

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Termodinâmica de Superfluidos de Spin

Lucas Silva Lopes Barbosa
Magister Scientiae

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2026

LUCAS SILVA LOPES BARBOSA

Termodinâmica de Superfluidos de Spin

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Antonio Ribeiro de Moura

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

B238t Barbosa, Lucas Silva Lopes, 2001-
2026 Termodinâmica de superfluidos de spin / Lucas Silva Lopes
Barbosa. – Viçosa, MG, 2026.
1 dissertação eletrônica (79 f.): il. (algumas color.).

Inclui apêndices.

Orientador: Antonio Ribeiro de Moura.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Física, 2026.

Referências bibliográficas: f. 71-75.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2026.414>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Termodinâmica. 2. Superfluidez. 3. Dinâmica dos
fluídos. 4. Spintrônica. 5. Ferromagnetismo. I. Moura, Antonio
Ribeiro de, 1984-. II. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física.
III. Título.

CDD 22. ed. 536.7

LUCAS SILVA LOPES BARBOSA

Termodinâmica de Superfluidos de Spin

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 8 de abril de 2026.

Assentimento:

Lucas Silva Lopes Barbosa
Autor

Antonio Ribeiro de Moura
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pelo autor em 22/07/2026 às 17:41:38 e pelo orientador em 24/07/2026 às 20:46:12. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **ID8Y.WMKQ.F83N** e clique no botão 'Validar documento'.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar esta pós-graduação e pela formação proporcionada durante o mestrado.

Ao meu orientador Antônio Moura, pelos ensinamentos, paciência, disponibilidade e pelas valiosas conversas que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus pais Elizete, Moacir e meu padrasto Pedro, pelo amor incondicional e apoio constante.

Aos meus irmãos Thais e Mateus, pelo companheirismo e incentivo.

Ao meu sobrinho Davi, que me trouxe alegria e motivação durante essa caminhada.

Aos meus amigos André, Antônio, José, Arthur e aos demais amigos que pude fazer em Viçosa, por todas as vivências e por tornarem essa caminhada mais leve.

Aos amigos do Krav Maga, em especial ao Robson, Marcel, Tomaz, Gilson, José e Mateus.

Aos meus antigos professores da PUC Minas, pela formação e pelos ensinamentos que contribuíram para minha trajetória acadêmica.

Aos demais amigos e familiares, pelo apoio, compreensão e torcida constante ao longo dessa jornada.

A todos que dedicarem seu tempo à leitura deste trabalho, deixo meu sincero agradecimento, com o desejo de que as ideias aqui apresentadas possam contribuir, ainda que modestamente, para seus estudos.

Por fim, agradeço às agências de fomento à pesquisa pelo apoio concedido.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

BARBOSA, Lucas Silva Lopes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2026. **Termodinâmica de Superfluidos de Spin**. Orientador: Antonio Ribeiro de Moura.

Este trabalho investiga a termodinâmica da superfluidez de spin em ferromagnetos com anisotropia de plano-fácil, com o objetivo de compreender a propagação, estabilidade e transporte de excitações coletivas em temperatura finita. A motivação central reside no potencial da superfluidez de spin para aplicações em spintrônica, permitindo transporte de momento angular com baixa dissipação, relevante para dispositivos magnônicos e tecnologias de informação baseadas em spin. Utilizamos o modelo de Heisenberg e o Modelo Sigma Não-Linear para descrever o sistema magnético no regime contínuo, sendo a Aproximação Harmônica Auto-Consistente (AHAC) empregada como ferramenta principal para incorporar efeitos térmicos. Nesse formalismo, as interações são tratadas por meio de um parâmetro de renormalização dependente da temperatura, obtido por equação auto-consistente, permitindo caracterizar flutuações, espectro de excitações e propriedades dinâmicas do sistema. Os resultados mostram que o parâmetro de renormalização decai com a temperatura e colapsa em um valor crítico associado à perda da rigidez do estado ordenado, interpretado como temperatura crítica do sistema. A partir desse comportamento, analisamos a corrente e a condutância de spin, bem como a dispersão e a velocidade crítica dos mágnons para a existência da superfluidez, verificando que soluções coerentes podem persistir até temperaturas elevadas, embora sua estabilidade prática seja limitada por efeitos dissipativos e pela redução da condutância mista de spin e velocidade crítica.

Palavras-chave: Spintrônica. Superfluidez. Ferromagnetismo.

ABSTRACT

BARBOSA, Lucas Silva Lopes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April, 2026.
Thermodynamics of Spin Superfluids. Adviser: Antonio Ribeiro de Moura.

This work investigates the thermodynamics of spin superfluidity in ferromagnets with easy-plane anisotropy, aiming to understand the propagation, stability, and transport of collective excitations at finite temperature. The main motivation lies in the potential of spin superfluidity for spintronic applications, enabling the transport of angular momentum with low dissipation, which is relevant for magnonic devices and spin-based information technologies. We employ the Heisenberg model and the Nonlinear Sigma Model to describe the magnetic system in the continuum regime, with the Self-Consistent Harmonic Approximation (SCHA) used as the primary tool to incorporate thermal effects. Within this formalism, interactions are treated through a temperature-dependent renormalization parameter obtained from a self-consistent equation, allowing the characterization of fluctuations, excitation spectra, and dynamical properties of the system. The results show that the renormalization parameter decreases with increasing temperature and collapses at a critical value associated with the loss of rigidity of the ordered state, interpreted as the critical temperature of the system. Based on this behavior, we analyze the spin current and spin conductance, as well as the magnon dispersion and critical velocity required for the existence of superfluidity, showing that coherent solutions may persist up to elevated temperatures, although their practical stability is limited by dissipative effects and by the reduction of the spin mixing conductance and critical velocity.

Keywords: Spintronics. Superfluidity. Ferromagnetism.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação esquemática da frustração geométrica em redes triangulares em (a),(b) e kagomé (c) antiferromagnéticas. A geometria da rede impede que todos os spins vizinhos se alinhem antiparalelamente de forma simultânea, resultando em frustração magnética (retirado de [1]).	14
Figura 2 – Representação esquemática do estado fundamental do ferromagneto em uma dimensão.	14
Figura 3 – Representação esquemática das excitações magnônicas em um sistema magnético: (a) excitação local de alto custo energético; (b) excitação coletiva de baixa energia, caracterizada por uma onda de spin. (Adaptado de Patryk Nowik-Boltyk, Universität Münster.)	17
Figura 4 – Flutuações quânticas em função da temperatura para diferentes valores de spin: $S = 1/2$ (roxo), $S = 1$ (azul), $S = 3/2$ (verde), $S = 2$ (amarelo), $S = 5/2$ (laranja) e $S = 3$ (vermelho). Nota-se que as flutuações quânticas são mais pronunciadas para spins menores, enquanto para $S \gg 1$ o comportamento aproxima-se do limite clássico. As curvas foram determinadas a partir do modelo XY, porém, outros modelos exibem comportamento análogo.	34
Figura 5 – Gráfico da força de Lennard-Jones, r representa a distância interpartícula, enquanto ϵ corresponde à energia mínima do potencial.	37
Figura 6 – Representação esquemática do transporte de spin a longas distâncias (a) em um meio sem superfluidez de spin e (b) um meio com superfluidez de spin (retirado de [2]).	44
Figura 7 – (a) Representação esquemática da estrutura híbrida utilizada para a realização da superfluidez de spin. (b) Ilustração esquemática da distribuição espacial das contribuições condensada e térmica para a corrente de spin, considerando a presença do damping de Gilbert. (adaptado de [3])	46
Figura 8 – Diagrama do transporte de corrente de spin em um sistema com contatos esquerdo e direito. As setas vermelhas representam as correntes de spin $\vec{J}_L$ e $\vec{J}_R$ enquanto as setas azuis indicam o vetor $\vec{A}$ das áreas entre as interfaces de contato.	53
Figura 9 – Diagrama de Feynman representando um processo (a) de injeção de spin e (b) absorção de spin pelos elétrons de momento k e p	58

- Figura 10 – O gráfico apresenta o parâmetro de renormalização ρ em função da temperatura. Para $S = 5/2$, $T_c = 1,56 J/k_B$ é a temperatura na qual o parâmetro decai abruptamente. 65
- Figura 11 – O gráfico representa condutância de spin g_s^c associada aos mágnons condensados (azul) e g_s^t térmicos (vermelho) em relação a temperatura. 66
- Figura 12 – Dispersão magnônica para $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$ para o YIG em $T = 5 K$. A curva em preto corresponde aos resultados obtidos por meio da e AHAC, enquanto os pontos vermelhos representam os resultados reportados por Princep *et al.* 67
- Figura 13 – Velocidade crítica em relação a temperatura 67

Sumário

Lista de Ilustrações	7
I Introdução	9
II Magnetismo	12
2.1 Modelo de Heisenberg	12
2.2 Ferromagnetismo	14
2.3 Modelo sigma não-linear	17
2.3.1 MSNL no magnetismo	18
2.3.2 Ferromagneto isotrópico e de plano-fácil	20
2.4 Transporte de Momento Magnético por Magnons	21
III Aproximação Harmônica Auto-Consistente	26
3.1 Ferromagneto com anisotropia de plano-fácil	26
3.2 Formulação clássica da AHAC	29
3.3 Formulação quântica da AHAC	30
3.4 Equação auto-consistente	33
IV Superfluidez de Spin	36
4.1 O conceito de superfluidez	36
4.2 Superfluidez de spin	40
V Desenvolvimento	46
5.1 Descrição clássica da corrente de spin	47
5.1.1 equação de movimento	47
2.3.1 MSNL no magnetismo	50
5.2 Descrição quântica da corrente de spin	56
5.3 Cálculo da corrente de spin	58
5.4 Dados obtidos pelo parâmetro de renormalização	64
Referências Bibliográficas	71
Apêndice A	76
Apêndice B	77

I Introdução

No início do século XX, enquanto a mecânica quântica ainda estava em desenvolvimento, a teoria de Bohr-Sommerfeld já sugeria que o momento angular do elétron era quantizado, mas essa ideia ainda precisava ser confirmada experimentalmente. Nesse contexto, o experimento realizado por Otto Stern e Walther Gerlach em 1922 foi um dos mais importantes da física quântica, pois forneceu evidência direta da quantização do momento angular e pavimentou o caminho para a descoberta do spin do elétron [4, 5].

Em 1925, os físicos holandeses Samuel Goudsmit e George Uhlenbeck, sob a orientação de Paul Ehrenfest, propuseram que o elétron possuía momento angular intrínseco, denominado spin. Essa propriedade permitia explicar tanto o resultado do experimento de Stern-Gerlach quanto a estrutura fina dos espectros atômicos. Além disso, o spin conferia ao elétron um momento magnético intrínseco, responsável por sua interação com campos magnéticos externos.[6]. Mais tarde, em 1928, Paul Dirac desenvolveu uma formulação relativística para o elétron, conhecida como equação de Dirac. Esse formalismo mostrou que o spin do elétron não era uma rotação literal, mas sim uma consequência matemática da relatividade e da estrutura da mecânica quântica, em que o spin surge naturalmente como uma propriedade fundamental das partículas elementares [7].

Assim, o spin, inicialmente tratado como uma hipótese empírica para explicar anomalias experimentais, tornou-se um conceito fundamental da física moderna. Compreender e controlar essa propriedade quântica não apenas aprofundou nosso entendimento sobre a matéria, mas também se tornou um dos desafios centrais da física da matéria condensada, ganhando relevância prática com a descoberta da magnetorresistência gigante (MGR) em 1988, um avanço que marcou o início da spintrônica moderna [8].

O fenômeno da MRG possibilitou o desenvolvimento de cabeças de leitura mais sensíveis para discos rígidos, aumentando significativamente a capacidade e a densidade de armazenamento, além de reduzir o tamanho dos bits. Esse avanço foi fundamental para a miniaturização dos dispositivos de armazenamento e impulsionou a era da computação moderna, permitindo o surgimento de discos rígidos de alta performance utilizados em servidores, computadores pessoais e dispositivos móveis. Além da GMR, a descoberta do efeito de Túnel Magnetorresistivo (TMR) permitiu a criação de Memórias Magnetoresistivas de Acesso Aleatório, uma tecnologia promissora para armazenamento não volátil e de alta velocidade [8, 9].

Além disso, a spintrônica segue em constante evolução, com aplicações em sensores magnéticos e lógica spintrônica, e mais recentemente, seu alcance tem se expandido para além dos dispositivos de armazenamento, abrindo caminho para pesquisas em computação quântica, onde o spin do elétron atua como qubit, e na spintrônica de ondas de spin (mág-

nons), que explora novas abordagens para o transporte e processamento de informação com menor dissipação de energia.

Paralelamente aos avanços da física do magnetismo, importantes descobertas estavam sendo feitas no campo da matéria condensada, particularmente em baixas temperaturas. Em 1908, o físico holandês Heike Kamerlingh Onnes obteve pela primeira vez o hélio-4 no estado líquido, ao resfriá-lo a 4,2 K, o que abriu caminho para o estudo de propriedades quânticas emergentes em temperaturas criogênicas [10].

A descoberta do hélio líquido fez com que poucos anos depois, em 1911, o físico holandês pudesse investigar as propriedades elétricas do mercúrio a temperaturas extremamente baixas. Ele observou que ao resfriá-lo a 4,2 K usando hélio líquido, a resistência elétrica desaparecia abruptamente abaixo dessa temperatura. Essa descoberta mostrou que certos materiais poderiam conduzir eletricidade sem dissipação de energia, nomeando esse novo estado da matéria como supercondutividade[11]. Apenas em 1957, conseguiu-se obter uma teoria que explicasse completamente o fenômeno da supercondutividade, a teoria BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) forneceu a primeira explicação microscópica e quantitativa para a supercondutividade, mostrou que os elétrons emparelhados formam um estado quântico coletivo, permitindo a corrente elétrica sem dissipação e permitiu estabelecer relações matemáticas que estimavam a temperatura na qual um material se torna supercondutor[12].

A descoberta da supercondutividade abriu caminho para a identificação da superfluidez em 1937, quando Pyotr Kapitza, na União Soviética, e John Allen e Don Misener, no Reino Unido, observaram independentemente que o hélio-4, ao ser resfriado abaixo de 2,17 K, fluía sem resistência aparente, como se tivesse viscosidade zero [13, 14]. Esse fenômeno marcou o surgimento da superfluidez. Alguns anos depois, os primeiros modelos teóricos foram propostos para explicar esse comportamento. László Tisza desenvolveu a ideia do modelo de dois fluidos, sugerindo que o hélio abaixo de 2,17 K se comporta como uma mistura de um componente normal, com viscosidade, e um componente superfluido, sem viscosidade. Posteriormente, Lev Landau aperfeiçoou essa abordagem ao descrever a superfluidez em termos de excitações elementares, demonstrando que esse fenômeno resulta de um estado quântico macroscópico, análogo ao que ocorre na supercondutividade [15, 16].

A descoberta da superfluidez no hélio-4 e a posterior compreensão da supercondutividade revelaram a possibilidade de estados quânticos macroscópicos que exibem transporte sem dissipação. Desse modo, naturalmente surgiram questionamentos sobre se um fenômeno análogo poderia ocorrer para o transporte de spin, e essa ideia evoluiu para o conceito de superfluidez de spin, um estado quântico no qual o spin pode fluir sem resistência em certos materiais magnéticos, sem a necessidade de um transporte associado de carga elétrica.

A ideia de superfluidez de spin começou a ser explorada na década de 1970, inicial-

mente como um conceito teórico associado ao hélio-3 superfluido. Mas, apenas na década de 1980, Halperin e Hohenberg formalizaram a conexão entre ondas de spin (mágnons) e a superfluidez [17], enquanto os primeiros indícios experimentais da superfluidez de spin surgiram em sistemas magnônicos e materiais com forte interação spin-órbita, onde observações de transporte de spin sem dissipação foram relatadas na década de 1990 em hélio-3 superfluido [18–20].

Dentro desse contexto, a compreensão detalhada desses fenômenos exigiu o desenvolvimento de modelos teóricos capazes de descrever a dinâmica coletiva dos spins em diferentes regimes. O estudo da superfluidez de spin, assim como de outros estados magneticamente ordenados ou desordenados, depende fortemente da formulação de Hamiltonianas eficazes e da aplicação de técnicas matemáticas que permitam extrair propriedades essenciais do sistema.

A diagonalização exata de Hamiltonianas em sistemas de muitos corpos é, na maioria dos casos, inviável devido à complexidade das interações e ao crescimento exponencial do espaço de estados. Isso se torna particularmente desafiador em sistemas magnéticos, onde as interações de troca entre spins geram correlações não triviais que dificultam a obtenção de soluções analíticas. Para contornar essas dificuldades, diversas técnicas teóricas foram desenvolvidas ao longo dos anos, como aproximações semiclássicas, métodos variacionais e teorias de campo médio, cada uma com suas limitações e regimes de validade.

Entre as abordagens teóricas, a Aproximação Harmônica Auto-Consistente (AHAC) se destaca como uma ferramenta versátil e eficaz para tratar sistemas de spins fortemente correlacionados. Seu princípio fundamental reside na substituição da Hamiltoniana original por uma Hamiltoniana harmônica efetiva, onde a rigidez de spin, um parâmetro ajustável, é determinado auto-consistentemente. Isso permite capturar de maneira qualitativa e quantitativa a dinâmica do sistema sem necessidade de recorrer a cálculos perturbativos de alta ordem, tornando a AHAC uma alternativa poderosa para descrever excitações em meios magneticamente ordenados e desordenados. A AHAC tem sido recursivamente aplicada por Pires *et al.* em uma gama de problemas [21–24] e nos últimos tempos ganhou novas generalizações devido a Moura [25–28].

Neste trabalho, empregamos a AHAC para analisar perturbações lineares da superfluidez de spin em ferromagnetos a temperatura finita, investigando a propagação e estabilidade das excitações no regime dinâmico, sem considerar mudanças abruptas na ordem magnética. Essa abordagem nos permitirá caracterizar os modos de excitação e avaliar a robustez da superfluidez de spin nesse sistema, fornecendo uma descrição teórica acessível e eficiente.

II Magnetismo

A compreensão dos fenômenos de transporte sem dissipação, tanto na superfluidez convencional quanto na superfluidez de spin, exige um tratamento teórico robusto das interações entre partículas quânticas. No caso da spintrônica, em particular, os momentos magnéticos dos elétrons desempenham um papel central, levando à necessidade de modelos que capturem a interação entre spins de maneira precisa.

Neste capítulo, introduziremos a Hamiltoniana de Heisenberg e analisaremos os sistemas ferromagnéticos isotrópico e anisotrópicos de plano fácil, investigando as excitações coletivas de spin, comparar seu espectro de energia e elucidando a necessidade de seu acoplamento não linear por meio do Modelo Sigma Não-Linear, além de demonstrar como a dinâmica da rede leva ao transporte de momento magnético através dos mágnons.

2.1 Modelo de Heisenberg

A Hamiltoniana de Heisenberg é um modelo fundamental da física do magnetismo em sistemas com spins localizados, o modelo trata os spins como operadores quânticos dispostos em uma rede cristalina e interagindo via uma interação de troca sendo definido pela Hamiltoniana geral:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (2.1)$$

em que $\langle i, j \rangle$ indica uma soma sobre pares vizinhos (geralmente primeiros vizinhos), $\mathbf{S}_i$ representa o operador de spin no sítio i , J_{ij} é a constante de troca, que quantifica a intensidade da interação entre spins nos sítios i e j . O valor de J_{ij} depende da geometria da rede e das ligações químicas dos átomos, motivo pelo qual se adota frequentemente uma rede cúbica para simplificar os cálculos. O fator $1/2$ corrige a dupla contagem, pois $J_{ij} = J_{ji}$ é simétrico (na maioria dos trabalhos, costuma-se adotar $J_{ij} = J$). Esse modelo descreve interações entre spins localizados em uma rede com N sítios, sendo que, em muitos casos se considera o limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$.

Juntamente com a Hamiltoniana de Heisenberg é imposto um vínculo não-linear sobre os spins do tipo $\mathbf{S}^2 = (S^x)^2 + (S^y)^2 + (S^z)^2$ (para os casos em duas dimensões espaciais desconsideramos uma das componentes, em geral S^z). Esse vínculo é fundamental, pois restringe o espaço de configurações possíveis e está diretamente relacionado à rica variedade de fenômenos topológicos observados em sistemas magnéticos.

Ademais, podemos escolher outra alternativa para escrever $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$ utilizando os operadores de levantamento e abaixamento de spin S^+ e S^- , respectivamente, definidos como $S^\pm = S^x \pm iS^y$. Dessa forma, uma mesma expressão para a equação (2.1) pode ser escrita

para a Hamiltoniana de Heisenberg:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \left(\frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ + S_i^z S_j^z \right). \quad (2.2)$$

Essa forma é particularmente útil em sistemas com simetria de $SU(2)$, já que os operadores S^+ e S^- permitem tratar diretamente os processos de elevação e abaixamento da projeção do spin, facilitando o cálculo de elementos de matriz e a ação de $\mathbf{S}^2$ sobre os autoestados S^z .

Deve-se destacar que a Hamiltoniana de Heisenberg não possui equivalente clássico, já que sua interação de troca decorre da natureza quântica dos elétrons, em especial da simetria da função de onda e do princípio de exclusão de Pauli. Em consequência, modelos clássicos que tentam descrever o magnetismo da matéria tendem a subestimar a estabilidade e a intensidade da ordem magnética, pois ignoram as flutuações quânticas que, no sistema real, reduzem o momento magnético efetivo e podem até mesmo destruir a ordem de longo alcance.

Além disso, a forma como os spins interagem entre si, determinada pelo sinal e intensidade da constante de troca J_{ij} , define diferentes tipos de ordenamento magnético possíveis no sistema. Quando $J_{ij} > 0$ a interação favorece o alinhamento paralelo dos spins vizinhos para minimizar a energia do sistema, caracterizando o ferromagnetismo. Por outro lado, quando $J_{ij} < 0$ a interação favorece o alinhamento antiparalelo entre spins vizinhos, levando ao antiferromagnetismo. Esses dois casos representam os ordenamentos mais simples e fundamentais em sistemas magnéticos, e são ponto de partida para compreender estados magnéticos mais complexos.

Outro aspecto fundamental do modelo é a geometria da rede que conecta os spins vizinhos em um sistema magnético, uma vez que ela influencia diretamente a energia total do sistema, a estabilidade dos estados ordenados e a temperatura crítica associada à transição para o ordenamento magnético.

