

LIZETH GABRIELA CRUZ VALDIVIA

**CATEGORIFICAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL
DA ÁLGEBRA DE WEYL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

C957c Cruz Valdivia, Lizeth Gabriela, 1988-
2015 Categorificação da representação polinomial da álgebra
de Weyl / Lizeth Gabriela Cruz Valdivia. - Viçosa, MG, 2015.
vi, 68f. ; 29 cm.

Orientador : Marinês Guerreiro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Viçosa.
Referências bibliográficas: f.67-68.

1. Álgebra. 2. Categorificação. 3. Weyl, Álgebra de.
4. Grothendieck, Grupo de. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 512

LIZETH GABRIELA CRUZ VALDIVIA

**CATEGORIFICAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL
DA ÁLGEBRA DE WEYL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de Fevereiro de 2015.

Viktor Bekkert

Abílio Lemos Cardoso Júnior

Marinês Guerreiro
(Orientadora)

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por estar comigo e iluminar meu caminho cada dia.

Aos meus pais, Francisca e Hector, pelo incentivo, o carinho, a compreensão e o apoio incondicional. Aos meus irmãos, Hector e Alejandro.

Às minhas tias, Doris e Antonia, obrigada pelos concelhos e o apoio.

A Enoch, Bulmer e suas famílias pela acolhida nesta cidade e neste país, a amizade e o apoio.

À minha orientadora, Marinês Guerreiro, pela orientação, o apoio e pelos concelhos.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática, principalmente a Rogeiro e Simone, dos quais aprendi muito, e João pela ajuda e pela boa disposição de todos eles.

Aos meus amigos e colegas do mestrado. Aos das turmas anteriores pela acolhida. Aos que começaram este caminho comigo e principalmente a Taís, Eliana, Cristiane, Dayane, Flavio, Glelson, Lazaro e Marcelo, Priscila e Sabrina pela amizade, por todos os momentos juntos, o apoio, a companhia e por serem minha família aqui.

Aos membros da banca examinadora dessa dissertação pela leitura e pelas sugestões para este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Módulos sobre álgebras associativas	4
1.1.1 Álgebras associativas e seus módulos	4
1.1.2 Álgebras de dimensão finita	8
1.2 Categorias	9
1.2.1 Produto e coproduto	12
1.2.2 Funtores e transformações naturais	13
1.2.3 Funtor adjunto	17
1.3 Categorias aditivas	19
2 O grupo de Grothendieck	22
2.1 Operações binárias em categorias	22
2.2 O grupo de Grothendieck	26
2.3 O grupo de Grothendieck cindido	33
3 Álgebra de Weyl e álgebra nilcoxeter	41
3.1 Álgebra de Weyl	41
3.2 A álgebra nilcoxeter	47
4 Categorificação da representação polinomial da álgebra de Weyl	56
4.1 Categorificação fraca	56
4.2 Categorificação da representação polinomial	57
Considerações Finais	66

Resumo

CRUZ VALDIVIA, Lizeth Gabriela, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2015. **Categorificação da representação polinomial da álgebra de Weyl.** Orientadora: Marinês Guerreiro.

Neste trabalho apresentamos uma categorificação da álgebra de Weyl, a partir de um estudo introdutório da Teoria de Categorificação Algébrica, que envolve conceitos básicos de categorias e funtores, com o objetivo de construir os grupos de Grothendieck. Fazemos também um estudo mais detalhado da categorificação de representações polinomiais da álgebra de Weyl que são realizadas por funtores indução e restrição de categorias apropriadas.

Abstract

CRUZ VALDIVIA, Lizeth Gabriela, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2015. **Categorification of the representation polynomial on the algebra of Weyl.** Adviser: Marinês Guerreiro.

In this dissertation we present a categorification of the Weyl algebra from an introductory study of the Theory of Algebraic Categorification involving basic concepts of categories and functors, with the objective of constructing the Grothendieck groups. We also present a detailed study of the categorification of the polynomial representations of Weyl algebra which are done by induction and restriction functors of appropriate categories.

Introdução

O termo *categorificação* foi introduzido por Louis Crane em *Clock and category: is quantum gravity algebraic?* [7], em 1995, e a ideia se originou no seu trabalho anterior *Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases* [6] publicado no *Topology and Physics*, em 1994.

A ideia de categorificação no estudo de um objeto é a de dotá-lo de uma estrutura mais complexa e que seja de utilidade no estudo do objeto original, daí que o tipo de estrutura depende diretamente do objeto que está sendo estudado. Por outro lado, a ideia de decategorificação, que às vezes pode ser considerada como a ideia oposta a de categorificação, é a de estudar um objeto algébrico deixando de lado sua estrutura, ou seja, estudando só o objeto em sua essência.

Uma estrutura importante na Teoria de Categorificação é o chamado *grupo de Grothendieck* de uma categoria aditiva que é um grupo abeliano associado a uma categoria aditiva por uma propriedade universal de funções aditivas.

Mais precisamente, seja C uma categoria aditiva pequena com conjunto de objetos $\text{Ob}(C)$ e seja G um grupo abeliano. Uma função $\phi : \text{Ob}(C) \rightarrow G$ é dita *aditiva* se, para cada sequência exata $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ em C , a relação $\phi(M) = \phi(L) + \phi(N)$ é válida. Existe um grupo $G_0(C)$, chamado *grupo de Grothendieck* de C , e uma função aditiva $\varphi : \text{Ob}(C) \rightarrow G_0(C)$, conhecida como *função universal*, tal que, para cada função aditiva $\text{Ob}(C) \rightarrow G$, existe um único homomorfismo de grupos $f : G_0(C) \rightarrow G$ tal que $\phi = f \circ \varphi$.

Esta construção foi primeiramente estudada por A. Grothendieck para categorias de feixes sobre esquemas coerentes e localmente livres ao provar o Teorema de Riemann-Roch. O grupo $G_0(C)$ é definido de modo único (a menos de isomorfismo) e pode ser apresentado por geradores $[L]$, para cada $L \in \text{Ob}(C)$, e pelas relações $[L] - [N] - [M]$, para cada sequência exata $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$.

Um resultado importante em Cálculo de uma variável é a chamada regra do produto, isto é, para dois polinômios (ou mais geralmente, duas funções) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vale:

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial}{\partial x}(f) \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g).$$

Acontece que esta fórmula, intrínseca ao Cálculo, tem muitas propriedades

algébricas interessantes. Se $K[x]$ denota o anel de polinômios em uma indeterminada sobre um corpo K de característica zero, a diferenciação (na variável x) pode ser considerada como uma função $\partial : K[x] \rightarrow K[x]$ que é um endomorfismo K -linear de espaços vetoriais. Pode-se também definir outro endomorfismo k -linear X por multiplicação à esquerda por x , isto é, $X(f) = xf$.

Considere a expressão $(\partial \cdot X)f(x)$, que expandida nos dá

$$(\partial \cdot X)f(x) = \partial(xf(x)).$$

Aplicando a regra do produto, temos

$$(\partial \cdot X)f(x) = \partial(x)f(x) + x\partial f(x) = f(x) + (X \cdot \partial)f(x),$$

que implica, no anel dos endomorfismos k -lineares de $K[x]$, a igualdade

$$\partial \cdot X = X \cdot \partial + 1,$$

onde 1 denota a função identidade. Esta é a relação que define a *primeira álgebra de Weyl*, que pode ser vista como o anel dos operadores diferenciais sobre $K[x]$ com coeficientes polinomiais. Existem também álgebras de Weyl de ordem maior relacionadas aos anéis de polinômios em n indeterminadas.

As álgebras de Weyl ocorrem em muitos contextos, notavelmente como quociente de álgebras envelopantes universais de certas álgebras de Lie de dimensão finita (originadas a partir de grupos de Heisenberg), as quais estão vinculadas à Mecânica Quântica.

Para os propósitos deste projeto, definimos a álgebra de Weyl W como a álgebra associativa unitária sobre $\mathbb{Z}$ com geradores X e ∂ e relação definidora $\partial X = X\partial + 1$.

Seja $R_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial gerado por $x^0, x^1, x^2, \dots$. Existe uma ação natural de W sobre $R_{\mathbb{Q}}$ dada por

$$\begin{aligned} X \cdot x^n &= x^{n+1}, \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots, \\ \partial \cdot x^0 &= 0 \quad \text{e} \\ \partial \cdot x^n &= nx^{n-1}, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Os subgrupos abelianos

$$R = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{x^n/n!\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad R' = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$$

de $R_{\mathbb{Q}}$ são W -submódulos de $R_{\mathbb{Q}}$. O módulo $R_{\mathbb{Q}}$ é importante por várias razões. Em particular, é fiel e irredutível e é o único $(W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ -módulo gerado por um elemento (o elemento $x^0 \in R_{\mathbb{Q}}$) anulado por ∂ .

Nosso objetivo neste trabalho é categorificar a ação da álgebra de Weyl W sobre os módulos R e R' . Para isto utilizaremos certos módulos sob a ação das álgebras nilcoxeter que são generalizações das álgebras de grupo simétrico S_n e calcularemos seus grupos de Grothendieck. A categorificação procurada será então realizada por funtores indução e restrição de categorias apropriadas [10].

O trabalho está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 1, estabelecemos a notação e apresentamos conceitos e resultados preliminares sobre módulos sobre álgebras associativas e da Teoria de Categorias, que são a base de conhecimentos para o desenvolvimento do tema principal.

No Capítulo 2, definimos operações binárias em categorias e estudamos suas propriedades para depois descrever a construção e algumas particularidades do grupo de Grothendieck de uma categoria em relação a uma operação binária. Apresentamos também o grupo de Grothendieck em relação ao coproduto binário, chamado *grupo de Grothendieck cindido* que é o grupo calculado na categorificação da álgebra de Weyl.

No Capítulo 3, introduzimos a definição e algumas propriedades da álgebra de Weyl, cuja categorificação é o objetivo deste trabalho, e também da álgebra nilcoxeter que é uma das ferramentas principais para esta categorificação.

Finalmente, no Capítulo 4, definimos a noção de categorificação fraca para depois, fazendo uso dos conceitos vistos nos capítulos anteriores, categorificar a álgebra de Weyl. Primeiro apresentamos uma categorificação ingênua para posteriormente transformá-la numa categorificação fraca e, por último, justificar o porque não é possível torná-la forte.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho, principalmente a respeito de Módulos sobre álgebras associativas e da Teoria de Categorias que são a base para os temas dos capítulos seguintes. As principais referências para as demonstrações que são omitidas são [4] [8] [9] e [15].

1.1 Módulos sobre álgebras associativas

Nesta seção vamos rever algumas das principais propriedades de módulos sobre álgebras associativas que serão utilizadas no processo de categorificação da álgebra de Weyl, que é o principal objetivo deste trabalho. Nas seções seguintes introduzimos a Teoria de Categorificação em um contexto mais geral.

1.1.1 Álgebras associativas e seus módulos

Seja K um corpo arbitrário.

Definição 1.1.1. *Seja R um anel. Um **R -módulo** à esquerda é um grupo abeliano M junto com uma função*

$$\begin{aligned} f &: R \times M \longrightarrow M \\ (r, a) &\longmapsto r \cdot a \end{aligned}$$

tal que:

$$r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b, \quad (r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a \quad e \quad (rs) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)$$

Definição 1.1.2. *Seja M um R -módulo. Um **submódulo** de M é um subgrupo A de M tal que $r \cdot a \in A$, para todo $r \in R$ e todo $a \in A$.*

Definição 1.1.3. *Seja R um anel comutativo. Uma R -álgebra associativa é um anel B que é também um R -módulo e tal que a multiplicação do anel é R -bilinear, isto é,*

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \text{ para todos } \alpha \in R, a, b \in B.$$

*Dizemos que B é **unitária** se ela contém um elemento 1 (denotado por 1_B quando existir chance de confusão) tal que*

$$1 b = b = b 1, \text{ para todo } b \in B.$$

Se B é comutativa (visto como um anel), dizemos que é uma R -álgebra comutativa.

Exemplo 1.1.4. *Uma $\mathbb{Z}$ -álgebra é o mesmo que um anel.*

Neste trabalho, estaremos mais interessados no caso de álgebras sobre um corpo K .

Exemplo 1.1.5. *Seja G um grupo. Definimos a **álgebra de grupo** $K[G]$ de tal modo que, como um K -módulo, $K[G]$ é o K -espaço vetorial com base G e a multiplicação é dada por*

$$(\alpha_1 g_1)(\alpha_2 g_2) = (\alpha_1 \alpha_2)(g_1 g_2), \text{ para todos } \alpha_1, \alpha_2 \in K, g_1, g_2 \in G,$$

estendida por linearidade para todos os elementos de $K[G]$.

Exemplo 1.1.6. *Se V é um K -espaço vetorial, então $\text{End } V$ é uma álgebra, considerando as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e definindo a multiplicação pela composição de endomorfismos. Esta é chamada a **álgebra de endomorfismos** de V .*

Definição 1.1.7. *Um **homomorfismo de álgebras** entre duas R -álgebras associativas é um homomorfismo de anéis R -linear. No caso de um homomorfismo ψ de R -álgebras associativas **unitárias**, também se exige que $\psi(1) = 1$.*

Daqui até o restante desta seção, fixaremos uma K -álgebra associativa unitária B .

Definição 1.1.8. *Uma **representação** de B é um homomorfismo de K -álgebras unitárias $B \rightarrow \text{End } V$, para algum K -módulo V .*

Definição 1.1.9. Um ***B*-módulo à esquerda** (resp. à direita) é simplesmente um *B*-módulo à esquerda (resp. à direita) para o anel subjacente à estrutura de álgebra de *B*.

Observação 1.1.10. Um *B*-módulo à esquerda *M* é também um *K*-módulo com a ação

$$\alpha m = (\alpha 1_B)m, \text{ para todos } \alpha \in K, m \in M,$$

(e similarmente para *B*-módulos à direita).

Definição 1.1.11. Um módulo é **simples** se ele não possui submódulos próprios não-nulos.

Exemplo 1.1.12. O único *K*-módulo simples (a menos de isomorfismo) é o espaço vetorial unidimensional *K*.

Suponha que *M* é um *B*-módulo simples e seja *m* um elemento não-nulo arbitrário de *M*. Então $Bm = \{bm \mid b \in B\}$ é um submódulo não-nulo de *M*. Como *M* é simples, temos $Bm = M$. Portanto, *M* é gerado por qualquer elemento não-nulo. Agora, considere o homomorfismo de *B*-módulos

$$\begin{aligned} f &: B \longrightarrow M \\ b &\longmapsto b \cdot m. \end{aligned}$$

Note que *f* é sobrejetivo e assim, pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo, temos $M \cong B/\text{Ker } f$ como *B*-módulos. Sendo *M* simples, $\text{Ker } f$ é um ideal à esquerda maximal de *B*. Desse modo, concluímos que todos os *B*-módulos simples são isomorfos a quocientes de *B* por ideais maximais.

Definição 1.1.13. Um *B*-módulo é **finitamente gerado** se ele possui um conjunto gerador finito.

As noções de representações de *B* e de *B*-módulos à esquerda são equivalentes [8, Definition 10.17]. Usaremos algumas vezes esses termos como sinônimos. Além disso, quando escrevermos *B*-módulo, sem especificar à esquerda ou à direita, deve-se entender *B*-módulo à esquerda.

Definição 1.1.14. Uma **sequência exata curta** de módulos é uma sequência de homomorfismos de *B*-módulos

$$0 \xrightarrow{\psi_0} M_1 \xrightarrow{\psi_1} M_2 \xrightarrow{\psi_2} M_3 \xrightarrow{\psi_3} 0$$

tal que $\text{Im } \psi_i = \text{Ker } \psi_{i+1}$, para $i = 0, 1, 2$. Dizemos que a sequência **cinde** (e que ela é uma **sequência exata cindida**) se uma das duas seguintes condições equivalentes ocorrer:

- (a) existe um homomorfismo de B -módulos $\varphi_1 : M_2 \rightarrow M_1$ tal que $\varphi_1 \psi_1 = \text{id}_{M_1}$;
- (b) existe um homomorfismo de B -módulos $\varphi_2 : M_3 \rightarrow M_2$ tal que $\psi_2 \varphi_2 = \text{id}_{M_3}$.

Neste caso, dizemos que $M_2 \cong M_1 \oplus M_3$.

Definição 1.1.15. Um B -módulo P é **projetivo** se toda sequência exata curta da forma

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

(onde M e N são B -módulos) é uma sequência exata cindida.

Um B -módulo P é projetivo se, e somente se, for um somando direto de um módulo livre (em particular, módulos livres são projetivos). Outra caracterização dos módulos projetivos é a seguinte: o funtor $\text{Hom}(M, -)$ da categoria dos B -módulos na a categoria dos grupos abelianos é sempre exato à esquerda (para qualquer B -módulo M). Ele também é exato à direita (e portanto exato) se, e somente se, M é projetivo [16, Theorem 6.2].

Definição 1.1.16. Um submódulo N de um B -módulo M é **supérfluo** se, para qualquer outro submódulo H de M , a igualdade $N + H = M$ implica $H = M$. Um **epimorfismo súperfluo** de B -módulos é um epimorfismo $p : M \rightarrow N$ cujo núcleo é um submódulo súperfluo de M .

Exemplo 1.1.17. O submódulo nulo é sempre súperfluo. Um B -módulo não-nulo M nunca é súperfluo em si mesmo (tome $H = 0$ na definição de um módulo súperfluo).

Definição 1.1.18. Seja M um B -módulo. Uma **cobertura projetiva** de M é um módulo projetivo P , junto com um epimorfismo súperfluo $P \rightarrow M$ de B -módulos.

Quando existe, a cobertura projetiva associada a um epimorfismo súperfluo de um dado módulo M é única a menos de isomorfismo. Em geral, coberturas projetivas (de módulos sobre anéis ou álgebras arbitrários) não necessariamente existem.

Exemplo 1.1.19. *Qualquer módulo projetivo é uma cobertura projetiva de si mesmo. Por exemplo, a cobertura projetiva de qualquer K -módulo V é V .*

Utilizaremos muitas vezes a noção de um **produto tensorial externo**. Se A e B são ambas K -álgebras associativas unitárias, M é um A -módulo e N é um B -módulo, então $M \otimes_K N$ é um $(A \otimes_K B)$ -módulo via a ação

$$(a \otimes b)(m \otimes n) = (am) \otimes (bn), \text{ para todos } a \in A, b \in B, m \in M, n \in N,$$

estendida por linearidade.

Definição 1.1.20. *Um B -módulo M é **plano** se o funtor $M \otimes_B -$ leva seqüências exatas de B -módulos em seqüências exatas de grupos abelianos.*

1.1.2 Álgebras de dimensão finita

Nesta seção, consideramos B uma K -álgebra associativa unitária de dimensão finita (ou seja, uma K -álgebra unitária de dimensão finita como K -espaço vetorial) e enunciamos algumas propriedades que são relevantes para este trabalho. Assumimos também que todos os módulos são finitamente gerados.

Proposição 1.1.21. *Seja B uma K -álgebra associativa unitária de dimensão finita. Temos as seguintes propriedades:*

- (a) [3, Theorem I.4.2] *Todo B -módulo à esquerda (resp. à direita) possui uma cobertura projetiva.*
- (b) [1, Theorem 28.4] *Todo B -módulo plano à esquerda (resp. à direita) é projetivo.*
- (c) [3, Proposition I.3.1] *A álgebra B possui um número finito de módulos simples não-isomorfos.*
- (d) [3, Corollary I.4.5] *As coberturas projetivas dos módulos simples (não-isomorfos) fornecem uma lista completa de B -módulos projetivos indecomponíveis não-isomorfos.*

Observação 1.1.22. [1, Proposition 19.16] *Como módulos projetivos são sempre planos, as noções de B -módulos planos e B -módulos projetivos são equivalentes.*

Lema 1.1.23. *Seja V um B -módulo simples com cobertura projetiva P . Então, para qualquer B -módulo simples W , temos um isomorfismo de K -módulos*

$$\mathrm{Hom}_B(P, W) \cong \mathrm{Hom}_B(V, W) = \begin{cases} \mathrm{End}_B(V), & \text{se } W \cong V \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $W \cong V$ refere-se a isomorfismo de B -módulos.

