infty);H^1_0(0,L)),\quad \psi_t\in C([0,\infty);H^1_0(0,L)),$$

$$\eta \in C([0,\infty); L^2_g(\mathbb{R}^+_*; H^1_0(0,L)), \quad \eta_t \in C((0,\infty); L^2_g(\mathbb{R}^+_*; H^1_0(0,L)),$$
$$\varphi + \int_0^\infty \eta(s)\mathrm{d}s \in C([0,\infty); H^1_0(0,L) \cap H^2(0,L)).$$

Procedendo como no Capítulo 2 podemos demonstar que

Proposição 3.10. *Suponha que as hipóteses (4.6), (4.7) e (3.11) sejam verificadas. Então existem constantes positivas C e ζ tais que*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \; Ce^{\zeta t}.$$

Provaremos o seguinte Lema antes de adentrarmos no principal resultado dessa seção.

Lema 3.11. *Suponha que g satisfaça a condição (4.6) e suponha que*

$$\lim_{s\to 0} \sqrt{s} g(s) = 0.$$

Então existe $C > 0$ tal que

$$\left|\lambda \int_0^\infty g(s)e^{i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| \leq C,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \qquad (3.81) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudaça de variável $r = s + \frac{\pi}{\lambda}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(r)e^{-i\lambda r}\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2}\int_0^\infty g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}e^{-i\pi}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

pois $e^{-i\pi} = -1$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever a equação (3.81) como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g(s)\right]\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[\int_s^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

Com o objetivo de majorar cada parcela do lado direito da igualdade acima, observe que

$$
\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)\underbrace{\left|e^{-i\lambda s}\right|}_{=1}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{s}g(s)}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s.
$$

Escrevendo

$$
\nu(\lambda) = \sup_{s\in\left(0,\frac{\pi}{\lambda}\right)} \sqrt{s}g(s) \quad \text{então} \quad \lim_{\lambda\to\infty}\nu(\lambda) = 0.
$$

De fato, dado $\epsilon > 0$ tome $M = \dfrac{4g^2(0)\pi}{\epsilon^2}$. Se $\lambda > M$ pelas hipóteses sobre o núcleo da g, (2.11), temos que $g(0) \geq g(s)$, $\forall s \in \left(0, \frac{\pi}{\lambda}\right)$. Logo se $0 < s < \frac{\pi}{\lambda}$ temos

$$
0 < \sqrt{s}g(s) \leq \sqrt{s}g(0) \leq \left(\frac{\epsilon}{2g(0)}\right)\cdot g(0) = \frac{\epsilon}{2}.
$$

Portanto $\nu(\lambda) < \epsilon$, em outras palavras

$$
\lim_{\lambda\to\infty}\nu(\lambda) = 0.
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}(-i\lambda)\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \left|-g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)-g(0)\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g'(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \left(g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)+g(0)\right) + \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} |g'(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \left(g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)+g(0)\right) + k_0\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \left(g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)+g(0)\right) + k_0\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{s}g(s)}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \left(g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)+g(0)\right) + \frac{2k_0\sqrt{\pi}\nu(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}
$$

para λ suficientemente grande obtemos

$$(i)\quad \left|\lambda\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| \le 2g(0).$$

De forma análoga, fazendo mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\lambda\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}(-i\lambda)\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|-g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)-g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g'\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left(g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)+g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) + \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \left|g'\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\le \left(g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)+g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) + k_0\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}s \\
&\le \left(g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)+g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) + k_0\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g\left(s\right)\,\mathrm{d}s \\
&\le \left(g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)+g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) + k_0\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{\nu(\lambda)}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s \\
&\le \left(g\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)+g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) + \frac{2(\sqrt{2}-1)k_0\sqrt{\pi}\nu(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Chegamos à conclusão que

$$(ii)\quad \left|\lambda\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right| \le 2g(0),$$

para valores de λ suficientemente grandes.

Por fim, a hipótese (4.6) e mudança de variáveis implicam que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[\int_s^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\right| &\le \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty}\int_s^{s+\frac{\pi}{\lambda}} |g'(y)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty}\left[-\int_s^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty}\int_{s+\frac{\pi}{\lambda}}^{s} g'(y)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)\,\mathrm{d}s - \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)\,\mathrm{d}s - \int_{\frac{2\pi}{\lambda}}^{\infty} g\left(s\right)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

logo

$$\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[\int_{s}^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\right| \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pela hipótese (4.6), g é decrescente, ou seja,

$$g(s) \leq g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) \qquad \forall s \in \left(\frac{\pi}{\lambda}, \frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

Assim , a desigualdade acima fica

$$\left|\lambda\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[\int_{s}^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\right| \leq \lambda\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\mathrm{d}s = \pi g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right).$$

Para λ suficientemente grande, temos

$$\text{(iii)} \quad \left|\lambda\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[\int_{s}^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\right| \leq \pi g(0).$$

De $(i) - (iii)$ e de (3.82), nossa conclusão segue. □

Teorema 3.12. *Suponha que* (3.11) *não se verifica. Então o semigrupo associado ao sistema* (3.76) - (3.80) *não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Para mostrar que o sistema não é exponecialmente estável, devemos mostrar que a estimativa (3.4) não é válida, ou seja, que para toda constante positiva $c > 0$, existe $\lambda_c \in \mathbb{R}$ tal que $\|(i\lambda_c I - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} > c$. Assim, basta mostrarmos a existência de sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(\mathcal{A})$ e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty, \qquad (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{seja limitada em } \mathcal{H},$$
$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n \quad \text{com} \quad \lim_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Para tanto, tomemos

$$\lambda \equiv \lambda_n := \frac{n\pi}{\delta L}\ (n\in\mathbb{N}), \qquad \delta := \sqrt{\frac{\rho_1}{k}}, \tag{3.83}$$

$$F \equiv F_n := (0, f^2, 0, f^4, 0)^t,$$

$$f^2(x) := \cos(\delta\lambda x), \qquad f^4(x) := \operatorname{sen}(\delta\lambda x).$$