Ademais, a dimensionalidade do sistema desempenha um papel decisivo na existência (ou não) de ordem magnética de longo alcance à temperatura finita. De acordo com o teorema de Mermin-Wagner, não pode haver quebra espontânea de simetrias contínuas em sistemas bidimensionais ou unidimensionais com interações de curto alcance para temperaturas finitas, o que impõe restrições fundamentais ao comportamento magnético em baixas dimensões. [29]

Outro ponto importante é que a geometria da rede pode levar à uma frustração magnética, que ocorre quando os spins não conseguem se organizar de maneira a minimizar simultaneamente todas as interações de troca do sistema. Isso é comum em estruturas com ligações geométricas como redes triangulares ou rede de Kagomé (figura 1) quando as interações são antiferromagnéticas. Nessas situações, há um conflito intrínseco entre as orientações de spin, o que pode impedir a formação de um estado ordenado simples e resulta em uma grande degenerescência do estado fundamental. Como consequência, o

sistema fica mais suscetível a fortes flutuações quânticas, favorecendo o aparecimento de fases magnéticas exóticas, como os líquidos de spin.

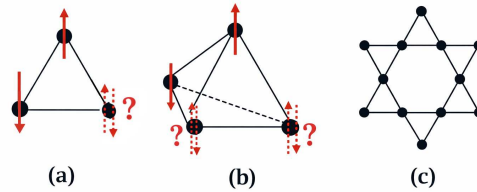


Figura 1 – Representação esquemática da frustração geométrica em redes triangulares em (a),(b) e kagomé (c) antiferromagnéticas. A geometria da rede impede que todos os spins vizinhos se alinhem antiparalelamente de forma simultânea, resultando em frustração magnética (retirado de [1]).

Esses estados são de grande interesse tanto fundamental quanto tecnológico, pois apresentam propriedades como emaranhamento de longo alcance e transporte de spin sem dissipação, podendo ser utilizados futuramente em dispositivos de spintrônica quântica [30, 31].

2.2 Ferromagnetismo

O ferromagnetismo é uma forma de ordenamento magnético onde os momentos de spin se alinham paralelamente uns aos outros mesmo na ausência de um campo magnético externo. Esse comportamento leva a magnetização espontânea, característica dos ímãs permanentes.

Dessa maneira, abaixo de uma certa temperatura crítica T_c , conhecida como temperatura de Curie, os spins locais organizam-se de modo a minimizar a energia do sistema para $J > 0$, de forma que os spins apontam aproximadamente para a mesma direção comum, que, por convenção, é frequentemente escolhida como o eixo $+z$.



Figura 2 – Representação esquemática do estado fundamental do ferromagneto em uma dimensão.

Esse alinhamento depende apenas da interação de troca entre os spins. Assim, de forma clássica, o estado fundamental é aquele em que todos os spins estão alinhados em uma direção, em nosso caso na direção $+z$. No entanto, esse estado, mesmo em temperaturas próximas do zero absoluto, ainda pode apresentar excitações coletivas, conhecidas como

ondas de spin, que classicamente descrevem pequenas oscilações dos spins em relação à direção média do ordenamento.

Para compreender com mais clareza a dinâmica das excitações e a estrutura de energia do sistema ferromagnético, é útil considerar uma versão simplificada do modelo: uma cadeia unidimensional de spins. Se considerarmos essa cadeia unidimensional de spins $1/2$, com condições de contorno periódicas, em que cada spin possui dois vizinhos, como mostrado na figura (2). A energia do estado fundamental $|\psi_0\rangle$ para esse sistema é obtida pela aplicação da Hamiltoniana H :

$$H |\psi_0\rangle = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\frac{1}{2} S_i^+ S_j^- |\psi_0\rangle + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ |\psi_0\rangle + S_i^z S_j^z |\psi_0\rangle \right). \quad (2.3)$$

Como o estado fundamental $|\psi_0\rangle$ corresponde a todos os spins alinhados na direção $+z$, ou seja, trata-se de um estado totalmente polarizado para cima. Esse é o estado de mais alto peso da representação de spin total, de forma que o operador S_i^+ atuando sobre $|\psi_0\rangle$ resulta em zero. Por conseguinte os termos $S_i^+ S_j^-$ e $S_i^- S_j^+$ não contribuem para a energia do estado fundamental, uma vez que a aplicação de S_i^+ e S_j^+ no estado $|\psi_0\rangle$ resulta em zero, uma vez que todos os spins já estão direcionados para $+z$, restando apenas a contribuição do termo $S_i^z S_j^z$. Observe que esse resultado pode ser facilmente generalizado para qualquer valor de spin ($S = 1/2, 1, 3/2, \dots$), uma vez que o estado de mais alto peso da representação de spin é sempre aniquilado por S_i^+ .

Logo, podemos observar que a energia do estado fundamental do sistema é dada por:

$$H |\psi_0\rangle = \frac{-JN(\hbar S)^2}{2} |\psi_0\rangle, \quad (2.4)$$

onde S denota o autovalor do operador S_i^z , e N corresponde ao número de sítios (ou spins) presentes na cadeia unidimensional. E a magnetização total do sistema é definida como $S_{tot} = \sum_i S_i$.

Portanto, visto que $|\psi_0\rangle$ representa o estado fundamental, podemos construir estados excitados locais utilizando o operador de abaixamento S_i^- , que inverte spin no sítio i . O estado resultante é dado por $|\psi_i\rangle = S_i^- |\psi_0\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |\cdots \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \cdots\rangle, \\ |\psi_i\rangle &= |\cdots \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow \cdots\rangle. \end{aligned}$$

Embora os operadores de spin não obedeçam exatamente uma álgebra bosônica, no regime de baixas energias, correspondente a pequenas flutuações em torno do estado ordenado, as excitações coletivas podem ser descritas por operadores que satisfazem comutadores bosônicos efetivos, como evidenciado pelas representações mais comuns utilizadas, como Holstein–Primakoff, Schwinger e Dyson–Maleev ([32]). Em regimes de energia mais elevados, entretanto, correções não lineares tornam-se relevantes, de modo que a descrição em termos de quasipartículas puramente bosônicas deixa de ser adequada.

Assim, a fim de simplificar a notação e tornar as expressões mais compactas, consideraremos o caso de spin $S = 1/2$, já que captura os aspectos essenciais da física envolvida. Dessa forma, atuando H em $|\psi_i\rangle$ temos:

$$H |\psi_i\rangle = -\frac{J}{2} \left[\left(N \frac{\hbar^2}{4} - \hbar^2 \right) |\psi_i\rangle + \hbar^2 |\psi_{i+1}\rangle + \hbar^2 |\psi_{i-1}\rangle \right]. \quad (2.5)$$

Desse modo, podemos notar que $|\psi_i\rangle$ não é autoestado da Hamiltoniana. Podemos construir um autoestado como uma superposição de todos os estados em que o spin está invertido em um sítio i , somando sobre todas as possíveis posições do spin invertido:

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} |\psi_q\rangle, \quad (2.6)$$

Em que $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}$ é um fator de fase, que descreve ondas planas com número de onda q .

Dessa maneira, utilizando do princípio da incerteza, podemos associar uma inversão de spin em uma posição bem definida com uma incerteza grande em seu momento q . Como a energia da excitação depende do momento, o estado $|\psi_i\rangle$ envolve também uma superposição de diferentes energias e, portanto, não pode constituir um autoestado da Hamiltoniana. Em contrapartida, estados com momento bem definido possuem energia bem definida e, por conseguinte, correspondem aos autoestados da Hamiltoniana.

Assim, a excitação não pode permanecer localizada em um único sítio da rede, devendo estar distribuída por todo o ferromagneto. A superposição das excitações localizadas, ponderada por fatores de fase $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}$, origina estados periódicos no espaço que se propagam ao longo da rede, caracterizando uma onda de spin.

A energia dessa onda de spin é quantizada, e o quantum de energia da onda de spin é chamada de *mágnon*. Classicamente podemos interpretar as ondas de spin como uma precessão ao longo do eixo em que os spins apontam, como mostra a figura (3).

Assim, sintetizando os passos intermediários, cujo desenvolvimento completo pode ser consultado em [33], chegamos ao seguinte resultado:

$$H |\psi_q\rangle = E(q) |\psi_q\rangle, \quad (2.7)$$

com o autovalor $E(q)$, dado por:

$$E(q) = -\frac{JN\hbar^2}{8} + \frac{J\hbar^2}{2}(1 - \cos(qa)), \quad (2.8)$$

sendo a o espaçamento de rede. Além disso, observa-se que a energia das excitações tende a zero no limite de momento nulo, caracterizando um espectro sem gap, isto é, as excitações não possuem massa efetiva

O surgimento de *mágnons* no sistema está diretamente associado ao Teorema de Goldstone [34], segundo o qual, sempre que o Hamiltoniano (ou a Lagrangiana) possui uma

simetria contínua global que não é preservada pelo estado fundamental, surgem excitações coletivas de baixa energia e sem gap. No modelo de Heisenberg, a Hamiltoniana apresenta simetria $O(3)$, gerada pelas componentes do spin total $\mathbf{S}_{tot} = (S_{tot}^x, S_{tot}^y, S_{tot}^z)$. No estado fundamental, essa simetria é espontaneamente quebrada, e as rotações geradas pelas componentes transversais do spin dão origem aos mágnons.

Portanto, podemos observar que quando um spin é completamente invertido, ou seja, atuamos S_i^- no estado fundamental, o momento magnético naquele sítio passa a se opor ao restante do sistema. Essa configuração cria uma violação local das interações de troca com seus vizinhos, resultando em um grande custo energético proporcional ao número de ligações que esse spin possui. Por isso, essa excitação localizada é energeticamente custosa. Entretanto, quando a perturbação é não localizada e suave, os spins desviam levemente da direção comum e oscilam coerentemente ao redor dela. Nesse caso, a energia é distribuída por muitos sítios, e a distorção da ordem magnética é mínima e contínua. Como resultado, a energia associada é pequena (especialmente para comprimentos de onda longos), tornando essas excitações do tipo baixa energia.

Além disso, essas excitações são quanta de modo coletivo e obedecem a estatística de Bose-Einstein, o que permite a formação de estados coerentes como a superfluidez de spin como veremos no Capítulo IV.

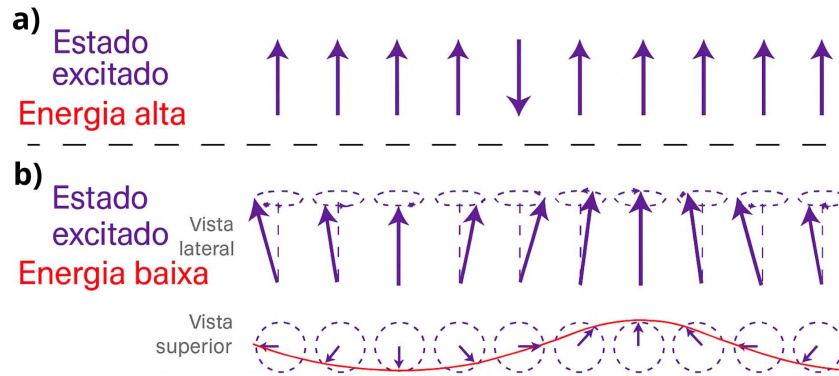


Figura 3 – Representação esquemática das excitações magnônicas em um sistema magnético: (a) excitação local de alto custo energético; (b) excitação coletiva de baixa energia, caracterizada por uma onda de spin. (Adaptado de Patryk Nowik-Boltyk, Universität Münster.)

2.3 Modelo sigma não-linear

Dada a complexidade de resolver a Hamiltoniana de Heisenberg para uma rede de N sítios, que envolve determinar a dinâmica de $3N$ graus de liberdade, correspondente às três componentes de spin em cada sítio, sujeitas ao vínculo $\mathbf{S}^2 = S^2$, a obtenção de soluções

exatas é, na maioria dos casos, inviável. Isso nos obriga a recorrer a simplificações que tornem o problema tratável.

Entre as abordagens eficazes para lidar com essa complexidade, destaca-se o modelo sigma não-linear (MSNL), originalmente introduzido na física de partículas na década de 1950. Na sua formulação inicial, o modelo sigma linear envolvia um conjunto de quatro campos acoplados por uma simetria contínua $O(4)$. Dessa forma, a passagem para a versão não-linear constituiu em impor uma restrição de módulo constante sobre o campo vetorial ($|\mathbf{n}(\mathbf{x})|^2 = 1$), eliminando o grau de liberdade radial e preservando apenas as direções do campo reduzindo a simetria de $O(4)$ para $O(3)$. Essa reformulação mostrou-se particularmente eficaz para descrever modos de Goldstone [35].

A partir da década de 1970, o MSNL passou a ser amplamente utilizado no estudo de sistemas magnéticos. A semelhança com modelos de spin como o modelo de Heisenberg, nos quais o módulo da magnetização é preservado e apenas a sua orientação varia no espaço, torna o MSNL particularmente adequado para descrever as ondas de spin no regime de baixas energias, oferecendo uma formulação mais simples, e ao mesmo tempo mais precisa.

2.3.1 MSNL no magnetismo

A conexão entre o MSNL e os sistemas magnéticos torna-se explícita quando consideramos o limite de longos comprimentos de onda no modelo de Heisenberg. Em escalas muito maiores que o espaçamento da rede, as orientações dos spins variam de forma lenta e suave, de modo que seja natural e conveniente substituir o sistema discreto por um contínuo e passamos a representar nosso modelo magnético por uma teoria clássica de campos. Como o módulo do spin é fixo, esse campo não pode assumir valores arbitrários, mas deve permanecer sobre a superfície esférica S^2 , para o caso do ferromagneto isotrópico.

Dessa forma, utilizando a convenção adotada em teoria de campos, as variáveis que antes eram discretas como posição $\mathbf{r}_i$ e spin $\mathbf{S}_i$, passam para o limite contínuo sendo representadas por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{S} = S\mathbf{n}(\mathbf{r})$, sendo $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ um campo direcional e a^{-D} é a densidade de sítios, com D sendo a dimensão espacial, e considerando um sistema com um grande número de sítios, a soma discreta sobre os sítios da rede pode ser aproximada por uma integral contínua:

$$\sum_{i,j} \rightarrow \int \frac{d^D r}{a^D}.$$

Ademais, como dito anteriormente, consideramos que o espaçamento de rede é muito menor do que o comprimento de onda dos spins e flutuações no campo dos spins entre primeiros vizinhos são suficientemente pequenas para justificar a aproximação do campo direcional, desse modo

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{n}(\mathbf{r}) + \sum_l \left(\Delta r_l \frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r})}{\partial x_l} + \frac{\Delta r_l^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{n}(\mathbf{r})}{\partial x_l^2} \right), \quad (2.9)$$

onde, para uma rede quadrada, $\Delta r_l = \pm a \hat{x}_l$ e $x_l = x, y, z$. Portanto, a equação que antes era representada pela equação (2.1), passa a ser

$$H = -\frac{JS^2}{2} \int \frac{d^D r}{a^D} \sum_{l,\alpha} \lambda^\alpha n^\alpha \left(n^\alpha + \Delta r_l \frac{\partial n^\alpha}{\partial x_l} + \frac{\Delta r_l^2}{2} \frac{\partial^2 n^\alpha}{\partial x_l^2} \right), \quad (2.10)$$

em que $\alpha = x, y, z$ representa o índice das componentes de spin (espaço interno) enquanto $l = x, y, z$ representa direções no espaço físico. O termo Δr_l representa o vetor de deslocamento entre sítios vizinhos na direção l da rede. Contudo, devido à simetria da rede, o termo linear se anula. Além disso, introduzimos um fator λ^α para representar a anisotropia da rede, que possui valor unitário para as componentes x e y, e igual a λ para a componente z. Assim, obtemos:

$$H = E_{cl} + \frac{JS^2}{2a^D} \int d^D r \left[2D(1 - \lambda)(n^z)^2 + a^2 \sum_\alpha \nabla n^\alpha \cdot \nabla n^\alpha \right], \quad (2.11)$$

no qual $E_{cl} = -JS^2ND$ é um termo constante. O termo $\nabla n^\alpha \cdot \nabla n^\alpha$ surge de uma integração por partes que reescreve $n^\alpha \nabla^2 n^\alpha$ em uma forma simétrica, assumindo condições de contorno periódicas.

Dessa maneira, ignorando o termo de energia constante, quando fixamos o módulo da componente de spin $|\mathbf{n}|^2 = 1$ obtemos o MSNL $O(3)$ descrito pela equação (2.11). Ainda sim, podemos reescrever o MSNL de modo que o vínculo seja incluído explicitamente na Hamiltoniana. Para isso, utilizamos a parametrização

$$n^x = \sqrt{1 - (n^z)^2} \cos(\varphi), \quad (2.12a)$$

$$n^y = \sqrt{1 - (n^z)^2} \sin(\varphi), \quad (2.12b)$$

em função dos campos canonicamente conjugados n^z e φ . Portanto, substituindo os termos n^x e n^y , e ignorando o termo constante na equação 2.11, obtemos:

$$H = \frac{JS^2}{2a^{D-2}} \int d^D r \left[\lambda \nabla n^z \cdot \nabla n^z + \frac{(n^z)^2 \nabla n^z \cdot \nabla n^z}{1 - (n^z)^2} + \frac{2D(1 - \lambda)}{a^2} (n^z)^2 + \sum_\alpha \nabla n^\alpha \cdot \nabla n^\alpha + [1 + (n^z)^2] \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right]. \quad (2.13)$$

A partir desta equação, podemos identificar o tipo de ordenamento magnético descrito pelo modelo ajustando o parâmetro λ . Para $\lambda = 1$ obtemos o caso isotrópico, enquanto valores de $0 < \lambda < 1$ correspondem ao ferromagneto de plano fácil. Por outro lado, modelo na forma apresentada não é adequado para descrever um ferromagneto de eixo fácil, pois tal modelo não é bem descrito no regime de pequenas flutuações na componente n^z , pois nesse caso, qualquer desvio transversal da magnetização possui um custo de energia elevado, já que o estado de menor energia corresponde à orientação alinhada com o eixo de anisotropia. Como consequência, o espectro apresenta um gap e não há modos de Goldstone, uma vez que a anisotropia impõe o estado fundamental do sistema, não há mais um contínuo de estados fundamentais equivalentes e, portanto, as excitações tem energia mínima finita.

Assumindo que $(n^z)^2 \ll 1$, a Hamiltoniana da equação ((2.13)) podemos manter apenas os termos quadráticos, assim podemos reescrever a Hamiltoniana efetiva H_0 como:

$$H_0 = \frac{JS^2}{2a^{D-2}} \int d^D r \left[2Da^{-1}(1 - \lambda)(n^z)^2 + \lambda \nabla n^z \cdot \nabla n^z + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right]. \quad (2.14)$$

2.3.2 Ferromagneto isotrópico e de plano-fácil

Para ambos os casos do ferromagneto isotrópico e o de plano-fácil consideramos um estado ordenado no qual a magnetização é predominantemente uniforme. No regime de plano fácil, a anisotropia confina a magnetização ao plano xy de modo que as flutuações fora do plano, descritas pela componente S^z , permanecem pequenas devido ao custo energético imposto pela anisotropia.

Definindo o eixo z como eixo de quantização, as componentes transversais do spin são dadas por $S^\pm(t) = S^x(t) \pm iS^y(t)$, em que adotando a parametrização em (2.12) evidencia-se que essas componentes descrevem uma rotação no plano xy , sendo expressa por $S^\pm(t) = \sqrt{S^2 - (S^z(t))^2} e^{\pm i\varphi(t)}$.

Nesse contexto, a evolução temporal de S^+ pode ser convenientemente analisada por meio de sua transformada de Fourier:

$$S^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q S_q^+ e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.15)$$

Portanto, a dinâmica obtida descreve um movimento de precessão do campo de spin, no qual as componentes transversais giram em torno do eixo z .

Outrossim, podemos obter o espectro de energia das excitações através do processo de segunda quantização. Dado que os campos clássicos n^z e φ são canonicamente conjugados, pois suas dinâmicas seguem a relação de Poisson $\{\varphi(\mathbf{r}), S^z(\mathbf{r}')\} = \delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Quando promovemos os campos clássicos para operadores, sua relação de comutação torna-se

$[\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{S}^z(\mathbf{r}')] = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Dessa forma, podemos escrever a transformada de Fourier dos campos canonicamente conjugados como:

$$\hat{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \hat{\varphi}_q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}, \quad (2.16a)$$

$$\hat{S}_i^z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \hat{S}_q^z e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}. \quad (2.16b)$$

Realizando a transformada de Fourier sobre a Hamiltoniana H_0 para o espaço de momento, obtemos:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_q \left[h_q^\varphi \hat{\varphi}_q \hat{\varphi}_{-q} + h_q^z \hat{S}_q^z \hat{S}_{-q}^z \right], \quad (2.17)$$

em que $h_q^\varphi = JS^2 a^2 q^2$ e $h_q^z = J[2D(1 - \lambda) + \lambda a^2 q^2]$. Como os operadores $\hat{\varphi}_q$ e $\hat{S}_q^z$ são canonicamente conjugados, podemos introduzirmos os operadores bosônicos $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ para obter os modos de energia do sistema. Os novos operadores bosônicos são definidos como combinações lineares de $\hat{\varphi}_q$ e $\hat{S}_q^z$ de modo a satisfazer a relação de comutação $[\hat{a}_q, \hat{a}_{q'}^\dagger] = \delta_{q,q'}$:

$$\hat{a}_q = \hat{\varphi}_q + i\hat{S}_q^z, \quad (2.18a)$$

$$\hat{a}_q^\dagger = \hat{\varphi}_q - i\hat{S}_q^z. \quad (2.18b)$$

Dessa maneira, a Hamiltoniana quadrática é diagonalizada e pode ser reescrita como:

$$\hat{H}_0 = \sum_q \hbar\omega_q \left(\hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q + \frac{1}{2} \right), \quad (2.19)$$

onde

$$\omega_q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{h_q^\varphi h_q^z}. \quad (2.20)$$

Assim, para o regime de baixas energias e longos comprimentos de onda podemos observar que para o caso isotrópico com $\lambda = 1$ obtemos $\omega_q = JSa^2 q^2 / \hbar$ com espectro de energia quadrático em relação ao momento, aspecto esse que será melhor explorado no capítulo IV. Já para o caso em que temos uma anisotropia de plano-fácil $0 < \lambda < 1$, e consideramos $a^2 q^2 \ll 1$ obtemos $\omega_q = JSaq\sqrt{2D(1 - \lambda)} / \hbar$, um espectro linear, que também será de grande importância para a superfluidez de spin discutida no capítulo IV.

2.4 Transporte de momento magnético por mágnons

Antes de discutir o transporte de spin no regime superfluido, é necessário compreender o transporte de spin em sua forma mais geral, mediada por mágnons. Dessa forma, além

de serem as excitações elementares dos sistemas magneticamente ordenados e contribuírem para as propriedades térmicas e dinâmicas do sistema, os mágnons são capazes de transportar momento magnético ao longo da rede. Diferentemente do transporte eletrônico convencional, no qual a corrente está associada ao movimento de cargas elétricas, o transporte magnônico ocorre por meio das excitações coletivas de spin, permitindo a propagação de momento angular mesmo em materiais eletricamente isolantes, evitando perdas energéticas associadas ao movimento de cargas elétricas.