Definição 1.1.24. *Uma álgebra associativa B é chamada **simples** se ela não possui ideais (bilaterais) próprios não-triviais.*

Observação 1.1.25. *Note que se B é uma álgebra associativa unitária não-nula, então a segunda condição da definição é automaticamente satisfeita.*

Exemplo 1.1.26. *A álgebra das matrizes $n \times n$ ($n \geq 1$) com entradas em K é uma K -álgebra simples.*

Definição 1.1.27. *Uma álgebra associativa unitária de dimensão finita é **semisimples** se ela é isomorfa a um produto cartesiano de subálgebras simples. Um módulo sobre uma álgebra associativa é **semissimples** se ele é isomorfo a uma soma direta de submódulos simples.*

Lema 1.1.28 (Teorema de Maschke). *Sejam G um grupo finito e K um corpo cuja característica não divida a ordem de G . Então a álgebra de grupo $K[G]$ é semissimples.*

Proposição 1.1.29. [2, Théorème VI.7.1] *Suponha que B é uma álgebra associativa unitária semissimples de dimensão finita. Então:*

- (a) Todos os B -módulos são semissimples.
- (b) Todos os B -módulos não nulos são projetivos. Em particular, todo B -módulo é a sua própria cobertura projetiva.

1.2 Categorias

Definição 1.2.1. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ é uma classe de objetos junto com:*

1. *uma classe de conjuntos disjuntos, denotados por $\mathrm{Hom}(a, b)$, para cada par de objetos a, b em $\mathcal{C}$;*
2. *para cada tripla (a, b, c) de objetos de $\mathcal{C}$, uma função*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(b, c) \times \mathrm{Hom}(a, b) &\rightarrow \mathrm{Hom}(a, c) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

que satisfaz os axiomas:

(i) Se $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ e $h : c \rightarrow d$ são morfismos de $\mathcal{C}$, então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ii) Para cada objeto b de $\mathcal{C}$ existe um morfismo $id_b : b \rightarrow b$ tal que, para todos $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$, temos

$$id_b \circ f = f \quad e \quad g \circ id_b = g.$$

Definição 1.2.2. Um morfismo $f : c \rightarrow d$ em uma categoria $\mathcal{C}$ é uma **isomorfismo** se existe um morfismo $g : d \rightarrow c$ tal que $f \circ g = id_d$ e $g \circ f = id_c$.

Dizemos que c e d são **isomorfos** se existe um isomorfismo de c em d .

Exemplo 1.2.3. A categoria Set

- *Objetos:* Todos os conjuntos.
- *Morfismos:* $Hom(a, b)$ é o conjunto de todas as funções de conjuntos de a em b .

Exemplo 1.2.4. A categoria $\mathcal{G}$

- *Objetos:* Todos os grupos.
- *Morfismos:* $Hom(a, b)$ é o conjunto de todos os homomorfismos de grupos de a em b .

Exemplo 1.2.5. Seja B uma álgebra. A categoria $B\text{-mod}$, é tal que

- *Objetos:* Todos os B -módulos finitamente gerados.
- *Morfismos:* $Hom(a, b)$ é o conjunto de todos os homomorfismos de B -módulos de a em b .

Exemplo 1.2.6. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A **categoria oposta** de $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{C}^{op}$, é tal que:

- *Objetos de $\mathcal{C}^{op}$:* Objetos em $\mathcal{C}$
- *Morfismos:* $f^{op} : c' \rightarrow c$, com c e c' objetos em $\mathcal{C}^{op}$, para cada $f : c \rightarrow c'$ morfismo em $\mathcal{C}$.
- *A composição é dada por $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.*

Exemplo 1.2.7. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A categoria de morfismos de $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{C}^\rightarrow$, é tal que:*

- *Objetos de $\mathcal{C}^\rightarrow$: Morfismos em $\mathcal{C}$*
- *Morfismos em $\mathcal{C}^\rightarrow$: $\text{Hom}(f, f') = \{(g, g') \mid g, g' \in \text{Ob } \mathcal{C} \text{ e } f' \circ g = g' \circ f\}$.*
- *Para cada $f : a \longrightarrow b$ morfismo em $\mathcal{C}$, $\text{id}_f = (\text{id}_a, \text{id}_b)$ em $\mathcal{C}^\rightarrow$.*
- *A composição é dada por $(f, f') \circ (g, g') = (f \circ g, f' \circ g')$.*

Definição 1.2.8. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma **subcategoria** de $\mathcal{C}$ se:*

- $\text{Ob } \mathcal{D} \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$.
- $\text{Mor } \mathcal{D} \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$.
- *Para cada $a \in \text{Ob } \mathcal{D}$, temos $\text{id}_a \in \text{Mor } \mathcal{D}$.*
- *Para cada f, g par componível de morfismos em $\mathcal{D}$, temos $g \circ f \in \text{Mor } \mathcal{D}$.*
- *A composição em $\mathcal{D}$ é dada pela composição em $\mathcal{C}$.*

Além disso, se $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(a, b) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$, para todos $a, b \in \text{Ob } \mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ é uma **subcategoria plena** de $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.2.9. *A categoria Ring de todos os anéis, é uma subcategoria da categoria dos grupos abelianos Ab , pois*

- $\text{Ob } \text{Ring} \subseteq \text{Ob } \text{Ab}$.
- $\text{Mor } \text{Ring} \subseteq \text{Mor } \text{Ab}$.
- *Para cada $a \in \text{Ob } \text{Ring}$, temos $\text{id}_a \in \text{Mor } \text{Ring}$.*
- *$g \circ f \in \text{Mor } \text{Ring}$, para todos $f, g \in \text{Mor } \text{Ring}$.*
- *A composição em Ring e em Ab é a mesma.*

Mas, como a inclusão $\text{Hom}_{\text{Ring}}(a, b) \subset \text{Hom}_{\text{Ab}}(a, b)$ é própria, Ring não é uma subcategoria plena de Ab .

Exemplo 1.2.10. A categoria $B - \text{pmod}$, de todos os B -módulos projetivos finitamente gerados é uma subcategoria plena da categoria $B - \text{mod}$ de todos os B -módulos finitamente gerados.

Definição 1.2.11. Uma categoria $\mathcal{C}$ é **pequena** se ambos $\text{Ob } \mathcal{C}$ e $\text{Mor } \mathcal{C}$ são conjuntos.

Definição 1.2.12. Uma categoria $\mathcal{D}$ é uma **subcategoria esqueleto** ou **esqueleto** da categoria $\mathcal{C}$ se:

- $\mathcal{D}$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$.
- Cada objeto de $\mathcal{C}$ é isomorfo a um objeto de $\mathcal{D}$.
- Dois objetos diferentes em $\mathcal{D}$ não são isomorfos.

Definição 1.2.13. Uma categoria é **essencialmente pequena** se tem esqueleto pequeno.

1.2.1 Produto e coproduto

Definição 1.2.14. Um **produto** da família $\{a_i / i \in I\}$ de objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ é um objeto de $\mathcal{C}$, denotado por $\prod_{i \in I} a_i$, junto com uma família de morfismos $\{\pi_i : p \rightarrow a_i / i \in I\}$, tais que, para cada objeto b de $\mathcal{C}$ e cada família de morfismos em $\mathcal{C}$ $\{\varphi_i : b \rightarrow a_i / i \in I\}$, existe um único morfismo $\varphi : b \rightarrow \prod_{i \in I} a_i$ tal que $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$, para cada $i \in I$, ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} a_i & \xrightarrow{\pi_i} & a_i \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \varphi_i \\ & & b \end{array}$$

Definição 1.2.15. Um **coproduto** da família $\{a_i / i \in I\}$ de objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ é um objeto de $\mathcal{C}$, denotado por $\coprod_{i \in I} a_i$, junto com $\{\iota_i : a_i \rightarrow s / i \in I\}$, família de morfismos, tais que, para cada objeto b e cada família de morfismos $\{\psi_i : a_i \rightarrow b / i \in I\}$, existe um único morfismo $\psi : \coprod_{i \in I} a_i \rightarrow b$ tal que $\psi \circ \iota_i = \psi_i$,

para cada $i \in I$, ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} a_i & \xrightarrow{\iota_i} & \prod_{i \in I} a_i \\ \psi_i \downarrow & \swarrow \psi & \\ b & & \end{array}$$

Teorema 1.2.16. [9, Theorem I.7.3] Se $(p, \{\pi_i\})$ e $(q, \{\psi_i\})$ são dois produtos (respectivamente, coprodutos) da família $\{a_i / i \in I\}$ de objetos em uma categoria $\mathcal{C}$, então p e q são isomorfos.

Lema 1.2.17. [13, Lemma 1.3.6] Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $a, b, c \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

(i) Se $a \amalg b$ existe, então $a \amalg b \cong b \amalg a$.

(ii) Se $a \amalg b$, $b \amalg c$, $a \amalg (b \amalg c)$ e $(a \amalg b) \amalg c$ existem, então

$$a \amalg (b \amalg c) \cong (a \amalg b) \amalg c.$$

Definição 1.2.18. Um objeto i em uma categoria $\mathcal{C}$ é dito **inicial** se, para cada objeto c em $\mathcal{C}$, existe um, e só um, morfismo $i \rightarrow c$.

Um objeto t de $\mathcal{C}$ é dito **final** se, para cada objeto c em $\mathcal{C}$, existe um, e só um, morfismo $c \rightarrow t$.

Um objeto de $\mathcal{C}$ que é inicial e final é chamado **objeto zero**.

Teorema 1.2.19. [9, Theorem I.7.10] Quaisquer dois objetos iniciais (finais) em uma categoria $\mathcal{C}$ são isomorfos.

Lema 1.2.20. [13, Lemma 1.3.4] Se t é um objeto final em uma categoria $\mathcal{C}$, então $a \amalg t \cong a$, para cada $a \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

1.2.2 Funtores e transformações naturais

Definição 1.2.21. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um **funtor covariante** $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um par de funções, ambas denotadas por T , a saber:

(i) uma função que associa a cada objeto c em $\mathcal{C}$ um objeto $T(c)$ em $\mathcal{D}$ e

(ii) uma função que associa a cada morfismo $f : a \rightarrow b$ em $\mathcal{C}$ um morfismo

$T(f) : T(a) \rightarrow T(b)$ em $\mathcal{D}$, conforme ilustrado no diagrama

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{T} & T(a) \\ f \downarrow & & \downarrow T(f) \\ b & \xrightarrow{T} & T(b) \end{array}$$

tais que:

- $T(id_c) = id_{T(c)}$, para cada morfismo id_c em $\mathcal{C}$,
- $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$, para cada par de morfismos f, g de $\mathcal{C}$, quando a composta estiver definida.

O gráfico abaixo ilustra a composição dos morfismos imagens via o funtor covariante T .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g \circ f & & \\
 a & \xrightarrow{\quad f \quad} & b & \xrightarrow{\quad g \quad} & c \\
 \downarrow T & & \downarrow T & & \downarrow T \\
 T(a) & \xrightarrow{\quad T(f) \quad} & T(b) & \xrightarrow{\quad T(g) \quad} & T(c) \\
 & & T(g \circ f) & &
 \end{array}$$

Exemplo 1.2.22. Seja a um objeto fixo em uma categoria $\mathcal{C}$. O funtor covariante h_a , chamado funtor covariante Hom , da categoria $\mathcal{C}$ na categoria Set dos conjuntos, associa a cada objeto c de $\mathcal{C}$ o conjunto $h_a(c) = Hom_{\mathcal{C}}(a, c)$ de todos os morfismos de a em c na categoria $\mathcal{C}$.

Para cada objeto c' em $\mathcal{C}$, se $f : c \rightarrow c'$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, então h_a é a função de conjuntos

$$\begin{array}{ccc}
 h_a(f) : Hom_{\mathcal{C}}(a, c) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(a, c') \\
 k & \mapsto & f \circ k
 \end{array}$$

ilustrada pelo diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{k} & c \\
 & \searrow & \downarrow f \\
 & & c'
 \end{array}
 \quad (h_a(f))(k) = f \circ k$$

Definição 1.2.23. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um **funtor contravariante** S de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, denotado por $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, é um par de funções ambas denotadas por S , a saber:

- uma função que associa a cada objeto c em $\mathcal{C}$ um objeto $S(c)$ em $\mathcal{D}$ e
- uma função de morfismos que associa a cada morfismo $f : a \rightarrow b$ em $\mathcal{D}$

um morfismo $S(f) : S(b) \rightarrow S(a)$ (veja o diagrama)

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{S} & S(a) \\ f \downarrow & & \uparrow S(f) \\ b & \xrightarrow{S} & S(b) \end{array}$$

tais que:

- $S(id_c) = id_{S(c)}$, para cada morfismo id_c em $\mathcal{C}$,
- $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$, para cada par de morfismos f, g de $\mathcal{C}$, quando a composta estiver definida, conforme o diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ a & \xrightarrow{f} & a & \xrightarrow{g} & c \\ S \downarrow & & S \downarrow & & S \downarrow \\ S(a) & \xleftarrow{S(f)} & S(b) & \xleftarrow{S(g)} & S(c) \\ & \xleftarrow{S(g \circ f)} & & & \end{array}$$

Exemplo 1.2.24. Seja b um objeto fixo na categoria $\mathcal{C}$. O funtor contravariante h^b , chamado funtor contravariante Hom , da categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{S}$ dos conjuntos associa a cada objeto c de $\mathcal{C}$ o conjunto $h^b(c) = Hom_{\mathcal{C}}(c, b)$ de todos os morfismos de c em b na categoria $\mathcal{C}$.

Para cada objeto c' em $\mathcal{C}$, s e $g : c \rightarrow c'$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ h^b é a função de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} h^b(g) : Hom_{\mathcal{C}}(c', b) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(c, b) \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

ilustrada pelo diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ g \downarrow & \searrow (h^b(g))(t) = f \circ g & \\ c' & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

Definição 1.2.25. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ duas categorias. Definimos a **categoria produto** de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, denotada $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, por:

- os objetos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ são todos os pares (c, d) , com $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$;
- um morfismo entre dois objetos (a, b) e (c, d) em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par (f, g) de morfismos, tais que $f : a \rightarrow c$ e $g : b \rightarrow d$.

Para $(f, g) : (a, b) \longrightarrow (c, d)$ e $(k, h) : (c, d) \longrightarrow (a', b')$ morfismos em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a composição é dada por:

$$(k, h) \circ (f, g) = (k \circ f, h \circ g).$$

Definição 1.2.26. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias. Um **bifuntor** é um funtor

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (a, b) &\longmapsto F(a, b), \quad \text{para todo } (a, b) \in \text{Ob } \mathcal{C} \times \mathcal{D} \\ (f, g) &\longmapsto F(f, g), \quad \text{para todo } (f, g) \in \text{Mor } \mathcal{C} \times \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Definição 1.2.27. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ induz uma função $F_{c,c'} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$, para quaisquer $c, c' \in \mathcal{C}$.

(i) Se $F_{c,c'}$ é injetiva, dizemos que F é **completo**.

(ii) Se $F_{c,c'}$ é sobrejetora, dizemos que F é **fiel**.

(iii) Um funtor que é completo e fiel é dito **completamente fiel**.

Definição 1.2.28. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ **reflete isomorfismo** se $F(c) \cong F(c')$ implica $c \cong c'$, para cada $c, c' \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Definição 1.2.29. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores covariantes. Uma **transformação natural** $\alpha : S \longrightarrow T$ é uma função que associa a cada objeto c de $\mathcal{C}$ um morfismo $\alpha_c : S(c) \longrightarrow T(c)$ de $\mathcal{D}$ de tal forma que, para cada morfismo $f : c \longrightarrow c'$ de $\mathcal{C}$, o diagrama a seguir em $\mathcal{D}$ é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} c & & S(c) & \xrightarrow{\alpha_c} & T(c) \\ f \downarrow & & S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ c' & & S(c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & T(c') \end{array}$$

Definição 1.2.30. Uma **transformação natural** $\beta : S \longrightarrow T$, de funtores contravariantes $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, é uma função que associa a cada objeto c de $\mathcal{C}$ um morfismo $\beta_c : S(c) \longrightarrow T(c)$ de $\mathcal{D}$ de tal forma que, para cada morfismo $g : c \longrightarrow c'$ de $\mathcal{C}$, o diagrama em $\mathcal{D}$ é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} c & & S(c) & \xrightarrow{\beta_c} & T(c) \\ g \downarrow & & S(g) \uparrow & & \uparrow T(g) \\ c' & & S(c') & \xrightarrow{\beta_{c'}} & T(c') \end{array}$$

Se β_c é um isomorfismo, para cada c em $\mathcal{C}$, então β é dito um **isomorfismo natural**.

Definição 1.2.31. *Seja T um funtor covariante de $\mathcal{C}$ em Set . Dizemos que T é **representável** se existe um objeto a em $\mathcal{C}$ e um isomorfismo natural*

$$\alpha : h_a \longrightarrow T,$$

ilustrado pelo diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} h_a(c) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & T(c) \\ h_a(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ h_a(c') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & T(c') \end{array}$$

*Analogamente, um funtor contravariante $S : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ é **representável** se existe um objeto b de $\mathcal{C}$ e um isomorfismo natural $\beta : h^b \longrightarrow S$.*

Seja (a, α) uma representação de um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$.

Definimos a categoria $\mathcal{C}_T$ cujos objetos são os pares (c, s) , com c objeto em $\mathcal{C}$ e $s \in T(c) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, c)$.

Um morfismo em $\mathcal{C}_T$ de (c, s) em (d, r) é um morfismo $f : c \longrightarrow d$ em $\mathcal{C}$ tal que $T(f)(s) = r \in T(d) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, d)$.

Um objeto inicial na categoria $\mathcal{C}_T$ é dito um **elemento inicial** do funtor T .

Teorema 1.2.32. [9, Theorem X.1.6] *Seja $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ um funtor covariante. Existe uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{X}$, a classe de todas as representações de T , e a classe $\mathcal{Y}$, de todos os elementos iniciais de T , dada por:*

$$\phi : (a, \alpha) \longmapsto (a, \alpha_a(id_a)).$$

1.2.3 Funtor adjunto

Sejam $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores covariantes. Na categoria produto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ definimos o funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (c, d) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(c), d) \\ (f, g) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(f), g) \end{aligned}$$

que é contravariante na primeira variável e covariante na segunda. Denotaremos este funtor por $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(-), -)$.

Analogamente, definimos o funtor

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T(-)) : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (c, d) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, T(d)) \\ (f, g) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, T(g)). \end{aligned}$$

Definição 1.2.33. *Sejam $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores covariantes. Dizemos que S é adjunto à esquerda de T , T é adjunto à direita de S ou (S, T) é um par adjunto, se existe um isomorfismo natural do funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(-), -)$ no funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T(-))$.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(c), d) & \xrightarrow{\alpha_{cd}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, T(d)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(f), g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, T(g)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(c'), d') & \xrightarrow{\alpha_{c'd'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c', T(d')) \end{array}$$

com $f : c \longrightarrow c'$ morfismo em $\mathcal{C}$ e $g : d \longrightarrow d'$ morfismo em $\mathcal{D}$.