Seja $U = (v^1, v^2, v^3, v^4, \eta)^t$ a solução de $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, em outras palavras

$$\begin{aligned} i\lambda v^1 - v^2 &= 0, &(3.84)\\ i\lambda v^2 - \frac{k}{\rho_1}v^1_{xx} - \frac{k}{\rho_1}v^3_x &= f^2, &(3.85)\\ i\lambda v^3 - v^4 &= 0, &(3.86)\\ i\lambda v^4 - \frac{b}{\rho_2}v^3_{xx} + \frac{b_0}{\rho_2}v^3_{xx} - \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}\,\mathrm{d}s + \frac{k}{\rho_2}v^1_x + \frac{k}{\rho_2}v^3 &= f^4, &(3.87)\\ i\lambda\eta + \eta_s - v^4 &= 0, &(3.88) \end{aligned}$$

onde $b_0 = \displaystyle\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s$. Substituindo v^2 e v^4 dados por (3.85) e (3.86) nas demais equações conseguimos simplificar o sistema para

$$\begin{aligned} -\lambda^2 v^1 - \frac{k}{\rho_1}v^1_{xx} - \frac{k}{\rho_1}v^3_x &= f^2, &(3.89)\\ -\lambda^2 v^3 - \frac{b}{\rho_2}v^3_{xx} + \frac{b_0}{\rho_2}v^3_{xx} - \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}\,\mathrm{d}s + \frac{k}{\rho_2}v^1_x + \frac{k}{\rho_2}v^3 &= f^4, &(3.90)\\ i\lambda\eta + \eta_s - i\lambda v^3 &= 0. &(3.91) \end{aligned}$$

Devido às condições de fronteira, procuramos soluções do tipo,

$$v^1(x) = A\cos(\delta\lambda x) \;\; v^3(x) = B\,\mathrm{sen}(\delta\lambda x), \;\; \eta(x,s) = \varphi(s)\,\mathrm{sen}(\delta\lambda x),$$

onde A, B e $\varphi(s)$ dependem de λ e serão determinada a seguir (respeitando as condições de fronteira).

Substituindo v^1, v^2 e η em (3.89)-(3.91), esse sistema pode ser reescrito como

$$\left(-\lambda^2 + \frac{k}{\rho_1}\delta^2\lambda^2\right)A - \frac{k}{\rho_1}\delta\lambda B = 1, \quad (3.92)$$

$$\left(-\lambda^2 + \frac{\widetilde{b}}{\rho_2}\delta^2\lambda^2\right)B + \delta^2\lambda^2\frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \frac{k}{\rho_2}\delta\lambda A + \frac{k}{\rho_2}B = 1, \quad (3.93)$$

$$i\lambda\varphi(s) + \varphi'(s) - i\lambda B = 0. \quad (3.94)$$

Substituindo $\dfrac{k}{\rho_1}\delta^2 = 1$, dado por (3.83), na equação (3.92), obtemos

$$B = -\frac{\rho_1}{k\delta}\frac{1}{\lambda} = -\sqrt{\frac{\rho_1}{k}}\frac{1}{\lambda}.$$

Resolvendo a EDO dada por (3.94), por fator integrante, obtemos a seguinte solução

$$\varphi(s) = Ce^{-i\lambda s} + B.$$

A condição inicial de $\eta(0) = 0$ implica que $\varphi(0) = 0$, e daí podemos rescrever φ

como

$$\varphi(s) = B - Be^{-i\lambda s}.$$

Resta determinar o valor de A. Do exposto acima podemos resolver a integral

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^\infty g(s)\left(B - Be^{-i\lambda s}\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty g(s)B\,\mathrm{d}s - \int_0^\infty g(s)Be^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s \\
&= Bb_0 - \int_0^\infty g(s)Be^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s. \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.95) na equação (3.93), obtemos

$$-\frac{k}{\rho_2}\delta\lambda A + \left[\left(\frac{b}{\rho_2}\delta^2 - 1\right)\lambda^2 + \frac{k}{\rho_2} - \frac{\delta^2\lambda^2}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right]B = 1.$$

Como $\frac{k}{\rho_1}\delta^2 = 1$, (veja (3.83)), e $B = -\frac{\rho_1}{k\delta\lambda}$, (veja (3.95)), obtemos:

$$A = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}}\frac{1}{\lambda} + \frac{\rho_1}{k^2}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right).$$

Observe que $v^2 = i\lambda v^1 = i\lambda A\cos(\delta\lambda x)$, assim

$$v^2(x) = \left(-\frac{i}{\lambda} - \frac{i\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{i\rho_1}{k^2}\lambda\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{ib}{k}\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda\right)\cos(\delta\lambda x).$$

Por (3.83), $\delta\lambda L = n\pi$, logo,

$$\begin{aligned}
\|v^2\|^2_{L^2_*} &= \int_0^L |v^2|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^L \left|-\frac{i}{\lambda} - \frac{i\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{i\rho_1}{k^2}\lambda\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{ib}{k}\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda\right|^2 \cos^2(\delta\lambda x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left|-\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{\rho_1}{k^2}\lambda\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda\right|^2 \int_0^L \cos^2(\delta\lambda x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{L}{2}\left|-\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{\rho_1}{k^2}\lambda\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda\right|^2.
\end{aligned}$$

Pela segunda desigualdade triangular sabemos que $|a+b|^2 \geq (|a| - |b|)^2$, $\forall a$, $b \in \mathbb{C}$; logo

$$\|v^2\|^2_{L^2_*} = \frac{L}{2}\left|-\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{\rho_1}{k^2}\lambda\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda\right|^2$$

e, portanto

$$\|v^2\|^2_{L^2_*} \geq \frac{L}{2}\left(\underbrace{-\left|-\frac{1}{\lambda}-\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}}+\frac{\rho_1}{k^2}\lambda\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\,\mathrm{d}s\right|}_{I_{18}}+\left|\frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b}-\frac{\rho_1}{k}\right)\lambda\right|\right)^2$$

Pelo Lema 3.11 temos que I_{18} é limitado. Logo

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}} \geq \lim_{\lambda\to\infty}\|v\|^2_{L^2_*} = \infty,$$

como queriamos mostrar. $\square$

Capítulo 4

Estabilidade Polinômial do Sistema de Timoshenko com História

Neste capítulo estabelecemos a estabilidade polinimial do sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \qquad (4.1)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - \left(b - \int_0^\infty g(s)ds\right)\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}(x,s)\,\mathrm{d}s + k(\varphi_x + \psi) = 0 \qquad (4.2)$$

$$\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0, \qquad (4.3)$$

sujeito as condições de fronteira

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi(L,\cdot) = 0, \;\; \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) = 0, \;\; \eta^t(0,\cdot) = \eta^t(L,\cdot) = 0, \qquad (4.4)$$

as condições inciais

$$\begin{gathered}\varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \;\; \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \;\; \psi(\cdot,0) = \psi_0, \;\; \psi_t(\cdot,0) = \psi_1 \;\text{ em } (0,L),\\ \eta^0(\cdot,s) = \psi_0(\cdot) - \eta_0(\cdot,s) \;\text{ em } (0,L)\times(0,\infty).\end{gathered} \qquad (4.5)$$