Dessa forma, é intuitivo introduzir o caso simples da contribuição de apenas um único mágnon em um ferromagneto isotrópico com campo magnético aplicado. De forma geral, para o caso clássico, podemos escrever a densidade de energia livre citada como:

$$\mathcal{F} = \underbrace{A \nabla \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{M}}_{\text{termo de troca}} - \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}}_{\text{campo externo}}, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{M}$ é a magnetização espontânea, A é a rigidez de spin, $\mathbf{H}$ é o campo magnético externo. Podemos escrever a energia de troca para o caso clássico como gradiente do vetor de magnetização como mostrado na equação (2.9) no MSNL. Sem perda de generalidade, podemos definir o campo magnético externo ao longo da direção z , com o intuito de fixar o eixo de quantização do spin ao longo da direção z , isto é, $\mathbf{H} = H \hat{z}$.

Assim, mesmo em isolantes magnéticos, existem contribuições à energia livre associadas à interação spin-órbita, como anisotropia magnética e interação dipolo-dipolo. Contudo, tais termos são relativisticamente pequenos quando comparados à energia de troca e, portanto, a conservação do spin pode ser tratada como uma aproximação válida. Tais interações possuem origem relativística e são governadas por um pequeno parâmetro adimensional da ordem de v/c , em que v representa uma velocidade dos elétrons ligados em seus orbitais atômicos no material isolante, c é a velocidade da luz. Apesar da interação spin-órbita depender da direção de magnetização, ela é muito fraca comparado ao termo de troca e não afeta o valor absoluto de $\mathbf{M}$ em dinâmicas lentas.

Desse modo, no estado fundamental a magnetização espontânea $\mathbf{M}_0 = M_0 \hat{z}$ é paralela ao campo magnético externo $\mathbf{H}$, dessa maneira, podemos escrever o vetor de pequenas perturbações como:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0. \quad (2.22)$$

Dessa maneira, a densidade de energia livre pode ser escrita como a soma da contribuição do estado fundamental e de um termo correspondente às perturbações em torno desse estado,

$$\mathcal{F} = \underbrace{-\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{H}}_{\text{Estado Fundamental}} + \underbrace{A (\nabla \mathbf{m})^2 + -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}}_{\text{Flutuações}}. \quad (2.23)$$

A partir do funcional da energia livre podemos obter o campo efetivo a partir do funcional da energia livre $F = \int d^3r \mathcal{F}$

$$\delta F = -\mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \delta \mathbf{m}, \quad (2.24)$$

onde o campo efetivo $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ é descrito como:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{m}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{m}} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\nabla \mathbf{m})} \right), \quad (2.25)$$

com isso, obtemos

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = A \nabla^2 \mathbf{m} + \mathbf{H}. \quad (2.26)$$

Como o estado fundamental corresponde ao mínimo da energia livre, o campo magnético efetivo encontra-se paralelo à magnetização de equilíbrio. Portanto, o torque $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$ é nulo, e o sistema permanece em uma configuração estacionária de equilíbrio. Apenas as flutuações $\delta \mathbf{m}$ em torno da configuração de equilíbrio governam a evolução temporal da magnetização.

Por conseguinte, podemos descrever as equações de dinâmica do sistema a partir do torque exercido pelas flutuações

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}, \quad (2.27)$$

em que γ é a constante giromagnética. Assim, sabendo que $\partial \mathbf{M}_0 / \partial t = 0$ e que $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}$, podemos obter a equação de dinâmica de Landau-Lifshitz com respeito a $\mathbf{m}$:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma A \nabla [\mathbf{M}_0 \times \nabla \mathbf{m}] + \gamma [\mathbf{H} \times \mathbf{m}]. \quad (2.28)$$

A transformada de Fourier para $\mathbf{m}$, pode ser escrita como:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\mathbf{m}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]. \quad (2.29)$$

De forma que $\mathbf{M}_0$ também é constante no espaço, logo o termo de troca pode ser reescrito como $\nabla [\mathbf{M}_0 \times \nabla \mathbf{m}] = [\mathbf{M}_0 \times (-k^2) \mathbf{m}]$. Dese modo, a equação de Landau-Lifshitz torna-se:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma (H + A M_0 k^2) (\hat{z} \times \mathbf{m}). \quad (2.30)$$

Escrevendo em termos das componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$, temos $\hat{z} \times (m_x \hat{x} + m_y \hat{y}) = (-m_x) \hat{y} + m_y \hat{x}$, e pela transformada de Fourier obtida anteriormente $\partial_t \mathbf{m} = -i\omega \mathbf{m}$. Então:

$$-i\omega m_x = \gamma (H + A M_0 k^2) (-m_y), \quad (2.31a)$$

$$-i\omega m_y = \gamma (H + A M_0 k^2) (m_x). \quad (2.31b)$$

Dessa forma, podemos escrever,

$$m_y = \frac{i\omega}{\gamma(H + AM_0k^2)} m_x. \quad (2.32)$$

Substituindo na equação (2.31) é possível resolver a EDO do sistema e obter diretamente a frequência das ondas de spin. O resultado é dado por:

$$\omega(\mathbf{k}, H) = \gamma (H + AM_0k^2), \quad (2.33)$$

em que o espectro é semelhante ao encontrado na equação (2.20) com γAM_0k^2 sendo a rigidez de troca mais a adição de um gap ao sistema devido ao campo magnético externo representado pela constante γH .

Uma vez estabelecida a dinâmica das excitações magnônicas e a conservação da componente S^z do spin, podemos empregar a equação da continuidade para definir e calcular a corrente de spin em um associada a essas excitações. Realizando uma aproximação linear a corrente de spin

$$\frac{\hbar}{a^3} \frac{\partial S^z}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial m^z}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}^z, \quad (2.34)$$

onde

$$\mathbf{j}^z = -\hat{z} \cdot \left[\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nabla \mathbf{m}} \right] = A\hat{z} \cdot [\mathbf{m} \times \nabla \mathbf{m}] = A\mathbf{k}|\mathbf{m}|^2. \quad (2.35)$$

A densidade de energia dos mágnons é $\epsilon = (\omega/2\gamma M_0)|\mathbf{m}|^2V$, em que V é o volume por célula unitária. Cada mágnon contribui com energia $\epsilon = \hbar\omega$ e $\delta\mathbf{j}^z = \hbar\mathbf{v}(\mathbf{k})/V$ para a corrente de spin, com velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = d\omega/d\mathbf{k}$. Também, sabendo que cada mágnon contribui com energia $\epsilon = \hbar\omega$, podemos descrever a amplitude ao quadrado como $\delta m^2 = \hbar\omega/2\gamma M_0V$.

Assim, a corrente de spin total pode ser obtida somando-se as contribuições individuais de todos os mágnons presentes com distribuição $n(\mathbf{k})$.

$$\mathbf{j}^z = \frac{\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k})\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k [n(\mathbf{k})\mathbf{v}(\mathbf{k})], \quad (2.36)$$

em que $n(\mathbf{k})$ corresponde a distribuição de Bose-Einstein. entretanto, no equilíbrio térmico a distribuição de mágnons é isotrópica no espaço de momentos, de modo que as contribuições à corrente de spin provenientes de mágnons com momentos opostos se cancelam. Uma corrente de spin só surge quando a distribuição de mágnons é deslocada no espaço de momentos, o que pode ser descrito por uma distribuição de Bose-Einstein com uma velocidade de arrasto efetiva $\mathbf{v}_n$.

$$n(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega(\mathbf{k},H) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_n)} - 1} \quad (2.37)$$

em que $\beta = 1/k_b T$. Esse deslocamento é induzido por mecanismos de não-equilíbrio, como gradientes de temperatura ou injeção de spin, que quebram a simetria entre mágnons com momentos opostos e dão origem a uma corrente de spin líquida.

Em suma, o cálculo da corrente de spin realizado nessa seção deve ser entendido como uma descrição preliminar, que visa apenas fornecer uma intuição física sobre a origem da corrente de spin no sistema. No capítulo V, a corrente de spin será derivada de maneira sistemática no formalismo da teoria quântica de campos, permitindo uma caracterização mais rigorosa de suas propriedades dinâmicas e de transporte.

III Aproximação Harmônica

Auto-Consistente

Ao estudar sistemas magnéticos, é comum iniciar a análise no limite de temperatura nula, onde as excitações quânticas podem ser tratadas de maneira mais simples e a estrutura do estado fundamental é bem definida. Entretanto, ao introduzirmos temperatura, as médias térmicas passam a depender de configurações flutuantes, tornando o tratamento analítico significativamente mais complexo.

Portanto, para introduzir temperatura finita ao sistema utilizamos como principal base teórica a Aproximação Harmônica Auto-consistente, uma ferramenta poderosa para descrever flutuações de fase em sistemas magnéticos que permite incluir efeitos térmicos substituindo o hamiltoniano original por um hamiltoniano harmônico efetivo cujos parâmetros são determinados de maneira autoconsistente. Embora o trabalho de Jacques Villain [36], seja uma das referências centrais na aplicação da AHAC em sistemas XY unidimensionais e bidimensionais, também nos apoiamos em desenvolvimentos posteriores de autores como Pires [21–24] e Moura [25–28], que aprofundaram e estenderam o uso dessa técnica.

A proposta deste capítulo é apresentar e discutir o formalismo da AHAC em detalhe para o sistema ferromagnético com anisotropia de de plano-fácil, de modo a construir uma base conceitual e metodológica para sua posterior aplicação ao estudo de superfluidez de spin. Assim, a AHAC será introduzida aqui de forma geral e posteriormente empregada, no capítulo V, como ferramenta teórica para descrever o comportamento coletivo e as excitações em sistemas magneticamente ordenados com transporte superfluido de spin.

3.1 Ferromagneto com anisotropia de plano-fácil

Foi visto que ao expandir o MSNL até a ordem quadrática, obtemos uma descrição simplificada em termos de excitações livres, adequada para capturar o comportamento do sistema em temperaturas suficientemente baixas. No entanto, com o aumento da população de mágnons, essa aproximação deixa de ser apropriada, uma vez que a condição $n_q \ll 1$ não é mais satisfeita. Nessas circunstâncias, as interações entre mágnons passam a desempenhar um papel relevante e devem ser incorporadas ao tratamento teórico para garantir uma descrição quantitativa mais fiel da física envolvida. Se incluirmos as interações o cálculo torna-se significativamente mais elaborado e dificulta o tratamento analítico do modelo.

Dessa maneira, o principal objetivo da AHAC é substituir a Hamiltoniana de um

sistema fortemente interagente, que geralmente não é resolúvel analiticamente, por uma Hamiltoniana harmônica efetiva, cujos acoplamentos são determinados de forma auto-consistente, ou seja, com base nas flutuações do próprio sistema. As interações são então tratadas de forma indireta por meio de um parâmetro de renormalização ρ dependente da temperatura. Toda a complexidade fica encapsulada na equação que determina esse parâmetro, mantendo a Hamiltoniana quadrática.

Tendo apresentado os fundamentos da AHAC, aplicamos agora essa metodologia ao caso de um ferromagneto com anisotropia de plano-fácil. Esse sistema, apesar de sua simplicidade, capta os principais elementos necessários para o estudo da coerência de fase e das flutuações coletivas de spin em baixas temperaturas. A escolha desse sistema como ponto de partida é, portanto, estratégica: além de permitir uma análise analítica acessível, ele fornece intuições fundamentais sobre o papel da rigidez de fase e da anisotropia na estabilização de estados coerentes de spin.

Portanto, garantimos que a componente S^z é pequena, para justificar a expansão necessária. Assim, não é necessário assumir que φ seja também um campo com amplitude pequena, sendo suficiente assumir que as flutuações são tais que $\Delta\varphi \ll 1$ entre vizinhos próximos (embora seja uma simplificação, essa suposição é amplamente aceita por fornecer resultados consistentes na maioria dos casos de interesse prático).

Vale ressaltar que uma descrição da AHAC no formalismo da mecânica quântica pode ser obtido descrevendo o sistema inicialmente como um modelo clássico que posteriormente é quantizado, ou lidamos com operadores de spin desde o início. As duas construções fornecem resultados semelhantes para grandes valores da componente de spin e temperaturas mais elevadas. Porém, é importante ressaltar que as flutuações quânticas se tornam relevantes quando a temperatura é baixa e principalmente no caso onde $S = 1/2$, para esses casos é adequado iniciar diretamente considerando um modelo quântico.

Dessa forma, inicialmente vamos considerar uma Hamiltoniana clássica de spins e posteriormente desenvolveremos seu modelo quântico. Para um modelo ferromagnético com anisotropia de plano-fácil, a Hamiltoniana é expressa como:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + \lambda S_i^z S_j^z), \quad (3.1)$$

com $0 < \lambda < 1$. Para satisfazer o vínculo não-linear $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$, parametrizamos os campos transversais como:

$$S_i^x = \sqrt{S^2 - (S_i^z)^2} \cos(\varphi_i), \quad (3.2a)$$

$$S_i^y = \sqrt{S^2 - (S_i^z)^2} \sin(\varphi_i), \quad (3.2b)$$

dessa forma, definindo $\zeta_i = \sqrt{S^2 - (S_i^z)^2}$ e $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_i$, a Hamiltoniana se torna:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} [\zeta_i \zeta_j \cos(\Delta\varphi) + \lambda S_i^z S_j^z]. \quad (3.3)$$

Como estamos considerando baixas flutuações, podemos expandir as raízes quadradas e a função cosseno em série de potência, mantendo apenas os termos até a ordem quadrática. Desse modo,

$$H = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[S^2 \frac{\rho(\Delta\varphi)^2}{2} + S_i^z S_i^z - \lambda S_i^z S_j^z \right]. \quad (3.4)$$

Naturalmente, devido ao fato da aproximação harmônica reter somente os termos quadráticos, existe uma perda de informação devido aos termos desprezados. A fim de incorporar os termos, de forma efetiva, introduzimos o parâmetro de renormalização ρ que, de forma indireta, considera as flutuações desconsideradas na expansão quadrática. Deste modo, o campo angular sofre a redefinição $\varphi_i \rightarrow \sqrt{\rho} \varphi_i$. No limite $T \rightarrow 0$, $\rho \approx 1$ e as correções nas flutuações são desnecessárias na teoria clássica, entretanto para temperaturas finitas, o parâmetro de renormalização é obtido por meio da equação auto-consistente (demonstrada ao final da secção).

$$\rho = \left(1 - \frac{\langle (S^z)^2 \rangle_0}{S^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta\varphi)^2 \rangle_0}. \quad (3.5)$$

Os efeitos citados são levados em consideração por meio das médias térmicas $\langle (S^z)^2 \rangle_0$ e $\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle_0$, que são determinadas por meio da Hamiltoniana quadrática (3.4).

Dado que as variáveis S_i^z e φ_i são pares canonicamente conjugados, isto é, satisfazem a relação de Poisson $\{\varphi_i, S_j^z\} = \delta_{ij}$, podemos realizar uma transformada de Fourier em ambas as variáveis com o objetivo diagonalizar o problema espacial e identificar os modos normais das ondas de spin, para facilitar a análise do espectro do sistema no espaço recíproco. Dessa forma, de modo semelhante à equação (2.16), podemos passar os campos φ_i e S_i^z para o espaço de momentos, obtendo-se

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{J}{2} \sum_{i,\eta} \sum_q \left[(1 - \lambda e^{i\mathbf{q}' \cdot \eta}) S_q^z \bar{S}_q^z + S^2 \rho (1 - e^{i\mathbf{q}' \cdot \eta}) \varphi_q \bar{\varphi}_q \right] e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}_i} \\ &= \frac{Jz}{2} \sum_q \left[(1 - \lambda \gamma_q) S_q^z \bar{S}_q^z + S^2 \rho (1 - \gamma_q) \varphi_q \bar{\varphi}_q \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que escrevemos $S_{-q}^z = \bar{S}_q^z$ e $\bar{\varphi}_q^z = \varphi_{-q}$. Além disso, $\sum_\eta e^{i\mathbf{q}' \cdot \eta} = z\gamma_q$, sendo γ_q o fator de estrutura da rede quadrada. Dessa maneira,

$$H = \frac{1}{2} \sum_q \left[h_q^\varphi \varphi_q \bar{\varphi}_q^z + h_q^z S_q^z \bar{S}_q^z \right], \quad (3.7)$$

em que os coeficientes h_q^z e h_q^φ são semelhantes àqueles definidos na descrição do MSNL, porém sem a restrição $aq \ll 1$. Temos também que o coeficiente h_q^φ agora carrega consigo

o parâmetro de renormalização, sendo expressos por $h_q^\varphi = Jz\rho S^2(1 - \gamma_q)$ enquanto $h_q^z = Jz(1 - \lambda\gamma_q)$, com z sendo o número de primeiros vizinhos. Repetindo os procedimentos realizados durante a descrição do MSNL, obtemos o espectro de energia, dado por:

$$\omega_q = \frac{Jz\rho S}{\hbar} \sqrt{(1 - \lambda\gamma_q)(1 - \gamma_q)}. \quad (3.8)$$

Esse resultado é não apenas fundamental para a compreensão teórica das propriedades magnéticas, como também pode ser testado experimentalmente por técnicas de espectroscopia de mágnons, como o espalhamento inelástico de nêutrons ou a ressonância ferromagnética [37, 38].

3.2 Formulação clássica da AHAC

Classicamente, uma vez que os campos φ_i e S_i^z são desacoplados, a função partição pode ser calculada como o produto de integrais gaussianas independentes sobre cada um desses campos

$$\begin{aligned} Z_0 &= \prod_q \left[\int_{-\infty}^{\infty} dS_q d\bar{S}_q (e^{-\beta h_q^z S_q \bar{S}_q / 2}) \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_q d\bar{\varphi}_q (e^{-\beta h_q^\varphi \varphi_q \bar{\varphi}_q / 2}) \right] \\ &= \frac{2\pi}{\beta} \prod_q (h_q^z h_q^\varphi)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo, obtida a função partição podemos calcular as médias $\langle S_q^z \bar{S}_q^z \rangle$ e $\langle \varphi_q \bar{\varphi}_q \rangle$ como:

$$\langle S_q^z \bar{S}_q^z \rangle = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 S_q d^2 \varphi_q [S_q^z \bar{S}_q^z e^{-\beta H_0}] = \frac{1}{\beta h_q^z}, \quad (3.10)$$

e

$$\langle \varphi_q \bar{\varphi}_q \rangle = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 S_q d^2 \varphi_q [\varphi_q \bar{\varphi}_q e^{-\beta H_0}] = \frac{1}{\beta h_q^\varphi}. \quad (3.11)$$

Dada a homogeneidade do sistema, é esperado que $\langle S_i^z S_i^z \rangle_0$ seja independente do sítio i e assim:

$$\langle (S^z)^2 \rangle_0 = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i^z S_i^z \rangle = t S^2 I(\lambda), \quad (3.12)$$

em que definimos $t = k_B T / Jz$ como uma medida adimensional da temperatura e a função

$$I(\lambda) = \int_{BZ} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{1 - \lambda\gamma_q} \right), \quad (3.13)$$

em que a integral é realizada dentro da primeira zona de Brillouin, denotada por BZ . De forma similar, o valor esperado do desvio angular $\Delta\varphi^2$ é expresso como:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta\varphi^2) \rangle_0 &= \frac{2}{zN} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \varphi_i \varphi_i - \varphi_i \varphi_j \rangle_0 \\
&= \frac{2}{N} \sum_q (1 - \gamma_q) \langle \varphi_q \bar{\varphi}_q \rangle_0 .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Os resultados obtidos acima permitem reescrever a equação auto-consistente na forma

$$\rho = (1 - tI(\lambda)) e^{-\frac{t}{\rho}} . \tag{3.15}$$

Dessa maneira, é possível notar o papel da temperatura por meio do parâmetro t , uma vez que o termo exponencial evidencia os efeitos das flutuações térmicas, que reduzem o fator de renormalização à medida que a temperatura aumenta. Fisicamente, ρ está associado ao rigidez de spin, de modo que sua redução com o aumento da temperatura está diretamente associado a perda do ordenamento magnético.

Assim, a equação auto-consistente admite solução não trivial ($\rho > 0$) apenas a baixo da temperatura crítica de t_c . Quando $t \rightarrow t_c^-$, o sistema se aproxima do limite da estabilidade de fase ordenada e o parâmetro $\rho \rightarrow 0$, o que se manifesta matematicamente pela divergência de $d\rho/dt$.

3.3 Formulação quântica da AHAC

De modo geral, ao descrever sistemas físicos reais, obtêm-se resultados mais precisos quando se adota uma formulação quântica da AHAC, pois em baixas temperaturas ou para sistemas com pequeno número quântico de spin, as flutuações quânticas tornam-se relevantes e não podem ser ignoradas. Por esse motivo, torna-se necessário estender o formalismo para o regime quântico. Desse modo, a quantização do modelo segue os mesmos procedimentos aplicados na quantização da versão quadrática do Modelo Sigma Não Linear. Após promovermos os campos φ_q e S_q^z a operadores, no processo de quantização da Hamiltoniana H_0 , definimos os operadores canônicos por meio da transformação

$$\hat{\varphi}_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{h_q^z}{h_q^\varphi} \right)^{1/4} (a_{-q}^\dagger + a_q), \tag{3.16a}$$

$$\hat{S}_q^z = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{h_q^\varphi}{h_q^z} \right)^{1/4} (a_{-q}^\dagger - a_q). \tag{3.16b}$$

Os coeficientes que acompanham os operadores de a_q e $a_{-q}^\dagger$ são escolhidos de forma que a Hamiltoniana seja diagonalizada, assim ela pode ser escrita como uma soma de modos independentes com energias bem definidas, semelhante ao tratamento do oscilador harmônico quântico. Dessa forma, obtemos a seguinte Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \sum_q \epsilon_q \left(a_q^\dagger a_q + \frac{1}{2} \right), \quad (3.17)$$

onde $\epsilon_q = zJ\tilde{S}\rho\sqrt{(1-\lambda\gamma_q)(1-\gamma_q)}$, em que substituímos S pelo equivalente quântico $\tilde{S} = \sqrt{S(S+1)}$ que representa o módulo do spin no tratamento quântico, pois segue a estrutura algébrica do operador de momento angular. Para o caso semiclássico, o parâmetro de renormalização continua sendo determinado pela equação auto-consistente (3.5), porém os valores médios são determinados pelos operadores canônicos. Utilizando as equações (3.16), obtemos

$$\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle_0 = \frac{1}{Jz\tilde{S}^2\rho N} \sum_q \epsilon_q \coth\left(\frac{\beta\epsilon_q}{2}\right), \quad (3.18)$$

$$\langle (S^z)^2 \rangle_0 = \frac{\sqrt{\rho}\tilde{S}}{2N} \sum_q \sqrt{\frac{1-\gamma_q}{1-\lambda\gamma_q}} \coth\left(\frac{\beta\epsilon_q}{2}\right). \quad (3.19)$$

No limite semiclássico, $\beta\epsilon_q \ll 1$ e assim utilizamos a aproximação $\coth(\beta\epsilon_q/2) \approx 2/\beta\epsilon_q$ para recuperar os resultados obtidos no caso clássico. De forma similar, obtemos o valor esperado para a energia

$$\langle H_0 \rangle_0 = \frac{1}{2} \sum_q \epsilon_q \coth\left(\frac{\beta\epsilon_q}{2}\right), \quad (3.20)$$

que resulta no princípio da equipartição de energia quando $\epsilon_q \ll k_B T$. Além disso, a função partição Z_0 pode ser calculada a partir de $\langle H_0 \rangle_0 = -\partial_\beta \ln(Z_0)$, substituindo na (3.20) integrando em relação a β e isolando Z_0 , fornecendo como resultado:

$$Z_0 = \prod_q \left[2 \sinh\left(\frac{\beta\epsilon_q}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (3.21)$$

A partir da função partição é possível obter todas as grandezas termodinâmicas do sistema.