Exemplo 1.2.34. *Seja x um conjunto fixo, definimos o funtor*

$$\begin{aligned} T : \text{Set} &\longrightarrow \text{Set} \\ a &\longmapsto x \times a \\ f &\longmapsto (id_x, f) \end{aligned}$$

O funtor T é adjunto à esquerda do funtor covariante Hom , ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Set}}(x \times c, d) & \xrightarrow{\alpha_{cd}} & \text{Hom}_{\text{Set}}(c, \text{Hom}_{\text{Set}}(x, d)) \\ \text{Hom}_{\text{Set}}((id_x, f), g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(f, h_x(g)) \\ \text{Hom}_{\text{Set}}(x \times c', d') & \xrightarrow{\alpha_{c'd'}} & \text{Hom}_{\text{Set}}(c', \text{Hom}_{\text{Set}}(x, d')) \end{array}$$

para cada c, d par de objetos em Set , com α_{cd} dado por

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha_{cd}(k) & & \\ & \searrow & \text{curved arrow} & \searrow & \\ c & \xrightarrow{T} & x \times c & \xrightarrow{k} & d \xrightarrow{h_x} \text{Hom}_{\text{Set}}(x, d) \end{array}$$

para cada $k \in \text{Hom}_{\text{Set}}(x \times c, d)$.

Proposição 1.2.35. [9, Proposition X.2.2] *Um funtor $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tem adjunto à esquerda se, e somente se, para cada objeto c de $\mathcal{C}$ o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, T(-))$, de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$, é representável.*

Demonstração. Se $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é adjunto à esquerda de T , então existe, para cada objeto c em $\mathcal{C}$ e cada objeto d em $\mathcal{D}$, uma bijeção

$$\alpha_{cd} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(c), d) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, T(d)).$$

Assim, para um $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ fixo, $(S(c), \alpha_{c-})$ é uma representação do funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, T(-))$. Reciprocamente, se, para cada objeto c de $\mathcal{C}$ existe um objeto a_c em $\mathcal{D}$ que representa o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, T(-))$, então existe um funtor covariante $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $S(c) = a_c$ e um isomorfismo natural de funtores

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(S(-), -) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T(-)).$$

Logo o funtor S é adjunto à esquerda de T . □

Corolário 1.2.36. [9, Corollary X.2.4] *Quaisquer dois funtores covariantes adjuntos à esquerda de $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ são naturalmente isomorfos.*

1.3 Categorias aditivas

Agora definiremos categorias aditivas que serão de utilidade para definirmos o grupo de Grothendieck cindido que será estudado na Seção 2.3.

Definição 1.3.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita **preaditiva** ou **Ab categoria** se, para cada par de objetos a, b em $\mathcal{C}$, o conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ é um grupo abeliano com relação à adição e a composição de morfismos é distributiva em relação à adição, isto é, se $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ e $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, c)$, temos*

$$(g + g') \circ f = (g \circ f) + (g' \circ f) \quad e \quad g \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f').$$

Definição 1.3.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, Dizemos que $\mathcal{C}$ é **aditiva** se:*

- (i) $\mathcal{C}$ é uma categoria preaditiva.
- (ii) A categoria $\mathcal{C}$ tem objeto zero.
- (iii) Para quaisquer $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, existem $a \coprod b$ e $a \amalg b$.

Exemplo 1.3.3. *As categorias Ab , $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, de todos os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, e $R\text{-mod}$, de todos os R -módulos para um anel fixo R , são categorias aditivas.*

Definição 1.3.4. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero, $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Um objeto em $\mathcal{C}$ é um **biproduto** de a e b , denotado $a \oplus b$, se existem:*

- (i) morfismos $\pi_a : a \oplus b \longrightarrow a$ e $\pi_b : a \oplus b \longrightarrow b$, tais que $a \oplus b$ é produto de a e b ;
(ii) morfismos $\iota_a : a \longrightarrow a \oplus b$ e $\iota_b : b \longrightarrow a \oplus b$, tais que $a \oplus b$ é coproduto de a e b e

$$\pi_a \circ \iota_a = id_a, \quad \pi_b \circ \iota_b = id_b, \quad \pi_b \circ \iota_a = 0_{ab} \quad e \quad \pi_a \circ \iota_b = 0_{ba}.$$

Às vezes denotaremos o biproduto de a e b como $(a \oplus b, \pi_a, \pi_b, \iota_a, \iota_b)$.

Proposição 1.3.5. [13, Proposition 2.2.8] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Então:*

- (i) produtos e coprodutos finitos são isomorfos e são biprodutos.
(ii) Para quaisquer $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, o biproduto de a e b satisfaz

$$\iota_a \circ \pi_b + \iota_b \circ \pi_a = id_{a \oplus b}.$$

Demonstração. Seja $a \amalg b$ o coproduto binário dos objetos a, b em $\mathcal{C}$ e fixemos

$$\iota_a : a \rightarrow a \amalg b \quad e \quad \iota_b : b \rightarrow a \amalg b$$

os morfismos da definição de coproduto binário. Logo existem morfismos únicos π_a e π_b tais que os seguintes diagramas comutam.

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ id_a \nearrow & \uparrow \pi_a & \nwarrow 0_{ba} \\ a & \xrightarrow{\iota_a} a \amalg b \xleftarrow{\iota_b} & b \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & b & \\ 0_{ab} \nearrow & \uparrow \pi_b & \nwarrow id_a \\ a & \xrightarrow{\iota_a} a \amalg b \xleftarrow{\iota_b} & b \end{array}$$

Sejam $c \in \text{Ob } \mathcal{A}$ e $f_a : c \rightarrow a$, $f_b : c \rightarrow b$ morfismos arbitrários. Então o morfismo

$$f = \iota_a \circ f_a + \iota_b \circ f_b$$

faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ f_a \swarrow & \downarrow f & \searrow f_b \\ a & \xleftarrow{\pi_a} a \amalg b \xrightarrow{\pi_b} & b \end{array}$$

De fato:

$$\begin{aligned} \pi_a \circ f &= \pi_a \circ (\iota_a \circ f_a + \iota_b \circ f_b) \\ &= \pi_a \circ \iota_a \circ f_a + \pi_a \circ \iota_b \circ f_b \\ &= id_a \circ f_a + 0_{ab} \circ f_b = f_a, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_b \circ f &= \pi_b \circ (\iota_a \circ f_a + \iota_b \circ f_b) \\ &= \pi_b \circ \iota_a \circ f_a + \pi_b \circ \iota_b \circ f_b \\ &= 0_{ba} \circ f_a + id_b \circ f_b = f_b.\end{aligned}$$

Agora suponha que exista $f' : c \rightarrow a \amalg b$ satisfazendo $f_a = \pi_a \circ f'$ e $f_b = \pi_b \circ f'$, então $f = \iota_a \circ f_a + \iota_b \circ f_b = \iota_a \circ (\pi_a \circ f') + \iota_b \circ (\pi_b \circ f')$, logo, como $\mathcal{A}$ é aditiva, $f = (\iota_a \circ \pi_a + \iota_b \circ \pi_b) f'$. Da definição de coproduto, ι_a , π_a , ι_b e π_b são únicos, logo também o é $u = \iota_a \circ \pi_a + \iota_b \circ \pi_b$ e, como $id_{a \amalg b}$ também faz o seguinte diagrama comutar,

$$\begin{array}{ccc} & a \amalg b & \\ \iota_a \nearrow & \uparrow \pi_a & \nwarrow \iota_b \\ a & \xrightarrow{\iota_a} a \amalg b \xleftarrow{\iota_b} & b \end{array}$$

ou seja, $u = id_{a \amalg b}$. assim, $f = f'$. Daí, $a \amalg b$ é produto de a e b e, portanto, coproduto binário. $\square$

Definição 1.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Fixamos o biproduto $(a \oplus a, \iota_a, \iota'_a, \pi_a, \pi'_a)$. O **morfismo diagonal** $\Delta_a : a \rightarrow a \oplus a$ e o **morfismo codiagonal** $\nabla_a : a \oplus a \rightarrow a$ são definidos como os únicos morfismos tais que os seguintes diagramas comutam.*

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ id_a \swarrow & \downarrow \Delta_a & \searrow id_a \\ a & \xrightarrow{\pi_a} a \oplus a \xrightarrow{\pi'_a} & a \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & a & \\ id_a \swarrow & \downarrow \nabla_a & \searrow id_a \\ a & \xrightarrow{\iota_a} a \oplus a \xleftarrow{\iota'_a} & a \end{array}$$

Definição 1.3.7. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva, $a, b, c, d \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e considere os biprodutos $(a \oplus c, \pi_a, \pi_c, \iota_a, \iota_c)$ e $(b \oplus d, \pi_b, \pi_d, \iota_b, \iota_d)$. O **morfismo biproduto** de $f : a \rightarrow b$ e $g : c \rightarrow d$ é o único morfismo $f \oplus g : a \oplus c \rightarrow b \oplus d$ que satisfaz*

$$\begin{aligned}\pi_b \circ (f \oplus g) \circ \iota_a &= f, & \pi_d \circ (f \oplus g) \circ \iota_c &= g, \\ \pi_b \circ (f \oplus g) \circ \iota_c &= 0_{cb} & \pi_d \circ (f \oplus g) \circ \iota_a &= 0_{ad}\end{aligned}$$

Um tal morfismo existe e podemos tomar $f \oplus g = \iota_b \circ f \circ \pi_a + \iota_d \circ g \circ \pi_c$.

Com a teoria exposta neste capítulo, podemos agora abordar os temas principais deste trabalho nos capítulos seguintes.

Capítulo 2

O grupo de Grothendieck

Neste capítulo veremos a construção e algumas propriedades do grupo de Grothendieck, que é uma das ferramentas principais dos processos de categorificação e decategorificação algébricas e está fortemente relacionado com a operação binária em relação a qual é definido. As principais referências são [13],[14] e [19].

Em particular, no final da segunda seção exemplificamos com todos os detalhes o cálculo do grupo de Grothendieck da categoria $FinSet$.

2.1 Operações binárias em categorias

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria não vazia. Uma **operação binária** $*$ em $\mathcal{C}$ é um bifuntor

$$\begin{aligned} * : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (a, b) &\longmapsto a * b, \quad \text{para todos } a, b \in \text{Ob } \mathcal{C} \text{ e} \\ (f, g) &\longmapsto f * g, \quad \text{para todos } f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Vamos escrever, às vezes, $*(a, b)$ e $*(f, g)$ para denotar $a*b$ e $f*g$ como imagens via o bifuntor $*$. O seguinte resultado segue direto da definição de funtor.

Lema 2.1.1. [13, Lemma 2.1.2] *Seja $*$ uma operação binária em uma categoria $\mathcal{C}$. Então:*

- (i) *Para quaisquer objetos a, b em $\mathcal{C}$, $id_a * id_b = id_{a*b}$.*
- (ii) *Se, para quaisquer f, g, f', g' em $\text{Mor } \mathcal{C}$, (g, f) e (g', f') são pares componíveis, então*

$$(g \circ f) * (g' \circ f') = (g * g') \circ (f * f').$$

Demonstração. (i) Sejam $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Temos

$$id_a * id_b = *(id_a, id_b) = id_{*(a,b)} = id_{a*b}$$

(ii) Sejam f, g, f', g' em $\text{Mor } \mathcal{C}$ tais que (g, f) e (g', f') são pares componíveis. Então

$$(g \circ f) * (g' \circ f') = *(g \circ f, g' \circ f') = *((g, g') \circ (f, f')) = (g * g') \circ (f * f').$$

□

Lema 2.1.2. [13, Lemma 2.1.3] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $*$ uma operação binária em $\mathcal{C}$. Então $*$ induz uma operação binária $*$ em $\mathcal{C}^\rightarrow$ tal que o funtor*

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\rightarrow \\ a &\longmapsto id_a \\ f &\longmapsto (f, f) \end{aligned}$$

preserva a operação binária. Este funtor é completamente fiel e reflete isomorfismo.

Demonstração. Sejam $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e $f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}$. Temos:

$$F(a * b) = id_{a*b} = id_a * id_b = F(a) * F(b) \quad \text{e}$$

$$F(f * g) = (f * g, f * g) = (f, f) * (g, g) = F(f) * F(g).$$

Daí F preserva a operação binária.

Sabemos que F induz, para cada $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, a função injetora

$$\begin{aligned} F_{ab} &: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^\rightarrow}(id_a, id_b) \\ f &\longmapsto (f, f). \end{aligned}$$

Seja $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\rightarrow}(id_a, id_b)$, ou seja, $id_a \circ f = g \circ id_b$, logo $f = g$. Logo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(id_a, id_b) = \{(f, f), f \in \text{Mor } \mathcal{C}\}$$

e daí F_{ab} é bijetora, para $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Assim, F é completamente fiel.

Agora suponhamos $id_a \cong id_b$, ou seja, temos isomorfismos $f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}$ tais que $id_a = f \circ id_b \circ g$, isto é, $f = g^{-1} : b \longrightarrow a$, daí $a \cong b$. Logo F reflete isomorfismo. □

Lema 2.1.3. [13, Lemma 2.1.5] *Se $*$ é uma operação binária na categoria $\mathcal{C}$, então:*

1. Para quaisquer objetos $a, b, c, d \in \text{Ob } \mathcal{C}$,

$$a \cong b \text{ e } c \cong d \implies a * c \cong b * d.$$

2. Para quaisquer $f, g, f', g' \in \text{Mor } \mathcal{C}$,

$$f \cong f' \text{ e } g \cong g' \implies f * g \cong f' * g'.$$

Demonstração. 1. Sejam $a, b, c, d \in \text{Ob } \mathcal{C}$ tais que $a \cong b$ e $c \cong d$, ou seja, existem $f : a \longrightarrow b$ e $g : c \longrightarrow d$ isomorfismos em $\mathcal{C}$. Temos $f * g : a * c \longrightarrow b * d$ e definimos $(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$. Daí

$$(f * g) \circ (f^{-1} * g^{-1}) = (f \circ f^{-1}) * (g \circ g^{-1}) = id_b * id_d = id_{b*d}.$$

e

$$(f^{-1} * g^{-1}) \circ (f * g) = (f^{-1} \circ f) * (g^{-1} \circ g) = id_a * id_c = id_{a*c}.$$

Assim, $f * g$ é um isomorfismo. Logo $a * c \cong b * d$.

2. Sejam $f, g, f', g' \in \text{Mor } \mathcal{C}$ tais que $f \cong f'$ e $g \cong g'$, ou seja, existem k, k', r, r' isomorfismos em $\mathcal{C}$ tais que:

$$f = k' \circ f' \circ k \quad \text{e} \quad g = r' \circ g' \circ r.$$

Assim, $f * g = (k' \circ f' \circ k) * (r' \circ g' \circ r) = (k' * r') \circ (f' * g') \circ (k * r)$ com $k' * r'$ e $k * r$ isomorfismos em $\mathcal{C}$. Logo $f * g \cong f' * g'$.

□

Propriedades: Seja $*$ uma operação binária na categoria $\mathcal{C}$.

(i) Dizemos que $*$ é **associativa** em $\mathcal{C}$ se $(a * b) * c \cong a * (b * c)$, para todos $a, b, c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e $(f * g) * h \cong f * (g * h)$, para todos $f, g, h \in \text{Mor } \mathcal{C}$.

(ii) Dizemos que $*$ tem **identidade** se, para algum $e \in \text{Ob } \mathcal{C}$, temos, para todo $a \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $e * a \cong a * e \cong a$ e $id_e * f \cong f \cong f * id_e$, para todo $f \in \text{Mor } \mathcal{C}$.

(iii) Dizemos que $*$ é **comutativa** em $\mathcal{C}$ se $a * b \cong b * a$, para todos $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, e $f * g \cong g * f$, para todos $f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}$.

Definição 2.1.4. Denotamos a classe das classes de isomorfismos dos objetos de $\mathcal{C}$ por $S^{iso}(\mathcal{C})$, isto é:

$$S^{iso}(\mathcal{C}) = \frac{\text{Ob } \mathcal{C}}{\cong}.$$

Se $*$ é uma operação binária em $\mathcal{C}$, define-se uma operação binária em $S^{iso}(\mathcal{C})$ por

$$[a] * [b] := [a * b].$$

Lema 2.1.5. [13, Lemma 2.1.9] *Seja $*$ uma operação binária em uma categoria $\mathcal{C}$ e $*$ a operação binária em $\mathcal{C}^\rightarrow$ induzida por $*$ em $\mathcal{C}$. Então a função*

$$\begin{aligned} f : (S^{iso}(\mathcal{C}), *) &\longrightarrow (S^{iso}(\mathcal{C}^\rightarrow), *) \\ [a] &\longmapsto [id_a] \end{aligned}$$

preserva a operação binária.

Demonstração. Para cada $[a]$ em $S^{iso}(\mathcal{C})$ e F o funtor do Lema 2.1.2, temos

$$f([a]) = [id_a] = [F(a)].$$

Esta função está bem definida, pois F reflete isomorfismo.

Sejam $[a], [b] \in (S^{iso}(\mathcal{C}), *)$. Como F preserva a operação binária, temos

$$\begin{aligned} f([a] * [b]) &= f([a * b]) = [id_{a*b}] = [F(a * b)] = [F(a) * F(b)] \\ &= [F(a)] * [F(b)] = f([a]) * f([b]) \end{aligned}$$

Assim, a função f preserva a operação binária. □

Lema 2.1.6. [13, Lemma 2.1.10] *Seja $*$ uma operação binária em uma categoria essencialmente pequena $\mathcal{C}$. Se $*$ é associativa, tem identidade e é comutativa, então $(S^{iso}(\mathcal{C}), *)$ e $(S^{iso}(\mathcal{C}^\rightarrow), *)$ são monóides comutativos.*

Demonstração. Sejam $[a], [b], [c] \in S^{iso}(\mathcal{C})$ e $[f], [g], [h] \in S^{iso}(\mathcal{C}^\rightarrow)$. Como $*$ é associativa, então $(a * b) * c \cong a * (b * c)$ e $(f * g) * h \cong f * (g * h)$, ou seja, $[(a * b) * c] = [a * (b * c)]$ e $[(f * g) * h] = [f * (g * h)]$. Logo, para todos $[a], [b], [c] \in S^{iso}(\mathcal{C})$,

$$([a] * [b]) * [c] = [a * b] * [c] = [(a * b) * c] = [a * (b * c)] = [a] * [b * c] = [a] * ([b] * [c])$$

e, para todos $[f], [g], [h] \in S^{iso}(\mathcal{C}^\rightarrow)$,

$$([f] * [g]) * [h] = [f * g] * [h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f] * [g * h] = [f] * ([g] * [h]).$$

Daí $(S^{iso}(\mathcal{C}), *)$ e $(S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow}), *)$ são semigrupos.

Se $*$ tem identidade, temos $e \in \text{Ob } \mathcal{C}$ tal que

$$e * a \cong a \cong a * e \quad e \quad id_e * f \cong f \cong f * id_e,$$

ou seja, para todo $[a] \in S^{iso}(\mathcal{C})$ e todo $[f] \in S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$,

$$[e * a] = [a] = [a * e] \quad e \quad [id_e * f] = [f] = [f * id_e],$$

Logo $[e]$ é a identidade em $(S^{iso}(\mathcal{C}), *)$ e $[id_e]$ é a identidade em $(S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow}), *)$.

Daí, $(S^{iso}(\mathcal{C}), *)$ e $(S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow}), *)$ são monóides.