e às hipóteses

$$\begin{gathered} g(t) > 0, \; \exists\, k_0, \; k_1 > 0 : \\ -k_0 g(t) \le g'(t) \le -k_1 g(t), \qquad \forall t \ge 0 \end{gathered} \qquad (4.6)$$

$$b_0 = \int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s, \; \widetilde{b} := b - b_0 > 0. \qquad (4.7)$$

sem a hipótese

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \qquad (4.8)$$

Existem diferentes métodos para se obter o decaimento polinomial de um sistema dissipativo de equações diferenciais parciais. Recentemente, vários autores têm obtido esse resultado para sistemas lineares utilizando propriedades do gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0 associado, ou seja, eles usam como ferramenta o Teorema 1.65 de A. Borichev e Y. Tomilov, ver [24]. Neste trabalho, usaremos o método dos multiplicadores, que para obter a estimativa desejada para a energia $E(t)$, consiste em obter estimativas para diferentes funcionais, multiplicando (4.1)-(4.3) por funções apropriadas e integrando sobre $(0, L)$.

De modo análogo ao que foi feito no Capítulo 3, introduzimos a energia de segunda ordem do sistema (4.1)-(4.5) dada por

$$E_2(t) = E(\varphi_t, \psi_t, \eta_t), \tag{4.9}$$

e obtemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{dt} E_2(t) \leq -\frac{k_1}{2} \int_0^L \int_0^\infty g(s) |\eta_{xt}|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

O principal resultado do capítulo é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 4.1. *Suponha que* (**??**) *se verifica e suponha que os dados iniciais satisfazem*

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \ , \psi_0, \ \varphi_1, \psi \in H_0^1(0, L), \\
&\eta_0, \ D_s\eta_0 \in L_g^2\left(0, \infty; H_0^1(0, L)\right), \ \eta(0) = 0, \\
&\widetilde{b}\psi_0 \ + \int_0^\infty g(s)\eta_0 ds \in H^2(0, L),
\end{aligned}$$

ou seja, $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta)^t \in D(\mathcal{A})$. *Então a energia de primeira ordem* $E(t)$ *associada ao sistema* (4.1)-(4.5) *decai de forma polinomial para zero, isto é, existe uma constante positiva* C, *independente dos dados iniciais, tal que*

$$E(t) \leq \frac{C}{t} \left(E(0) + E_2(0)\right), \qquad t > 0.$$

Além disso, se $U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta)^t \in D(\mathcal{A}^k)$, *então*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C^k}{t^k} \|\mathcal{A}^k U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Para melhor compreensão da demonstração do Teorema anterior serão obtidas diversas estimativas, apresentadas nos Lemas e Proposições seguintes.

Definamos a função auxiliar w, de modo que w satisfaça

$$-w_{xx} = \psi_x, \qquad w(0) = w(L) = 0,$$

e seja

$$F_1(t) := \int_0^L [\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w] \, \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Com isso, temos o seguinte Lema.

Lema 4.2. *Para cada $\epsilon_1 > 0$ existe uma constante positiva $C_{\epsilon_1} > 0$ talque*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_1(t) \;\; &\leq \;\; -\frac{\widetilde{b}}{2} \int_0^L \psi_x^2 \, \mathrm{d}x + \epsilon_1 \int_0^L \varphi_t^2 \, \mathrm{d}x + C_{\epsilon_1} \int_0^L \psi_t^2 \, \mathrm{d}x \\ & \quad + C_1 \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x|^2 \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Demonstração. Note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L \rho_2 \psi_t \psi \, \mathrm{d}x = \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi \, \mathrm{d}x + \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

Por outro lado, multiplicando (4.2) por ψ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi \, \mathrm{d}x = \int_0^L \left(\widetilde{b} \psi + \int_0^\infty g(s) \eta \, \mathrm{d}s \right)_{xx} \psi \, \mathrm{d}x - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi \, \mathrm{d}x.$$

Substituindo $\displaystyle\int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi \, \mathrm{d}x$, encontrado acima, em (4.12), integrando por partes e lembrando das condições de fronteira (4.4), temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L \rho_2 \psi_t \psi \, \mathrm{d}x \;\; &= \;\; -\widetilde{b} \int_0^L |\psi_x|^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x \, \mathrm{d}s \right) \psi_x \, \mathrm{d}x \\ & \quad - k \int_0^L \varphi_x \psi \, \mathrm{d}x - k \int_0^L |\psi|^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Note também que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L \rho_1 \varphi_t w \, \mathrm{d}x = \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} w \, \mathrm{d}x + \int_0^L \rho_1 \varphi_t w_t \, \mathrm{d}x, \tag{4.14}$$

multiplicando a equação (4.1) por w temos

$$\int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} w \, \mathrm{d}x = k \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x w \, \mathrm{d}x.$$

Substituindo $\displaystyle\int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} w \, \mathrm{d}x$ encontrado acima em (4.14), integrando por partes e lembrando das condições de fronteira (4.4), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \rho_1\varphi_t w\,\mathrm{d}x &= -k\int_0^L (\varphi_x+\psi)w_x\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x\\
&= -k\int_0^L \varphi_x w_x\,\mathrm{d}x - k\int_0^L \psi w_x\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x\\
&= k\int_0^L \varphi w_{xx}\,\mathrm{d}x + k\int_0^L \psi_x w\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x\\
&= -k\int_0^L \varphi\psi_x\,\mathrm{d}x - k\int_0^L w_{xx} w\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x\\
&= k\int_0^L \varphi_x\psi\,\mathrm{d}x + k\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Somando (4.13) e (4.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(t) &= \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x - \widetilde{b}\int_0^L |\psi_x|^2\,\mathrm{d}x - k\left(\int_0^L |\psi|^2\,\mathrm{d}x - \int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x\right)\\
&\quad +\rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x - \int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\psi_x\,\mathrm{d}x. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Observe que se $-w_{xx}=\psi_x$ então valem as seguintes desigualdades:

$$(i)\quad \int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x \le \int_0^L |\psi|^2\,\mathrm{d}x,$$
$$(ii)\quad \int_0^L |w_t|^2\,\mathrm{d}x \le C_p\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x,$$

onde C_p é a constante positiva de Poincaré.

De fato, como

$$\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^L w_{xx}w\,\mathrm{d}x = \int_0^L \psi_x w\,\mathrm{d}x = -\int_0^L \psi w_x\,\mathrm{d}x,$$

Pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, temos que

$$\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x \le \|\psi\|_{L^2}\|w_x\|_{L^2},$$

de onde segue a desigualdade (i).