Contudo, para uma abordagem puramente quântica assumimos que o estado de spin do sistema é descrito por estados coerentes de spin. A razão dessa escolha decorre do fato de que os estados coerentes permitem utilizar o formalismo das integrais de caminho no espaço interno de spin, estabelecendo uma conexão direta entre os operadores quânticos e campos clássicos, além de evitar recorrer a aproximações semiclássicas, garantindo que o tratamento das flutuações seja fundamentado em um formalismo puramente quântico. Os detalhes do formalismo de estados coerentes de spin encontram-se no Apêndice A.

Outrossim, como mostrado por Jude e Lewis [39, 40], a descrição $[\hat{\varphi}_i, \hat{S}_j^z] = i\delta_{ij}$ é apenas válida para $\varphi_i \ll \pi$, o que define um regime de pequenas flutuações para φ_i e S_i^z . Além disso, utilizamos a representação de Villain como parametrização em termos das variáveis canonicamente conjugadas, que também obedecem as mesmas relações de comutação:

$$\hat{S}_i^+ = e^{-i\hat{\varphi}_i} \sqrt{S(S+1) - \hat{S}_i^z(\hat{S}_i^z + 1)}, \quad (3.22a)$$

$$\hat{S}_i^- = \sqrt{S(S+1) - \hat{S}_i^z(\hat{S}_i^z + 1)} e^{+i\hat{\varphi}_i}. \quad (3.22b)$$

Aplicando o mesmo procedimento de expansão em torno do estado ordenado e mantendo apenas termos quadráticos, recupera-se a Hamiltoniana (3.17), porém com as médias sendo realizadas a partir dos estados coerentes. Assim, as funções de correlação, descritas usando o as integrais de caminho e o formalismo de tempo imaginário, são definidas por:

$$\langle \hat{S}_i^\alpha(\tau) \hat{S}_j^\alpha(\tau') \rangle = e^{\beta F} \int \mathcal{D}\Omega \left[\hat{S}_i^\alpha(\tau) \hat{S}_j^\alpha(\tau') e^{-\mathcal{A}/\hbar} \right] \quad (3.23)$$

onde $F_0 = -\ln(Z_0)/\beta$ e $\mathcal{A}$ denota a ação que governa a dinâmica do sistema.

Dessa forma, para calcular o parâmetro de renormalização ρ recorreremos à desigualdade de Gibbs–Bogoliubov, que fornece um princípio variacional para a estimativa de um limite superior da energia livre F associada a uma Hamiltoniana geral $\hat{H}$. De acordo com essa desigualdade, a energia livre satisfaz a relação,

$$F \leq F_0 - \langle \hat{H}_0 \rangle_0 + \langle \hat{H} \rangle_0, \quad (3.24)$$

em que $\hat{H}_0$ é uma Hamiltoniana de teste convenientemente escolhida, para a qual todas as médias termodinâmicas podem ser calculadas exatamente, para o nosso caso a Hamiltoniana quadrática (3.17) cumpre essa função. Enquanto, a Hamiltoniana exata é fornecida pela equação (3.3).

Portanto, devemos calcular a média $\langle \hat{H} \rangle_0$. Para isso utilizamos a teoria de perturbação, na qual denotamos $H = H_0 + \varepsilon H'$, onde $\varepsilon H' = H - H_0$ representa a perturbação e $\varepsilon \ll 1$. Assim, podemos dividir a ação para as contribuições de H_0 e H' dentro da função partição $Z = \int \mathcal{D}\Omega \exp[-(\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}')]/\hbar$, para a qual

$$\mathcal{A}_0 = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[i\hbar \sum_i S_i^z \dot{\varphi}_i - H_0 \right], \quad (3.25)$$

e $\mathcal{A} = \int_0^{\beta\hbar} d\tau H'$. Para pequenos potenciais realizamos uma aproximação de primeira ordem em $Z = Z_0(1 - \varepsilon \langle \mathcal{A}' \rangle_0 / \hbar)$, onde a média do campo de spin não interagente é $\langle \Psi \rangle_0 = Z_0^{-1} \int \mathcal{D}\Omega \Psi e^{-\mathcal{A}_0/\hbar}$. Consequentemente, para tempos iguais a função correlação (3.23) fornece o valor esperado para a Hamiltoniana completa:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &\approx \frac{1}{Z_0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\hbar} \langle \mathcal{A}' \rangle_0 \right) \int \mathcal{D}\Omega e^{-\mathcal{A}_0/\hbar} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\hbar} \mathcal{A}' \right) \hat{H} \\ &= \langle \hat{H} \rangle_0 + \frac{\varepsilon}{\hbar} \left(\langle \mathcal{A}' \rangle_0 \langle \hat{H} \rangle_0 - \langle \mathcal{A}' \hat{H} \rangle_0 \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para uma análise mais simples desprezamos os termos de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. A avaliação explícita da média $\langle \hat{H} \rangle_0$ já foi realizada em detalhe na Ref. [41]. Logo, adotamos aqui diretamente o resultado final, enfatizando apenas a estrutura necessária para solucionar a desigualdade de Gibbs-Bogoliubov para encontrar o parâmetro de renormalização. Assim, obtemos:

$$\langle \hat{H} \rangle_0 \approx -J\tilde{S}^2 N z + J z \sum_q \frac{h_q^\varphi (e^{-\Xi} - \lambda \gamma_q)}{2\epsilon_q} \coth \left(\frac{\beta \epsilon_q}{2} \right), \quad (3.27)$$

com o ângulo Ξ sendo escrito como:

$$\Xi = \frac{1}{N} \sum_q (1 - \gamma_q) \langle \bar{\varphi}_q \varphi_q \rangle_0 = \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{\langle (\varphi_i - \varphi_j)^2 \rangle}{2Nz}. \quad (3.28)$$

3.4 Equação auto-consistente

A equação auto-consistente para o parâmetro de renormalização pode ser determinada minimizando a desigualdade de Gibbs-Bogoliubov (3.24) em relação ao parâmetro de renormalização $dF(\rho)/d\rho = 0$. Portanto, para

$$F_0 - \langle \hat{H}_0 \rangle_0 = \frac{1}{\beta} \sum_q \left[\ln (1 - e^{\beta \epsilon_1}) - \epsilon_q n_q \right], \quad (3.29)$$

em que $n_q = (e^{\beta \epsilon_q} - 1)^{-1}$ é a distribuição de Bose-Einstein. Logo, derivando em relação a ρ encontramos:

$$\frac{d}{d\rho} (F_0 - \langle \hat{H}_0 \rangle_0) = \frac{1}{4\rho} \sum_q (v_q - u_q), \quad (3.30)$$

onde, de forma conveniente, definimos as funções:

$$u_q = \epsilon_q \frac{\sinh(\beta \epsilon_q) - \beta \epsilon_q}{4 \sinh^2(\beta \epsilon_q/2)}, \quad (3.31)$$

e

$$v_q = \epsilon_q \frac{\sinh(\beta \epsilon_q) + \beta \epsilon_q}{4 \sinh^2(\beta \epsilon_q/2)}. \quad (3.32)$$

Por sua vez,

$$\frac{d}{d\rho} \langle H \rangle_0 = -\frac{1}{4\rho} \left[\left(1 - \frac{\langle (S^z)^2 \rangle_0}{\tilde{S}^2} \right) e^{-\Xi} \sum_q v_q + \rho \sum_q \left(\frac{-e^{-\Xi-1}}{(1 + \lambda \gamma_q)} \right) \right]. \quad (3.33)$$

Assim, igualando as equações (3.30), (3.33) e isolando ρ , alcançamos a equação auto-consistente:

$$\rho(T) = \Lambda(T) \left(1 - \frac{\langle (S^z)^2 \rangle_0}{\tilde{S}^2} \right) e^{-\Xi}, \quad (3.34)$$

onde o termo $\Lambda(T)$ responsável pelas flutuações quânticas é descrito por:

$$\Lambda(T) = \left[\sum_q \left(v_q + \frac{e^{-\Xi} - 1}{(1 - \lambda\gamma_q)} u_q \right) \right]^{-1} \sum_q v_q. \quad (3.35)$$

Aqui, quando adotamos o limite $\epsilon \ll k_B T$ verificamos que $u_q \rightarrow 0$ e $v_q \rightarrow 1$, onde as correções quânticas possuem pouca influência e retornamos a equação (3.5). Dessa maneira, a descrição quântica abrange o formalismo da AHAC permitindo resultados mais precisos e, em particular, prevê resultados para $S = 1/2$, onde as flutuações quânticas são relevantes que a AHAC clássica não é capaz de prever.

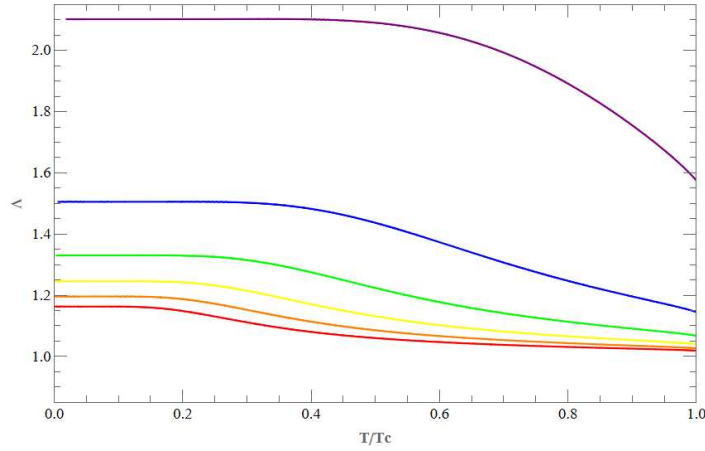


Figura 4 – Flutuações quânticas em função da temperatura para diferentes valores de spin: $S = 1/2$ (roxo), $S = 1$ (azul), $S = 3/2$ (verde), $S = 2$ (amarelo), $S = 5/2$ (laranja) e $S = 3$ (vermelho). Nota-se que as flutuações quânticas são mais pronunciadas para spins menores, enquanto para $S \gg 1$ o comportamento aproxima-se do limite clássico. As curvas foram determinadas a partir do modelo XY, porém, outros modelos exibem comportamento análogo.

Com a discussão do formalismo teórico devidamente estabelecida, a AHAC passa a ser a ferramenta central deste trabalho. A partir deste ponto, essa abordagem será empregada como o principal método para a incorporação dos efeitos de temperatura nos cálculos, permitindo descrever de forma consistente a influência das flutuações térmicas sobre a corrente de spin fornecendo o arcabouço necessário para estender a análise da corrente superfluida além do regime puramente zero-temperatura, possibilitando uma investigação sistemática de seu comportamento em função da temperatura.

Ademais, durante este capítulo utilizamos uma anisotropia de troca para descrever a AHAC. Contudo, com o intuito de estabelecer uma melhor correspondência com os resultados de Takei e Tserkovnyak [3], adotamos, a partir do capítulo V, uma anisotropia de sítio único. O que pode ser justificado quando consideramos uma anisotropia fraca, em que ambas as descrições se tornam equivalentes, pois a partir da equação 3.1, podemos definir $\lambda = 1 - \delta\lambda$. Assim:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} Jz\delta\lambda S_i^z S_j^z. \quad (3.36)$$

Em que $S_j^z \approx S_i^z + a^2 \nabla^2 S_i^z / 2$, como mostrado na equação (2.9). Portanto:

$$H \simeq -\frac{J}{2} \sum_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} Jz\delta\lambda S_i^z \left(1 + \frac{a^2}{2} \nabla^2\right) S_i^z. \quad (3.37)$$

Geralmente, trabalhamos no espaço de momento em que $S_i^z = (1/V_{Bz}) \sum_q S_q^z e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}$, e em regimes de baixas energias, com $aq \ll 1$. Desse modo, o termo $a^2 \nabla^2 S_i^z = -(aq)^2 S_q^z$ torna-se muito pequeno para uma aproximação de segunda ordem para o momento, podendo ser desprezado, e assim, conseguimos aproximar a anisotropia de troca em uma anisotropia de sítio único, onde $\kappa \equiv Jz\delta\lambda$, sendo κ a anergia de anisotropia de um único íon.

IV Superfluidez de Spin

Neste capítulo, introduziremos o conceito de superfluidez, partindo dos conceitos fundamentais da superfluidez de massa e, a partir dele, avançar para a superfluidez de spin enfatizando como os mesmos princípios fundamentais se manifestam em sistemas magnéticos a partir de casos particulares da equação de dinâmica de Landau–Lifshitz–Gilbert, em conjunto com os princípios fundamentais da hidrodinâmica de superfluidos, como demonstrado por Halperin and Hohenberg [42].

Além disso, veremos as principais aspectos da superfluidez, como a presença de um parâmetro de ordem com fase bem definida, a quebra espontânea de simetria contínua e a existência de excitações coletivas elementares que, como estamos no limite de baixas energias, serão os mágnons.

4.1 O conceito de superfluidez

O termo superfluidez tem seu significado original definido por Kamerlingh Onnes e Kapitza como "Transporte de alguma grandeza física (massa, carga ou spin) por distâncias macroscópicas sem dissipação significativa." [43]. Essa definição requer um gradiente de fase constante ou uma variação lenta em escalas macroscópicas, com a variação total da fase ao longo da amostra igual a múltiplos de 2π , motivo esse que será explicado posteriormente.¹ Neste contexto, a fase citada refere-se à fase da função de onda que descreve o estado quântico do sistema, como mostra a equação (4.1), onde φ representa o argumento complexo da função de onda, e para um conjunto de N partículas, $\varphi(\mathbf{r})$ depende das coordenadas de todas elas.

Em particular, sistemas formados por partículas bosônicas, a estatística de Bose permite que várias partículas ocupem um mesmo estado quântico sem qualquer restrição, ao contrário dos férmions. O caso mais conhecido é a superfluidez de hélio-4, o qual é inevitável realizar comparações quando explicamos o conceito de superfluidez e abordamos a superfluidez de spin. Portanto, no caso dos átomos de hélio-4 quando a temperatura é suficientemente baixa o comprimento de onda térmico torna-se comparável à distância média entre partículas, e nessa condição, as funções de onda passam a se sobrepor de maneira significativa e os efeitos quânticos tornam-se relevantes, de modo que o sistema perde a distinção individual entre seus constituintes.

Assim, a coerência de fase nesse sistema surge quando a estatística bosônica favorece a ocupação macroscópica das partículas nos mesmos estados de baixa energia combinada

¹ A revisão sobre a superfluidez convencional e de spin é baseada principalmente no livro de Annett [12] e no artigo de revisão de Sonin [43].

a existência de uma interação forte entre partículas, no caso do hélio-4 a repulsão de coulombiana, que por conta da minimização da energia o sistema favorece estados que possuem um mesmo grau de liberdade coletivo, isto é, uma fase global. Devido ao fato do potencial coulombiano ser fortemente repulsivo a curtas distâncias e atrativo a distâncias maiores, como mostra o gráfico (5), traz como consequência que estados bem localizados tem alto custo energético, mas estados desordenados em fase também possuem alto custo energético. Desse modo, as flutuações locais de fase perturbam muitos átomos simultaneamente, o que, novamente, é custoso energeticamente. Dessa forma, a rigidez de fase emerge como a penalização energética associada a gradientes da fase, de modo que o estado de menor energia corresponde a uma configuração com fase globalmente coerente.

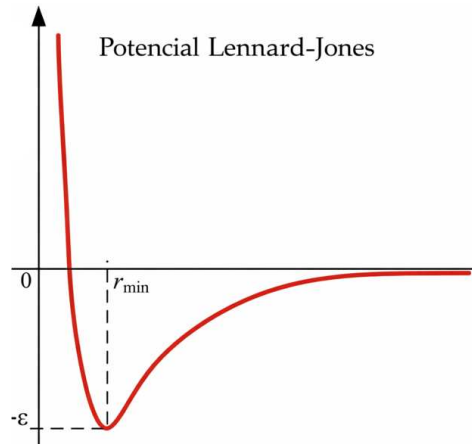


Figura 5 – Gráfico da força de Lennard-Jones, r representa a distância interpartícula, enquanto ϵ corresponde à energia mínima do potencial.

Dessa maneira, a baixo da temperatura de transição de fase T_λ o estado coerente é o estado termodinamicamente dominante.

Matematicamente, podemos escrever essa sobreposição macroscópica como um estado coerente descrito por uma função de onda global complexa com fase bem definida.

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n(\mathbf{r})} e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \quad (4.1)$$

em que, $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ é a densidade de partículas, enquanto $\varphi(\mathbf{r})$ define a fase.

Além da coerência de fase, outro aspecto essencial da superfluidez é representado pela ordem de longo alcance fora da diagonal (*off-diagonal long range order*, ODLRO), caracterizada por ser uma forma forte e específica de coerência, onde mesmo para regiões macroscópicas do sistema ainda há uma correlação não nula,

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle \neq 0. \quad (4.2)$$

Essa condição implica que o operador de campo possui valor médio não nulo, $\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle \neq 0$ indicando a ocupação macroscópica de um único estado quântico. O valor médio do campo define, portanto, a fase macroscópica do sistema.

Essa propriedade expressa o fato de que regiões macroscopicamente separadas do fluido compartilham uma fase comum, legitimando a descrição do sistema em termos de um parâmetro de ordem complexo com fase bem definida.

Aqui a função de onda é representada por um operador de campo, que no limite de baixas energias, pode ser escrito como $\hat{\psi}(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$, onde $\psi(\mathbf{r})$ é a função de onda coerente mostrada na equação (4.1), e $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$ é uma flutuação quântica ao redor do estado coerente. Dessa forma,

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle = \underbrace{\langle \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') \rangle}_{\neq 0} + \underbrace{\langle \delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle}_{= 0}. \quad (4.3)$$

Como as flutuações correspondem a excitações elementares dentro do sistema, elas apresentam comportamento dissipativo e incoerente. Assim, o sistema pode ser decomposto por uma teoria de dois fluidos, na qual uma componente superfluida coerente associada ao parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{r})$ coexiste com um fluido normal associado às excitações elementares $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$.

Além disso, podemos calcular a densidade de corrente através da equação da continuidade na mecânica quântica:

$$\mathbf{j}_0 = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r}) - \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})] \quad (4.4)$$

A densidade de corrente $\mathbf{j}_0$, é o número de partículas no estado coerente fluindo por unidade de área por segundo. Outrossim, o diferencial $\nabla \psi(\mathbf{r})$ fornece:

$$\nabla \psi(\mathbf{r}) = e^{i\varphi} \nabla \sqrt{n_0} + i\sqrt{n_0} e^{i\varphi} \nabla \varphi, \quad (4.5)$$

substituindo os termos na equação (4.4) obtemos

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar}{m} n \nabla \varphi. \quad (4.6)$$

Sabendo que n_0 representa a densidade de partículas coerentes no sistema e a corrente líquida de partículas pode ser escrita como $\mathbf{j}_0 = n_0 \mathbf{v}_0$ a velocidade do centro de massa do superfluido é representado por:

$$\mathbf{v} = \frac{i\hbar}{2m|\psi|^2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi. \quad (4.7)$$

Dessa maneira, a fase $\varphi(\mathbf{r})$ torna-se um parâmetro físico real do sistema que está diretamente associado ao campo de velocidade do centro de massa. Por conseguinte, a velocidade das excitações elementares dentro do superfluido são determinadas pelo seu espectro de dispersão.

Um aspecto fundamental da superfluidez nesse sentido corresponde ao critério de Landau, que afirma que o estado de corrente superfluida é estável desde que qualquer quase-partícula do superfluido, no referencial do laboratório, possua energia positiva e, por

consequência, sua criação exija um aporte de energia [16]. Portanto, se uma excitação possui espectro de energia $\varepsilon(\mathbf{k})$, onde $\mathbf{k}$ é o momento da quase-partícula, e se o superfluido se move com velocidade $\mathbf{v}_s$, a energia da partícula no referencial do laboratório é dado por $\varepsilon(\mathbf{k}) + \mathbf{k}\mathbf{v}_s$. Essa energia não pode ser negativa, pois indicaria que as excitações reduzem a energia total do sistema levando a uma instabilidade da corrente. Logo:

$$c_s \leq v_L = \min \left(\frac{\varepsilon(k)}{k} \right). \quad (4.8)$$

A velocidade v_L é chamada de velocidade crítica de Landau, e determina a velocidade máxima que o superfluido pode obter para o qual não existam excitações dissipativas. Assim, é possível notar que para espectros de energia quadráticos $\varepsilon(k) = Ck^2$, não é possível obter uma velocidade limite finita para as excitações no fluido, uma vez que :

$$v_L = \left. \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \right|_{k=0} = 2Ck \Big|_{k=0} = 0, \quad (4.9)$$

enquanto que para espectros lineares $\varepsilon(k) = Ck$:

$$v_L = \left. \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \right|_{k=0} = C. \quad (4.10)$$

Por conseguinte, verifica-se que apenas excitações de espectro linear para pequenos momentos garante uma velocidade crítica finita. Ademais, é importante ressaltar que o critério de Landau é uma condição necessária, mas não suficiente para a existência de superfluidez em um sistema físico.