Finalmente, se $*$ também é comutativa em $\mathcal{C}$, então $a * b \cong b * a$, para todos $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, e $f * g \cong g * f$, para todos $f, g \in \text{Mor } \mathcal{C}$, ou seja, $[a * b] = [b * a]$, para todos $[a], [b] \in (S^{iso}(\mathcal{C}), *)$ e $[f * g] = [g * f]$, para todos $[f], [g] \in (S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow}), *)$. Logo, para todos $[a], [b] \in (S^{iso}(\mathcal{C}), *)$

$$[a] * [b] = [a * b] = [b * a] = [b] * [a]$$

e, para todos $[f], [g] \in (S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow}), *)$

$$[f] * [g] = [f * g] = [g * f] = [g] * [f].$$

Daí $(S^{iso}(\mathcal{C}), *)$ e $(S^{iso}(\mathcal{C}^{\rightarrow}), *)$ são monoides comutativos. □

Definição 2.1.7. *O grupo abeliano livre gerado por $S^{iso}(\mathcal{C})$ é denotado por $G^{iso}(\mathcal{C})$*

$$G^{iso}(\mathcal{C}) = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i [a_i] \mid n \in \mathbb{N}^*, m_i \in \mathbb{Z}, [a_i] \in S^{iso}(\mathcal{C}) \right\}.$$

2.2 O grupo de Grothendieck

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria essencialmente pequena e $*$ uma operação binária em $\mathcal{C}$. Considere $N(\mathcal{C})$ o subgrupo normal de $G^{iso}(\mathcal{C})$ gerado por

$$\{[a * b] - [a] - [b] \mid a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}\}.$$

Definição 2.2.1. *O grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ em relação a $*$ é o grupo quociente*

$$G_0(\mathcal{C}, *) = \frac{G^{iso}(\mathcal{C})}{N(\mathcal{C})}.$$

Lema 2.2.2. [13, Lemma 2.1.15] *Se $*$ tem identidade em $\mathcal{C}$, então $[e] = 0$ em $G_0(\mathcal{C}, *)$.*

Demonstração. Temos

$$[e] = -[e] + [e] + [e] = -([e * e] - [e] - [e]).$$

Assim, $[e] \in N(\mathcal{C})$, ou seja, $[e] = 0$ em $G_0(\mathcal{C}, *)$. □

Lema 2.2.3. [13, Lemma 2.1.16] *Seja $*$ uma operação binária associativa em uma categoria essencialmente pequena $\mathcal{C}$. Então em $G_0(\mathcal{C}, *)$ temos:*

(i) *cada elemento pode ser escrito, para alguns $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, na forma*

$$[a] + N(\mathcal{C}) - [b] + N(\mathcal{C}) = ([a] - [b]) + N(\mathcal{C}).$$

(ii) *$[a] + N(\mathcal{C}) = [b] + N(\mathcal{C})$ se, e somente se $a * c \cong b * c$, para algum $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$.*

Demonstração. (i) Seja $x + N(\mathcal{C}) \in G_0(\mathcal{C}, *)$. Como $G_0(\mathcal{C}, *)$ é comutativo em relação à adição $x + N(\mathcal{C})$ pode ser escrito como

$$x + N(\mathcal{C}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i [a_i] - \sum_{j=1}^m \beta_j [b_j] \right) + N(\mathcal{C}),$$

com $m, n \in \mathbb{N}_+$ e $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_+$, para todos i, j .

Assim, como em $G_0(\mathcal{C}, *)$, $[a * b] - [a] - [b] + N(\mathcal{C}) = N(\mathcal{C})$, então

$[a * b] + N(\mathcal{C}) = [a] + [b] + N(\mathcal{C})$ e daí

$$x + N(\mathcal{C}) = \left([*_{i=1}^{\alpha_1} a_1] + \dots + [*_{i=1}^{\alpha_n} a_n] - [*_{i=1}^{\beta_1} b_1] - \dots - [*_{i=1}^{\beta_m} b_m] \right) + N(\mathcal{C})$$

$$x + N(\mathcal{C}) = \left([*_{i=1}^n *_{j=1}^{\alpha_j} a_j] - [*_{i=1}^n *_{j=1}^{\beta_j} b_i] \right) + N(\mathcal{C}).$$

ou seja,

$$x + N(\mathcal{C}) = \{[*_{i=1}^n *_{j=1}^{\alpha_j} a_j] + N(\mathcal{C})\} - \{[*_{i=1}^n *_{j=1}^{\beta_j} b_i] + N(\mathcal{C})\}$$

(ii) Se $[a] + N(\mathcal{C}) = [b] + N(\mathcal{C})$, então $[a] - [b] \in N(\mathcal{C}) \triangleleft G^{iso}(\mathcal{C})$ e, como $G^{iso}(\mathcal{C})$ é comutativo em relação à adição, temos

$$[a] - [b] = \sum_{i=1}^n ([x_i * y_i] - [x_i] - [y_i]) - \sum_{j=1}^m ([w_j * z_j] - [w_j] - [z_j]),$$

para alguns $[x_i], [y_i], [w_j], [z_j] \in G^{iso}(\mathcal{C})$ e alguns $n, m \in \mathbb{N}_+$. Assim,

$$[a] + \sum_{j=1}^m [w_j * z_j] + \sum_{i=1}^n ([x_i] + [y_i]) = [b] + \sum_{i=1}^n [x_i * y_i] + \sum_{j=1}^m ([w_j] + [z_j]).$$

Como as classes por isomorfismo de $\mathcal{C}$ são uma base de $G^{iso}(\mathcal{C})$, os termos de $S^{iso}(\mathcal{C})$ na esquerda são permutações dos termos de $S^{iso}(\mathcal{C})$ na direita. Assim, $a * c \cong b * c$ com

$$c = (*_{i=1}^n (x_i * y_i)) * (*_{j=1}^m (w_j * z_j)).$$

Sejam $a, b, c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ tais que $a * c \cong b * c$. Então, em $G_0(\mathcal{C}, *)$,

$$\begin{aligned} [a * c] + N(\mathcal{C}) &= [b * c] + N(\mathcal{C}) \\ \Rightarrow [a] + [c] + N(\mathcal{C}) &= [b] + [c] + N(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Logo, $[a] + N(\mathcal{C}) = [b] + N(\mathcal{C})$. □

Lema 2.2.4. *Seja $(M, *)$ um semigrupo comutativo. Então a relação definida por $(x, y) \sim (u, v)$ se, e somente se, $x * v * t = u * y * t$, para algum $t \in M$, é uma relação de equivalência em $M \times M$*

Demonstração. Sejam $(x, y), (a, b), (u, v) \in M \times M$. Temos

(i) $(x, y) \sim (x, y)$, pois $x * y * t = x * y * t$, para todo $t \in M$. Logo $\sim$ é reflexiva.

(ii) Se $(x, y) \sim (a, b)$, então $x * b * t = a * y * t$, para algum $t \in M$, logo $(a, b) \sim (x, y)$.

Daí $\sim$ é simétrica

(iii) Se $(x, y) \sim (a, b)$ e $(a, b) \sim (u, v)$, então $x * b * t_1 = a * y * t_1$ e $a * v * t_2 = u * b * t_2$, para alguns $t_1, t_2 \in M$. Daí $x * b * t_1 * a * v * t_2 = a * y * t_1 * u * b * t_2$ e, como M é comutativo, $x * v * (b * t_1 * a * t_2) = u * y * (b * t_1 * a * t_2)$. Logo $(x, y) \sim (u, v)$, ou seja $\sim$ é transitiva.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência. □

Proposição 2.2.5. [18, Theorem 1.1.3] *Seja $(M, *)$ um semigrupo comutativo. Existe, a menos de isomorfismo, um único **completamento de grupo** para $(M, *)$, que é um par (G, φ) , onde G é um grupo abeliano e $\varphi : M \longrightarrow G$ é um*

homomorfismo de semigrupos satisfazendo a propriedade universal que, para todo homomorfismo de semigrupos $\psi : M \longrightarrow H$, onde $(H, +)$ é algum grupo (não necessariamente abeliano), existe um único homomorfismo $\theta : G \longrightarrow H$ tal que $\psi = \theta \circ \varphi$.

Demonstração. Consideremos a relação de equivalência do Lema 2.2.4 e a classe

$$[(u, v)] = \{(x, y) \in M \times M / (a, b) \sim (x, y)\}.$$

Denote por $G = \{[(u, v)] / u, v \in M\}$ o conjunto quociente $\frac{M \times M}{\sim}$. Definamos

$$\begin{aligned} + : G \times G &\longrightarrow G \\ ([(u, v)], [(x, y)]) &\longmapsto [(u * x, v * y)]. \end{aligned}$$

Sejam $[(x, y)], [(a, b)], [(u, v)] \in G$

$$\begin{aligned} \{[(x, y)] + [(a, b)]\} + [(u, v)] &= [(x * a, y * b)] + [(u, v)] \\ &= [((x * a) * u, ((y * b) * v))] \\ &= [(x * (a * u), (y * (b * v)))] \\ &= [(x, y)] + [(a * u, b * v)] \\ &= [(x, y)] + \{[(a, b)] + [(u, v)]\}. \end{aligned}$$

Daí G é um semigrupo.

Ainda $[(u, v)] + [(x, y)] = [(u * x, v * y)] = [(x * u, y * v)] = [(x, y)] + [(u, v)]$, ou seja, G é comutativo.

Seja $[(x, x)] \in G$. Temos $[(x, x)] + [(a, b)] = [x * a, x * b] = [(a, b)]$, pois $*$ é comutativa e $x * a * b = a * x * b$, para todo $x \in M$, assim $[(x, x)] = 0_G$ é o elemento neutro em G . Logo G é um monóide.

Para cada $[(x, y)] \in G$, existe $[(y, x)] \in G$ tal que

$$[(x, y)] + [(y, x)] = [(x * y, x * y)] = 0_G.$$

Portanto, $(G, +)$ é um grupo abeliano.

Definamos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \varphi(x) = [(x * x, x)]. \end{aligned}$$

Seja H um grupo qualquer e $\psi : M \longrightarrow H$ um homomorfismo de semigrupos.

Podemos definir θ por:

$$\begin{aligned} \theta : G &\longrightarrow H \\ [(x, y)] &\longmapsto \theta((x, y)) = \psi(x) - \psi(y). \end{aligned}$$

Assim, $\theta \circ \varphi : M \longrightarrow H$ é tal que

$$(\theta \circ \varphi)(x) = \theta(\varphi(x)) = \theta([(x * x, x)]) = \psi(x * x) - \psi(x) = \psi(x).$$

Daí $(\theta \circ \varphi)(x) = \psi(x)$, para todo $x \in M$, ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & H \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ G & & \end{array}$$

Logo $(G, +)$ é o completamento de grupo de $(M, *)$.

□

Como consequência da Proposição 2.2.5, temos:

Teorema 2.2.6. [13, Theorem 2.1.18] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $*$ uma operação binária associativa e comutativa em $\mathcal{C}$. Então o grupo de Grothendieck com relação a $*$ é um completamento de grupo do semigrupo $(S^{iso}(\mathcal{C}), *)$.*

Demonstração. Seja a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S^{iso}(\mathcal{C}) &\longrightarrow G_0(\mathcal{C}, *) \\ [c] &\longmapsto [c] + N(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Se H é um grupo e $\psi : S^{iso}(\mathcal{C}) \longrightarrow H$ um homomorfismo de semigrupos, então podemos definir

$$\begin{aligned} \theta : G_0(\mathcal{C}, *) &\longrightarrow H \\ [c] + N(\mathcal{C}) &\longmapsto \psi([c]). \end{aligned}$$

Sejam $[a] + N(\mathcal{C}), [b] + N(\mathcal{C}) \in G_0(\mathcal{C}, *)$. Temos

$$\begin{aligned} \theta([a] + N(\mathcal{C}) + [b] + N(\mathcal{C})) &= \theta([a] + [b] + N(\mathcal{C})) = \psi([a] + [b]) \\ &= \psi([a]) \psi([b]) = \theta([a] + N(\mathcal{C})) \theta([b] + N(\mathcal{C})). \end{aligned}$$

Logo θ é um homomorfismo de semigrupos.

Para todos $a, b \in \text{Ob } \mathcal{C}$, temos:

$$\begin{aligned} \theta([a * b] - [a] - [b] + N(\mathcal{C})) &= \psi([a * b]) \psi(-[a]) \psi(-[b]) \\ &= \psi([b * a]) \psi([a])^{-1} \psi([b])^{-1} \\ &= \psi([b]) \psi([a]) \psi([a])^{-1} \psi([b])^{-1} = e_H, \end{aligned}$$

onde e_H denota o elemento neutro de H . Então $\theta(0_{G_0}) = e_H$

Seja $[a] \in S^{iso}(\mathcal{C})$. Então $\theta \circ \varphi([a]) = \theta(\varphi([a])) = \theta([a] + N(\mathcal{C})) = \psi([a])$. Logo $\theta \circ \varphi = \psi$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} S^{iso}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\psi} & H \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ G_0(\mathcal{C}, *) & & \end{array}$$

Logo $G_0(\mathcal{C}, *)$ é o completamento de grupo de $S^{iso}(\mathcal{C})$.

□

Corolário 2.2.7. *Seja $\mathbf{Cat}_*$ a categoria de todos os pares formados por uma categoria e uma operação binária (naquela categoria). Morfismos nesta categoria são funtores entre categorias que preservam as operações binárias. O grupo de Grothendieck com relação a uma operação binária induz o funtor*

$$\begin{aligned} G_0 : \mathbf{Cat}_* &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ (\mathcal{C}, *) &\longmapsto G_0(\mathcal{C}, *) \\ F &\longmapsto (a \longmapsto [F(a)]). \end{aligned}$$

Como uma aplicação da teoria desenvolvida neste capítulo, no exemplo a seguir calculamos, com todos os detalhes, o grupo de Grothendieck da categoria $\mathbf{FinSet}$.

Exemplo 2.2.8. *Em $\mathbf{FinSet}$, a categoria dos conjuntos finitos, dois conjuntos são isomorfos se, e somente se, eles têm a mesma cardinalidade. Assim*

$$S^{iso}(\mathbf{FinSet}) = \{[X_i] \mid |X_i| = i \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N}.$$

Para $X_1, X_2 \in \text{Ob } \mathbf{FinSet}$, o coproduto binário é dado por

$$X_1 \coprod X_2 = \{(x, i), i \in \{1, 2\}, x \in X_i\}.$$

Como $|X_1 \coprod X_2| = |X_1| + |X_2|$ podemos definir uma operação binária em $\mathbf{FinSet}$

por

$$\begin{aligned} \coprod & : \text{FinSet} \times \text{FinSet} \longrightarrow \text{FinSet} \\ (a, b) & \longmapsto a \coprod b, \quad \text{para todos } a, b \in \text{Ob FinSet} \\ (f, g) & \longmapsto f \coprod g, \quad \text{para todos } f, g \in \text{Mor FinSet}, \end{aligned}$$

onde $f \coprod g : X_1 \coprod X_2 \longrightarrow Y_1 \coprod Y_2$ é definido por

$$(f \coprod g)(x, i) = \begin{cases} (f(x), i), & \text{se } i = 1 \\ (g(x), i), & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

Logo a aplicação $\varphi : \text{Ob } \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada conjunto sua cardinalidade, induz um homomorfismo sobrejetor

$$\begin{aligned} \phi & : G^{iso}(\text{FinSet}) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^n m_i [X_i] & \longmapsto \sum_{i=1}^n m_i |X_i|. \end{aligned}$$

Em $G^{iso}(\text{FinSet})$, considere o subgrupo normal $N(\text{FinSet})$ gerado por

$$\left\{ [X_i \coprod X_j] - [X_i] - [X_j] \mid X_i, X_j \in \text{Ob FinSet} \right\}.$$

Observação 2.2.9. Pelo Lema 2.2.2, $[X_0]$ é o elemento neutro para a operação em $G_0(\text{FinSet}, \coprod)$, logo $[X_0] \in N(\text{FinSet})$.

Assim, podemos também escrever $[X_0] = 0$ em $G_0(\text{FinSet}, \coprod)$.

Lema 2.2.10. Para $n, q \in \mathbb{N}$, temos $[X_{nq}] = n[X_q] \pmod{N(\text{FinSet})}$.

Demonstração. Por indução sobre $n \geq 0$.

Para $n = 0$, $[X_{0q}] = [X_0] = 0 = 0[X_q]$, para todo $q \in \mathbb{N}$, pela Observação 2.2.9. Agora suponha, para $n \geq 0$, $[X_{nq}] = n[X_q]$, para todo $q \in \mathbb{N}$. Daí $\pmod{N(\text{FinSet})}$, temos

$$[X_{(q+1)n}] = [X_{nq+q}] = [X_{nq} \coprod X_q] = [X_{nq}] + [X_q] = n[X_q] + [X_q] = (n+1)[X_q].$$

□

Agora, seja $d = \text{mdc}\{r, s\}$. Logo existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $r = k_1 d$ e $s = k_2 d$. Assim, do Lema 2.2.10, $\pmod{N(\text{FinSet})}$, temos

$$m_1 [X_{k_1 d}] + m_2 [X_{k_2 d}] = m_1 k_1 [X_d] + m_2 k_2 [X_d] = (m_1 k_1 + m_2 k_2) [X_d].$$

Seja $x = \sum_{i=1}^n m_i ([X_{r_i} \amalg X_{s_i}] - [X_{r_i}] - [X_{s_i}]) \in N(\text{FinSet})$. Então

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{i=1}^n m_i \phi([X_{r_i} \amalg X_{s_i}] - [X_{r_i}] - [X_{s_i}]) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (\phi([X_{r_i} \amalg X_{s_i}]) - \phi([X_{r_i}]) - \phi([X_{s_i}])) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (|X_{r_i}| + |X_{s_i}| - |X_{r_i}| - |X_{s_i}|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí $x \in \text{Ker}(\phi)$, para todo $x \in N(\text{FinSet})$. Assim, $N(\text{FinSet}) \subset \text{Ker}(\phi)$.

Afirmção: $\text{Ker}(\phi) \subset N(\text{FinSet})$

Demonstração. Pela Observação 2.2.9, $[X_0] \in N(\text{FinSet})$.

Se $\alpha \in \text{Ker}(\phi)$ e $\alpha = m_j [X_j]$, então $0 = \phi(\alpha) = m_j |X_j|$. Daí $m_j = 0$ ou $|X_j| = 0$. Se $m_j = 0$, então $\alpha = 0 \in G_0(\text{FinSet}, \amalg)$ e daí $\alpha \in N(\text{FinSet})$. Se $|X_j| = 0$, então $[X_j] = [X_0] \in N(\text{FinSet})$, pela Observação 2.2.9.

Suponha que α possua pelo menos dois coeficientes não nulos e, como α é uma soma com um número finito de parcelas, temos

$$\alpha = m_{i_1} [X_{i_1}] + m_{i_2} [X_{i_2}] + \cdots + m_{i_k} [X_{i_k}].$$

Seja $d = \text{mdc}\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Então $[X_{i_j}] = [X_{dq_{ij}}]$, onde $i_j = dq_{ij}$, para todos $j = 1, 2, \dots, k$. Daí, pelo Lema 2.2.10, $\alpha = (m_{i_1} q_{i1} + m_{i_2} q_{i2} + \cdots + m_{i_k} q_{ik}) [X_d]$. Como $\alpha \in \text{Ker}(\phi)$, então $0 = \phi(\alpha) = (m_{i_1} q_{i1} + m_{i_2} q_{i2} + \cdots + m_{i_k} q_{ik}) d$. Como $d \neq 0$, $m_{i_1} q_{i1} + m_{i_2} q_{i2} + \cdots + m_{i_k} q_{ik} = 0$ implica $\alpha = 0 \pmod{N(\text{FinSet})}$. Logo $\alpha \in N(\text{FinSet})$ $\square$

Portanto o núcleo de ϕ é $N(\text{FinSet})$ e, pelo primeiro Teorema do Isomorfismo para grupos, o grupo de Grothendieck de FinSet em relação ao coproduto $\amalg$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

2.3 O grupo de Grothendieck cindido

Agora apresentamos algumas propriedades do grupo de Grothendieck de uma categoria aditiva em relação à operação biproduto binário, que aplicamos ao estudo que nos interessa, dado que nas categorias de módulos o biproduto binário ou soma direta é a operação mais natural e, portanto, será a ferramenta para a categorificação da álgebra de Weyl via a ação sobre seus módulos.

Lema 2.3.1. [13, Lemma 2.2.13] *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. Fixando um biproduto $\oplus$ em $\mathcal{A}$, o bifuntor*

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) &\longmapsto a \oplus b, \quad \text{para todos } a, b \in \text{Ob } \mathcal{A} \\ (f, g) &\longmapsto f \oplus g, \quad \text{para todos } f, g \in \text{Mor } \mathcal{A} \end{aligned}$$

está bem definido e $\oplus$ é uma operação binária.