Da desigualdade de Poincaré, Teorema 1.40, e a desigualdade (i) obtemos

$$\int_0^L |w_t|^2\,\mathrm{d}x \le C_p\int_0^L |w_{tx}|^2\,\mathrm{d}x \le C_p\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x.$$

Usando (i) em (4.16) temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(t) &\leq \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x - \widetilde{b}\int_0^L |\psi_x|^2\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t w_t\,\mathrm{d}x \\ &\quad -\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\psi_x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, e da Proposição 2.3 que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(t) &\leq \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,\mathrm{d}x - \widetilde{b}\int_0^L |\psi_x|^2\,\mathrm{d}x + \rho_1\left(\int_0^L |\varphi_t|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |w_t|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(b_0\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\psi_x|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, e a desigualdade (ii) o resultado segue. □

Definamos o seguinte funcional

$$K(t) := -\int_0^L \rho_2\psi_t\left(\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x. \tag{4.17}$$

Lema 4.3. *Para cada $\epsilon_2 > 0$ existe uma constante positiva C_{ϵ_2} de modo que*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &\leq -\frac{\rho_2 b_0}{2}\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x + \epsilon_2\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x + \epsilon_2\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad + C_{\epsilon_2}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando $K(t)$ em relação a t, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) = -\int_0^L \rho_2\psi_{tt}\left(\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x - \int_0^L \rho_2\psi_t\left(\int_0^\infty g(s)\eta_t\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.$$

Usando $\rho_2\psi_{tt}$ e η_t dados por (4.2) e (4.3), respectivamente, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &= -\int_0^L \left(\widetilde{b}\psi + \int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx}\left(\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\left(\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x + \int_0^L \rho_2\psi_t\left(\int_0^\infty g(s)\eta_s\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^L \rho_2\psi_t\left(\int_0^\infty g(s)\psi_t\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Integrando por partes lembrando das condições de fronteira, (4.4), e usando a Proposição 2.3, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &= \widetilde{b}\int_0^L \psi_x \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x + \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x \,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x \\
&+k\int_0^L \varphi_x \left(\int_0^\infty g(s)\eta \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x + k\int_0^L \psi \left(\int_0^\infty g(s)\eta \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x \\
&-\rho_2\int_0^L \psi_t \left(\int_0^\infty g'(s)\eta \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x - \rho_2 b_0\int_0^L (\psi_t)^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Segue da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &\leq \widetilde{b}\left(\int_0^L \psi_x^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x \,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x \,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x \\
&+k\left(\int_0^L \varphi_x^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta \,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+k\left(\int_0^L \psi^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta \,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \\
&-\rho_2\left(\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^L \left(\int_0^\infty g'(s)\eta \,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} - \rho_2 b_0\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 2.3 e as hipóteses (**??**), sobre o núcleo g, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &\leq \widetilde{b}\left(\int_0^L \psi_x^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[b_0\int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} + b_0\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&+k\left(\int_0^L \varphi_x^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[b_0\int_0^\infty g(s)\|\eta\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+k\left(\int_0^L \psi^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[b_0\int_0^\infty g(s)\|\eta\|_{L_2}^2 \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \\
&-\rho_2\left(\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[k_0 b_0\int_0^\infty g(s)\|\eta\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} - \rho_2 b_0\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Dados b_0 e $\epsilon_2 > 0$, segue da desigualdade de Poincáre, Teorema 1.40, e da desigualdade de Young, Corolário 1.13, que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t) &\leq -\frac{\rho_2 b_0}{2}\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x + \epsilon_2\int_0^L \psi_x^2 \,\mathrm{d}x + \epsilon_2\int_0^L \varphi_x^2 \,\mathrm{d}x \\
&+C_{\epsilon_2}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x, \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

para alguma constante positiva $C_{\epsilon_2} > 0$. $\square$

Sejam N_1 e N_2 constantes positivas a serem definidas posteriormente. Denotemos por $\varepsilon(t)$ o funcional

$$\varepsilon(t) := N_1 \cdot [E(t) + E_2(t)] + F_1(t) + N_2 \cdot K(t), \tag{4.19}$$

onde os funcionais $E(t)$, $E_2(t)$, $F_1(t)$ e $K(t)$ são dados, respectivamente, por (3.9), (4.9), (4.11) e (4.17).

Proposição 4.4. *Existe uma constante positiva $C > 0$ de modo que*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t) \leq & -\frac{N_1 k_1}{2}\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x \\
& -\left(\frac{N_1 k_1}{2} - (C_1 + N_2 C_{\epsilon_2})\right)\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x \\
& -\left(\frac{\widetilde{b}}{2} - C\, N_2\epsilon_2\right)\int_0^L \psi_x^2 \,\mathrm{d}x - \left(\frac{N_2\rho_2 b_0}{2} - C_{\epsilon_1}\right)\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x \\
& +\epsilon_1 \int_0^L \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x + 2N_2\epsilon_2 \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são dadas pelos Lemas 4.2 e 4.3.

Demonstração. Segue pelos Lemas 4.2 e 4.3, pelas desigualdades (3.10), (4.10) que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t) \leq & -\frac{N_1 k_1}{2}\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x \\
& -\left(\frac{N_1 k_1}{2} - (C_1 + N_2 C_{\epsilon_2})\right)\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x \\
& -\left(\frac{\widetilde{b}}{2} - N_2\epsilon_2\right)\int_0^L \psi_x^2 \,\mathrm{d}x - \left(\frac{N_2\rho_2 b_0}{2} - C_{\epsilon_1}\right)\int_0^L \psi_t^2 \,\mathrm{d}x \\
& +\epsilon_1 \int_0^L \varphi_t^2 \,\mathrm{d}x + N_2\epsilon_2 \int_0^L \varphi_x^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por outro lado, usando a desigualdade triângular, a desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, o fato de que $a^2+b^2 \geq 2ab$ para quaisquer a, $b \in \mathbb{R}$ e a desigualdade de Poincáre, Teorema 1.40, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi_x^2 \,\mathrm{d}x \leq & \int_0^L (|\varphi_x + \psi| + |\psi|)^2 \,\mathrm{d}x \\
= & \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^L |\varphi_x + \psi||\psi| \,\mathrm{d}x + \int_0^L |\psi|^2 \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + 2\left(\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\psi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad + \int_0^L |\psi|^2\,\mathrm{d}x\\
&\le 2\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^L |\psi|^2\,\mathrm{d}x\\
&\le 2\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + 2C_p\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x, \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

onde C_p é a constante de Poincaré. Usando agora (4.28) em (4.21) concluímos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t) \le\; & -\frac{N_1k_1}{2}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
& -\left(\frac{N_1k_1}{2}-(C_1+N_2C_{\epsilon_2})\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
& -\left(\frac{\widetilde{b}}{2}-(1+2C_p)N_2\epsilon_2\right)\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x-\left(\frac{N_2\rho_2b_0}{2}-C_{\epsilon_1}\right)\int_0^L\psi_t^2\,\mathrm{d}x\\
& +\epsilon_1\int_0^L\varphi_t^2\,\mathrm{d}x+2N_2\epsilon_2\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