Finalmente, na hidrodinâmica de superfluidos podemos escrever as equações de Hamilton para o par canonicamente conjugado $n(\mathbf{r})$ e $\varphi(\mathbf{r})$

$$\hbar \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta n}, \quad (4.11a)$$

$$\hbar \frac{dn}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \varphi}, \quad (4.11b)$$

em que

$$\frac{\delta H}{\delta n} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla n)}, \quad (4.12a)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi)}. \quad (4.12b)$$

são derivadas funcionais do Hamiltoniano. Outrossim, levando em conta a simetria global de fase do sistema, isto é, o fato de que a energia não depende diretamente da fase φ , $\partial H / \partial \varphi = 0$, mas somente do gradiente $\nabla \varphi$, e tendo em vista que o Hamiltoniano

possui termos ligados a energia cinética dependente de $\nabla\varphi$ e termos relacionados a energia potencial dependentes de n :

$$H = H[\nabla\varphi, n]. \quad (4.13)$$

Portanto, de acordo com o teorema de Noether essa simetria contínua está diretamente e relacionada à conservação da densidade conjugada à fase, dando origem a uma corrente conservada que satisfaz uma equação de continuidade. Podemos, então, reduzir as equações de dinâmica para as equações hidrodinâmicas de um líquido ideal:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\mu, \quad (4.14)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (4.15)$$

O potencial químico μ e a densidade de corrente $\mathbf{J}$ são dadas por:

$$\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{J} = n\mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\hbar \partial (\nabla\varphi)}. \quad (4.17)$$

4.2 Superfluidez de spin

O conceito de superfluidez de spin é baseado na analogia das equações da magneto dinâmica com as equações da hidrodinâmica de superfluidos. Na superfluidez convencional foi visto a necessidade da existência de um gradiente do parâmetro de fase $\nabla\varphi$ constante ou que varia de forma lenta em escala macroscópica.

No meio magnético, o papel da fase é desempenhado pelo ângulo azimutal da magnetização. Essa variável parametriza rotações contínuas associadas à quebra espontânea de simetria $U(1)$ e sua rigidez espacial é responsável por sustentar as correntes de spin. Em contraste com uma corrente de spin dissipativa que é proporcional ao gradiente da densidade de spin. Ademais, a superfluidez de spin requer uma topologia especial para o parâmetro de fase, onde, tal topologia é satisfeita pela presença de uma anisotropia de plano-fácil. Portanto, apenas nesse caso existe uma quebra a simetria $SU(2)$ para $U(1)$ associada a rotações no plano magnético, e a quebra espontânea dessa simetria dá origem a um modo de Goldstone sem gap de espectro linear.

Além das condições associadas à rigidez de fase, à coerência dos mágnons e à estabilidade topológica da corrente, a superfluidez de spin requer um meio magnético no qual os mecanismos dissipativos sejam suficientemente fracos. Em particular, é necessário que o material apresente um coeficiente de damping de Gilbert reduzido, uma vez que esse

parâmetro quantifica a transferência de energia e momento angular da magnetização para o ambiente. Valores elevados desse coeficiente intensificam o amortecimento da precessão em torno do campo magnético efetivo, levando à perda rápida da coerência de fase e, conseqüentemente, à destruição do transporte superfluido de spin. Materiais isolantes com fraca dissipação magnética, como granadas ferrimagnéticas do tipo YIG e LuIG, bem como antiferromagnetos isolantes como o NiO e Cr₂O₃, apresentam valores típicos para o damping de Gilbert da ordem de $\alpha \sim 10^{-4}$ ou menores, o que os torna candidatos naturais para a observação de correntes coerentes de spin em escalas macroscópicas. [44–47].

Tendo estabelecido as condições físicas necessárias para a emergência da superfluidade de spin, passamos agora à sua descrição fenomenológica. No regime de baixas energias e longos comprimentos de onda, a dinâmica do sistema pode ser formulada em termos de campos contínuos que descrevem a orientação local da magnetização, permitindo uma descrição hidrodinâmica análoga à dos superfluidos convencionais.

Fenomenologicamente, consideramos a seguinte densidade de energia livre para um ferromagneto, composta por um termo local $\mathcal{F}_0(M)$ associado ao módulo da magnetização, somado a um termo de gradiente que descreve flutuações suaves da orientação do campo de magnetização, conforme obtido anteriormente a partir do modelo sigma não-linear. Além disso, incluímos um termo de anisotropia de plano-fácil, caracterizado por uma constante $\kappa > 0$, que confina a magnetização ao plano xy . Assim,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(M) + \frac{J}{2} \nabla_i \mathbf{M} \cdot \nabla_i \mathbf{M} + \frac{\kappa}{2} (M^z)^2, \quad (4.18)$$

onde escrevemos $\mathbf{M} = M_s \mathbf{m}$, com $\mathbf{m} = (\sqrt{1 - (m^z)^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - (m^z)^2} \sin \varphi, m^z)$, e $m^z \ll 1$. A presença da anisotropia preserva a simetria contínua de rotações globais em torno do eixo z , o que, pelo teorema de Noether, implica a conservação da componente total M^z da magnetização. Localmente, essa conservação se expressa por uma equação de continuidade. Utilizando o mesmo procedimento adotado no MSNL e ignorando o termo constante $\mathcal{F}_0$, obtemos a seguinte energia livre efetiva no limite contínuo:

$$F = \int d^3r \left[\frac{A}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{K}{2} (m^z)^2 \right], \quad (4.19)$$

com $A = JM_s^2/a$ sendo a rigidez de spin do sistema determinada pela interação de troca, e $K = \kappa M_s^2/a^3$ a densidade volumétrica de energia de anisotropia. A equação de Landau-Lifshitz assume a forma de equações de Hamilton para o par de variáveis canonicamente conjugadas M^z e o ângulo azimutal φ . Assim,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \gamma \frac{\delta F}{\delta M^z}, \quad (4.20a)$$

$$\frac{dM^z}{dt} = -\gamma \frac{\delta F}{\delta \varphi}, \quad (4.20b)$$

onde γ é a razão giromagnética. Calculando as derivadas funcionais a partir da equação (4.19), obtemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \gamma \frac{K}{M_s} m^z, \quad (4.21)$$

$$\frac{dM^z}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}^z = 0, \quad (4.22)$$

onde a corrente de spin é dada por:

$$\mathbf{J}^z = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\nabla \varphi)} = -A \nabla \varphi, \quad (4.23)$$

e o potencial químico de spin é definido como:

$$\mu_s = \gamma \frac{\partial F}{\partial M^z} = \gamma \frac{K}{M_s} m^z. \quad (4.24)$$

Dessa forma, é possível notar uma analogia direta entre as equações (4.20a) e (4.20b) com as equações (4.14) e (4.15) para um líquido ideal, sendo a equação (4.20b) a equação da continuidade para o spin. Outrossim, diferentemente do caso do ferromagneto isotrópico com espectro quadrático visto na seção 2.4, a onda de spin para o ferromagneto de plano fácil tem espectro linear com $\epsilon_k = c_s k$, característica essa que obedece ao critério de Landau, sendo $c_s = \gamma \sqrt{AK}/M_s$ a velocidade da onda de spin. Desse modo, a corrente de spin, formada por mágnons, transporta o momento magnético da componente z do spin a distâncias da ordem do comprimento de onda.

Contudo, esse mecanismo não conduz a transporte superfluido de spin em longas distâncias, pois tal regime é alcançado apenas em estados estacionários, nos quais a magnetização sofre rotações contínuas no plano ao longo de múltiplas rotações completas de 2π , detalhe esse que será melhor discutido na seção 4.3, demonstrando como o critério de Landau estabelece uma condição necessária, mas não suficiente, para haver superfluidade.

Neste caso, consideremos um regime transiente no qual o sistema relaxa em direção ao estado superfluido estacionário. Nesse intervalo de tempo, assumimos que os efeitos dissipativos associados ao damping de Gilbert podem ser desprezados, uma vez que atuam predominantemente na estabilização temporal da precessão em escalas de tempo mais longas. Dessa forma, concentramos a análise nos processos de relaxação volumétrica do spin, descritos pelo termo de dissipação no interior do material Γ , que governa a redistribuição da densidade de spin e a evolução do potencial químico durante o processo de relaxamento. Isso é, Γ representa um mecanismo pelo qual o spin em um determinado volume do material deixa de ser conservado.

Essa abordagem nos permite comparar ambas as contribuições para o transporte de spin ao longo do processo de relaxamento, tornando-se possível evidenciar a diferença nos comprimentos característicos de difusão que governam cada regime, uma vez que,

no transporte difusivo, o decaimento espacial da corrente é controlado pelo comprimento de relaxação associado a dissipação de spin no interior do material, enquanto no regime superfluido a corrente decai linearmente.

Para levar esses efeitos em conta, introduzimos a seguir os termos dissipativos na equação de magnetodinâmica

$$\frac{d\varphi}{dt} = \gamma \frac{K}{M_s} m^z + A \nabla^2 \varphi, \quad (4.25)$$

$$\frac{dM^z}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}^z = -\Gamma \mu. \quad (4.26)$$

Em que o termo $\gamma A \nabla^2 \varphi$ descreve a relaxação da fase da magnetização desempenhando um papel análogo a viscosidade nas equações de hidrodinâmica. Enquanto, o termo Γ é a dissipação de spin que mede a taxa com que a densidade de spin é perdida no interior do material.

Para que exista superfluidade, devemos supor uma injeção contínua, na qual as perdas de mágnons é compensado pela inserção de spin no sistema. Dessa forma, é esperado que o sistema relaxe para um regime estacionário no qual a fase precessiona de forma uniforme e a condição $\nabla \cdot \mathbf{J}^z + \Gamma \mu = 0$ é satisfeita no interior do material. Nesse regime, o termo dissipativo na dinâmica expresso pela dissipação de spin, se iguala ao torque aplicado no sistema. Como consequência, essa condição garante que a dissipação não leve ao decaimento da corrente, permitindo a manutenção de um estado estacionário com transporte coerente de spin.

Dessa forma, podemos dividir a corrente de spin em duas componentes $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_d$, onde a corrente de spin superflúida é descrita por

$$\mathbf{J}_s = A \nabla \varphi, \quad (4.27)$$

enquanto a corrente de spin difusiva é descrita por

$$\mathbf{J}_d = -\sigma \nabla \mu, \quad (4.28)$$

onde σ é o coeficiente de difusão. Portanto, consideramos uma injeção contínua de spin realizada por meio de uma corrente polarizada aplicada na borda $x = 0$ da amostra, conforme ilustrado na figura (6). Se a distância L que a corrente deve percorrer for suficientemente grande, a contribuição difusiva é suprimida antes de atingir a borda oposta, de modo que não há corrente difusiva no lado direito do sistema.

No estágio inicial do processo, entretanto, o transporte de spin é incoerente, não havendo ainda uma fase bem definida associada à magnetização. Consequentemente, cada vetor precessiona com um ângulo aleatório, não havendo assim um campo φ bem

definido, logo a o termo superfluido proporcional a $\nabla\varphi$ não contribui para a superfluidez de spin.

Logo, adotamos condições de contorno de Neumann, fixando o fluxo de spin nas bordas do sistema, de modo que no reservatório esquerdo há a injeção de uma corrente de spin $J_d(x=0) = J_0$, enquanto na extremidade direita impomos $J_d(x=L) = 0$, obtendo como solução

$$J_d(x) = J_0 e^{-x/L_d}, \quad (4.29)$$

enquanto

$$\mu(x) = \frac{J_0 L_d}{\sigma} e^{-x/L_d}, \quad (4.30)$$

onde

$$L_d = \sqrt{\frac{\sigma}{\Gamma}}, \quad (4.31)$$

é o comprimento de difusão de spin. Dessa forma, a corrente de spin decai exponencialmente até L_d . Observe que, o termo de dissipação Γ , afeta exponencialmente o decaimento da corrente de spin, sendo assim uma variável sensível, exercendo forte influência sobre o alcance e a estabilidade do transporte spin.

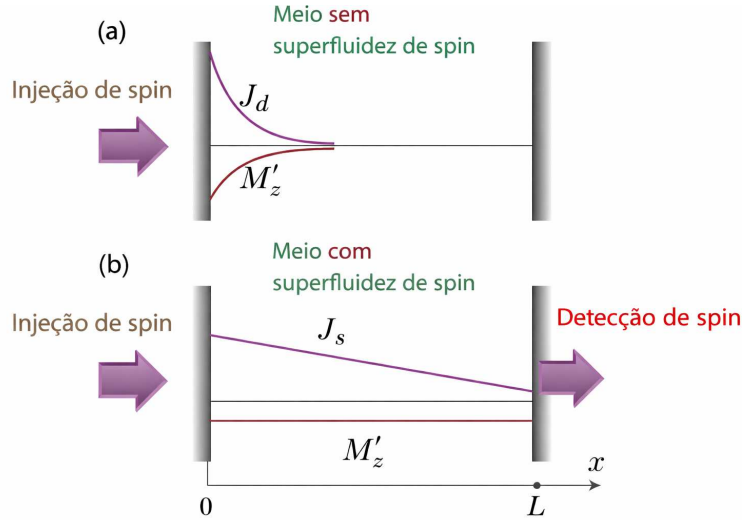


Figura 6 – Representação esquemática do transporte de spin a longas distâncias (a) em um meio sem superfluides de spin e (b) um meio com superfluides de spin (retirado de [2]).

Entretanto, se a superfluides é viável, temos uma fase φ bem definida, a equação (4.25) se torna relevante, e a rigidez de spin consegue garantir a estabilidade dos estados coerentes. Consequentemente, com as condições de contorno $J(x=0) = J_0$ e $J(x=L) = -fm^z(L)$, em que f é o coeficiente de interface, e utilizando a corrente de spin descrita pela equação (4.27), assumindo que toda a corrente de injetada é imediatamente

transformada em uma supercorrente, juntamente das equações de dinâmica, obtemos a seguinte solução estacionária

$$J^z(x) = J_0^z \left(1 - \frac{\Gamma x}{\Gamma L + f\gamma} \right) \approx J_0^z \left(\frac{L-x}{L} \right), \quad (4.32)$$

com

$$\mu(x) = -J_0^z \left(\frac{\gamma}{\Gamma L + f\gamma} \right) \approx -J_0^z \left(\frac{\gamma}{\Gamma L} \right). \quad (4.33)$$

Embora a solução seja estacionária devido a $\partial m^z / \partial t = 0$, nós consideramos um processo de não-equilíbrio, pois de outro modo um acúmulo de spin na interface é inviável, além da precessão de $\mathbf{M}$ no plano fácil. Ademais, vale salientar que o processo é estacionário apenas se a frequência de precessão é constante no espaço, pois caso contrário o estado não seria estacionário.

Em suma, analisamos os diferentes mecanismos responsáveis pelo transporte de spin em ferromagnetos de plano-fácil, distinguindo explicitamente entre os regimes difusivo e superfluido. Introduzimos a decomposição da corrente total de spin em contribuições difusiva e superfluida, discutindo o papel da dissipação volumétrica de spin na supressão do transporte coerente e a emergência de um comprimento característico de difusão no regime incoerente. Em seguida, explicamos que, à medida que o sistema relaxa, a rigidez de fase se estabelece e o transporte passa a ser dominado pela corrente superfluida, associada a uma fase bem definida e espacialmente coerente. A partir deste ponto, o sistema atinge um regime estacionário no qual o potencial químico torna-se uniforme no interior do material, suprimindo efetivamente a dissipação de spin.

Assim, no capítulo V, concentraremos a análise exclusivamente no regime superfluido, no qual o damping de Gilbert desempenha um papel fundamental na estabilização da dinâmica estacionária, não sendo mais necessário considerar explicitamente o termo de dissipação de spin.

V Desenvolvimento

Baseado na proposta de Takei e Tserkovnyak [3], nós consideramos um material ferromagnético isolante com anisotropia de plano-fácil ligado a dois reservatórios metálicos como fonte e sorvedouro de corrente de spin. Assumimos simetria translacional completa ao longo do plano yx , simetria axial no eixo z e tomamos o plano xy como o plano fácil.

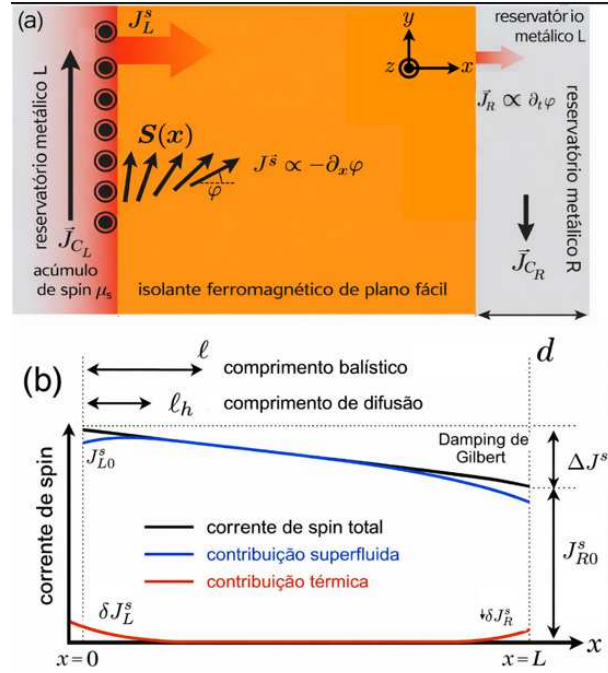


Figura 7 – (a) Representação esquemática da estrutura híbrida utilizada para a realização da superfluidez de spin. (b) Ilustração esquemática da distribuição espacial das contribuições condensada e térmica para a corrente de spin, considerando a presença do damping de Gilbert. (adaptado de [3])

O acoplamento entre esses dois subsistemas ocorre na interface por meio da interação de troca sd , que permite a transferência de momento angular entre os elétrons de condução do metal normal para os spins localizados do ferromagneto.

Desse modo, com o objetivo de descrever quantitativamente esse sistema, apresentamos a seguir um modelo microscópico baseado em uma Hamiltoniana que separa explicitamente as contribuições eletrônicas dos reservatórios metálicos e os a contribuição magnética devido ao isolante ferromagnético.

A Hamiltoniana que representa o sistema descrito é representada por:

$$H = H_0 + H_L + H_R, \quad (5.1)$$

com as contribuições do reservatório eletrônico metálico H_e e do isolante ferromagnético H_m formadas pela Hamiltoniana não interagente $H_0 = H_0^e + H^m$. Assim, podemos definir

cada uma dessas contribuições como:

$$H_0^e = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma}, \quad (5.2)$$

com $c_{k,\sigma}$ e $c_{k,\sigma}^\dagger$ sendo os operadores de criação e destruição de elétrons respectivamente, com energia ε_k . Enquanto, a Hamiltoniana magnética é descrita por um termo de troca de Heisenberg somada a uma anisotropia planar xy de sítio único. Para evitar dupla contagem entre vizinhos multiplicamos a energia de troca por um fator de $1/2$. Portanto,

$$H^m = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z) + \frac{\kappa}{2} \sum_i (S_i^z)^2, \quad (5.3)$$

com J sendo a energia de troca e κ é a energia de anisotropia, com $\kappa > 0$ para anisotropia de plano-fácil, também, podemos parametrizar o sistema da mesma forma que na equação (3.2). Outrossim, a interação em cada lado é descrita a partir da seguinte Hamiltoniana:

$$H_{(L,R)} = -J_{sd} \sum_{i \in (L,R)} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{s}_j, \quad (5.4)$$

em que J_{sd} é a constante de troca entre as interfaces metal|ferromagneto, e os vetores $\mathbf{S}_i$ e $\mathbf{s}_j$ representam o spin localizado do ferromagneto no sítio i e o spin dos elétrons de condução do reservatório metálico respectivamente, onde:

$$\mathbf{s}_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} c_{j\alpha}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\alpha,\beta} c_{j\beta}, \quad (5.5)$$

$\mathbf{s}_j$ é retratado a partir dos operadores de criação e aniquilação eletrônicos e das matrizes de Pauli $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$, e os índices do espaço interno de spin $\alpha, \beta \in \{\uparrow, \downarrow\}$ são as projeções dos spins no eixo de quantização.

5.1 Descrição clássica da corrente de spin

5.1.1 Equação de movimento

Adotando o limite clássico, nós representamos a Hamiltoniana como o funcional dos campos $\varphi \rightarrow \sqrt{\rho} \varphi$ e S^z . Logo, para pequenas variações do ângulo φ e pequenos valores de S^z , o formalismo de estados coerentes nos fornece o seguinte resultado para a Hamiltoniana magnética:

$$\begin{aligned} H_0^m &= \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\tilde{S} \rho \frac{\Delta \varphi^2}{2} + S_i^z S_j^z - S_i^z S_j^z + \frac{\kappa}{J_z} (S_i^z)^2 \right] \\ &= \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\tilde{S} \rho \frac{\Delta \varphi^2}{2} - S_i^z S_j^z + \mathcal{J} (S_i^z)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

com $\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{\kappa}{J_z}\right)$. É importante salientar que na revisão bibliográfica, a anisotropia foi introduzida por meio de um fator $\mathcal{J}$ multiplicando o termo $S_i^z S_j^z$ na Hamiltoniana de troca. No desenvolvimento deste trabalho, entretanto, optamos por reescrever a Hamiltoniana separando explicitamente a troca isotrópica do termo anisotrópico local. Essa reformulação não altera a física do problema, pois, no limite de anisotropia fraca ambas as formas são equivalentes e levam ao mesmo comportamento macroscópico. A escolha pela segunda forma é motivada por sua proximidade com o formalismo empregado por Takei e Tserkovnyak [3], com o objetivo de facilitar a análise dos resultados obtidos.

Ademais, como geralmente estamos lidando com amostras da ordem de 10^{23} partículas, podemos realizar a aproximação para o limite contínuo, assim, substituímos $S^z \rightarrow S^z(\mathbf{r}_i)$ e de forma similar $\varphi_i \rightarrow \varphi(\mathbf{r}_i)$. Desse modo, podemos descrever o vetor $\mathbf{r}_j$ como sendo uma translação no vetor $\mathbf{r}_i$, de forma que $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + a\hat{\eta}$, onde novamente a representa o espaçamento de rede, e $\hat{\eta}$ caracteriza as direções ao longo da rede. Portanto, podemos escrever

$$S^z(\mathbf{r}_j) = \hat{T}_\eta(a) S^z(\mathbf{r}_i), \quad (5.7a)$$

$$\varphi(\mathbf{r}_j) = \hat{T}_\eta(a) \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (5.7b)$$

no qual o operador de translação é definido pela seguinte expansão de Taylor:

$$\hat{T}_\eta(a) = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_l^m} = \sum_{l=1}^3 e^{a\partial_l}, \quad (5.8)$$

indicando que o campo varia lentamente em escala do parâmetro de rede a . Por conta da simetria quadrada da rede, os termos onde m é ímpar se cancelam, restando apenas os termos pares $\sum_\eta \hat{T}_\eta(a) \varphi(\mathbf{r}_i) = z\hat{\gamma}\varphi(\mathbf{r}_i)$. Dessa maneira, podemos definir um novo operador $\hat{\gamma}$, que pode ser descrito como:

$$\hat{\gamma} = \frac{2}{z} \sum_{l=1}^3 \cosh(a\partial_l) = \frac{2}{z} \sum_{l=1}^3 \left[1 + \frac{a^2}{z} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{a^4}{4!z} \frac{\partial^4}{\partial x_l^4} + \dots \right], \quad (5.9)$$

o qual conduz ao fator de estrutura γ_q quando realiza-se a transformada de Fourier para o espaço de momentos,

$$\gamma_q = \frac{2}{z} \sum_q \sum_l^3 \cosh(a\partial_l) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i)} = \sum_q \underbrace{\left(\frac{2}{z} \sum_{l=1}^3 \cos(aq_l) \right)}_{\gamma_q} e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i)}. \quad (5.10)$$

Dessa forma, aplicando a transformada de Fourier para espaço de momentos na Hamiltoniana (5.6), obtemos como resultado:

$$\begin{aligned}
H_0^m &= \frac{Jz}{2} \int \frac{d^3r}{a^3} [\tilde{S}^2 \rho \varphi (1 - \hat{\gamma}) \varphi + S^z (\mathcal{J} - \hat{\gamma}) S^z] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3r [A \rho \varphi \hat{h}^\varphi \varphi + K S^z \hat{h}^z S^z].
\end{aligned} \tag{5.11}$$

com $A = J\tilde{S}^2/a$ sendo a rigidez de spin, $K = \kappa\tilde{S}^2/a^3$ a constante de anisotropia e os operadores $h^z = Jz(\mathcal{J} - \hat{\gamma})/K\tilde{S}^2a^2$ e $h^\varphi = z(1 - \hat{\gamma})/a^2$.