Demonstração. O biproduto de quaisquer dois objetos em $\mathcal{A}$ existe, pois $\mathcal{A}$ é aditiva, e da definição de morfismo biproduto existe o biproduto de quaisquer dois morfismos.

Sejam $a, b \in \text{Ob } \mathcal{A}$, fixando o biproduto $(a \oplus b, \iota_a, \iota_b, \pi_a, \pi_b)$ de a e b , da definição de morfismo biproduto e, pelo Lemma 1.3.5, temos

$$id_a \oplus id_b = \iota_a \circ id_a \circ \pi_a + \iota_b \circ id_b \circ \pi_b = id_{a \oplus b}.$$

Sejam $a, a', b, b', c, c' \in \text{Ob } \mathcal{A}$ e $f, f', g, g' \in \text{Mor } \mathcal{A}$ tais que

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \quad \text{e} \quad a' \xrightarrow{f'} b' \xrightarrow{g'} c'$$

e os biprodutos $(a \oplus a', \iota_a, \iota_{a'}, \pi_a, \pi_{a'})$, $(b \oplus b', \iota_b, \iota_{b'}, \pi_b, \pi_{b'})$ e $(c \oplus c', \iota_c, \iota_{c'}, \pi_c, \pi_{c'})$. Então, como $g \circ f : a \rightarrow c$ e $g' \circ f' : a' \rightarrow c'$, o morfismo biproduto de $g \circ f$ e $g' \circ f'$ é

$$\begin{aligned} (g \circ f) \oplus (g' \circ f') &= \iota_c \circ (g \circ f) \circ \pi_a + \iota_{c'} \circ (g' \circ f') \circ \pi_{a'} \\ &= \iota_c \circ g \circ \pi_b \circ \iota_b \circ f \circ \pi_a + \iota_{c'} \circ g' \circ \pi_{b'} \circ \iota_{b'} \circ f' \circ \pi_{a'} \\ &= \iota_c \circ g \circ \pi_b \circ \iota_b \circ f \circ \pi_a + 0_{a \oplus a' \rightarrow c \oplus c'} + 0_{a \oplus a' \rightarrow c \oplus c'} \\ &\quad + \iota_{c'} \circ g' \circ \pi_{b'} \circ \iota_{b'} \circ f' \circ \pi_{a'} \\ &= \iota_c \circ g \circ \pi_b \circ \iota_b \circ f \circ \pi_a + \iota_c \circ g \circ 0_{b' \rightarrow b} \circ f' \circ \pi_{a'} \\ &\quad + \iota_{c'} \circ g' \circ 0_{b \rightarrow b'} \circ f \circ \pi_a + \iota_{c'} \circ g' \circ \pi_{b'} \circ \iota_{b'} \circ f' \circ \pi_{a'} \\ &= (\iota_c \circ g \circ \pi_b + \iota_{c'} \circ g' \circ \pi_{b'}) \circ (\iota_b \circ f \circ \pi_a + \iota_{b'} \circ f' \circ \pi_{a'}) \\ &= (g \oplus g') \circ (f \oplus f') \end{aligned}$$

Logo $\oplus$ preserva o morfismo identidade e a composição de morfismos, ou seja, $\oplus$ é um bifuntor. Daí $\oplus$ é uma operação binária □

Proposição 2.3.2. [13, Proposition 2.2.14] *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $\oplus$ a operação binária em $\mathcal{A}$ definida no Lema 2.3.1. Então $(S^{iso}(\mathcal{A}), \oplus)$ é um monóide comutativo.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \text{Ob } \mathcal{A}$ como o biproduto é produto, então, do

Lemma 1.2.17, temos $a \oplus b \cong b \oplus a$ e $(a \oplus b) \oplus c \cong a \oplus (b \cong c)$, ou seja, em $(S^{iso}(\mathcal{A}), \oplus)$ vale

$$[a] \oplus [b] = [a \oplus b] = [b \oplus a] = [b] \oplus [a]$$

e

$$([a] \oplus [b]) \oplus [c] = [(a \oplus b) \oplus c] = [a \oplus (b \cong c)] = [a] \oplus ([b] \oplus [c]).$$

Daí $(S^{iso}(\mathcal{A}), \oplus)$ é comutativo e associativo. Como $\mathcal{A}$ é aditiva, tem objeto zero. Seja z o objeto zero de $\mathcal{A}$. Do Lemma 1.2.20, temos $a \cong a \oplus z$, para todo $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Daí $[a] = [a \oplus z] = [a] \oplus [z]$, para todo $[a] \in S^{iso}(\mathcal{A})$. Logo, o elemento neutro de $S^{iso}(\mathcal{A})$ é $[z]$. Portanto, $(S^{iso}(\mathcal{A}), \oplus)$ é um monóide comutativo. $\square$

Definição 2.3.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva com um coproduto binário $\oplus$. O grupo de Grothendieck de $\mathcal{A}$ em relação a $\oplus$, denotado $G_0(\mathcal{A}, \oplus)$, é chamado **grupo de Grothendieck cindido** de $\mathcal{A}$.*

O subgrupo de $G^{iso}(\mathcal{A})$ gerado por $\{[a \oplus b] - [a] - [b] \mid a, b \in \text{Ob } \mathcal{A}\}$ é denotado $N_{\oplus}(\mathcal{A})$.

Proposição 2.3.4. [13, Proposition 2.2.21] *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ categorias aditivas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ induz um homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} [F] : \quad G_0(\mathcal{A}, \oplus) &\longrightarrow G_0(\mathcal{A}', \oplus) \\ [a] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) &\longmapsto [F(a)] + N_{\oplus}(\mathcal{A}') \\ \sum_{i=1}^n m_i [a_i] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) &\longmapsto \sum_{i=1}^n m_i [F(a_i)] + N_{\oplus}(\mathcal{A}'). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $x \in N_{\oplus}(\mathcal{A})$. Então $x = \sum m_i ([a_i \oplus b_i] - [a_i] - [b_i])$, logo

$$\begin{aligned} [F](x) &= [F](\sum m_i ([a_i \oplus b_i] - [a_i] - [b_i])) \\ &= \sum m_i F([a_i \oplus b_i] - [a_i] - [b_i]) \\ &= \sum m_i (F([a_i \oplus b_i]) - F([a_i]) - F([b_i])) \\ &= \sum m_i ([F(a_i) \oplus F(b_i)] - F([a_i]) - F([b_i])) \end{aligned}$$

Assim, F leva $0 \in G_0(\mathcal{A}, \oplus)$ em $0 \in G_0(\mathcal{A}', \oplus)$. Daí, se $a = b \in G_0(\mathcal{A}, \oplus)$, então

$$a - b \in N_{\oplus}(\mathcal{A}), \text{ ou seja, } [F(a)] - [F(b)] = [F(a) - F(b)] = [F](a - b) = 0.$$

Logo $[F(a)] = [F(b)]$ e assim $[F]$ está bem definido. $\square$

Definição 2.3.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto inicial c . Um objeto a de $\mathcal{C}$ é dito **indecomponível** se $a \cong \coprod_{i \in I} b_i$, onde I é um conjunto de índices, implica que existe um único índice $j \in I$ tal que $a \cong b_j$ e $b_i \cong c$, para cada $i \neq j$ em I .*

Definição 2.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Dizemos que $\mathcal{C}$ tem a **propriedade de Krull-Schmidt** se:*

- (i) *para cada objeto c em $\mathcal{C}$, temos $c \cong a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e cada a_i um objeto indecomponível em $\mathcal{C}$.*
- (ii) *Se, para $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$, objetos indecomponíveis em $\mathcal{C}$, com $n, m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\bigoplus_{i=1}^n a_i \cong \bigoplus_{j=1}^m b_j,$$

então $m = n$ e, para cada i , $a_i \cong b_{\sigma(i)}$, onde σ é uma permutação de índices.

Teorema 2.3.7. [13, Theorem 2.3.6] *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva essencialmente pequena com a propriedade de Krull-Schmidt e S o conjunto de todas as classes dos objetos indecomponíveis em $\mathcal{A}$. Então S é uma base do grupo de Grothendieck cindido $G_0(\mathcal{A}, \oplus)$.*

Demonstração. Seja $x + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i [x_i] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) \in G_0(\mathcal{A}, \oplus)$, com $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedade de Krull-Schmidt, temos $[x_i] = \left[\bigoplus_{j=1}^{m_i} a_{ij} \right]$, onde cada a_{ij} é um objeto indecomponível em $\mathcal{A}$. Logo

$$x + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\bigoplus_{j=1}^{m_i} a_{ij} \right] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m_i} [a_{ij}] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}).$$

Assim, $x + N_{\oplus}(\mathcal{A}) \in \langle S \rangle$.

Como $\alpha[a] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n [a] + N_{\oplus}(\mathcal{A})$, para $\alpha > 0$, sejam

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n_1} [a_i] - \sum_{i=1}^{n_2} [a'_i] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}), \quad b = \left(\sum_{i=1}^{m_1} [b_i] - \sum_{i=1}^{m_2} [b'_i] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}) \in G_0(\mathcal{A}, \oplus)$$

com $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e cada a_i, a'_i, b_i, b'_i são objetos indecomponíveis de $\mathcal{A}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que não temos $a_i \cong a'_j$ nem $b_i \cong b'_j$, para nenhum i, j . Se $a = b$, então

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\sum_{i=1}^{n_1} [a_i] - \sum_{i=1}^{n_2} [a'_i] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} [b_i] - \sum_{i=1}^{m_2} [b'_i] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}) \\ \Rightarrow & \left(\sum_{i=1}^{n_1} [a_i] + \sum_{i=1}^{m_2} [b'_i] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} [b_i] + \sum_{i=1}^{n_2} [a'_i] \right) + N_{\oplus}(\mathcal{A}) \\ \Rightarrow & \left[\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} a_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m_2} b'_i \right) \right] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) = \left[\left(\bigoplus_{i=1}^{m_1} b_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_2} a'_i \right) \right] + N_{\oplus}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

e, do Lemma 2.2.3, temos

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} a_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m_2} b'_i \right) \oplus c \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} b_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_2} a'_i \right) \oplus c,$$

para algum $c \in \text{Ob } \mathcal{A}$ e, como $\mathcal{A}$ tem a propriedade de Krull-Schmidt, $c \cong \bigoplus_{i=1}^k c_i$, onde cada c_i é um objeto indecomponível em $\mathcal{A}$ e $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} a_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m_2} b'_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k c_i \right) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} b_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_2} a'_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k c_i \right).$$

Pela propriedade de Krull-Schmidt $n_1 + m_2 + k = m_1 + n_2 + k$, ou seja, $n_1 + m_2 = m_1 + n_2$ e cada objeto indecomponível na direita é isomorfo a um objeto indecomponível da esquerda da igualdade, e como $c_i \cong c_i$, para cada $1 \leq i \leq k$, então, para cada i , $a_i \cong b_j$, para algum j , e, para cada k , $a'_k \cong b'_l$, para algum l . Portanto, a e b diferem só na ordem das parcelas. Logo, S é uma base para $G_0(\mathcal{A}, \oplus)$. $\square$

Exemplo 2.3.8. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, considere a categoria $\text{FinVect}_{\mathbb{K}}$ de todos os espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$.*

Dois espaços vetoriais de dimensão finito são isomorfos se, e somente se, eles têm a mesma dimensão. Logo,

$$S^{\text{iso}}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}) = \{[V_i] \mid \dim(V_i) = i\} \cong \mathbb{N},$$

$$G^{\text{iso}}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i [V_i] \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

e $N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$ é gerado pelos elementos da forma $[a \oplus b] - [a] - [b]$.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : G^{\text{iso}}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^n m_i [V_i] &\longmapsto \sum_{i=1}^n m_i \dim(V_i). \end{aligned}$$

A aplicação f é sobrejetora, pois, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $V_i = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ tal que $\dim(V_i) = |i|$. Assim, existe $[V_i] \in G^{\text{iso}}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$ ou $-[V_i] \in G^{\text{iso}}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$ tal que $f([V_i]) = \dim(V_i) = i$, se $i \geq 0$ ou $f(-[V_i]) = -\dim(V_i) = -|i| = i$ se $i < 0$, respectivamente.

Pelo Lema 2.2.2, $[V_0]$ é o elemento neutro de $G_0(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}, \oplus)$. Logo $[V_0] \in N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$.

Para $n, q \in \mathbb{N}$, temos $[V_{nq}] = n[V_q] \pmod{N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})}$.

Seja $x = \sum_{i=1}^n m_i ([V_{r_i} \oplus V_{s_i}] - [V_{r_i}] - [V_{s_i}]) \in N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$. Então

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n m_i f([V_{r_i} \oplus V_{s_i}] - [V_{r_i}] - [V_{s_i}]) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (f([V_{r_i} \oplus V_{s_i}]) - f([V_{r_i}]) - f([V_{s_i}])) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (\dim(V_{r_i}) + \dim(V_{s_i}) - \dim(V_{r_i}) - \dim(V_{s_i})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí $x \in \text{Ker}(f)$, para todo $x \in N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$. Assim,

$$N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}) \subset \text{Ker}(f).$$

Seja $x \in \text{Ker}(f)$. Se $x = m_j[V_j]$, então $0 = f(x) = m_j \dim(V_j)$. Daí $m_j = 0$ ou $\dim(V_j) = 0$. Se $m_j = 0$, então $x = 0 \in G_0(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}, \oplus)$. Se $\dim(V_j) = 0$, então $[V_j] = [V_0] \in N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$.

Suponha que x possua pelo menos dois coeficientes não nulos e, como x é uma soma com um número finito de parcelas, temos

$$x = m_{i_1}[V_{i_1}] + m_{i_2}[V_{i_2}] + \cdots + m_{i_k}[V_{i_k}].$$

Seja $d = \text{mdc}\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Então $[V_{i_j}] = [V_{dq_{ij}}]$, onde $i_j = dq_{ij}$, para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Daí, $x = (m_{i_1}q_{i1} + m_{i_2}q_{i2} + \cdots + m_{i_k}q_{ik})[V_d]$.

Como $x \in \text{Ker}(f)$, então $0 = f(x) = (m_{i_1}q_{i1} + m_{i_2}q_{i2} + \cdots + m_{i_k}q_{ik})d$. Como $d \neq 0$, $m_{i_1}q_{i1} + m_{i_2}q_{i2} + \cdots + m_{i_k}q_{ik} = 0$ implica $x = 0 \pmod{N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})}$. Logo $x \in N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$, para todo $x \in \text{Ker}(f)$. Daí, $\text{Ker}(f) \subset N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})$.

Assim, $N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}) = \text{Ker}(f)$ e, pelo Teorema do Isomorfismo, temos

$$G_0(\text{FinVect}_{\mathbb{K}}, \oplus) = \frac{G^{\text{iso}}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})}{N_{\oplus}(\text{FinVect}_{\mathbb{K}})} \cong \mathbb{Z}.$$

Exemplo 2.3.9. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, considere a categoria $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ de todos os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Sejam $V_i \in \text{Ob } \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ e $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i$.

Em $G_0(\text{Vect}_{\mathbb{K}}, \oplus)$, temos

$$([V_i] + [B]) + N_{\oplus}(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) = [V_i \oplus B] + N_{\oplus}(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) = [B] + N_{\oplus}(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$$

ou seja, $[V_i] \in N_{\oplus}(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) = 0$ em $N_{\oplus}(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$, para todo i . Logo o grupo de Grothendieck cindido de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ é trivial.

Definição 2.3.10. *Seja B uma álgebra associativa unitária, denotaremos por*

$$G_0(B) = G_0(B\text{-mod}) \quad e \quad K_0(B) = G_0(B\text{-pmod})$$

o grupo de Grothendieck da categoria de todos os B -módulos finitamente gerados e o grupo de Grothendieck da categoria de todos os módulos projetivos finitamente gerados, respectivamente.

Observação 2.3.11. *Se B é semissimples, então toda sequência exata de B -módulos cinde. Assim, cada B -módulo é projetivo.*

A partir de agora vamos assumir que B é uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo de característica zero K . Sejam $V_1, V_2, \dots, V_s$ todos os B -módulos simples não isomorfos. Se, para cada $1 \leq i \leq s$, P_i é a cobertura projetiva de V_i , então $P_1, P_2, \dots, P_s$ é uma lista completa de B -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos [3, Corollary I.4.5].

Logo, do Teorema de Jordan-Hölder [9, Theorem VIII.1.10], temos

$$G_0(B) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}[V_i].$$

As classes $[M] + N(B\text{-mod}) \in G_0(B)$, para cada $M \in \text{Ob } B\text{-mod}$, são soma das classes dos módulos simples da série de decomposição de M .

Como cada $P \in \text{Ob } B\text{-pmod}$ pode ser escrito de forma única como soma de módulos projetivos indecomponíveis, temos

$$K_0(B) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}[P_i].$$

Definimos a forma bilinear $\langle -, - \rangle : K_0(B) \otimes_{\mathbb{Z}} G_0(B) \longrightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\langle [P] + N(B\text{-pmod}), [M] + N(B\text{-mod}) \rangle = \dim_K (Hom_B(P, M)), \quad (2.1)$$

para cada $P \in \text{Ob } B\text{-pmod}$, $M \in \text{Ob } B\text{-mod}$.

Como $Hom_B(-, M) = h^M$ é um funtor aditivo, para cada $M \in \text{Ob } B\text{-mod}$, e $K_0(B) = G_0(B\text{-mod}, \oplus)$, esta forma está bem definida no primeiro argumento e, como $Hom_B(P, -) = h_P$ é um funtor exato, para cada $P \in \text{Ob } B\text{-pmod}$, a forma está bem definida no segundo argumento.

Do Lema 1.1.23 , temos

$$\langle [P_i] + N(B\text{-}pmod), [V_j] + N(B\text{-}mod) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ \dim_K(\text{End}_B(V_i)), & \text{se } i = j \end{cases}$$

Portanto, a forma bilinear $\langle -, - \rangle$ é não degenerada.

Para um anel comutativo R e um R -módulo V , denotamos por V^* o espaço vetorial dual de V .

Note que a forma bilinear $\langle -, - \rangle : V \otimes_{\mathbb{Z}} W \longrightarrow R$ induz as aplicações

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W^* \\ v & \longmapsto & f_v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V^* \\ w & \longmapsto & g_w \end{array}$$

onde $f_v(w) = \langle v, w \rangle$, para cada $w \in W$, e $g_w(v) = \langle v, w \rangle$, para cada $v \in V$. Se a forma bilinear é não degenerada, então estas aplicações são injetivas.

Definição 2.3.12. *Se as aplicações definidas anteriormente são isomorfismos, então dizemos que a forma bilinear é um **pareamento perfeito**.*

Se R é um corpo, então qualquer forma bilinear não degenerada de R -módulos de dimensão finita é um pareamento perfeito.

Se K é algebricamente fechado, pelo Lema de Schur [9, Lemma IX.1.10], temos $\langle [P_i], [V_j] \rangle = \delta_{ij}$, para cada $1 \leq i, j \leq s$, e a forma definida em (2.1) é um pareamento perfeito.

Capítulo 3

Álgebra de Weyl e álgebra nilcoxeter

Na primeira seção deste capítulo definimos a álgebra de Weyl com a qual vamos trabalhar e estudamos algumas representações polinomiais desta álgebra, cuja categorificação é o objetivo principal deste trabalho. Na segunda seção, apresentamos a álgebra nilcoxeter e sua relação com a álgebra de Weyl, que é uma das ferramentas principais para a categorificação desta álgebra. A referência para este capítulo é [12].

3.1 Álgebra de Weyl

Seja $K[x]$ a álgebra dos polinômios na variável x sobre um corpo de característica zero K . Defina as aplicações lineares

$$\begin{array}{llll} X : K[x] & \longrightarrow & K[x] & \text{ e } \quad \partial : K[x] \longrightarrow K[x] \\ f & \longmapsto & xf & \quad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}. \end{array} \quad (3.1)$$

As aplicações X e ∂ geram uma subálgebra no anel $\text{End}(K[x])$. Aplicando a regra de Leibniz para a derivação do produto, temos

$$\partial X(f) = \partial(xf) = \frac{\partial x}{\partial x}f + x \frac{\partial f}{\partial x} = f + X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f + X\partial(f) = (1 + X\partial)(f).$$

Assim, $\partial X = 1 + X\partial$, onde 1 é a aplicação identidade em $K[x]$.