Definamos o funcional $F_2(t)$ como sendo

$$
\begin{aligned}
F_2(t) := \;& \rho_2\int_0^L \psi_t(\varphi_x+\psi)\,\mathrm{d}x+\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\int_0^L\psi_x\varphi_t\,\mathrm{d}x \qquad (4.23)\\
& +\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Com as notações anteriores temos o seguinte Lema:

Lema 4.5. *Para cada $\epsilon_3>0$, existe uma constante $C_{\epsilon_3}>0$ tal que*

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) \le\; & \left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L}-k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x\\
& +\epsilon_3\int_0^L\varphi_t^2\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L\psi_t^2\,\mathrm{d}x+C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\
& +C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) &= \rho_2\int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x+\psi)\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L \psi_t(\varphi_{xt}+\psi_t)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x+\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x+\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_{tt}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Substituindo $\rho_1\varphi_{tt}$ e $\rho_2\psi_{tt}$ dados por (4.1) e (4.2), respectivamente, na igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) &= \underbrace{\int_0^L\left(\widetilde{b}\psi+\int_0^\infty g(s)\eta\,\mathrm{d}s\right)_{xx}(\varphi_x+\psi)\,\mathrm{d}x}_{:=I}\\ &\quad-k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L\psi_t\varphi_{xt}\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L\psi_t^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x+\widetilde{b}\int_0^L\psi_x\left(\varphi_x+\psi\right)_x\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\left(\varphi_x+\psi\right)_x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}\tag{4.24}$$

Integrando por partes I, lembrando as hipóteses sobre a fronteira, (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}I &= \left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L}-\widetilde{b}\int_0^L\psi_x(\varphi_x+\psi)_x\,\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\left(\varphi_x+\psi\right)_x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Como $\psi_{xt}=\eta_{xt}+\eta_{xs}$, dado por (4.3), e pela Proposição 2.3, temos

$$\begin{aligned}b_0\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\psi_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)(\eta_{xt}+\eta_{xs})\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x-\int_0^L\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L\psi_t\varphi_{xt}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\psi_{xt}\varphi_t\,\mathrm{d}x \tag{4.26}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b_0}\left(\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\frac{1}{b_0}\left(\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_{x}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Substituindo I, determinado por (4.25), e a igualdade (4.26) em (4.24), conseguimos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) &= \left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L}-k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad +\frac{1}{b_0}\left(\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x\\
&\quad -\frac{1}{b_0}\left(\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_{x}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad +\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Como $\widetilde{b}=b-b_0$, usando as hipóteses (**??**), sobre o núcleo da g, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) &\leq \left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L}-k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad +\frac{1}{b_0}\left(\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x\\
&\quad +\frac{k_1}{b_0}\left(\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right)\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{x}\,\mathrm{d}s\right)\varphi_t\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Segue da desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) &\leq \left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L}-k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad +\frac{1}{b_0}\left|\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2\right|\left[\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L\varphi_t^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad +\frac{k_1}{b_0}\left|\frac{\rho_1\widetilde{b}}{k}-\rho_2\right|\left[\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{x}\,\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L\varphi_t^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad +\rho_2\int_0^L|\psi_t|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Por fim, usando a Proposição 2.3 e a Desigualdade de Young, Corolário 1.13, resulta que para cada $\epsilon_3>0$, existe uma constante $C_{\epsilon_3}>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t) &\leq \left[\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x \,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\epsilon_3\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x + C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\
&\quad +C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

. □

Lema 4.6. *Seja $q \in C^1([0,L])$ satisfazendo $q(0) = -q(L) = 2$, e sejam os funcionais*

$$
\begin{aligned}
J_1(t) &:= \rho_2\int_0^L \psi_t q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x, \\
J_2(t) &:= \rho_1\int_0^L \varphi_t q(x)\varphi_x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Então existe $C_2 > 0$ e para cada $\epsilon_4 > 0$ existe uma constante positiva C_{ϵ_4} tal que

$$
\begin{aligned}
\text{(i) } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &\leq -\left(\widetilde{b}\psi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L,s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \\
&\quad -\left(\widetilde{b}\psi_x(0,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0,s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \\
&\quad +C_2\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x + \epsilon_4\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad +C_{\epsilon_4}\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x + C_{\epsilon_4}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x, \\
\text{(ii) } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &\leq -k\left[\varphi_x^2(L,t)+\varphi_x^2(0,t)\right] + C_2\int_0^L\left[\varphi_t^2+\varphi_x^2+\psi_x^2\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Derivando $J_1(t)$ em relação a t temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &= \int_0^L \rho_2\psi_{tt}q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\
&\quad +\rho_2\widetilde{b}\int_0^L q(x)\psi_t\psi_{xt}\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L \psi_t q(x)\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

substituindo $\rho_2\psi_{tt}$ e η_{xt} dados por (4.2) e (4.3), respectivamente, na igualdade acima obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &= \int_0^L q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)_x\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\
&\quad -k\int_0^L (\varphi_x+\psi)q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$+\rho_2\widetilde{b}\int_0^L q(x)\psi_t\psi_{xt}\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L \psi_t q(x)\left(\int_0^\infty g(s)\left[\psi_{xt}-\eta_{xs}\right]\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}x.$$