A partir dos cálculos desenvolvidos sobre a Hamiltoniana magnética no limite contínuo, podemos obter as equações de movimento dos campos de spin no interior do ferromagneto, visto que nessa região a evolução temporal da Hamiltoniana (5.1) é determinada pela variação funcional de H_0^m , assim:

$$s\dot{\varphi} = \frac{\delta H}{\delta S^z} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \left[(-1)^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_l^m S^z)} \right) \right] = K \hat{h}^z S^z, \tag{5.12}$$

e para $\dot{S}^z$ temos:

$$s\dot{S}^z = -\frac{\delta H}{\delta \varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \left[(-1)^{m+1} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_l^m \varphi)} \right) \right] = -A \rho \hat{h}^\varphi \varphi. \tag{5.13}$$

A partir das equações de movimento é possível encontrar a velocidade dos mágnons derivando a equação (5.12) em relação ao tempo, e substituir a equação (5.13) na equação obtida. Dessa maneira:

$$s\ddot{\varphi} = K \hat{h}^z \dot{S}^z = AK \hat{h}^z \hat{h}^\varphi \varphi. \tag{5.14}$$

Tomando a densidade de spin $s = \hbar/a^3$ e levando a equação (5.14) para o espaço de frequência-momento, podemos reescrever $s\ddot{\varphi} = \sum_q (-\omega_q)^2 \varphi_q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_i}$. Logo, o espectro obtido é dado por:

$$\epsilon_q = \hbar\omega_q = J\tilde{S}z\sqrt{\rho(1 - \gamma_q)(\mathcal{J} - \gamma_q)}. \tag{5.15}$$

Embora o espectro de energia possa ser obtido de forma geral, a aplicação do critério de Landau requer uma descrição no regime de baixas energias e longos comprimentos de onda. Assim, impõe-se o limite $aq \ll 1$, no qual a relação de dispersão reduz-se a um comportamento linear:

$$\epsilon_q \simeq \sqrt{JD\rho}\tilde{S}aq, \tag{5.16}$$

onde podemos obter a velocidade dos mágnons c_s partir da seguinte derivada:

$$c_s = \frac{d\omega_q}{dq} = \frac{\sqrt{JD\rho}}{\hbar}\tilde{S}a. \tag{5.17}$$

Portanto, pelo critério de Landau a obtenção de c_s estabelece o limite superior para a velocidade da corrente superfluida acima do qual a criação espontânea de excitações torna-se energeticamente favorável, levando à dissipação. Dessa forma, o cálculo da velocidade dos mágnons permite identificar o regime de validade da superfluidez e definir a corrente crítica do sistema. Além disso, como $c_s \propto \sqrt{\rho}$ é possível identificar como a temperatura reduz a velocidade crítica, restringindo o regime de estabilidade da superfluidez.

5.1.2 Equação de Landau-Lifshitz-Gilbert

Tendo caracterizado a evolução temporal das excitações magnônicas elementares do sistema, bem como a velocidade associada aos mágnons, passamos agora a descrever a dinâmica coletiva da magnetização. Para isso, podemos escrever o torque gerado devido a presença dos campos internos, originados dos termos de troca e anisotropia da Hamiltoniana, conduzindo à equação de Landau-Lifshitz-Gilbert, que incorpora de forma unificada os efeitos conservativos e dissipativos relevantes.

De forma geral, podemos descrever o torque sofrido por um íon magnético como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (5.18)$$

onde o torque pode ser reescrito como $\boldsymbol{\tau} = \hbar d\mathbf{S}/dt$ e o momento magnético associado ao íon magnético é definido como $\boldsymbol{\mu} = -\hbar\gamma\mathbf{S}$, sendo γ a constante giromagnética, e $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}_{\text{ef}}$ o campo magnético efetivo. Descrevendo o torque e o momento magnético em função do spin $\mathbf{S}$, obtemos:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\gamma \mathbf{S} \times \mathbf{B}_{\text{ef}}, \quad (5.19)$$

em que o campo magnético efetivo pode ser escrito como a derivada variacional da Hamiltoniana em relação ao momento angular de spin,

$$\mathbf{B}_{\text{ef}} = -\frac{1}{\gamma s} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{S}}, \quad (5.20)$$

com $s = \hbar/a^3$ sendo a densidade de spin. Portanto, a dinâmica conservativa do spin pode ser expressa a partir do vetor de spin e do campo magnético efetivo associado à Hamiltoniana do sistema, obtendo por consequência a equação de Landau-Lifshitz (5.19).

Embora a dinâmica conservativa da magnetização possa ser obtida diretamente a partir da equação de torque, os processos dissipativos não emergem naturalmente dessa descrição. Para isso, incorporamos o damping de Gilbert de maneira fenomenológica, representando a dissipação de energia e momento angular da magnetização para outros subsistemas, como desordem, defeitos e impurezas do material. Logo, a dinâmica da magnetização é expressa pela famosa equação de Landau-Lifshitz-Gilbert:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\gamma \mathbf{S} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} + \alpha \hat{\mathbf{S}} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (5.21)$$

onde α é o fator de damping adimensional e $|\hat{\mathbf{S}}|^2 = 1$. Dessa maneira, isolando $d\mathbf{S}/dt$, temos

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{-\gamma}{(1 + \alpha^2)} \left[\mathbf{S} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} - \alpha \hat{\mathbf{S}} \times (\mathbf{B}_{\text{eff}} \times \hat{\mathbf{S}}) \right]. \quad (5.22)$$

Se substituirmos o resultado da equação (5.21) na equação de energia para o momento magnético $E = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}}$, é possível observar que o termo de Gilbert leva, de fato, a um processo dissipativo:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{-\alpha\gamma S^2}{1 + \alpha^2} \left[\mathbf{B}_{\text{eff}}(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) - \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{B}_{\text{eff}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \right] \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}} \\ &= \frac{-\alpha\gamma S^2}{1 + \alpha^2} \left[\mathbf{B}_{\text{eff}}^2 - (\mathbf{B}_{\text{eff}} \cdot \hat{\mathbf{S}})^2 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde $|\mathbf{S}| \stackrel{\text{def}}{=} S$, e o termo de Gilbert descreve uma dissipação monotônica da energia, anulando a componente $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ perpendicular ao spin, e conduzindo o sistema a um estado de torque nulo em que $\hat{\mathbf{S}} \parallel \mathbf{B}_{\text{eff}}$.

Com base na discussão anterior, retomamos a equação (5.3) e, ao formulá-la no limite contínuo, obtemos:

$$H = \frac{-Jz}{2a^3} \int d^3r \left[S^x \hat{\gamma} S^x + S^y \hat{\gamma} S^y + S^z (d + \hat{\gamma}) S^z \right], \quad (5.24)$$

com $d = J - 1$. Portanto, nosso campo magnético efetivo pode ser escrito como:

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\gamma s} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{S}} = \frac{Jz}{2\gamma\hbar} \int d^3r \left[\hat{\gamma} S^x + \hat{\gamma} S^y + (d + \hat{\gamma}) S^z \right]. \quad (5.25)$$

A partir da definição do campo magnético efetivo no limite contínuo, dada pela Eq. (5.25), é possível obter explicitamente o termo precessional da equação de Landau-Lifshitz $-\gamma \mathbf{S} \times \mathbf{B}_{\text{eff}}$ e realizando explicitamente o produto vetorial, obtemos:

$$\begin{aligned} -\gamma \mathbf{S} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} &= \frac{Jz}{\hbar} \int d^3r \left[\left(S^y (\hat{\gamma} - d) S^z - S^z \hat{\gamma} S^y \right) \hat{\mathbf{x}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(S^z \hat{\gamma} S^x - S^x (\hat{\gamma} - d) S^z \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(S^x \hat{\gamma} S^y - S^y \hat{\gamma} S^x \right) \hat{\mathbf{z}} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para o limite de longos comprimentos de onda, onde variações espaciais são suaves, podemos aproximar $\hat{\gamma} \approx 1 - (a^2 \nabla^2 / z)$, de modo que a equação (5.26) se reduz a:

$$\begin{aligned}
-\gamma \mathbf{S} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} = & \frac{Jz}{\hbar} \int d^3r \left[-d S^y S^z \hat{\mathbf{x}} + d S^x S^z \hat{\mathbf{y}} \right] + \frac{Ja^2}{\hbar} \left[(S^y \nabla^2 S^z - S^z \nabla^2 S^y) \hat{\mathbf{x}} + \right. \\
& \left. + (S^z \nabla^2 S^x - S^x \nabla^2 S^z) \hat{\mathbf{y}} + (S^x \nabla^2 S^y - S^y \nabla^2 S^x) \hat{\mathbf{z}} \right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

De forma análoga, o termo de damping pode ser escrito como:

$$-\alpha \hat{\mathbf{S}} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{\alpha}{\tilde{S}} \left[(S^y \dot{S}^z - S^z \dot{S}^y) \hat{\mathbf{x}} + (S^z \dot{S}^x - S^x \dot{S}^z) \hat{\mathbf{y}} + (S^x \dot{S}^y - S^y \dot{S}^x) \hat{\mathbf{z}} \right]. \quad (5.28)$$

Por conseguinte, podemos escrever a evolução temporal para a componente S^z do spin como:

$$\dot{S}^z = \frac{Ja^2}{\hbar} (S^x \nabla^2 S^y - S^y \nabla^2 S^x) - \frac{\alpha}{\tilde{S}} (S^x \dot{S}^y - S^y \dot{S}^x), \quad (5.29)$$

o que motiva a escrever a densidade de spin como $s^z = s S^z$ e por consequência a densidade de corrente de spin como:

$$\mathbf{J} = -\frac{J}{a} (S^x \nabla S^y - S^y \nabla S^x). \quad (5.30)$$

Desse modo, a equação da continuidade torna-se:

$$\dot{s}^z + \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\alpha s}{\tilde{S}} (S^x \dot{S}^y - S^y \dot{S}^x). \quad (5.31)$$

Supondo uma injeção contínua de spin, o sistema relaxa para um regime estacionário no qual a fase precessiona de forma uniforme e a condição $\delta H / \delta \varphi - \alpha \dot{\varphi} = 0$ é satisfeita no interior do material. Nesse regime, o termo dissipativo na dinâmica expresso pelo amortecimento de Gilbert, se iguala ao torque aplicado no sistema. Como consequência, essa condição garante que a dissipação não leve ao decaimento da corrente mas seja continuamente compensada pela fonte externa, permitindo a manutenção de um estado estacionário com transporte coerente de spin.

Assim, sob a condição de estado estacionário $\dot{s}^z = 0$, a equação da continuidade pode ser integrada sobre o volume do sistema, resultando em:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV S = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\alpha s}{\tilde{S}} \int_V (S^x \dot{S}^y - S^y \dot{S}^x) dV. \quad (5.32)$$

Essa expressão relaciona o fluxo líquido de corrente de spin através da superfície do sistema à dissipação volumétrica associada ao amortecimento de Gilbert, como mostra a figura (8).

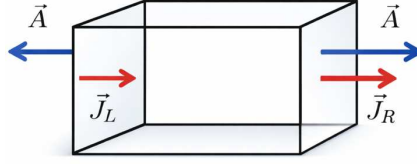


Figura 8 – Diagrama do transporte de corrente de spin em um sistema com contatos esquerdo e direito. As setas vermelhas representam as correntes de spin $\vec{J}_L$ e $\vec{J}_R$ enquanto as setas azuis indicam o vetor $\vec{A}$ das áreas entre as interfaces de contato.

Portanto,

$$\Delta J = J_L - J_R = \frac{\alpha S}{\tilde{S}} \int_0^l (S^x \dot{S}^y - S^y \dot{S}^x) dx. \quad (5.33)$$

Para $(S^z)^2 \ll 1$, podemos escrever as componentes S^x e S^y da seguinte forma:

$$S^x = \sqrt{\tilde{S}^2 - (S^z)^2} \cos(\varphi) \simeq \tilde{S} \cos(\varphi), \quad (5.34a)$$

$$S^y = \sqrt{\tilde{S}^2 - (S^z)^2} \sin(\varphi) \simeq \tilde{S} \sin(\varphi), \quad (5.34b)$$

onde, substituindo na equação (5.26), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \tilde{\mathbf{S}} \times \mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{zJ}{\hbar} & \left[\tilde{S} \left(\sin(\varphi) (\hat{\gamma} - d) S^z - S^z \hat{\gamma} \sin(\varphi) \right) \hat{\mathbf{x}} + \tilde{S} \left(S^z \hat{\gamma} \cos(\varphi) - \cos(\varphi) (\hat{\gamma} - d) S^z \right) \hat{\mathbf{y}} + \right. \\ & \left. + \tilde{S}^z \left(\cos(\varphi) \hat{\gamma} \sin(\varphi) - \sin(\varphi) \hat{\gamma} \cos(\varphi) \right) \hat{\mathbf{z}} \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

e pelas equações (5.34) a evolução temporal $d\mathbf{S}/dt$ torna-se:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} \simeq \frac{Jz}{\hbar} \left[\left(-\tilde{S} \sin(\varphi) \dot{\varphi} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\tilde{S} \sin(\varphi) \dot{\varphi} \right) \hat{\mathbf{y}} + \dot{S}^z \hat{\mathbf{z}} \right], \quad (5.36)$$

o termo de damping torna-se, então:

$$\begin{aligned} \alpha \hat{\mathbf{S}} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} \simeq \frac{\alpha}{\tilde{S}} & \left[\left(\tilde{S} \dot{S}^z \sin(\varphi) - \tilde{S} S^z \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right) \hat{\mathbf{x}} - \right. \\ & \left. - \left(\tilde{S} \dot{S}^z \sin(\varphi) + \tilde{S} S^z \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\tilde{S}^2 \dot{\varphi} \right) \hat{\mathbf{z}} \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Finalmente, a equação de Landau-Lifshitz-Gilbert nos fornece:

$$\dot{S}^x = \frac{J\tilde{S}z}{\hbar} [\sin(\varphi)(\hat{\gamma} - d)S^z - S^z\hat{\gamma}\sin(\varphi)] + \alpha [\dot{S}^z \sin(\varphi) + S^z \cos(\varphi)\dot{\varphi}], \quad (5.38a)$$

$$\dot{S}^y = -\frac{J\tilde{S}z}{\hbar} [\cos(\varphi)(\hat{\gamma} - d)S^z - S^z\hat{\gamma}\cos(\varphi)] + \alpha [\dot{S}^z \cos(\varphi) + S^z \sin(\varphi)\dot{\varphi}], \quad (5.38b)$$

$$\dot{S}^z = \frac{J\tilde{S}z}{\hbar} (\cos(\varphi)\hat{\gamma}\sin(\varphi)) - \alpha\tilde{S}\dot{\varphi}. \quad (5.38c)$$

Quando adotamos o limite $\Delta\varphi \ll 1$ para primeiros vizinhos e inserindo o parâmetro de renormalização $\rho \rightarrow \sqrt{\rho}\varphi$, podemos reduzir a equação (5.38c) para:

$$\dot{S}^z = -\frac{J\tilde{S}^2z}{\hbar}\sqrt{\rho}(1 - \hat{\gamma})\varphi - \alpha\tilde{S}\dot{\varphi}. \quad (5.39)$$

E adotando o mesmo procedimento, podemos combinar as equações (5.38a) e (5.38b) com a parametrização em (5.34) para obtermos a dinâmica em φ , assim:

$$\tilde{S}\dot{\varphi} = \frac{J\tilde{S}z}{\hbar}(\mathcal{I} - \hat{\gamma})S^z - \alpha\dot{S}^z. \quad (5.40)$$

em que para obter as equações (5.39) e (5.40) utilizamos as identidades e aproximações a baixo:

$$\cos(\varphi)\hat{\gamma}\sin(\varphi) - \sin(\varphi)\hat{\gamma}\cos(\varphi) = \frac{1}{z} \sum_j \sin(\Delta\varphi) \approx (1 - \hat{\gamma})\varphi, \quad (5.41a)$$

$$\cos(\varphi)\hat{\gamma}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\hat{\gamma}\sin(\varphi) = \frac{1}{z} \sum_j \cos(\Delta\varphi) \approx 1 + \mathcal{O}(2). \quad (5.41b)$$

Portanto, considerando apenas o limite para longos comprimentos de onda $\hat{\gamma} \approx 1 - a^2\nabla^2/z$ a dinâmica

$$\dot{s}^z = -A\sqrt{\rho}\nabla^2\varphi - \alpha s\tilde{S}\dot{\varphi}, \quad (5.42)$$

$$\tilde{s}\dot{\varphi} = A\sqrt{\rho}\left(\frac{zd}{a^2} - \nabla^2\right)S^z + \alpha s\dot{S}^z, \quad (5.43)$$

no qual $s\dot{S}^z \stackrel{\text{def}}{=} \dot{s}^z$ e $\tilde{S}s \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{s}$. O que nos traz, novamente, para a equação da continuidade:

$$\dot{s}^z + \nabla \cdot \mathbf{J} = -\alpha\tilde{s}\dot{\varphi}, \quad (5.44)$$

com a densidade de corrente:

$$\mathbf{J} = -A\sqrt{\rho}\nabla\varphi. \quad (5.45)$$

As equações dinâmicas obtidas admitem, em princípio, uma ampla classe de soluções dependentes do tempo. No entanto, a superfluidez de spin corresponde a um regime físico altamente restritivo, no qual o transporte de spin ocorre de forma coerente e persistente, sem acúmulo local de densidade de spin. Isso impõe que o sistema satisfaça a equação da continuidade em regime estacionário, com $\dot{s}^z = 0$.

Dessa maneira, uma vez que a criação e a aniquilação de mágnons se mantêm aproximadamente balanceadas no interior do material, o sistema relaxa para uma configuração de menor energia, na qual gradientes do potencial químico $\nabla\mu \neq 0$ são energeticamente desfavoráveis, sendo o estado com $\nabla\mu = 0$ selecionado no regime estacionário. Como S^z é aproximadamente conservado no tempo, podemos associar a essa grandeza um potencial químico de spin, definido como $\mu_s = \partial\mathcal{H}/\partial S^z$, que representa o custo energético para variar a densidade de momento angular projetado ao longo do eixo z , em que $\mathcal{H}$ representa a densidade de Hamiltoniana. Logo:

$$\mu = a^3 \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial s^z} = \kappa \tilde{S} S^z, \quad (5.46)$$

podemos afirmar como consequência que a componente S^z do spin também deve permanecer constante nesse regime. Por conseguinte, encontramos pela equação (5.43) que o valor de $\dot{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega$ é constante no tempo:

$$\Omega = \frac{\kappa S^z}{\hbar}. \quad (5.47)$$

Portanto, encontramos pela equação (5.44):

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\alpha K S^z}{A \tilde{S}}. \quad (5.48)$$

Assim, escrevemos:

$$\varphi_i(x, t) = \phi(x) - \Omega t. \quad (5.49)$$

Onde $\partial_x^2 \phi(x) = \partial_x^2 \varphi$, e as informações coletadas da EDP nos fornece a corrente dissipada pelo amortecimento de Gilbert:

$$\Delta J = \alpha \tilde{s} \int_0^L \Omega dx = \alpha \tilde{s} \Omega L. \quad (5.50)$$

Por fim, considerando a equação (5.45) e levando em consideração as condições de contorno nas interfaces $J_s^z(x=0) = J_0^z$ e $J_s^z(x=L) = 0$, conseguimos obter a solução para $\nabla\varphi$ em função da distância:

$$\nabla\varphi(x) = \frac{\alpha K S^z}{A \tilde{S}} (x - L), \quad (5.51)$$

que após substituirmos na equação (5.45), obtemos um resultado semelhante ao encontrado em (4.32):

$$J_s^z = J_0^z \left(\frac{L-x}{L} \right), \quad (5.52)$$

com:

$$J_0^z = \frac{\alpha K S^z L}{\tilde{S}}. \quad (5.53)$$

É importante salientar que a dependência linear com o comprimento do sistema não indica que a densidade de corrente aumenta com o comprimento L do sistema, mas reflete o fato de que para obter um número constante de mágnons para a solução estacionária, o fluxo na entrada deve compensar a perda distribuída no volume, resultando em um valor proporcional ao comprimento total.

5.2 Descrição quântica da corrente de spin

A partir da Hamiltoniana clássica fornecida equação (5.11), podemos obter o modelo quântico promovendo os campos clássicos φ_i e S_i^z a operadores quânticos, de modo a incorporar explicitamente os efeitos de flutuações quânticas ao redor do estado fundamental do sistema. Dessa forma, podemos escrever:

$$\varphi_i \rightarrow \hat{\varphi} = \varphi_{cl} \mathbb{I} + \delta\hat{\varphi}_i, \quad (5.54a)$$

$$S_i^z \rightarrow \hat{S}^z = S_{cl}^z \mathbb{I} + \delta\hat{S}_i^z, \quad (5.54b)$$

em que $\varphi_{cl} = \phi_i + \omega t$ e $S_{cl}^z = \text{constante}$, e os operadores satisfazem a relação de comutação $[\delta\hat{\varphi}_i, \delta\hat{S}_j^z] = \delta_{ij}$. Aqui, a parte clássica é responsável pelo transporte superfluido de spin pelo gradiente de fase. Enquanto, os mágnons térmicos, por sua vez, surgem das flutuações em torno desse estado coerente, atuando principalmente na injeção, conversão e relaxação do spin, mas não como portadores do transporte de longo alcance.