Definição 3.1.1. Para $X, \partial \in \text{End}(K[x])$ definidos em 3.1, a subálgebra $\langle X, \partial \rangle$ de $\text{End}(K[x])$ é chamada a **primeira álgebra de Weyl** sobre K , denotada por W .

Cada monômio M em W é produto de potências de X e de ∂ . A relação $\partial X = 1 + X\partial$ nos permite escrever cada monômio M como soma de monômios nos quais as potências de X aparecem antes das potências de ∂ . Para isto definimos:

Definição 3.1.2. Para cada monômio M em W defina $\sharp_X(M)$ o número de termos X aparecendo em M e $\sharp_\partial(M)$ o número de termos ∂ aparecendo em M . Seja $I(M)$ o número de “trocas” dos termos de M para que as potências de X sempre apareçam à frente das potências de ∂ .

Por exemplo, para $M = X^2\partial^2X\partial \in W$, temos $\sharp_X(M) = 3$, $\sharp_\partial(M) = 3$ e

$$\begin{aligned} X^2\partial^2X\partial &= X^2\partial(\partial X)\partial \\ &= X^2\partial(X\partial + 1)\partial \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= X^2\partial X\partial^2 + X^2\partial^2 \\ &= X^2(X\partial + 1)\partial^2 + X^2\partial^2 \\ &= X^3\partial^3 + 2X^2\partial^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Assim, o número de trocas neste M é $I(M) = 2$.

Lema 3.1.3. Para $i, j \in \mathbb{Z}_+$, temos $\partial X^i \partial^j = X^i \partial^{j+1} + iX^{i-1} \partial^j$.

Demonstração. Por indução sobre $i \geq 0$.

Para $i = 0$, é obvio. Para $i = 1$, ilustramos a igualdade

$$\partial X \partial^j = (X\partial + 1)\partial^j = X\partial^{j+1} + \partial^j.$$

Agora, para $n \in \mathbb{N}$, suponha $\partial X^n \partial^j = X^n \partial^{j+1} + nX^{n-1} \partial^j$. Então

$$\begin{aligned} \partial X^{n+1} \partial^j &= \partial X X^n \partial^j \\ &= (X\partial + 1)X^n \partial^j \\ &= X(X^n \partial^{j+1} + nX^{n-1} \partial^j) + X^n \partial^j \\ &= X^{n+1} \partial^{j+1} + (n+1)X^n \partial^j, \end{aligned}$$

assim, pelo Primeiro Princípio de Indução Finita, segue o resultado. $\square$

Lema 3.1.4. Cada $u \in W$ pode ser escrito como $\sum_J a_{ij} X^i \partial^j$, para algum subconjunto finito $J \subset \mathbb{N}^2$ e $a_{ij} \in K$.

Demonstração. Como X, ∂ geram W , então $u \in W$ pode ser escrito como uma soma finita da forma

$$u = \sum_i b_i X^{r_{i1}} \partial^{s_{i1}} X^{r_{i2}} \partial^{s_{i2}} \dots X^{r_{in_i}} \partial^{s_{in_i}}$$

onde $b_i \in K$, $n_i, r_{i_j}, s_{i_j} \in \mathbb{Z}_+$ e alguns $r_{i_1}, s_{i_{n_i}}$ podem ser zero. Escrevemos $u = \sum M_i$, com cada $M_i = b_i X^{r_{i_1}} \partial^{s_{i_1}} X^{r_{i_2}} \partial^{s_{i_2}} \dots X^{r_{i_{n_i}}} \partial^{s_{i_{n_i}}}$.

Defina $I(u) = \max\{I(M_i), i \in J\}$. Se $I(u) = n > 0$, então temos algum M_i com $I(M_i) = n$, ou seja, M_i contém algum fator da forma ∂X . Assim, $M_i = A \partial X B$, onde A pode estar em K e B pode ser 1. Usando a identidade $\partial X = X \partial + 1$, temos:

$$M_i = A(X \partial + 1)B = AX \partial B + AB$$

Vamos denotar esta nova expressão de M_i por M_i^1 , indicando que já procedemos a troca de ∂X por $X \partial + 1$ uma vez.

Agora, $I(AB) = I(M_i) - \sharp_X(B) - \sharp_\partial(A) - 1$, pois ao não ter o termo $X \partial$, da troca que foi efetuada, não serão necessárias as $\sharp_X(B)$ trocas de ∂ nem as $\sharp_\partial(A)$ trocas de X para ter a forma requerida. Logo

$$\begin{aligned} I(M_i^1) &= \max\{I(AX \partial B), I(AB)\} \\ &= \max\{I(M_i) - 1, I(M_i) - \sharp_X(M) - \sharp_\partial(M) - 1\} \\ &= I(M_i) - 1. \end{aligned}$$

Assim, recursivamente, temos $I(M_i^n) = 0$. Aplicando o mesmo processo para cada M_i , temos uma expressão de u na forma requerida. $\square$

Lema 3.1.5. [5, Lemma 2.9] Para $i, j, l \in \mathbb{Z}_+$ e $X, \partial \in W$, temos

$$X^i \partial^j X^l \partial^m = \sum_{r=0}^j r! \binom{j}{r} \binom{l}{r} X^{i+l-r} \partial^{j+m-r}.$$

Demonstração. Do Lemma 3.1.3, temos

$$\partial^j X^l \partial^m = \partial^{j-1} (\partial X^l \partial^m) = \partial^{j-1} (X^l \partial^{m+1} + l X^{l-1} \partial^m) = \partial^{j-1} X^l \partial^{m+1} + l \partial^{j-1} X^{l-1} \partial^m.$$

Sejam α e β aplicações tais que:

$$\alpha(\partial^j X^l \partial^m) = \partial^{j-1} X^l \partial^{m+1} \quad \text{e} \quad \beta(\partial^j X^l \partial^m) = l \partial^{j-1} X^{l-1} \partial^m.$$

Note que $\partial^j X^l \partial^m = \alpha(\partial^j X^l \partial^m) + \beta(\partial^j X^l \partial^m)$ e $\alpha\beta = \beta\alpha$, pois

$$\alpha\beta(\partial^j X^l \partial^m) = l \partial^{j-2} X^{l-1} \partial^{m+1} = \beta\alpha(\partial^j X^l \partial^m).$$

Além disso,

$$\alpha^k(\partial^{j-k} X^l \partial^m) = \partial^{j-1} X^l \partial^{m+k}, \quad \beta^r(\partial^j X^l \partial^m) = l(l-1) \dots (l-r+1) \partial^{j-r} X^{l-r} \partial^m$$

e

$$\begin{aligned} \partial^j X^l \partial^m &= \alpha(\partial^j X^l \partial^m) + \beta(\partial^j X^l \partial^m) \\ &= \alpha(\alpha(\partial^j X^l \partial^m) + \beta(\partial^j X^l \partial^m)) + \beta(\alpha(\partial^j X^l \partial^m) + \beta(\partial^j X^l \partial^m)) \\ &= \alpha^2(\partial^j X^l \partial^m) + \alpha\beta(\partial^j X^l \partial^m) + \beta\alpha(\partial^j X^l \partial^m) + \beta^2(\partial^j X^l \partial^m). \end{aligned}$$

Assim, recursivamente, depois de j passos, temos 2^j fatores, não todos diferentes, da forma $\alpha\beta \dots \alpha(\partial^{j-k} X^l \partial^m)$ e daí podemos escrever $\partial^j X^l \partial^m$ como

$$\begin{aligned} \partial^j X^l \partial^m &= \sum_{r=0}^j r! \binom{j}{r} \alpha^{j-r} \beta^r(\partial^j X^l \partial^m) \\ &= \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \alpha^{j-r} (l(l-1) \dots (l-r+1) \partial^{j-r} X^{l-r} \partial^m) \\ &= \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \frac{l!}{(l-r)!} \alpha^{j-r} (\partial^{j-r} X^{l-r} \partial^m) \\ &= \sum_{r=0}^j r! \binom{j}{r} \binom{l}{r} \alpha^{j-r} (\partial^{j-r} X^{l-r} \partial^m) \\ &= \sum_{r=0}^j r! \binom{j}{r} \binom{l}{r} X^{l-r} \partial^{j+m-r} \end{aligned}$$

e daí

$$X^i \partial^j X^l \partial^m = X^i \left(\sum_{r=0}^j r! \binom{j}{r} \binom{l}{r} X^{l-r} \partial^{j+m-r} \right) = \sum_{r=0}^j r! \binom{j}{r} \binom{l}{r} X^{i+l-r} \partial^{j+m-r}.$$

□

Lema 3.1.6. *Seja $R_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial gerado por $x^0, x^1, x^2, \dots$. Então $R_{\mathbb{Q}}$ é um W -módulo com a ação natural de W sobre $R_{\mathbb{Q}}$ dada por:*

$$X \cdot x^n = x^{n+1} \quad e \quad \partial \cdot x^n = nx^{n-1}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Observação 3.1.7. *A ação (3.2) se estende do seguinte modo, para $i \geq 0, j \geq 0$,*

1.

$$X^i \cdot x^n = x^{n+i}$$

2.

$$\partial^i \cdot x^n = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-i+1)x^{n-i}, & \text{se } i \leq n \\ 0, & \text{se } i > n \end{cases}$$

3.

$$(X^i \partial^j) \cdot x^n = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-j+1)x^{n-j+i}, & \text{se } j \leq n \\ 0, & \text{se } j > n \end{cases}$$

4.

$$\left(\sum a_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot x^n = \sum a_{ij} (X^i \partial^j) \cdot x^n$$

e, estendendo por linearidade, para cada $u \in R_{\mathbb{Q}}$, $u = \sum_k c_k x^k$

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) = \sum_{i,j,k} a_{ij} c_k (X^i \partial^j) \cdot x^k.$$

Demonstração. Agora faremos a demonstração do Lema 3.1.6

Sejam

$$\alpha = \sum a_{ij} X^i \partial^j, \beta = \sum b_{ij} X^i \partial^j \in W \quad \text{e} \quad u = \sum c_k x^k, v = \sum d_k x^k \in R_{\mathbb{Q}}.$$

Pelas observações feitas acima, temos

$$\begin{aligned} (i) \quad \alpha(u+v) &= \sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \cdot \left(\sum_k c_k x^k + \sum_k d_k x^k \right) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \cdot \left(\sum_k (c_k + d_k) x^k \right) \\ &= \sum_{i,j,k} a_{ij} (c_k + d_k) X^i \partial^j \cdot x^k \\ &= \sum_{i,j,k} (a_{ij} c_k + a_{ij} d_k) X^i \partial^j \cdot x^k \\ &= \sum_{i,j,k} a_{ij} c_k X^i \partial^j \cdot x^k + \sum_{i,j,k} a_{ij} d_k X^i \partial^j \cdot x^k \\ &= \left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k d_k x^k \right) \\ &= \alpha \cdot u + \alpha \cdot v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad (\alpha + \beta) \cdot u &= \left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j + \sum_{i,j} b_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\
&= \left(\sum_{i,j} (a_{ij} + b_{ij}) X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\
&= \sum_{i,j,k} (a_{ij} + b_{ij}) c_k X^i \partial^j \cdot x^k \\
&= \sum_{i,j,k} (a_{ij} c_k + b_{ij} c_k) X^i \partial^j \cdot x^k \\
&= \sum_{i,j,k} a_{ij} c_k X^i \partial^j \cdot x^k + \sum_{i,j,k} b_{ij} c_k X^i \partial^j \cdot x^k \\
&= \left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i,j} b_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\
&= \alpha \cdot u + \beta \cdot u.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad (\alpha\beta) \cdot u &= \left[\left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \right) \left(\sum_{l,m} b_{lm} X^l \partial^m \right) \right] \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\
&= \left[\sum_{r=0}^j a_{ij} b_{lm} r! \binom{j}{r} \binom{l}{r} X^{i+l-r} \partial^{j+m-r} \right] \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \\
&= \left(\sum_{i,j} a_{ij} X^i \partial^j \right) \cdot \left[\left(\sum_{l,m} b_{lm} X^l \partial^m \right) \cdot \left(\sum_k c_k x^k \right) \right] \\
&= \alpha \cdot (\beta \cdot u).
\end{aligned}$$

A terceira igualdade de (iii) é justificada por sucessivas (e exaustivas) aplicações das regras descritas na Observação 3.1.7. $\square$

É fácil verificar que os subgrupos abelianos

$$R = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{x^n/n!\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad R' = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$$

de $R_{\mathbb{Q}}$ são W -submódulos de $R_{\mathbb{Q}}$.

Definimos ainda uma forma bilinear simétrica em $R_{\mathbb{Q}}$ por

$$\langle x^m, x^n \rangle = \delta_{m,n} n! \tag{3.3}$$

estendida por linearidade para todos os elementos de $R_{\mathbb{Q}}$. Esta forma será im-

portante na categorificação da ação da álgebra de Weyl nos W -módulos R e R' .

3.2 A álgebra nilcoxeter

Seja K um corpo e S_n o grupo simétrico das permutações de n elementos. Considere o conjunto ds somas formais

$$K[S_n] = \left\{ \sum a_\sigma \sigma / a_\sigma \in K, \sigma \in S_n \right\}. \quad (3.4)$$

Temos $\sum a_\sigma \sigma = \sum b_\sigma \sigma$ se, e somente se, $a_\sigma = b_\sigma$ para todo $\sigma \in S_n$.

Em $K[S_n]$, consideremos as seguintes operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, respetivamente:

$$\begin{aligned} + : \quad & K[S_n] \times K[S_n] \longrightarrow K[S_n] \\ & \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma, \sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma \sigma \right) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} (a_\sigma + b_\sigma) \sigma \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & K[S_n] \times K[S_n] \longrightarrow K[S_n] \\ & \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma, \sum_{\alpha \in S_n} b_\alpha \alpha \right) \longmapsto \sum_{\sigma, \alpha \in S_n} a_\sigma b_\alpha (\sigma \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * : \quad & K \times K[S_n] \longrightarrow K[S_n] \\ & \left(\lambda, \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \right) \longmapsto \lambda * \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_n} (\lambda a_\sigma) \sigma. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Com essas operações, $K[S_n]$ tem uma estrutura de álgebra, chamada **a álgebra de grupo do grupo S_n** .

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, denotamos por s_i a transposição $(i \ i+1)$ em S_n . Faça $U = \{s_i, 1 \leq i \leq n-1\}$.

Proposição 3.2.1. *As tranposições $s_i, 1 \leq i \leq n-1$, satisfazem as relações*

$$s_i^2 = 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.7)$$

$$s_i s_j = s_j s_i, \text{ para } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tais que } |i-j| > 1, \quad (3.8)$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (3.9)$$

Demonstração. De fato, temos $s_i^2 = (i \ i+1)(i \ i+1) = 1$. Agora, se $|i-j| > 1$,

$$s_i s_j = (i \ i+1)(j \ j+1) = (j \ j+1)(i \ i+1) = s_j s_i,$$

pois ciclos disjuntos comutam. Além disso,

$$\begin{aligned} s_i s_{i+1} s_i &= (i, i+1)(i+1, i+2)(i, i+1) = (i, i+2) \\ &= (i+1, i+2)(i, i+1)(i+1, i+2) = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \end{aligned}$$

□

As relações (3.8) e (3.9) são conhecidas como **relações de trança**.

Observação 3.2.2. *Lembre que toda permutação $\sigma \in S_n$ pode ser escrita como produto de transposições [9, Corollary I.6.5]. Agora, para cada $1 \leq i < j \leq n$, a transposição $(i j)$ em S_n é produto de transposições s_k , com $1 \leq k \leq n-1$, na forma*

$$(i, j) = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \cdots s_{i+1} s_i. \quad (3.10)$$

Assim, qualquer elemento de S_n pode ser escrito como um produto (em S_n) da forma

$$\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}. \quad (3.11)$$

Definição 3.2.3. *Se, nas expressões da forma (3.11), k é minimal, então ele é chamado o **comprimento** de σ e é denotado por $\ell(\sigma)$.*

Qualquer expressão da forma (3.11) de comprimento minimal, isto é, $k = \ell(\sigma)$ é chamada uma **expressão reduzida** para σ . Qualquer expressão reduzida para σ pode ser obtida de alguma outra por uma sequência de relações de trança. Se (3.11) não é uma expressão reduzida, então podemos usar as relações de trança para trocá-la por uma expressão na qual duas s_j (para algum $j = 1, \dots, n-1$) aparecem uma imediatamente depois da outra. Usando a relação $s_j^2 = 1$, o comprimento da expressão pode ser reduzido por dois. Continuando dessa maneira, podemos obter uma expressão reduzida para qualquer expressão não reduzida.

Vamos considerar $\ell(1) = 0$.

Observação 3.2.4. *Se $|i-j| > 1$, de (3.10), temos $\ell((i j)) = (j-i) + (j-i-1)$.*

Proposição 3.2.5. *O elemento w_0 de S_n que leva i em $n-i+1$, para $i = 1, \dots, n$, é o único elemento de comprimento maximal de S_n . Seu comprimento é $n(n-1)/2$.*

Demonstração. Seja $w_0 \in S_n$ a permutação que leva i em $n-i+1$, para $i = 1, \dots, n$.

Para	n	par	Para	n	ímpar
1	$\mapsto$	n	1	$\mapsto$	n
2	$\mapsto$	$n-1$	2	$\mapsto$	$n-1$
3	$\mapsto$	$n-2$	3	$\mapsto$	$n-2$
$\vdots$			$\vdots$		
$\frac{n}{2}-1$	$\mapsto$	$\frac{n}{2}+2$	$\frac{n-3}{2}$	$\mapsto$	$\frac{n+5}{2}$
$\frac{n}{2}$	$\mapsto$	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n-1}{2}$	$\mapsto$	$\frac{n+3}{2}$
$\frac{n}{2}+1$	$\mapsto$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\mapsto$	$\frac{n+1}{2}$
$\frac{n}{2}+2$	$\mapsto$	$\frac{n}{2}-1$	$\frac{n+3}{2}$	$\mapsto$	$\frac{n-1}{2}$
$\vdots$			$\vdots$		
$n-1$	$\mapsto$	2	$n-1$	$\mapsto$	2
n	$\mapsto$	1	n	$\mapsto$	1

Assim, w_0 é produto de ciclos disjuntos e, para n par,

$$w_0 = (1 \ n)(2 \ n-1) \dots \left(\frac{n}{2} \ \frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n}{2} \ \frac{n}{2}+1\right) \dots (2 \ n-1)(1 \ n)$$

e, para n ímpar,

$$\begin{aligned} w_0 &= (1 \ n)(2 \ n-1) \dots \left(\frac{n-3}{2} \ \frac{n+5}{2}\right) \left(\frac{n-1}{2} \ \frac{n+3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{n-1}{2} \ \frac{n+3}{2}\right) \left(\frac{n-3}{2} \ \frac{n+5}{2}\right) \dots (2 \ n-1)(1 \ n). \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever w_0 como produto das transposições s_i da forma

$$\begin{aligned} w_0 &= s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \dots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} \\ &\quad s_i \dots s_{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} w_0 &= s_{\frac{n}{2}} \dots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i \dots s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} \\ &\quad s_{n-2} \dots s_2 s_1, \end{aligned}$$

para n par, e, para n ímpar,

$$w_0 = s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \\ \dots s_{i+1} s_i \cdots s_{\frac{n-1}{2}} s_{\frac{n+1}{2}} s_{\frac{n-1}{2}}$$

ou

$$w_0 = s_{\frac{n-1}{2}} s_{\frac{n+1}{2}} s_{\frac{n-1}{2}} \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i \cdots s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \\ s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1.$$

Assim, $\ell(w_0) = ((n-1) + (n-2)) + \dots + (3+2) + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, para n par, e $\ell(w_0) = ((n-1) + (n-2)) + \dots + (4+3) + (2+1) = \frac{n(n-1)}{2}$, se n for ímpar.