Lembrando que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\zeta^2=2\zeta_x\zeta$, usando a Proposição 2.3 e o fato de que $\psi(L)=\psi(0)=\psi_t(L)=\psi_t(0)=0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &= \frac{1}{2}\left[q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\right]_{x=0}^{x=L}\\
&-\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\,\mathrm{d}x-k\widetilde{b}\int_0^L q(x)\varphi_x\psi_x\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{k\widetilde{b}}{2}\int_0^L q'(x)\psi^2\,\mathrm{d}x-k\int_0^L q(x)\varphi_x\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}x\\
&-k\int_0^L q(x)\psi\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}x+\frac{\rho_2}{2}\left(b_0-\widetilde{b}\right)\int_0^L q'(x)\psi_t^2\,\mathrm{d}x\\
&+\rho_2\int_0^L \psi_t q(x)\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Segue do fato de $q\in C^1([0,L])$, da Proposição 1.11 e a das hipóteses (**??**), sobre o núcleo g, que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &\leq \frac{1}{2}\left[q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\right]_{x=0}^{x=L}+C_q\int_0^L\psi_x^2\,\mathrm{d}x\\
&+C_q\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\,\mathrm{d}x+C_q\int_0^L|\varphi_x\psi_x|\,\mathrm{d}x+C_q\int_0^L\psi^2\,\mathrm{d}x\\
&+C_q\int_0^L\left|\varphi_x\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\right|\,\mathrm{d}x+C_q\int_0^L\left|\psi\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\right|\,\mathrm{d}x\\
&+C_q\int_0^L\psi_t^2\,\mathrm{d}x+C_q\int_0^L\left|\psi_t\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\right|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualade de Hölder, Teorema 1.29, e a Proposição 2.3 temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) &\leq \frac{1}{2}\left[q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\right]_{x=0}^{x=L}\\
&+C_q\int_0^L\psi_x^2\,\mathrm{d}x+C_q\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\
&+C_q\left[\int_0^L\varphi_x^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L\psi_x^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+C_q\int_0^L\psi^2\,\mathrm{d}x\\
&+C_q\left[\int_0^L\varphi_x^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\\
&+C_q\left[\int_0^L\psi^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$+C_q\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x + C_q\left[\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pela desigualdade de Poincáre, Teorema 1.40, e a desigualdade de Young, Corolário 1.13, para cada ϵ_4 existe C_{ϵ_4} tal que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t) \quad\leq\quad & \frac{1}{2}\left[q(x)\left(\widetilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\right]_{x=0}^{x=L} + \epsilon_4\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x + C_{\epsilon_4}\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x \\ & +C_{\epsilon_4}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x + 2C_q\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

mostrando assim a veracidade de (i).

Derivando $J_2(t)$ em relação a t, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_2(t) = \rho_1\int_0^L \varphi_{tt}q(x)\varphi_x\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t q(x)\varphi_{tx}\,\mathrm{d}x$$

e usando (4.1), temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_2(t) = k\int_0^L q(x)\varphi_{xx}\varphi_x\,\mathrm{d}x + k\int_0^L \psi_x q(x)\varphi_x\,\mathrm{d}x + \rho_1\int_0^L \varphi_t q(x)\varphi_{tx}\,\mathrm{d}x.$$

Como $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\zeta^2 = 2\zeta_x\zeta$ e $\psi_t(L) = \psi_t(0) = 0$, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_2(t) = \left[\frac{k}{2}q(x)\varphi_x^2\right]_{x=0}^{x=L} - \frac{k}{2}\int_0^L q'(x)\varphi_x^2\,\mathrm{d}x + k\int_0^L \psi_x q(x)\varphi_x\,\mathrm{d}x + \frac{\rho_1}{2}\int_0^L q'(x)\varphi_t^2\,\mathrm{d}x.$$

Como $q \in C^1([0,L])$, temos que existe uma constante C_q' tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_2(t) \leq \left[kq(x)\varphi_x^2\right]_{x=0}^{x=L} + C_q'\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x + C_q'\int_0^L |\psi_x\varphi_x|\,\mathrm{d}x + C_q'\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x.$$

Pela desigualade de Hölder, Teorema 1.29, e a desigualdade de Young, Cororário 1.13 temos que existe C_2 tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_2(t) \leq -k\left[\varphi_x^2(L,t) + \varphi_x^2(0,t)\right] + C_2\left[\int_0^L \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2\right]\mathrm{d}x.$$

Concluimos assim a demonstração do Lema. □

Sejam $\delta > 0$ e $N_3 > 0$ constantes positivas a serem definidas posteriomente. Definimos

$$F_3(t) := F_2(t) + N_3J_1(t) + \delta J_2(t), \tag{4.27}$$

onde o funcional $F_2(t)$ é dado por (4.23) e os funcionais $J_1(t)$ e $J_2(t)$ são definidos no Lema 4.6.

Lema 4.7. *Assim como nos Lemas anteriores, existem constantes τ e $C_\tau > 0$ tais que*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_3(t) \;&\leq\; -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + \tau\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad + C_\tau\int_0^L\left[\psi_x^2+\psi_t^2+\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando $F_3(t)$ Derivando F_3 em relação a t, e usando os Lemas 4.5 e 4.6, temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_3(t) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(t)+N_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_1(t)+\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_2(t) \\ &\leq\; \underbrace{\left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L}}_{II} - k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad +\epsilon_3\int_0^L\varphi_t^2\,\mathrm{d}x+\rho_2\int_0^L\psi_t^2\,\mathrm{d}x+C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\ &\quad +C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\ &\quad -N_3\left(\widetilde{b}\psi_x(L,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x(L,s)\,\mathrm{d}s\right)^2 \\ &\quad -N_3\left(\widetilde{b}\psi_x(0,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x(0,s)\,\mathrm{d}s\right)^2+N_3C_2\int_0^L\psi_t^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad +N_3\epsilon_4\int_0^L\varphi_x^2\,\mathrm{d}x+N_3C_{\epsilon_4}\int_0^L\psi_x^2\,\mathrm{d}x+N_3C_{\epsilon_4}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x, \\ &\quad -\delta k\left[\varphi_x^2(L,t)+\varphi_x^2(0,t)\right]+\delta C_2\int_0^L\left[\varphi_t^2+\varphi_x^2+\psi_x^2\right]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Pela desigualdade de Young, Corolário 1.13, na expressão indicada por II, acima, para $\delta k > 0$ existe uma constante $C_\delta > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}\left[\left(\widetilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\varphi_x\right]_{x=0}^{x=L} \;&\leq\; \delta k\left[\varphi_x^2(L,t)+\varphi_x^2(0,t)\right] \\ &\quad +C_\delta\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\ &\quad +C_\delta\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Por outro lado, como

$$-\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{k}{2}\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x - k\int_0^L \varphi_x\psi\,\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x,$$

a desigualdade de Young, Corolário 1.13, para $\frac{k}{4}$, e a desigualdade de Poincáre , Teorema 1.40, implicam que existe uma constante $C_0>0$, tal que

$$-\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{k}{4}\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x + C_0\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

Substituindo (4.29) e (4.30) na desigualdade (4.28), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_3(t) \;\le\;& -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x - \left(\frac{k}{4} - N_3\epsilon_4 - \delta C_2\right)\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x\\ &+ (C_0 + N_3C_{\epsilon_4} + \delta C_2)\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x + (\epsilon_3 + \delta C_2)\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x\\ &+ (\rho_2 + N_3C_2)\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x + (C_{\epsilon_3} + N_3C_{\epsilon_4})\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\ &+C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\ &- (N_3 - C_\delta)\left(\widetilde{b}\psi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L,s)\,\mathrm{d}s\right)^2\\ &- (N_3 - C_\delta)\left(\widetilde{b}\psi_x(0,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0,s)\,\mathrm{d}s\right)^2.\end{aligned}$$