Embora a corrente superfluida de spin seja transportada pelo condensado, a corrente de mágnons térmicos desempenha um papel essencial na descrição da injeção interfacial, das correções térmicas e dos mecanismos dissipativos que determinam a eficiência e os limites do regime superfluido. Dessa maneira, quando substituímos as equações (5.54) na Hamiltoniana (5.11) obtemos:

$$H_0 = H_{cl} + \delta H_0, \quad (5.55)$$

uma nova Hamiltoniana H_0 que agora contém os aspectos clássicos já conhecidos anteriormente em (5.11) e quânticos do sistema, com δH_0 escrita como:

$$\delta H_0 = \frac{A}{2} \int d^3r \left[\frac{z\rho}{a^2} \delta\hat{\varphi}(1-\hat{\gamma})\delta\hat{\varphi} + \frac{z}{\tilde{S}^2 a^2} \delta\hat{S}^z(\mathcal{I}-\hat{\gamma})\delta\hat{S}^z \right]. \quad (5.56)$$

Portanto, ao levar a Hamiltoniana δH_0 para o espaço de momentos, deve-se levar em conta que, na ausência de fontes e sorvedouros de spin no interior do material ao longo da direção x , tomamos $\partial_x \varphi = 0$. Assim, obtemos:

$$\delta \hat{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \left[\delta \hat{\varphi}_q \cos(q_x x) e^{i \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_{i\perp}} \right], \quad (5.57)$$

em que, $\mathbf{q}_\perp = q_y \hat{y} + q_z \hat{z}$ e $q_{y,z} = \pi N_{y,z}/2L$. O sistema é discretizado em uma rede cúbica com espaçamento a , contendo $N = N_x N_y N_z$ pontos ao longo das direções x , y e z , respectivamente. Assumindo que o sistema tenha extensão L , escrevemos que $N_{y,z} = L/a$ enquanto $N_x = l/a$. Logo, levando em conta o limite de $L \rightarrow \infty$ e $l \rightarrow 0$. Resultando em:

$$\delta \hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \int d^2 q \sum_{q_x} \psi_q(\mathbf{r}) \delta \hat{\varphi}_q, \quad (5.58)$$

com

$$\psi_q(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{e^{i \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_{i\perp}}}{2\pi} \cos(q_x x), \quad (5.59)$$

Por conseguinte, podemos substituir os termos encontrados para realizar a transformação de Fourier para a Hamiltoniana (5.56), deduzindo como resultado:

$$\delta H_0 = \frac{1}{2} \sum_q \left[h_q^\varphi \delta \hat{\varphi}_q^\dagger \delta \hat{\varphi}_q + h_q^z \delta \hat{S}_q^{z\dagger} \delta \hat{S}_q^z \right]. \quad (5.60)$$

com $h_q^\varphi = Az\rho(1 - \gamma_q)/a^2$ e $h_q^z = Az(\mathcal{J} - \gamma_q)/S^2 a^2$, e também utilizamos o fato de que $\int d^3 r \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, que por sua vez fornece $\hat{\gamma} \psi_q = \gamma_q \psi_q$.

Alcançada a Hamiltoniana quadrática no espaço de momentos, podemos diagonalizá-la promovendo os operadores canonicamente conjugados $\delta \hat{\varphi}_q$ e $\delta \hat{S}_q^z$ a operadores de criação e destruição de mágnons. Ao expressar a Hamiltoniana nessa base, cada modo contribui de forma desacoplada para a energia total, o que simplifica o cálculo do espectro de excitações. Sendo assim, podemos escrever os operadores como:

$$\delta \hat{\varphi}_q = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{S}}} \left(\frac{\mathcal{J} - \gamma_q}{\rho(1 - \gamma_q)} \right)^{1/4} (\delta a_q^\dagger + \delta a_{-q}), \quad (5.61)$$

$$\delta \hat{S}_q^z = i \sqrt{\frac{\tilde{S}}{2}} \left(\frac{\rho(1 - \gamma_q)}{\mathcal{J} - \gamma_q} \right)^{1/4} (\delta a_q^\dagger - \delta a_{-q}), \quad (5.62)$$

onde para para base de estados coerentes $\delta a_q \stackrel{\text{def}}{=} D(\alpha) a_q D^\dagger(\alpha) = a_q - \alpha_q$, com $\alpha_q = \langle a_q \rangle$, de forma que:

$$\alpha_q = \sqrt{2\tilde{S}} \left(\frac{\rho(1 - \gamma_q)}{(\mathcal{J} - \gamma_q)} \right)^{1/4} (\phi_q + \sqrt{N} \Omega t \delta_{q_0}), \quad (5.63)$$

garantindo a consistência com a equação (5.54). Assim, substituindo na equação (5.60) adquirimos a seguinte Hamiltoniana diagonal:

$$\delta H_0 = \frac{1}{2} \sum_q \hbar \omega_q \left(\delta a_q^\dagger \delta a_q + \frac{1}{2} \right), \quad (5.64)$$

com espectro:

$$\hbar \omega_q = \frac{Aza}{\tilde{S}} \sqrt{\rho(1 - \gamma_q)(\mathcal{I} - \gamma_q)}. \quad (5.65)$$

Tomando o limite de longos comprimentos de onda $aq \ll 1$, obtemos a mesma equação alcançada para o caso clássico em (5.16).

5.3 Cálculo da corrente de spin

A corrente de spin injetada no ferromagneto a partir do metal normal é calculada pelo operador de corrente I_s , escrito como:

$$I_s = -\frac{\hbar}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \left(c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} - c_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\downarrow} \right), \quad (5.66)$$

onde a evolução temporal dos operadores de criação e destruição de elétrons representam a taxa na qual os elétrons refletem na interface MN/FM. Portanto podemos calcular a evolução temporal a partir da representação de Heisenberg:

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}\uparrow}^e - \hat{N}_{\mathbf{k}\downarrow}^e \right) = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{N}_{\mathbf{k}\uparrow}^e - \hat{N}_{\mathbf{k}\downarrow}^e, H \right], \quad (5.67)$$

em que, $\hat{N}_\sigma^e = c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}$, e a Hamiltoniana H é a Hamiltoniana total modelada pela equação (5.1). Como consequência, o único termo da Hamiltoniana que não comuta com o operador de corrente de spin é o potencial de troca interfacial H_{sd} , responsável pela transferência de momento angular entre os elétrons de condução e os spins localizados do ferromagneto.

Microscopicamente, esse processo pode ser interpretado como um espalhamento elástico de elétrons na interface, no qual momento angular é conservado e convertido em excitações coletivas magnônicas no meio magnético onde são transmitidas ou absorvidas, esse mecanismo de troca de momento angular é ilustrado esquematicamente pelo diagrama de Feynman apresentado na figura (9).

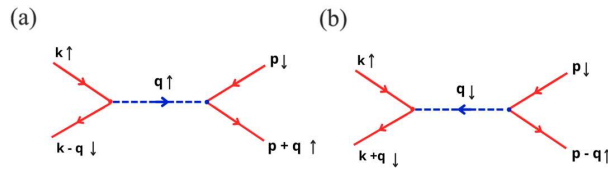


Figura 9 – Diagrama de Feynman representando um processo (a) de injeção de spin e (b) absorção de spin pelos elétrons de momento k e p .

Assim, a interação entre as interfaces o metal normal e o ferromagneto é dada por:

$$H_{sd} = J_{sd} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{s}_j = J_{sd} \sum_i \left(S_i^+ c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\uparrow} + S_i^- c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow} \right). \quad (5.68)$$

A formulação desse problema em termos de operadores de spin e sua representação no espaço de momento permite tornar explícitos os mecanismos de transferência de momento e energia, assim podemos realizar a transformada de Fourier para o espaço de momento:

$$c_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N_e}} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i}, \quad (5.69)$$

com N_e sendo o número de elétrons e o momento $\mathbf{k} = (2\pi/L)(n^x, n^y, n^z)$. Logo, escrevemos a equação (5.68) no espaço de momento como:

$$H_{sd} = -\frac{J_{sd}}{N_e} \sum_{ikp} \left(A_{ikp}^\dagger + A_{ikp} \right), \quad (5.70)$$

em que:

$$A_{ikp} = S_i^- c_{k\uparrow}^\dagger c_{p\downarrow} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}_i}. \quad (5.71)$$

Portanto, utilizando a equação (5.70) podemos calcular a taxa de transferência de spin para o ferromagneto, obtendo então a seguinte equação para a corrente de spin:

$$I_s = \frac{iJ_{sd}}{N_e} \sum_{ikp} \left(A_{ikp}^\dagger - A_{ikp} \right). \quad (5.72)$$

Uma vez obtida a expressão do operador de corrente de spin, o próximo passo consiste em calcular o seu valor médio no estado fora do equilíbrio a partir do formalismo de interação, em que introduzimos a matriz de espalhamento $\mathcal{S}(t, -\infty)$ responsável pela evolução temporal da corrente. Nesse contexto, emprega-se a teoria de resposta linear, na qual a perturbação H_{sd} é tratada como uma perturbação fraca, nos permitindo expandir a matriz de espalhamento $\mathcal{S}(t, -\infty)$, descrita por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t, -\infty) &= \mathcal{T}_t \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t H_{sd}(t') dt' \right) \\ &\simeq \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t H_{sd}(t') dt'. \end{aligned} \quad (5.73)$$

em que $\mathcal{T}_t$ é o operador de ordenamento temporal. Desse modo, podemos calcular a média $\langle I_s(t) \rangle$, como:

$$\langle I_s(t) \rangle = \langle \mathcal{S}^\dagger(t, -\infty) I_s(t) \mathcal{S}(t, -\infty) \rangle_0, \quad (5.74)$$

na qual, a média e a evolução temporal $I_s(t)$ são calculadas a partir da Hamiltoniana não perturbativa H_0 . Consequentemente:

$$\langle I_s(t) \rangle = \underbrace{\langle I_s(t) \rangle_0}_{=0} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle [I_s(t), H_{sd}] \rangle_0 dt', \quad (5.75)$$

resultando em:

$$\langle I_s \rangle = -\frac{2J_{sd}^2}{N_e^2} \sum_{i,j} \sum_{k,p} \text{Im} (\tilde{\chi}_{ijkp}(0)), \quad (5.76)$$

com

$$\chi_{ijkp}(t) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \langle [A_{ikp}(t), A_{jkp}^\dagger(0)] \rangle. \quad (5.77)$$

Nesse formalismo, o valor médio da corrente de spin é expresso em termos de funções de resposta do sistema, permitindo relacionar diretamente a corrente injetada à suscetibilidade magnética do ferromagneto. Dessa maneira, é de interesse obter a suscetibilidade no domínio de frequências para que os processos de absorção e emissão de energia e momento angular tornem-se explícitos. Logo:

$$\tilde{\chi}_{ijkp}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_{ijkp}(t) e^{i\omega t}) dt = \tilde{\chi}'_{ijkp}(\omega) + i\tilde{\chi}''_{ijkp}(\omega). \quad (5.78)$$

Aqui a suscetibilidade pode ser decomposta em uma parte real relacionada ao processo de reflexão dos elétrons e uma parte imaginária ligada aos processos de emissão e absorção de momento e energia. Para analisar a corrente de spin focaremos apenas na parte imaginária da suscetibilidade. Assim, sabendo que a parte imaginária de qualquer função complexa pode ser escrita como $\text{Im} f = (f - f^*)/2i$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}''_{ijkp}(\omega) &= \frac{1}{2i} \int (\tilde{\chi}_{ijkp}(t) - \tilde{\chi}_{ijkp}(-t)) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int dt \left[-\frac{i}{\hbar} \theta(t) F_{ij,kp}^{-+}(t) + \frac{i}{\hbar} \theta(t) F_{ji,kp}^{+-}(t) - \right. \\ &\quad \left. -\frac{i}{\hbar} \theta(-t) F_{ij,kp}^{-+}(t) + \frac{i}{\hbar} \theta(-t) F_{ji,kp}^{+-}(t) \right] e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

em que escrevemos as funções correlação como $F_{ij,kp}^{-+}(t) = \langle A_{ikp}(t), A_{jkp}^\dagger(0) \rangle_0$ e $F_{ij,kp}^{+-}(t) = \langle A_{ikp}^\dagger(0), A_{jkp}(t) \rangle_0$.

Ademais, visto que a corrente superfluida é naturalmente coerente, realizamos as médias dos operadores utilizando os estados coerentes que permitem capturar a coerência de fase do sistema:

$$F_{ijkp}^{-+}(t) = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} [D(\alpha) e^{-\beta K_0} D^\dagger(\alpha) A_{ijkp}^\dagger(0) A_{ijkp}(t)], \quad (5.80)$$

em que, $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a}$ é o operador de deslocamento que permite construir estados coerentes e separar a dinâmica coerente das flutuações quânticas do sistema. Outrossim, a média é realizada a partir do Hamiltoniano grande canônico $K = H_0^m - \sum_\sigma N_\sigma^e \mu_\sigma$, onde a Hamiltoniana magnética H_0^m é fornecida pela equação (5.64), assim é conveniente expressar a evolução temporal dos operadores como:

$$\begin{aligned} A_{ikp}(t) &= e^{iHt/\hbar} A_{ikp} e^{-iHt/\hbar} \\ &= e^{i\Delta\mu t/\hbar} e^{-i\varphi_{cl}} e^{iK_0 t/\hbar} A_{ikp}^{cs} e^{-iK_0 t/\hbar} e^{i\varphi_{cl}} e^{-i\Delta\mu t/\hbar} \\ &= e^{-i(\varphi_{cl} - \Omega_\mu t)} \check{A}_{ikp}^{cs}(t). \end{aligned} \quad (5.81)$$

onde o símbolo caron em $\check{A}_{ikp}^{cs}(t)$ implica evolução temporal de acordo com a Hamiltoniana grande canônica, e diferença no potencial químico é descrita como $\Delta\mu = \hbar\Omega_\mu$. Dessa forma, realizando a mudança de base para os estados coerentes em $F_{ijkp}^{-+}(t)$, obtemos:

$$F_{ijkp}^{+-}(t) = \frac{1}{Z_0} \text{Tr} \left[e^{-\beta K_0^{cs}} e^{-\beta K_0^{cs}} \check{A}_{ijkp}^{cs}(t) e^{-\beta K_0^{cs}} \check{A}_{ijkp}^{cs}(0) \right] e^{-i(\varphi_{cl} - \Omega_\mu)t}. \quad (5.82)$$

Utilizando o formalismo de tempo imaginário de Matsubara, podemos interpretar o operador $e^{-\beta K_0}$ como uma evolução no tempo imaginário $\tau = -i\beta\hbar t$. Desse modo:

$$e^{-\beta K_0} \check{A}_{ijkp}^{cs}(t) e^{\beta K_0} = e^{iK_0(t-i\beta\hbar)} \check{A}_{ijkp}^{cs}(t) e^{-iK_0(t-i\beta\hbar)} = \check{A}_{ijkp}^{cs}(t - i\beta\hbar). \quad (5.83)$$

Assim, obtemos:

$$F_{ijkp}^{+-}(t) = e^{-i(\varphi_{cl} - \Omega_\mu t)} \langle \check{A}_{ijkp}^{cs}(t - i\beta\hbar) \check{A}_{ijkp}^{cs\dagger}(0) \rangle_0. \quad (5.84)$$

Após integrarmos em relação aos momentos, encontramos:

$$F_{ij}^{+-}(t) = e^{-i(\varphi_{cl} - \Omega_\mu t)} F_{ij}^{-+}(t - i\beta\hbar). \quad (5.85)$$

Realizando a transformada de Fourier para o espaço de frequência e considerando $i = j$, e $\varphi_{cl} = \phi_i - \Omega t$ como expresso em (5.49) alcançamos a expressão:

$$\tilde{F}_{ii}^{+-}(\omega) = e^{-\beta\hbar(\Omega_\mu - \Omega - \omega)} \tilde{F}_{ii}^{-+}(\omega). \quad (5.86)$$

Por fim, a susceptibilidade pode ser reescrita como:

$$\text{Im} \tilde{\chi}_{ij}(0) = -\frac{\delta_{ij}}{2\hbar} \left(1 - e^{-\beta(\Delta\mu - \hbar\Omega)} \right) \tilde{F}_{ii}^{-+}(0), \quad (5.87)$$

no qual, os termos que acompanham a exponencial refletem o balanço na interface entre a injeção de momento angular associada ao spin-transfer torque, controlada pelo potencial

químico $\Delta\mu = \hbar\Omega_\mu$, e a perda de spin por spin pumping decorrente da precessão coerente do interior do material, caracterizada por $\hbar\Omega$. A corrente de spin líquida emerge do desbalanço entre esses dois mecanismos.

Portanto, após calcular a média da função correlação (B.15), encontrada no apêndice B, dada por:

$$\tilde{F}_{ij}^{-+}(0) = \frac{\hbar\delta_{ij}\rho_f}{4} \int d\nu \left[\frac{\hbar\nu - \Delta\mu}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \tilde{D}^{-+}(\nu) \right], \quad (5.88)$$

em que ρ_F é a densidade de estados eletrônicos no nível de Fermi. Podemos portanto, escrever a corrente de spin a partir da equação (5.76) como:

$$\langle I_s \rangle = \left(\frac{J_{sd}\rho_F}{2N_e} \right)^2 \left(1 - e^{-\beta(\Delta\mu - \hbar\Omega)} \right) \int d\nu \left[\frac{\hbar\nu - \Delta\mu}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \tilde{D}^{-+}(\nu) \right], \quad (5.89)$$

onde o cálculo $\tilde{D}^{-+}(\nu) = \sum_i \tilde{D}_i^{-+}(\nu)$ pode ser conferido pela equação (B.12) no apêndice B.

Consideremos agora o regime de baixas energias, no qual o desbalanço químico satisfaz $\Delta\mu - \hbar\Omega \ll k_B T$, tal imposição corresponde ao regime de resposta linear no qual o desbalanço químico é pequeno em comparação com a energia térmica. Por consequência, essa aproximação não é válida no limite $T \rightarrow 0$ para valores finitos de $\Delta\mu - \hbar\Omega$, uma vez que a condição acima deixaria de ser satisfeita. Nesse regime, os termos exponenciais podem ser expandidos até primeira ordem na energia. Finalmente, dividindo a corrente total pela área da interface, L^2 , obtemos a seguinte expressão para a densidade de corrente de spin:

$$\langle J_s \rangle = \underbrace{\frac{\beta}{L^2} \left(\frac{J_{sd}\rho_F}{2N_e} \right)^2 \int d\nu \left[\frac{\hbar\nu - \Delta\mu}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \tilde{D}^{-+}(\nu) \right]}_{\text{Condutância de spin}} (\Delta\mu - \hbar\Omega), \quad (5.90)$$

onde

$$\begin{aligned} \int d\nu \left[\frac{\hbar\nu - \Delta\mu}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \tilde{D}^{-+}(\nu) \right] &= e^{\beta\Delta\mu} n(\Delta\mu) \left\{ 2\pi N \tilde{S}^2 \Delta\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{Jz} \sum_q \frac{\epsilon_q}{1 - \gamma_q} \left[\Delta\mu + (\epsilon_q + \Delta\mu) n(\epsilon_q + \Delta\mu) - (\epsilon_q - \Delta\mu) n(\epsilon_q - \Delta\mu) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Além disso, a partir das equações (5.90) e (5.91) podemos separar a densidade de corrente em duas componentes, uma devido parte superfluida coerente e outra relacionada aos mágnons térmicos, tal que $J_s = J_s^c + J_s^t$, em que:

$$J_s^c = \frac{\pi}{2} \left(\frac{J_{sd}\rho_F \tilde{S}}{a N_e} \right)^2 \left(e^{\beta\Delta\mu} - e^{\beta\hbar\Omega} \right) \left(1 - \frac{1}{2\tilde{S}\sqrt{\rho}N} \sum_q \sqrt{\frac{J - \gamma_q}{1 - \gamma_q}} \right) \Delta\mu n(\Delta\mu), \quad (5.92)$$

e

$$J_s^t = \frac{\pi}{2} \left(\frac{J_{sd}\rho_F\tilde{S}}{aN_e} \right)^2 \left(e^{\beta\Delta\mu} - e^{\beta\hbar\Omega} \right) \frac{\pi}{4N\tilde{S}\sqrt{\rho}} \times \\ \times \sum_q \sqrt{\frac{J - \gamma_q}{1 - \gamma_q}} [(\epsilon_q + \Delta\mu) n(\epsilon_q + \Delta\mu) - (\epsilon_q - \Delta\mu) n(\epsilon_q - \Delta\mu)] , \quad (5.93)$$

onde fazemos a substituição de comprimento L pelo numero de sítios multiplicado pelo distância entre sítios. $L = (aN)$.

Para excitações de longo comprimento de onda, caracterizadas por $aq \ll 1$, a energia dos mágnons são da ordem de 10^{-5} eV. Mesmo para valores de momento próximos ao limite da primeira zona de Brillouin, essa energia permanece da ordem de 10^{-3} eV. Em contraste, à temperatura ambiente a escala térmica é $k_B T \simeq 2,5 \times 10^{-2}$ eV, de modo que $\hbar\omega_q \ll k_B T$. Essas condições permitem aproximar a distribuição de Bose-Einstein pelo seu limite clássico $1/(e^x - 1) \approx (1/x)$.

Além das considerações mencionadas, para prosseguir com o cálculo, utilizaremos a aproximação de Debye, em que substituímos a soma discreta sobre os vetores de onda por uma integral contínua com a presença de um limite superior para os modos magnônicos considerados. Esse limite é estabelecido uma vez que o comprimento de onda dos mágnons não pode ser menor do que a distância entre dois sítios da rede.

Na aproximação de Debye, a primeira zona de Brillouin é substituída por uma esfera de raio q_D escolhida de forma que possua o mesmo volume da zona de Brillouin original. Para uma rede cúbica simples de comprimento de rede a , o volume da primeira zona de Brillouin descrito por $V_{Bz} = (2\pi)^3/a^3$. Assim, igualando os dois volumes encontramos $q_D = \sqrt[3]{6\pi^2}/a$, que pela relação entre comprimento de onda e vetor de onda encontramos $\lambda_{\text{Min}} = \sqrt[3]{4\pi a^3/3}$.

Com base nas considerações apresentadas acima, a densidade de corrente de spin para os mágnons coerentes J_s^c e térmicos J_s^t , válidas somente para os casos onde $T > 0$, podem ser escritas como:

$$\langle J_s^c \rangle = \frac{\pi}{2} \left(\frac{J_{sd}\rho_F\tilde{S}}{aN_e} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2\tilde{S}\sqrt{\rho}} \left(1 - \frac{zd}{4\pi^{3/2}} \right) \right] (\Delta\mu - \hbar\Omega) , \quad (5.94)$$

e

$$\langle J_s^t \rangle = \left(\frac{J_{sd}\rho_F\tilde{S}}{aN_e} \right)^2 \frac{a}{8\pi J\tilde{S}^2\hbar c\rho} \left[\frac{\pi}{6\beta^2} - \epsilon_D^2 \text{Li}_0(e^{-\beta\epsilon_D}) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_D}{\beta} \text{Li}_1(e^{-\beta\epsilon_D}) + \frac{1}{\beta^2} \text{Li}_2(e^{-\beta\epsilon_D}) \right] (\Delta\mu - \hbar\Omega) , \quad (5.95)$$

onde as funções $\text{Li}_n(e^{-\beta\epsilon_D})$ representam os polilogaritmos de ordem n , definidos pela série $\text{Li}_n(z) = \sum_k^\infty z^k/k^n$, e $\epsilon_D = \hbar c q_D$ é a energia de Debye, que representa a energia máxima dos mágnons considerados dentro da aproximação.