Agora vejamos que w_0 tem comprimento máximo em S_n . Para $s_1 w_0$ é obvio que $\ell(s_1 w_0) = \ell(w_0) - 1$. Agora, se $i > 1$, faça

$$s = (i+1 \ n-i)(i+2 \ n-i-1) \dots \left(\frac{n}{2} \ \frac{n}{2} + 1\right).$$

Assim,

$$w_0 = s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s.$$

Procedemos da seguinte maneira: aplicamos as relações de trança convenientemente e as citamos nas linhas das igualdades a seguir; comutamos s_i ou s_{i-1} com os s_j sempre que possível e vamos “andando” pela expressão de w_0 , para obter:

$$\begin{aligned} s_i w_0 &= s_i s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i \\ &\quad s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \\ &= s_1 s_2 \dots s_{i-2} s_i s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1 \\ &\quad s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= s_1 s_2 \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1 \\ &\quad s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &= s_1 s_2 \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_{i+2} s_{i+1} \\ &\quad s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= s_1 s_2 \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_{i+2} s_{i+1} s_i s_{i-1} s_i \\ &\quad \dots s_2 s_1 s \dots s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 s_i s_2 \dots s_{n-2} \dots s_2 \cdots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \quad (3.8)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} &= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \cdots s_{i-2} \dots s_{n-i+2} \dots s_{i-2} s_i s_{i-1} s_i s_{i+1} \\ &\quad \dots s_{n-i+1} \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \dots s_{i-2} \dots s_{n-i+2} \dots s_{i-2} \mathbf{s}_{i-1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i-1} s_{i+1} \dots s_{n-i+1} \dots s_{i+1} s_i s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \quad (3.9)$$

$$= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \dots s_{i-2} \dots s_{n-i+2} \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-i+1} \dots s_{i+1} \mathbf{s}_{i-1} s_i s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \quad (3.8)$$

$$= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \dots s_{i-2} \dots s_{n-i+2} \dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{n-i+1} \dots s_{i+1} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i-1} \mathbf{s}_i s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i s \quad (3.9)$$

$$= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \dots s_{i-1} s_i \dots s_{n-i+1} \dots s_{i+1} s_i s_{i-1} \mathbf{1}_{s_{i+1}} \dots s_{\frac{n}{2}} \quad (3.7)$$

$$= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \dots s_{i-1} s_i \dots s_{n-i+1} \dots s_{i+1} s_i s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{\frac{n}{2}},$$

se $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$, para n par, ou $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$, para n ímpar.

Se $\frac{n}{2} < j \leq n-1$, para n par, ou $\frac{n-1}{2} \leq j < n-1$, para n ímpar temos

$$\begin{aligned} s_j w_0 &= \mathbf{s}_j s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 s_2 \dots s_{n-2} \dots s_2 \dots s_{n-j} s_{n-j+1} \dots s_j \dots s_{n-j+1} \\ &\quad s_{n-j} \dots s_{\frac{n}{2}} \\ &= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \mathbf{s}_j s_2 \dots s_{n-2} \dots s_2 \dots s_{n-j} s_{n-j+1} \dots s_j \dots s_{n-j+1} \\ &\quad s_{n-j} \dots s_{\frac{n}{2}} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= s_1 \dots s_{n-1} \dots s_1 \dots s_{n-j-1} \dots s_{j+1} \dots s_{n-j-1} \mathbf{s}_j s_{n-j} \dots s_j \dots s_{n-j} \\ &\quad \dots s_{\frac{n}{2}} \\ &= s_1 \dots s_1 \dots s_{n-j-1} \dots s_{j+1} \dots s_{n-j-1} s_{n-j} \dots s_{j-2} \mathbf{s}_j s_{j-1} s_j s_{j-1} \\ &\quad \dots s_{n-j} \dots s_{\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= s_1 \dots s_1 \dots s_{n-j-1} \dots s_{j+1} \dots s_{n-j-1} s_{n-j} \dots s_{j-2} \mathbf{s}_{j-1} \mathbf{s}_j \mathbf{s}_{j-1} s_{j-1} \\ &\quad \dots s_{n-j} \dots s_{\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &= s_1 \dots s_1 \dots s_{n-j-1} \dots s_{j+1} \dots s_{n-j-1} s_{n-j} \dots s_{j-2} s_{j-1} s_j \mathbf{1} \\ &\quad \dots s_{n-j} \dots s_{\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, $\ell(s_i w_0) = \ell(w_0) - 1 < \ell(w_0)$, para todo $1 \leq i \leq n-1$. De maneira análoga, considerando

$$\begin{aligned} w_0 &= s_{\frac{n}{2}} \dots s_i s_{i+1} \dots s_{n-i} \dots s_{i+1} s_i \dots s_2 s_3 \dots s_{n-2} \dots s_2 s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} \\ &\quad s_{n-2} \dots s_2 s_1, \end{aligned}$$

temos $\ell(w_0 s_j) = \ell(w_0) - 1 < \ell(w_0)$, para todo $1 \leq j \leq n-1$. Daí w_0 tem comprimento máximo em S_n . $\square$

Em $K[S_n]$ definimos agora outra multiplicação por

$$\begin{aligned} \circ : \quad K[S_n] \times K[S_n] &\longrightarrow K[S_n] \\ \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma, \sum_{\alpha \in S_n} b_\alpha \alpha \right) &\longmapsto \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\alpha \in S_n} b_\alpha \alpha \right) = \sum_{\sigma, \alpha \in S_n} (a_\sigma b_\alpha) \sigma \circ \alpha, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{onde } \sigma \circ \alpha = \begin{cases} \sigma \alpha, & \text{se } \ell(\sigma \alpha) = \ell(\sigma) + \ell(\alpha), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotamos por $H_n = (K[S_n], +, \circ, *)$ o conjunto de somas formais (3.4) com as operações adição e multiplicação por escalar como na álgebra de grupo $K[S_n]$ e a multiplicação definida em (3.12).

Lema 3.2.6. *H_n é uma K -álgebra gerada pelo conjunto U .*

Demonstração. De fato de $(K[S_n], +, *)$ ser um espaço vetorial sobre K , segue que H_n também o é.

Para verificar a associatividade da multiplicação $\circ$, observe que, para todos $\alpha, \sigma, \beta \in S_n$, temos (em H_n)

$$\sigma \circ (\alpha \circ \beta) = \begin{cases} \sigma (\alpha \beta), & \text{se } \ell(\sigma (\alpha \beta)) = \ell(\sigma) + \ell(\alpha \beta) = \ell(\sigma) + \ell(\alpha) + \ell(\beta), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\sigma \circ (\alpha \circ \beta) = \begin{cases} (\sigma \alpha) \beta, & \text{se } \ell(\sigma (\alpha \beta)) = \ell(\sigma \alpha) + \ell(\beta) = \ell(\sigma) + \ell(\alpha) + \ell(\beta), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e, como em S_n , a operação é associativa, isto implica a associatividade de $\circ$ em H_n .

Observe que a definição da multiplicação em H_n implica a distributividade.

Segue da Observação 3.2.2 que H_n é gerada por U .

□

Definição 3.2.7. *Seja n um inteiro não negativo. Definimos a álgebra nilcoxeter N_n do grupo simétrico S_n como a K -álgebra unitária gerada por $u_1, \dots, u_{n-1}$, sujeitos às relações*

$$u_i^2 = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$u_i u_j = u_j u_i, \text{ para } i, j = 1, \dots, n-1 \text{ tais que } |i - j| > 1,$$

$$u_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i u_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Por convenção, definimos $N_0 = N_1 = K$.

Proposição 3.2.8. *A álgebra nilcoxeter N_n é isomorfa a H_n .*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : N_n &\longrightarrow H_n \\ \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} &\longmapsto \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sejam $\alpha = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$, $\beta = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \in N_n$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \beta) &= \varphi \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} + \sum b_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) \\ &= \varphi \left(\sum (a_{i_1 i_2 \dots i_k} + b_{i_1 i_2 \dots i_k}) u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) \\ &= \sum (a_{i_1 i_2 \dots i_k} + b_{i_1 i_2 \dots i_k}) s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \\ &= \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} + \sum b_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \\ &= \varphi \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) + \varphi \left(\sum b_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) \\ &= \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha \beta) &= \varphi \left[\left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) \left(\sum b_{j_1 j_2 \dots j_m} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_m} \right) \right] \\ &= \varphi \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} b_{j_1 j_2 \dots j_m} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_m} \right) \\ &= \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} b_{j_1 j_2 \dots j_m} ((s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}) \circ (s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_m})) \\ &= \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \right) \left(\sum b_{j_1 j_2 \dots j_m} s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_m} \right) \\ &= \left[\varphi \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) \right] \left[\varphi \left(\sum b_{j_1 j_2 \dots j_m} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_m} \right) \right] \\ &= \varphi(\alpha) \varphi(\beta) \end{aligned}$$

Assim, φ é um homomorfismo de álgebras.

Agora provemos que φ é um isomorfismo de álgebras.

Seja $\alpha = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \in \text{Ker}(\varphi)$. Observe que podemos sempre considerar cada monômio $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$ não nulo e em sua forma reduzida, utilizando as relações de trança. Assim

$$\varphi(\alpha) = \varphi \left(\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \right) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} = 0,$$

implica cada $a_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} = 0$ e, como cada $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ também já está na forma reduzida e é não nulo, devemos ter $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$. Logo $\alpha = 0$. Daí φ é injetiva.

Agora, seja $\beta = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \in H_n$, logo existe $\alpha \in N_n$, $\alpha = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \in N_n$ tal que $\beta = \varphi(\alpha)$. Assim, a aplicação φ é um epimorfismo de álgebras, o que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 3.2.9. *Se $k > n(n-1)/2$, então $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} = 0$, para todos $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Demonstração. Decorre das Proposições 3.2.8 e 3.2.5. $\square$

Como as relações que definem N_n são homogêneas sobre os u'_i s, podemos definir uma $\mathbb{N}$ -gradação $N_n = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} N_n^{(m)}$ sobre N_n (como uma álgebra, isto é, $N_n^{(m_1)} N_n^{(m_2)} \subset N_n^{(m_1+m_2)}$, para todos $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$) definindo o grau de u_i como sendo um, para cada $i = 1, \dots, n-1$.

Seja $I = \bigoplus_{m \geq 1} N_n^{(m)}$ a soma das partes positivamente graduadas de N_n . Em outras palavras, I é o ideal de N_n gerado pelos $u_i, i = 1, \dots, n-1$. Este é um ideal maximal de N_n pois N_n/I é um N_n módulo unidimensional (gerado pela imagem da unidade de N_n) e, portanto, simples. Pelo Corolário 3.2.9, $I^k = 0$, para $k > n(n-1)/2$.

Proposição 3.2.10. *A álgebra nilcoxeter N_n tem um único módulo simples, denotado L_n . Este é um módulo unidimensional no qual todos os $u_i, i = 1, \dots, n-1$ agem como zero. A cobertura projetiva de L_n é N_n .*

Demonstração. Seja V um N_n -módulo simples. Então IV é um submódulo de V . Assim, devemos ter $IV = V$ ou $IV = 0$. Se $IV = V$, então, para $k > n(n-1)/2$, temos

$$V = IV = I^2V = \dots = I^kV = 0,$$

o que contradiz o fato de que $V \neq 0$.

Como N_n é um N_n -módulo livre (logo projetivo), para mostrar que ele é a cobertura projetiva de L_n , é suficiente mostrar que o núcleo I da aplicação $N_n \rightarrow N_n/I$ é um módulo supérfluo de N_n . Se $I+H = N_n$, para algum submódulo (ou seja, ideal) H de N_n , então H precisa conter um elemento da forma $1 - a$, com $a \in I$. Este elemento é invertível, com inverso $1 + a + a^2 + \dots + a^k$, onde k é qualquer inteiro maior que $n(n-1)/2$. Daí, $H = N_n$. Portanto, I é supérfluo, como desejado. $\square$

Pela Proposição 3.2.10, temos

$$G_0(N_n) = \mathbb{Z}[L_n], \quad K_0(B) = \mathbb{Z}[N_n].$$

Sejam

$$\mathcal{G}_N = G_0\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} N_n - \text{mod}\right) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_0(N_n) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}[L_n] \text{ e}$$

$$\mathcal{K}_N = G_0\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} N_n - \text{pmod}\right) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_0(N_n) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}[N_n].$$

Definimos uma forma bilinear $\langle -, - \rangle : \mathcal{G}_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_N \rightarrow \mathbb{Z}$ declarando $G_0(N_n)$ ser ortogonal a $K_0(N_m)$, para $n \neq m$, e usando a forma 2.1 quando $m = n$.

Defina os isomorfismos de $\mathbb{Z}$ -módulos

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{G}_N} : \mathcal{G}_N &\rightarrow R = \text{Span}_{\mathbb{Z}}\{x^n/n!\}_{n=0}^{\infty}, \\ [L_n] &\mapsto \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{K}_N} : \mathcal{K}_N &\rightarrow R' = \text{Span}_{\mathbb{Z}}\{x^n\}_{n=0}^{\infty} \\ [N_n] &\mapsto x^n. \end{aligned}$$

Como, de (3.3)

$$\langle x^m, x^n/n! \rangle = \delta_{m,n} = \langle [N_m], [L_n] \rangle,$$

vemos que as aplicações anteriores respeitam a forma bilinear que definimos sobre os espaços envolvidos. Em outras palavras, temos

$$\langle a, b \rangle = \langle \varphi_{\mathcal{K}_N}(a), \varphi_{\mathcal{G}_N}(b) \rangle, \text{ para todos } a \in \mathcal{K}_N, b \in \mathcal{G}_N.$$

Nosso próximo objetivo é categorificar a ação da álgebra de Weyl W sobre os módulos R e R' .

Capítulo 4

Categorificação da representação polinomial da álgebra de Weyl

Com os conceitos vistos nos capítulos anteriores passamos ao objetivo principal deste trabalho que é categorificar a álgebra de Weyl. Para isto, primeiro descrevemos a noção de categorificação fraca, mostramos uma categorificação fraca da representação polinomial da álgebra de Weyl e, por último, justificamos por que esta categorificação não é uma categorificação forte. As principais referências para o estudo deste capítulo são [10] e [14] e [19].

4.1 Categorificação fraca

Sejam R é um anel comutativo, B uma R -álgebra associativa unitária e $\{b_i, i \in I\}$ um conjunto fixo de geradores de B . Se M é um B -módulo, então a ação de cada b_i define um endomorfismo R -linear de M ,

$$\begin{aligned}\varphi_i &: M \longrightarrow M \\ m &\longmapsto b_i \cdot m.\end{aligned}$$

Assim, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}\varphi &: B \longrightarrow \text{End}(M) \\ b_i &\longrightarrow \varphi_i\end{aligned}$$

Definição 4.1.1. Uma *categorificação ingênua* de $(B, \{b_i, i \in I\}, M)$ é uma tripla

$$(\mathcal{M}, \varphi, \{F_i, i \in I\}),$$

onde $\mathcal{M}$ é uma categoria abeliana, $\psi : G_0(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \rightarrow M$ é um isomorfismo de

$\mathbb{Z}$ -módulos e, para cada $i \in I$, $F_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um endofuntor exato de $\mathcal{M}$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G_0(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} R & \xrightarrow{[F_i] \otimes id_R} & G_0(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ M & \xrightarrow{\varphi_i} & M \end{array}$$

A noção de categorificação ingênua é muito fraca, pois só exigimos que os funtores F_i induzam as aplicações no nível do grupo de Grothendieck de $\mathcal{M}$. Uma noção mais forte seria categorificar as relações entre os geradores b_i de B ou entre as aplicações φ_i , ou seja, dado um conjunto de relações de B queremos isomorfismos de funtores que induzam essas relações no grupo de Grothendieck. Para isso definimos

Definição 4.1.2. *Uma categorificação ingênua $(\mathcal{M}, \varphi, \{F_i, i \in I\})$ de $(B, \{b_i, i \in I\}, M)$ tal que*

$$F_i F_j \cong \sum_{k, l \in I} F_{l_1}^{c_{l_1}} \dots F_{l_k}^{c_{l_k}}$$

*sempre que $b_i b_j = \sum_{k, l \in I} b_{l_1}^{c_{l_1}} \dots b_{l_k}^{c_{l_k}}$, para cada $i, j \in I$, é chamada **categorificação fraca**.*

4.2 Categorificação da representação polinomial

Podemos considerar a álgebra nilcoxeter N_n como uma subálgebra de N_{n+1} , gerada por $u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in N_{n+1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$X_n = {}_{N_{n+1}}(N_{n+1})_{N_n} \quad \text{e} \quad D_n = {}_{N_n}(N_{n+1})_{N_{n+1}},$$

isto é, X_n é N_{n+1} como (N_{n+1}, N_n) -bimódulo e D_n é N_{n+1} como (N_n, N_{n+1}) -bimódulo. Assim, temos os funtores

$$(X_n \otimes_{N_n} -) = Ind_{N_n}^{N_{n+1}} : N_n\text{-mod} \longrightarrow N_{n+1}\text{-mod},$$

$$(D_n \otimes_{N_{n+1}} -) = Res_{N_{n+1}}^{N_n} : N_{n+1}\text{-mod} \longrightarrow N_n\text{-mod}.$$

Lema 4.2.1. [19, Lemma 3.3.1] *Os bimódulos X_n e D_n são projetivos à direita*

e à esquerda, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (i) Como N_{n+1} é um N_{n+1} -módulo livre, então X_n é um N_{n+1} -módulo à esquerda livre de posto 1.

Agora vamos provar que X_n é um módulo projetivo à direita. Seja $u_\sigma \in N_{n+1}$ com $\sigma \in S_{n+1}$ e $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tais que $\sigma(n+1) = i$. Então

$$\sigma = 1_{S_n} \cdot \sigma = s_i \cdot s_{i+1} \cdot \dots \cdot s_n \cdot s_n \cdot \dots \cdot s_{i+1} \cdot s_i \cdot \sigma = s_i \cdot s_{i+1} \cdot \dots \cdot s_n \cdot \sigma'$$

com $\sigma' = s_n \cdot \dots \cdot s_{i+1} \cdot s_i \cdot \sigma \in S_n$, pois $\sigma'(n+1) = n+1$.

Se $\sigma(n+1) = n+1$, então $\sigma \in S_n$ e $\sigma = \sigma \cdot 1_{S_n}$. Daí, $u_\sigma = u_\sigma \cdot 1_{N_n}$.

Se $\sigma(n+1) = i$, como $\sigma = s_i \cdot s_{i+1} \cdot \dots \cdot s_n \cdot \sigma'$, então, pelo isomorfismo definido em 3.13, temos $u_\sigma = u_i \dots u_n u_{\sigma'}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo $\{1, s_n, s_{n-1}s_n, \dots, s_1s_2 \dots s_n\}$ é uma base de H_{n+1} sobre H_n .

Como, da Seção 3.2, $H_n \cong N_n$, então $\{1, u_n, u_{n-1}u_n, \dots, u_1u_2 \dots u_n\}$ é uma base de X_n como N_n -módulo. Assim, X_n é livre e daí X_n é um módulo projetivo à direita.

(ii) Como N_{n+1} é um N_{n+1} -módulo livre, então D_n é um N_{n+1} -módulo à direita livre de posto 1.

Provemos que D_n é um módulo projetivo à esquerda. Seja $u_\sigma \in N_{n+1}$, com $\sigma \in S_{n+1}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tais que $\sigma(j) = n+1$. Então

$$\sigma = \sigma \cdot 1_{S_n} = \sigma \cdot s_j \cdot s_{j+1} \cdot \dots \cdot s_n \cdot s_n \cdot \dots \cdot s_{j+1} \cdot s_j = \sigma' \cdot s_n \cdot \dots \cdot s_{j+1} \cdot s_j$$

com $\sigma' = \sigma \cdot s_j \cdot s_{j+1} \cdot \dots \cdot s_n \in S_n$, pois $\sigma'(n+1) = n+1$.