Escolhemos $\delta>0$ de tal forma que

$$\delta C_2 < \min\left\{\frac{k}{8}\;,\;\epsilon_3\right\},$$

e depois tomando $N_3>0$ suficientemente grande de modo que

$$N_3 > C_\delta.$$

Da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_3(t) \;\le\;& -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x - \left(\frac{k}{8} - N_3\epsilon_4\right)\int_0^L \varphi_x^2\,\mathrm{d}x\\ &+ \left(C_0 + N_3C_{\epsilon_4} + \frac{k}{8}\right)\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x + 2\epsilon_3\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x\\ &+ (\rho_2 + N_3C_2)\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x + (C_{\epsilon_3} + N_3C_{\epsilon_4})\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\ &+C_{\epsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Agora, fixando ϵ_4, dado no Lema 4.6, de maneira que

$$0 < \epsilon_4 < \frac{k}{8N_3}.$$

Segue da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_3(t) \;\; \leq \;\; & -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x + 2\epsilon_3\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x \\
& + \left(C_0 + N_3C_{\epsilon_4} + \frac{k}{8}\right)\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x + (\rho_2 + N_3C_2)\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x \\
& + (C_{\epsilon_3} + N_3C_{\epsilon_4})\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \\
& + C_{\epsilon_3}\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

por fim basta tomar

$$\tau = 2\epsilon_3$$

e a constante

$$C_\tau = C_0 + N_3C_{\epsilon_4} + \frac{k}{8} + \rho_2 + N_3C_2 + C_{\epsilon_3}$$

para obtermos a desigualdade desejada. □

Definamos o seguinte funcional

$$F_4(t) := -\int_0^L \left[\rho_1\varphi_t\varphi + \rho_2\psi_t\psi\right]\,dx \tag{4.31}$$

Lema 4.8. *Existe uma constante $C_3 > 0$ de modo que*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4(t) \;\; \leq \;\; & -\rho_1\int_0^L \varphi_t^2\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx \\
& + C_3\int_0^L \left[\psi_x^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando $F_4(t)$ em relação a t obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4(t) = -\int_0^L \rho_1\varphi_{tt}\varphi\,dx - \rho_1\int_0^L \varphi_t^2\,dx - \int_0^L \rho_2\psi_{tt}\psi\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,dx.$$

Substituindo $\rho_1\varphi_{tt}$ e $\rho_2\psi_{tt}$, dados por (4.1) e (4.2), respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4(t) \;\; = \;\; & -k\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\varphi\,dx - \rho_1\int_0^L \varphi_t^2\,dx - \widetilde{b}\int_0^L \psi_{xx}\psi\,dx \\
& - \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}\,\mathrm{d}s\right)\psi\,dx + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,dx.
\end{aligned}$$

Por integração por partes, lembrando as condições de fronteiras dadas por (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4(t) &= -\rho_1\int_0^L \varphi_t^2\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx\\ &\quad +\widetilde{b}\int_0^L \psi_x^2\,dx + \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)\psi_x\,dx.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4(t) &\le -\rho_1\int_0^L \varphi_t^2\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx\\ &\quad +\widetilde{b}\int_0^L \psi_x^2\,dx + \left[\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x\,\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Segue da Proposição 2.3 e da desigualdade de Young, Corolário 1.13, que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4(t) &\le -\rho_1\int_0^L \varphi_t^2\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx\\ &\quad +C_3\int_0^L\left[\psi_x^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

para uma constante positiva C_3. □

Proposição 4.9. *Como nos lemas anteriores, existe uma contanste $C'_\tau > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{F_3(t)+\frac{2\tau}{\rho_1}F_4(t)\right\} &\le -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x - \tau\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x + C'_\tau\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad +C'_\tau\int_0^L\left[\psi_t^2\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Demonstração. Segue dos Lemas 4.7 e 4.8 que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{F_3(t)+\frac{2\tau}{\rho_1}F_4(t)\right\} &\le -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x - \left(\frac{k}{4}-\frac{2\tau k}{\rho_1}\right)\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad -\tau\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x + \left(C_\tau - \frac{2\tau\rho_2}{\rho_1}\right)\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad +\left(C_\tau + \frac{2C_3\,\tau}{\rho_1}\right)\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad +\left(C_\tau + \frac{2C_3\,\tau}{\rho_1}\right)\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\ &\quad +C_\tau\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tomamos ϵ_3 dado no Lema 4.5, satisfazendo

$$0 < 2\epsilon_3 < k_1,$$

de modo que $\tau = 2\epsilon_3$ verifica

$$0 < \tau < \frac{\rho_1}{8}.$$

Denotamos

$$C'_\tau = C_\tau + \frac{2C_3\,\tau}{\rho_1},$$

e daí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{F_3(t) + \frac{2\tau}{\rho_1}F_4(t)\right\} \;\leq\;& -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,\mathrm{d}x - \tau\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x + C'{}_\tau\int_0^L \left[\psi_x^2 + \psi_t^2\right]\,\mathrm{d}x \\ & + C'{}_\tau\int_0^L \left[\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2\,\mathrm{d}s\right]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

De posse dos lemas e proposições anteriores, seremos capazes de provar o resultado principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 4.1

Demonstração. Introduzimos o funcional $\mathcal{L}$ como sendo

$$\mathcal{L}(t) := \varepsilon(t) + \mu\left\{F_3(t) + \frac{2\tau}{\rho_1}F_4(t)\right\}.$$

para algum μ satisfazendo

$$0 < \mu < \frac{\widetilde{b}}{4C'_\tau}, \tag{4.32}$$

onde C'_τ é dado na Proposição 4.9 .