Se $\sigma(n+1) = n+1$, então $\sigma \in S_n$ e $\sigma = \sigma \cdot 1_{S_n}$. Daí, $u_\sigma = u_\sigma \cdot 1_{N_n}$.

Se $\sigma(j) = n+1$ como $\sigma = \sigma' \cdot s_n \cdot \dots \cdot s_{j+1} \cdot s_j$, então $u_\sigma = u_{\sigma'} u_n \dots u_j$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo $\{1, s_n, s_n s_{n-1}, \dots, s_n \dots s_2 s_1\}$ é uma base de H_{n+1} sobre H_n .

Como, de 3.13, $H_n \cong N_n$, então D_n é um N_n -módulo livre e uma base de D_n sobre N_n é $\{1, u_n, u_n u_{n-1}, \dots, u_n \dots u_2 u_1\}$. Assim, D_n é um módulo projetivo à esquerda.

□

Corolário 4.2.2. [19, Corollary 3.3.2] *Os funtores $(X_n \otimes_{N_n} -)$ e $(D_n \otimes_{N_{n+1}} -)$ são exatos e induzem os funtores*

$$(X_n \otimes_{N_n} -) = \text{Ind}_{N_n}^{N_{n+1}} : N_n\text{-}p\text{mod} \longrightarrow N_{n+1}\text{-}p\text{mod},$$

$$(D_n \otimes_{N_{n+1}} -) = \text{Res}_{N_{n+1}}^{N_n} : N_{n+1}\text{-}p\text{mod} \longrightarrow N_n\text{-}p\text{mod}.$$

Demonstração. (i) Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de N_n -módulos. Então f é injetora e g é sobrejetora.

Como X_n é livre à direita, por [9, Proposition IV.5.4] e [16, Theorem V.6.2], a sequência curta

$$0 \longrightarrow X_n \otimes_{N_n} A \xrightarrow{id_{X_n} \otimes f} X_n \otimes_{N_n} B \xrightarrow{id_{X_n} \otimes g} X_n \otimes_{N_n} C \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

é exata.

Agora suponha que A, B, C sejam projetivos, ou seja, a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cinde e $B \cong A \oplus C$. Logo, pelo [9, Theorem IV.4.9], temos

$$X_n \otimes_{N_n} B \cong X_n \otimes_{N_n} (A \oplus C) \cong (X_n \otimes_{N_n} A) \oplus (X_n \otimes_{N_n} C),$$

ou seja, toda sequência exata da forma (4.1) cinde. Assim, as imagens de módulos projetivos via o funtor $(X_n \otimes_{N_n} -)$ são projetivos e daí a restrição deste funtor à subcategoria $N_n\text{-}pmod$ está bem definida.

(ii) Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de N_{n+1} -módulos. Então f é injetora e g é sobrejetora.

Por [9, Proposition IV.5.4], e como X_n é livre à direita, então, pelo [16, Theorem V.6.2], a sequência curta

$$0 \longrightarrow D_n \otimes_{N_{n+1}} A \xrightarrow{id_{D_n} \otimes f} D_n \otimes_{N_{n+1}} B \xrightarrow{id_{D_n} \otimes g} D_n \otimes_{N_{n+1}} C \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

é exata.

Agora suponha que A, B, C sejam projetivos, ou seja a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cinde e $B \cong A \oplus C$. Logo, pelo [9, Teorema IV.4.9], temos

$$D_n \otimes_{N_{n+1}} B \cong D_n \otimes_{N_{n+1}} (A \oplus C) \cong (D_n \otimes_{N_{n+1}} A) \oplus (D_n \otimes_{N_{n+1}} C),$$

ou seja, toda sequência exata da forma (4.2) cinde. Assim, as imagens de módulos projetivos via o funtor $(D_n \otimes_{N_{n+1}} -)$ são projetivos e daí a restrição deste funtor à subcategoria $N_{n+1}\text{-}pmod$ está bem definida. $\square$

Seja $N = \bigoplus_{n=0}^{\infty} N_n$ (soma de álgebras). Os elementos de N são da forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, com os a_i quase todos nulos. Em N as operações de adição e multiplicação são definidas termo a termo como segue.

(i) Adição

$$(a + b) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i),$$

como $a_i, b_i \in N_i$, logo $a_i + b_i \in N_i$, para cada i , e como os a_i, b_i são não nulos para um número finito de índices, então os $a_i + b_i$ também são quase todos nulos.

(ii) Multiplicação

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cdot b_i).$$

Como $a_i, b_i \in N_i$, então $a_i \cdot b_i \in N_i$, para cada i ; e como os a_i, b_i são quase todos nulos, então os $a_i \cdot b_i$ também são quase todos nulos.

(iii) Para cada $\lambda \in K$,

$$\lambda \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda \cdot b_i).$$

Como $b_i \in N_i$, então $\lambda \cdot b_i \in N_i$, para cada i , e como os b_i são quase todos nulos, então os $\lambda \cdot b_i$ também são não nulos para um número finito de índices.

Observe que a álgebra N não tem identidade. De fato, se existisse $v \in N$ tal que $v \cdot a = a = a \cdot v$, para todo $a \in N$, ou seja,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (v_i \cdot a_i) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cdot v_i),$$

logo $v_i \cdot a_i = a_i = a_i \cdot v_i$, para cada i . Daí $v_i = 1_{N_i}$, para cada i , ou seja $v_i \neq 0$, para todo i , o que contradiz o fato de $v \in N$.

Além disso, para $i \neq j$, $1_{N_i} \cdot 1_{N_j} = 0$, ou seja, as identidades de N_i e N_j são ortogonais.

Note que cada N_k -módulo M é um N -módulo, com a ação dada por

$$\begin{aligned} N \times M &\longrightarrow M \\ (\sum n_i, m) &\longmapsto \sum (n_i \cdot m), \end{aligned}$$

com $n_i \cdot m = 0$, para cada $i \neq k$.

Assim, cada (N_n, N_m) -bimódulo M é um (N, N) -bimódulo com

$$\begin{aligned} N \times M &\longrightarrow M \\ (\sum n_i, m) &\longmapsto \sum (n_i \cdot m) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \\ (m, \sum n_i) &\longmapsto \sum (m \cdot n_i). \end{aligned}$$

Definimos os (N, N) -bimódulos

$$X = \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \quad \text{e} \quad D = \bigoplus_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Sejam

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_n\text{-mod} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_{proj} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_n\text{-pmod}$$

subcategorias plenas da categoria dos N -módulos.

Se definimos

$$Ind = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Ind_{N_n}^{N_{n+1}} \quad \text{e} \quad Res = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Res_{N_{n+1}}^{N_n},$$

então temos os isomorfismos de funtores

$$(X \otimes_N -) \cong Ind \quad \text{e} \quad (D \otimes_N -) \cong Res.$$

Proposição 4.2.3. [19, Proposition 3.3.3] *As ternas*

$$(\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{G}_N}, \{Ind, Res\}) \quad \text{e} \quad (\mathcal{N}_{proj}, \varphi_{\mathcal{K}_N}, \{Ind, Res\})$$

são categorificações ingênuas de $(W, \{x, \partial\}, R)$ e $(W, \{x, \partial\}, R')$, respectivamente.

Demonstração. Vimos na Seção 3.2 que $\varphi_{\mathcal{G}_N} : \mathcal{G}_N \rightarrow R$ e $\varphi_{\mathcal{K}_N} : \mathcal{K}_N \rightarrow R'$ são isomorfismos de $\mathbb{Z}$ -módulos. Além disso, pelo Lema 4.2.1, X_n é um N_n -módulo livre à direita de posto $n + 1$. Logo, como $\dim_K L_n = 1$, temos

$$\dim_K Ind(L_n) = \dim_K (X_n \otimes_{N_n} L_n) = n + 1.$$

Desse modo, a série de composição de $X_n \otimes_{N_n} L_n$ deve ter um único N_{n+1} -módulo

simples (unidimensional) L_{n+1} que ocorre com multiplicidade $n+1$. Então temos

$$[Ind(L_n)] = (n+1)[L_{n+1}] \in \mathcal{G}_N.$$

Temos também, como N_{n+1} -módulos à esquerda, pelo [9, Teorema IV.5.7],

$$Ind(N_n) = X_n \otimes_{N_n} N_n = N_{n+1} \otimes_{N_n} N_n \cong N_{n+1},$$

e assim

$$[Ind(N_n)] = [N_{n+1}] \in \mathcal{K}_N.$$

Além disso,

$$\dim_K Res(L_{n+1}) = \dim_K(D_n \otimes_{N_{n+1}} L_{n+1}) = \dim_K(N_{n+1} \otimes_{N_{n+1}} L_{n+1}) = 1.$$

Logo, $Res(L_{n+1}) \cong L_n$ e daí

$$[Res(L_{n+1})] = [L_n] \in \mathcal{G}_N.$$

Finalmente, como N_n -módulos à esquerda, temos

$$Res(N_{n+1}) = D_n \otimes_{N_{n+1}} N_{n+1} = {}_{N_n}N_{n+1} \otimes_{N_{n+1}} N_{n+1} = {}_{N_n}N_{n+1} \cong N_n^{\oplus(n+1)},$$

onde o último isomorfismo segue do fato de N_{n+1} ser livre de posto $n+1$ como um N_n -módulo à esquerda, pelo Lema 4.2.1. Assim, temos

$$[Res(N_{n+1})] = (n+1)[N_n] \in \mathcal{K}_N.$$

Dos cálculos anteriores, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(\varphi_{\mathcal{G}_N} \circ Res)([L_{n+1}]) = \varphi_{\mathcal{G}_N}([L_n]) = \frac{x^n}{n!} = \partial \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) = (\partial \circ \varphi_{\mathcal{G}_N})([L_{n+1}]),$$

$$(\varphi_{\mathcal{G}_N} \circ Ind)([L_n]) = \varphi_{\mathcal{G}_N}((n+1)[L_{n+1}]) = (n+1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = X \cdot \frac{x^n}{n!} = X \circ \varphi_{\mathcal{G}_N}([L_n]),$$

$$(\varphi_{\mathcal{K}_N} \circ Res)([N_{n+1}]) = \varphi_{\mathcal{K}_N}((n+1)[N_n]) = (n+1)x^n = \partial \cdot x^{n+1} = \partial \circ \varphi_{\mathcal{K}_N}([N_{n+1}]),$$

$$(\varphi_{\mathcal{K}_N} \circ Ind)([N_n]) = \varphi_{\mathcal{K}_N}([N_{n+1}]) = x^{n+1} = X \cdot x^n = X \circ \varphi_{\mathcal{K}_N}([N_n]).$$

Em outras palavras, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_N & \xrightarrow{Ind} & \mathcal{G}_N \\
 \varphi_{\mathcal{G}_N} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{G}_N} \\
 R & \xrightarrow{X} & R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_N & \xrightarrow{Res} & \mathcal{G}_N \\
 \varphi_{\mathcal{G}_N} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{G}_N} \\
 R & \xrightarrow{\partial} & R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_N & \xrightarrow{Ind} & \mathcal{K}_N \\
 \varphi_{\mathcal{K}_N} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{K}_N} \\
 R & \xrightarrow{X} & R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_N & \xrightarrow{Res} & \mathcal{K}_N \\
 \varphi_{\mathcal{K}_N} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{K}_N} \\
 R & \xrightarrow{\partial} & R
 \end{array}$$

Portanto, o resultado segue. $\square$

Gostaríamos de transformar esta categorificação ingênua numa categorificação fraca. Para isso, precisamos de um isomorfismo de funtores que façam um “levantamento” da relação que define a álgebra de Weyl.

Proposição 4.2.4. [19, Proposition 3.3.4] *Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos um isomorfismo de (N_n, N_n) -bimódulos*

$$D_{n+1} \otimes_{N_{n+1}} X_n \cong (X_{n-1} \otimes_{N_{n-1}} D_n) \oplus N_n,$$

onde N_n é considerado como um (N_n, N_n) -bimódulo na maneira usual (via multiplicação à esquerda e à direita). Além disso, temos então um isomorfismo de (N, N) -bimódulos

$$D \otimes_N X \cong (X \otimes_N D) \oplus N.$$

Demonstração. Temos os isomorfismos de (N_n, N_n) -bimódulos

$$D_{n+1} \otimes_{N_{n+1}} X_n \cong_{N_n} (N_{n+1})_{N_n}, \quad X_{n-1} \otimes_{N_{n-1}} D_n \cong_{N_n} N_n \otimes_{N_{n-1}} N_n.$$

Seja

$$m_1 : N_n \hookrightarrow N_{n+1}$$

a inclusão natural de (N_n, N_n) -bimódulos (isto é, unicamente determinada pela injetividade).

Temos também um homomorfismo injetivo de (N_n, N_n) -bimódulos

$$\begin{array}{ccc}
 m_2 : N_n \otimes_{N_{n-1}} N_n & \hookrightarrow & N_{n+1} \\
 a \otimes b & \mapsto & au_n b, \quad \text{para todos } a, b \in N_n.
 \end{array}$$

Para $\sigma \in S_{n+1}$, temos $u_\sigma \in m_1(N_n)$ se, e somente se, $\sigma(n+1) = n+1$. Se

$\sigma(n+1) \neq n+1$, então podemos escrever $\sigma = \tau_1 s_n \tau_2$ para $\tau_1, \tau_2 \in S_n$. Logo, $u_\sigma \in m_2(N_n \otimes_{N_{n-1}} N_n)$. Desse modo, m_1 e m_2 definem um homomorfismo de (N_n, N_n) -bimódulos

$$(N_n \otimes_{N_{n-1}} N_n) \oplus N_n \cong N_{n+1},$$

como desejado. $\square$

Corolário 4.2.5. [19, Corollary 3.3.5] *Existem os isomorfismos de endofuntores de N_n -mod (e assim também de N_n -pmod) tais que*

$$Res_{N_n}^{N_{n+1}} \circ Ind_{N_n}^{N_{n+1}} \cong (Ind_{N_{n-1}}^{N_n} \circ Res_{N_{n-1}}^{N_n}) \oplus id.$$

Consequentemente, existem isomorfismos de endofuntores de $\mathcal{N}$ (e assim também de $\mathcal{N}_{proj}$) tais que

$$Res \circ Ind \cong (Ind \circ Res) \oplus id.$$

Demonstração. Isto segue dos seguintes isomorfismos

$$\begin{aligned} (D_{n+1} \otimes_{N_{n+1}} X_n) \otimes_{N_n} - &\cong Res_{N_n}^{N_{n+1}} \circ Ind_{N_n}^{N_{n+1}}, \\ (X_{n-1} \otimes_{N_{n-1}} D_n) \otimes_{N_n} - &\cong Ind_{N_{n-1}}^{N_n} \circ Res_{N_{n-1}}^{N_n}, \\ N_n \otimes_{N_n} - &\cong id. \end{aligned}$$

$\square$

O isomorfismo (3.13) categorifica a relação $\partial X = X\partial + 1$. Junto com a Proposição 4.2.3, isto mostra que temos uma categorificação fraca dos módulos R e R' da álgebra de Weyl W .

Como Ind é adjunto à esquerda a Res , temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(Ind(P), M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(P, Res(M)), \text{ para todo } P \in \mathcal{N}_{proj}, M \in \mathcal{N}.$$

Assim,

$$\langle [Ind](a), b \rangle = \langle a, [Res](b) \rangle, \text{ para todos } a \in \mathcal{K}_N, b \in \mathcal{G}_N.$$

Então temos uma categorificação do fato de que X é adjunto a ∂ , isto é,

$$\langle X \cdot f, g \rangle = \langle f, \partial \cdot g \rangle, \text{ para todos } f, g \in R_{\mathbb{Q}}.$$

Note também que $\langle \partial \cdot f, g \rangle = \langle f, X \cdot g \rangle$, para todos $f, g \in R_{\mathbb{Q}}$ e assim Ind é adjunto torcido à direita a Res . Neste caso, isso é suficiente para se obter a relação correta no nível dos grupos de Grothendieck.

A propriedade de dois funtores serem biadjuntos é um requisito para a categorificação **forte**. Esta é uma razão porque a categorificação fraca que descrevemos neste capítulo ainda não tenha sido convertida em uma categorificação forte.

Considerações Finais

Neste trabalho tratamos da categorificação da ação da álgebra de Weyl sobre alguns módulos, encontrando primeiro uma categorificação ingênua e logo reforçando esta numa categorificação fraca por meio da relação com a álgebra nilcoxeter.

A Teoria de Categorificação pode ser aplicada a diversas áreas da Matemática, como Topologia Algébrica [6], Teoria de Representações e Álgebra Homológica, e também a ciências afins como Física e Química [7].

Assim, uma continuação desse trabalho poderia abranger outras possíveis categorificações da álgebra de Weyl, via alguns funtores que sejam biadjuntos e que produzam uma relação no nível das categorias e não só no nível dos grupos de Grothendieck. Ainda, pode-se aplicar esta teoria para categorificar outras estruturas algébricas e suas representações, como as álgebras de Lie.

Referências Bibliográficas

- [1] F.W. ANDERSON and K. R. FULLER, *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics **13**, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] I. ASSEM, *Algèbres et Modules*, Dunod, France, Université de Sherbrooke, 1995.
- [3] M. AUSLANDER, I. REITEN and S. O. SMALØ, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [4] S. AWODEY, *Category Theory*, Oxford Logic Guides, Oxford University Press, New York, 2006.
- [5] D.COCK, *The Weyl algebras*, Monograph of Bachelor of Science, School of Mathematics, The University of New South Wales, 2004. Disponível em: <http://web.maths.unsw.edu.au/~danielch/thesis/dcock.pdf>.
- [6] L. CRANE and I. B. FRENKEL, *Four dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, Topology and Physics, J. Math. Physics **35** n. 10 (1994) 5136-5154.
- [7] L. CRANE, *Clock and category: is quantum gravity algebraic?*, J. Math. Physics **36** n. 11 (1995) 85-99.
- [8] C. W. CURTIS and I. REINER, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics, **11**, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [9] T. W. HUNGERFORD, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **73**, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [10] M. KHOVANOV, *Nilcoxeter algebras categorify Weyl algebras*, 2008. Preprint: arxiv:arXiv:math/9906166v1 [math.RT].

- [11] M. KHOVANOV, V. MAZORCHUK and C. STROPPEL, *A brief review of abelian categorifications*, 2007. Preprint: arXiv:math/0702746v2 [math.RT].
- [12] T. Y. LAM, *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Mathematics **131**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [13] W. LU and A. K. McBRIDE, *Algebraic structures on Grothendieck groups*, Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 2013. Disponível em: <http://mysite.science.uottawa.ca/asavag2/pubs/Lu-McBride-Alg-Str-on-Groth-Grps.pdf>.
- [14] V. MAZORCHUK. *Lectures on algebraic categorification*, QGM Master Class Series, European Mathematical Society, Aarhus, 2012.
- [15] S. MAC LANE, *Categories of the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [16] S. MAC LANE, *Homology*, Classics in Mathematics, reimpressão da edição de 1975, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [17] C. POLCINO MILIES and S. K. SEHGAL, *An introduction to group rings*, Algebras and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [18] J. ROSENBERG, *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Mathematics **147**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [19] A. SAVAGE, *Introduction to Categorification*, Lecture Notes of Winter School I, New directions in Lie Theory thematic semester, Centre de Recherches Mathematiques, Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 2014. Preprint: arXiv:1401.6037v1 [math.RT].
- [20] A. SAVAGE and O. YACOBI, *Categorification and Heisenberg doubles arising from towers of algebras*, Lecture Notes of Winter School I, New directions in Lie Theory thematic semester, Centre de Recherches Mathematiques, Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 2014. Preprint: arxiv:1309.2513V1 [math.RT].