Pelas Proposições (4.4) e (4.9), temos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \;\leq\;& -\underbrace{(\mu\tau - \epsilon_1)}_{\alpha_1}\int_0^L \varphi_t^2\,\mathrm{d}x - \underbrace{\left[\frac{N_2\rho_2 b_0}{2} - (C_{\epsilon_1} + \mu C''{}_\tau)\right]}_{\alpha_2}\int_0^L \psi_t^2\,\mathrm{d}x \\ & - \underbrace{\left(\frac{\widetilde{b}}{2} - CN_2\epsilon_2 - \mu C'{}_\tau\right)}_{\alpha_3}\int_0^L \psi_x^2\,\mathrm{d}x \\ & - \underbrace{\left(\mu\frac{k}{4} - 2N_2\epsilon_2\right)}_{\alpha_4}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$-\underbrace{\left[\frac{N_1 k_1}{2} - (C_1 + N_2 C_{\epsilon_2} + \mu C'_\tau)\right]}_{\alpha_5} \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$$

$$-\underbrace{\left(\frac{N_1 k_1}{2} - \mu C'_\tau\right)}_{\alpha_6} \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

Afim de termos α_1 positivo, fixamos ϵ_1, dado no Lema (4.2), de modo que

$$0 < \epsilon_1 < \mu\tau.$$

Escolhemos $N_2 > 0$, dado em (4.19), satisfazendo

$$N_2 > \frac{2}{\rho_2 b_0} (C_{\epsilon_1} + \mu C'_\tau)$$

de modo que α_2 seja positivo. Agora, devido a (4.32), se escolhermos ϵ_2, dado no Lema (4.3), de modo que

$$0 < \epsilon_2 < \min\left\{\frac{\widetilde{b}}{4C\,N_2}\,,\ \frac{\mu k}{8N_2}\right\},$$

conseguimos $\alpha_3 > 0$ e $\alpha_4 > 0$. Por fim se tomarmos N_1, dado em (4.19), de maneira que

$$N_1 > \frac{2}{k_1} (C_1 + N_2 C_{\epsilon_2} + \mu C'_\tau)$$

conseguimos $\alpha_5 > 0$ e $\alpha_6 > 0$.

Portanto escrevendo $\alpha = \min\limits_{1\le n\le 5}\{\alpha_n\}$ obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \quad \le \quad -\alpha E(t) \quad t > 0,$$

o que implica em

$$\alpha \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}s \le \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t), \quad \forall t \ge 0. \tag{4.33}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, Teorema 1.29, desigualdade de Young, Corolário 1.13 e pelas definições das energias $E(t)$ e $E_2(t)$, aplicados em cada um dos funcionais definidos anteriormente, não é difícil mostrar que existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$L(t) \le \beta\left(E(t) + E_2(t)\right), \qquad \forall t \in [0, \infty).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(0)-\mathcal{L}(t) &\leq |\mathcal{L}(0)|+|\mathcal{L}(t)| \\ &\leq \beta\left[(E(0)+E_2(0))+(E(t)+E_2(t))\right].\end{aligned}$$

Segue do fato que as energias $E(t)$ e $E_2(t)$ são funcionais decrescentes que

$$\mathcal{L}(0)-\mathcal{L}(t) \leq 2\,\beta\,(E(0)+E_2(0))\,, \tag{4.34}$$

para todo t não negativo.

De (4.33) e (4.34) obtemos

$$\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{2\beta}{\alpha}\,(E(0)+E_2(0))\,. \tag{4.35}$$

Como $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leq 0$, $\forall\ t \geq 0$, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{tE(t)\} = E(t) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leq E(t).$$

Denotando $C_4 = \dfrac{2\beta}{\alpha}$, de (4.35) concluimos que

$$E(t) \leq \frac{C_4}{t}\,(E(0)+E_2(0))\,.$$

$\square$

Considerações Finais

Neste trabalho usamos a teoria de semigrupo para provar a existência e unicidade de solução para um sistema de Timoshenko com História o qual representa um modelo para vigas retas de comprimento L. Além disso usamos propriedades do gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema para mostrar que ele é exponencialmente estável se, e só se, $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$. Quando não há estabilidade exponencial mostramos a estabilidade polinomial pelo método da energia.

Referências Bibliográficas

[1] MALACARNE, A. Comportamento Assintótico dos Sistemas de Vigas Viscolelásticas de Timoshenko e de Bresse. Tese de Doutorado, IM/UFRJ, Rio de Janeiro 2014.

[2] RAPOSO, C. A. Problema de Transmissão para o Sistema de Timoshenko com Memória. Tese de Doutorado, IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

[3] FERNANDEZ SARE, H. D. Propriedades Assintóticas e Problemas Inversos para Sistemas de Timoshenko. Tese de Doutorado, IM/UFRJ, Rio de Janeiro 2006.

[4] SOUFYANE, A. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 328, 731-734, 1999.

[5] AMMAR-KHODJA, F.; BENABDALLAH, A.; Rivera,J. E. M. & Racke, R. Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *Journal Differential Equations*, 194 (1) (2003) 82-115.

[6] MUNÕZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. Global stability for damped Timoshenko systems. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9 (6), 1625-1639, 2003.

[7] FERNANDEZ SARE, H. D.; MUNÕZ RIVERA, J. E. Exponential decay of Timoshenko systems with past memory. J. Mathemmatical Analysis and Applications, 339, 482-502, 2008.

[8] RAPOSO, C. A.; FERREIRA, J.; SANTOS, M. L. & Castro, N. N. O. Exponential Stability for the Timoshenko system with two weak dampings, *Applied Mathematics Letters* , 18 (5) (2005) 535-541.

[9] RAPOSO, C. A. The transmission problem for Timoshenkos systems of memory type. *International Journal of Modern Mathematics* , 3 (3) (2008) 271-293.

[10] PAZY, A. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] ZHUANGUY LIU ; SONGMU ZHENG. Semigroups Associeted with Dissipative Systems. Chapman and Hall/CRC, 1999.

[12] BREZIS, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations. Paris: Spinger, 2011.

[13] OLIVEIRA, CÉSAR R. DE. Introdução À Análise Funcional. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[14] MEDEIROS, L. A. da J.; MIRANDA, M. A. M. Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000

[15] ADAMS, R.A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.

[16] BARTLE, R. G. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[17] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev. Maringá: UEM/DMA, Vol. 1, 2000.

[18] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applicatins. New Yourk: John Wiley & Sons. Inc, 1978.

[19] GOMES. A. M. Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicaçoes às Equações de Evolução. Rio de Janeiro: UFRJ. IM , 200

[20] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. Introdução à Análise Funcional. Maringá: UEM/DMA, 2007.

[21] BOTELHO, G.; PELLEGRINO D.; TEIXEIRA. E. Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2012

[22] PRÜSS J. On the Spectrum of C_0-Semigroups. Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro.2, pp 847-857, 1983.

[23] PRÜSS J.; BÁTKAI A.; ENGEL K.; SCHNAUBELT R. Polynomila Stability of Operator Semigroups. Math. Nachr. Vol. 279, (1), pages 1425-1440, 2006.

[24] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of funcions and operator semigroup. Math. Ann.,347,455-478, 2000.

[25] TEMAN, R. Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis. New York, American Mathamatical Society, 2001.