5.4 Dados obtidos pelo parâmetro de renormalização

Para o cálculo do fator de renormalização podemos seguir o procedimento padrão da AHAC demonstrado no capítulo III, utilizando a hamiltoniana completa (5.3) e a Hamiltoniana quadrática (5.64) calculamos suas médias como:

$$\langle \hat{H} \rangle_0 \approx Jz \sum_q \frac{h_q^\varphi (e^{-\Xi} - \gamma_q)}{2\epsilon_q} \coth \left(\frac{\beta\epsilon_q}{2} \right), \quad (5.96)$$

e

$$\langle H_0 \rangle_0 = \sum_q \epsilon_q n_q, \quad (5.97)$$

em que, ignoramos os termos relacionados a energia do vácuo. Além disso, a energia livre de Helmholtz dada por $-\ln(Z_0)/\beta$ com Z_0 obtido pela equação (3.21), podemos minimizar a desigualdade de Bogoliubov, onde conseguimos obter uma equação semelhante para o parâmetro de renormalização em (3.34), com $h_q^\varphi = Az\rho(1-\gamma_q)/a^2$ e $h_q^z = Az(\lambda-\gamma_q)/S^2a^2$ fornecidos pela equação 5.60, cuja dispersão ϵ_q é dada pela equação (5.65). Portanto, obtemos o fator de renormalização como:

$$\rho(T) = \Lambda(T) \left(1 - \frac{\langle (S^z)^2 \rangle_0}{\tilde{S}^2} \right) e^{-\Xi},$$

com

$$\Lambda(T) = \left[\sum_q \left(v_q + \frac{e^{-\Xi} - 1}{(1 - \lambda\gamma_q)} u_q \right) \right]^{-1} \sum_q v_q.$$

em que, os valores médios das correlações $\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle$ e $\langle (S^z)^2 \rangle$, podem ser escritas como:

$$\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle_0 = \frac{1}{2N\tilde{S}\sqrt{\rho}} \sum_q \left[\sqrt{(1-\gamma_q)(\lambda-\gamma_q)} \coth \left(\frac{\beta\epsilon_q}{2} \right) \right] \quad (5.98)$$

e

$$\langle (S^z)^2 \rangle_0 = \frac{\tilde{S}\sqrt{\rho}}{2N} \sum_q \left[\sqrt{\frac{(1-\gamma_q)}{(\lambda-\gamma_q)}} \coth \left(\frac{\beta\epsilon_q}{2} \right) \right]. \quad (5.99)$$

Desse modo, para uma análise geral, podemos tratar os parâmetros constantes em forma adimensional, permitindo destacar o comportamento universal do sistema independentemente de valores específicos de material, como apresentado na figura (10).

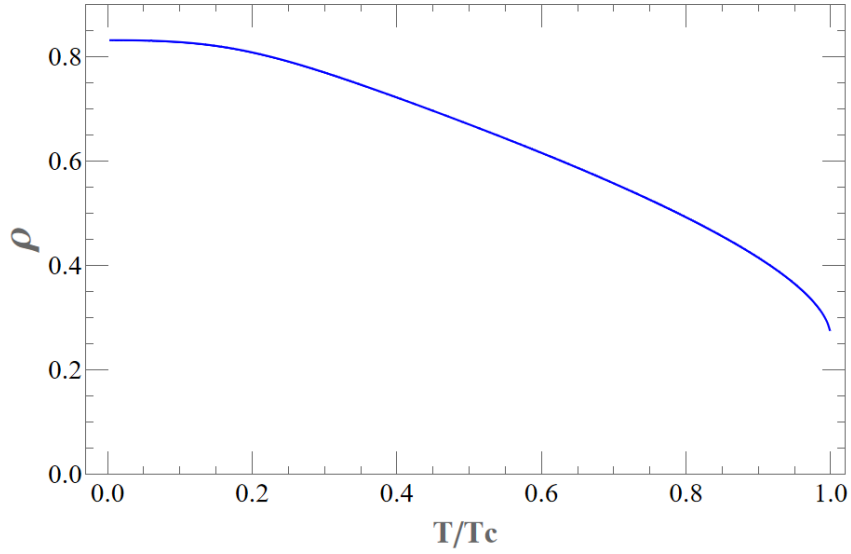


Figura 10 – O gráfico apresenta o parâmetro de renormalização ρ em função da temperatura. Para $S = 5/2$, $T_c = 1,56 J/k_B$ é a temperatura na qual o parâmetro decai abruptamente.

Interpretamos o colapso do parâmetro ρ como a temperatura crítica do sistema, associado ao crescimento das flutuações térmicas que destroem a rigidez do estado ordenado. Assim, na AHAC, essa temperatura é interpretada como a temperatura crítica do sistema. Uma vez obtidos os valores do parâmetro de renormalização em função da temperatura, passamos a utilizá-los como base para descrever o comportamento térmico do sistema, a partir das propriedades físicas dependentes de $\rho(T)$.

Outrossim, com base nas equações (5.94) e (5.95) conseguimos obter a relação para condutância de mista de spin g_s dada pela soma das condutâncias g_s^c e g_s^t :

$$g_s = g_s^c + g_s^t, \quad (5.100)$$

com

$$g_s^c = \frac{\pi}{2} \left(\frac{J_{sd}\rho_F\tilde{S}}{aN_e} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2\tilde{S}\sqrt{\rho}} \left(1 - \frac{zd}{4\pi^{3/2}} \right) \right], \quad (5.101)$$

e

$$g_s^t = \left(\frac{J_{sd}\rho_F\tilde{S}}{aN_e} \right)^2 \frac{a}{8\pi J\tilde{S}^2\hbar c\rho} \left[\frac{\pi}{6\beta^2} - \epsilon_D^2 \text{Li}_0(e^{-\beta\epsilon_D}) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_D}{\beta} \text{Li}_1(e^{-\beta\epsilon_D}) + \frac{1}{\beta^2} \text{Li}_2(e^{-\beta\epsilon_D}) \right]. \quad (5.102)$$

A partir disso, podemos comparar as contribuições da fração condensada e das flutuações térmicas para a condutância de spin. Conforme observado na Figura (11), a contribuição condensada diminui com o aumento da temperatura, enquanto a contribuição associada às excitações térmicas cresce progressivamente.

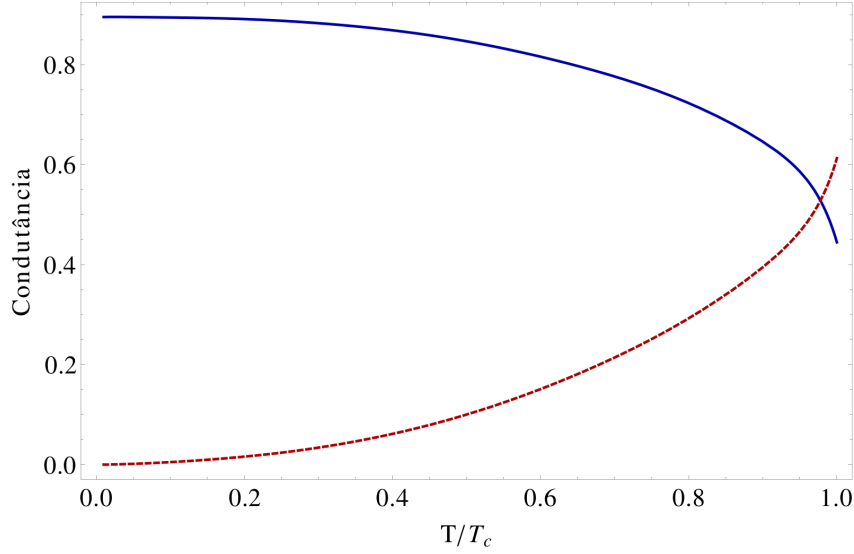


Figura 11 – O gráfico representa condutância de spin g_s^c associada aos mágnons condensados (azul) e g_s^t térmicos (vermelho) em relação a temperatura.

É importante relembrar que no modelo adotado, o aumento da temperatura corresponde à criação de mágnons térmicos, os quais reduzem a magnetização e aumentam as flutuações do sistema, constituindo o mecanismo fundamental pelo qual a temperatura afeta a condutância de spin no presente modelo.

Outro aspecto importante que podemos observar é a contribuição associada aos mágnons condensados, que permanece finita em praticamente toda a faixa de temperaturas considerada, decaindo apenas nas proximidades da temperatura crítica. Esse comportamento indica que a coerência magnética responsável pela superfluidade de spin é preservada até temperaturas elevadas. Em materiais como o YIG a temperatura crítica encontra-se acima da temperatura ambiente, indicando que estados superfluidos de spin podem persistir mesmo em condições ambiente.

Portanto, para verificar a compatibilidade da AHAC aos modelos experimentais, adotamos o YIG (granada de ítrio e ferro) como material de referência e empregamos os parâmetros obtidos para investigar seu comportamento térmico. Utilizando os dados experimentais obtidos por Klingler *et al.* [48] para a rigidez de spin $3,7 \pm 0,4$ pJ/m, e por Gilleo e Geller [49] para a densidade de anisotropia 900 ± 100 J/m³, verificamos que a AHAC fornece a temperatura crítica $T_c = 506,6$ K, valor que contém apenas 7,04% de diferença em relação ao valor de 545 K apresentado em [49].

Ademais, o gráfico mostrado na figura (12) apresentam os resultados obtidos pela AHAC para dispersão do YIG com temperatura em $T = 5$ K. Outrossim, o gráfico evidencia a falta de gap das excitações a medida que $q \rightarrow 0$, e também, mesmo para diferentes valores de temperatura, para baixas energias, todas as curvas convergem para $aq \ll 1$, e a curvatura da dispersão é consistente com o comportamento linear para o cumprimento do critério de Landau.

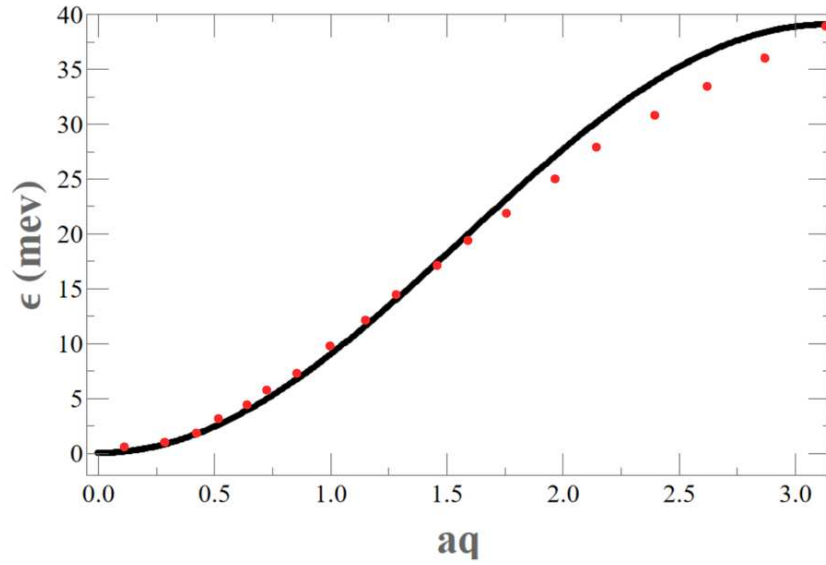


Figura 12 – Dispersão magnônica para $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$ para o YIG em $T = 5\text{ K}$. A curva em preto corresponde aos resultados obtidos por meio da e AHAC, enquanto os pontos vermelhos representam os resultados reportados por Princep *et al.*

Além disso, a energia cresce monotonamente ao longo da zona de Brillouin, no qual para baixas temperaturas é atingido valores da ordem de algumas dezenas de meV para a energia máxima, em concordância com resultados experimentais de espalhamento de nêutrons para o YIG, como os apresentados por Princep *et al.* [50].

É importante salientar, que embora a dispersão magnônica apresentada na figura (12) tenha sido originalmente obtida para vetores de onda na direção $\mathbf{q} = (0, q, 0)$, os resultados permanecem válidos para a direção $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$ utilizada neste trabalho. Isso decorre da simetria cúbica da rede considerada, para a qual as direções cristalográficas x e y são equivalentes. Consequentemente, a relação de dispersão depende apenas da magnitude do vetor de onda ao longo dessas direções equivalentes, resultando em espectros idênticos.

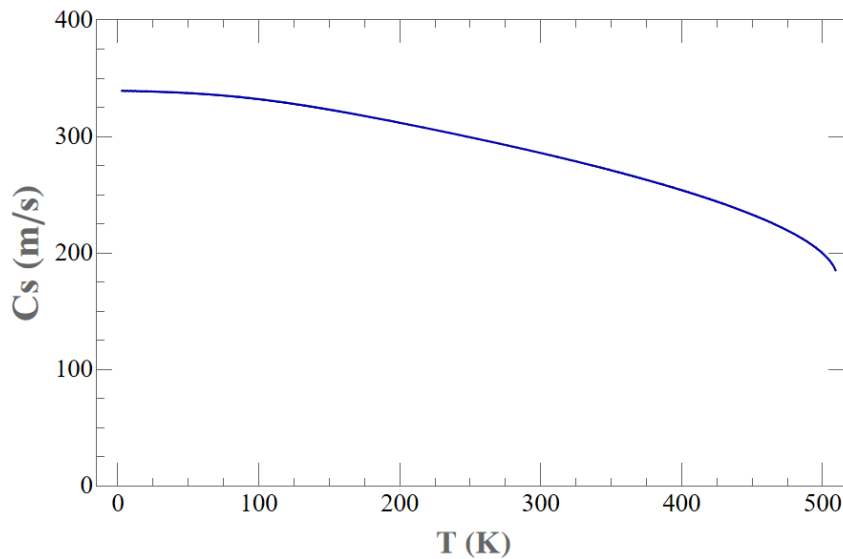


Figura 13 – Velocidade crítica em relação a temperatura

Dessa forma, a figura (13) apresenta a velocidade limite das ondas de spin para a existência de superfluidez no sistema em relação a temperatura. Podemos notar pela equação (5.17) que $c_s \propto \sqrt{\rho}$ semelhante a figura (11), de modo que a velocidade crítica diminui mais suavemente com a temperatura do que a magnetização, refletindo a dependência da raiz quadrada do parâmetro de renormalização. Além disso, a ordem de grandeza obtida, da ordem de 10^2 m/s , permanece compatível com velocidades típicas de excitações magnônicas em ferrimagnéticos como o YIG, implicando frequências características na faixa de MHz–GHz para os modos de interesse, reforçando a consistência física dos resultados.

VI Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, investigamos a termodinâmica da superfluidez de spin em ferromagnetos com anisotropia de plano fácil, com foco na influência da temperatura sobre a coerência do estado magnético e sobre as propriedades de transporte associadas às excitações coletivas do sistema. Partindo do modelo de Heisenberg e de sua formulação contínua por meio do Modelo Sigma Não Linear, estabelecemos um quadro teórico capaz de descrever a dinâmica de ondas de spin e o transporte de momento angular em materiais magneticamente ordenados. A partir dessa base, empregamos a Aproximação Harmônica Auto-Consistente (AHAC) como ferramenta principal para incorporar efeitos térmicos e tratar, de forma efetiva, as interações entre excitações.

O formalismo desenvolvido permitiu obter uma descrição autoconsistente das flutuações térmicas e quânticas por meio de um parâmetro de renormalização dependente da temperatura, responsável por capturar a redução da rigidez de spin do sistema. Mostramos que esse parâmetro decresce continuamente com o aumento da temperatura, refletindo o crescimento das flutuações e a consequente diminuição da ordem magnética efetiva. Observa-se ainda um colapso do parâmetro em uma temperatura crítica, interpretada como o limite de estabilidade da corrente de spin. Esse comportamento evidencia o papel central das flutuações térmicas na destruição da coerência coletiva e fornece um critério quantitativo para identificar o regime no qual o transporte superfluido permanece fisicamente viável.

Com base na dependência térmica obtida, analisamos a corrente de spin, a condutância associada, o espectro de dispersão das excitações e a velocidade crítica necessária para a manutenção do regime superfluido. Os resultados indicam que o aumento da temperatura reduz suavemente a intensidade da corrente coerente de spin para os mágnons condensados. Entretanto, à medida que se aproxima da temperatura crítica, observa-se uma supressão acentuada da componente superfluida, resultando em uma rápida redução da corrente de spin superfluida. Juntamente, há uma diminuição da velocidade crítica de Landau, tornando o sistema mais suscetível a mecanismos dissipativos e instabilidades dinâmicas.

Ainda assim, verificamos que soluções coerentes podem persistir em uma faixa significativa de temperaturas, sugerindo que o transporte de spin com características superfluídas pode ser relevante em condições experimentais acessíveis, especialmente em materiais magnéticos de baixa dissipação.

Para verificar a consistência física do formalismo e sua compatibilidade com sistemas experimentais, adotamos o YIG (granada de ítrio e ferro) como material de referência e utilizamos parâmetros experimentais reportados na literatura para a rigidez de spin e a anisotropia magnética. A partir desses valores, a aplicação da AHAC permitiu estimar

uma temperatura crítica de $T_c = 506,6$ K, apresentando diferença de apenas 7,04% em relação ao valor experimental de 545 K, o que indica boa concordância quantitativa do modelo com o comportamento real do material. Observa-se um comportamento aproximadamente linear no espectro de energia que para $aq \ll 1$, mesmo para temperaturas próximas a temperatura crítica, consistente com o critério de Landau para a existência de superfluidez. As energias obtidas ao longo da zona de Brillouin atingem valores da ordem de dezenas de meV, em concordância quantitativa com resultados experimentais de espalhamento de nêutrons reportados para o YIG.

Adicionalmente, a análise da corrente superfluida e da velocidade crítica indica que, embora o transporte coerente não seja, em princípio, proibido em temperaturas elevadas, o aumento da temperatura reduz progressivamente a estabilidade do regime superfluido. A velocidade crítica apresenta dependência proporcional a $\sqrt{\rho}$, diminuindo de forma suave com a temperatura e mantendo ordem de grandeza típica de 10^2 m/s, compatível com velocidades magnônicas conhecidas para ferrimagnéticos como o YIG.

Como perspectivas futuras uma possível extensão para este trabalho consiste na investigação da superfluidez de spin em sistemas antiferromagnéticos, pois apresentam duas sub-redes acopladas com magnetizações opostas, o que os tornam mais robustos contra interferências por não possuírem magnetização líquida, e a velocidade de propagação dos mágnons é maior, o que tornar o critério de Landau mais facilmente satisfeito, sugerindo que sistemas antiferromagnéticos podem oferecer condições mais favoráveis para a realização de regimes próximos à superfluidez de spin.

Referências

- [1] S. R. Mohapatra and A. K. Singh. Spin frustrated multiferroics: A new way to technology. *Journal of Materials Science and Nanomaterials*, 2(101):2, 2017.
- [2] E. B. Sonin. Superfluid spin transport in ferro- and antiferromagnets. *Physical Review B*, 99(10):104423, 2019.
- [3] So Takei and Yaroslav Tserkovnyak. Superfluid spin transport through easy-plane ferromagnetic insulators. *Physical Review Letters*, 112(22):227201, 2014.
- [4] Walther Gerlach and Otto Stern. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. In *Walther Gerlach (1889–1979): Eine Auswahl aus seinen Schriften und Briefen*, pages 26–29. Springer, Berlin, 1989.
- [5] Gerson G. Gomes and Maurício Pietrocola. O experimento de stern-gerlach e o spin do elétron: um exemplo de quasi-história. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33:2604, 2011.
- [6] George E. Uhlenbeck and Samuel Goudsmit. Ersetzung der hypothese vom unmechanischen zwang durch eine forderung bezüglich des inneren verhaltens jedes einzelnen elektrons. *Die Naturwissenschaften*, 13(47):953–954, 1925.
- [7] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 117(778):610–624, 1928.
- [8] Mario Norberto Baibich, Jean Marc Broto, Albert Fert, F. Nguyen Van Dau, Frédéric Petroff, P. Etienne, G. Creuzet, A. Friederich, and J. Chazelas. Giant magnetoresistance of (001) fe/(001) cr magnetic superlattices. *Physical Review Letters*, 61(21):2472–2475, 1988.
- [9] Takahiro Hanyu, Tetsuo Endoh, Daisuke Suzuki, Hiroki Koike, Yitao Ma, Naoya Onizawa, Masanori Natsui, Shoji Ikeda, and Hideo Ohno. Standby-power-free integrated circuits using mtj-based vlsi computing. *Proceedings of the IEEE*, 104(10):1844–1863, 2016.
- [10] H. Kamerlingh Onnes. Experiments on the condensation of helium by expansion. In *KNAW Proceedings*, volume 10, 1908.
- [11] H. Kamerlingh Onnes. Further experiments with liquid helium. In *Proceedings of the KNAW*, volume 13, 1911.

-
- [12] James F. Annett. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [13] Pyotr Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, 141(3558):74, 1938.
- [14] John F. Allen and A. D. Misener. Flow of liquid helium ii. *Nature*, 141(3558):75, 1938.
- [15] Laszlo Tisza. Transport phenomena in helium ii. *Nature*, 141(3577):913, 1938.
- [16] L. Landau. Theory of the superfluidity of helium ii. *Physical Review*, 60(4):356–358, 1941.
- [17] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, and E. D. Siggia. Renormalization-group treatment of the critical dynamics of superfluid helium, the isotropic antiferromagnet, and the easy-plane ferromagnet. *Physical Review B*, 13(3):1299–1324, 1976.
- [18] I. A. Fomin. Spin currents in superfluid ^3He . *Physica B: Condensed Matter*, 169(1–4):153–163, 1991.
- [19] Eleonora Fava, Tom Bienaimé, Carmelo Mordini, Giacomo Colzi, Chunlei Qu, Sandro Stringari, Giacomo Lamporesi, and Gabriele Ferrari. Observation of spin superfluidity in a bose gas mixture. *Physical Review Letters*, 120(17):170401, 2018.
- [20] Wei Yuan, Qiong Zhu, Tang Su, Yunyan Yao, Wenyu Xing, Yangyang Chen, Yang Ma, Xi Lin, Jing Shi, Ryuichi Shindou, et al. Experimental signatures of spin superfluid ground state in canted antiferromagnet Cr_2O_3 via nonlocal spin transport. *Science Advances*, 4(4):eaat1098, 2018.
- [21] A. S. T. Pires. A quantum self-consistent harmonic approximation. *Solid State Communications*, 104(12):771–773, 1997.
- [22] L. M. Castro, A. S. T. Pires, and J. A. Plascak. Low-temperature thermodynamic study of the diluted planar rotator model using a self-consistent harmonic approximation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 248(1):62–67, 2002.
- [23] A. S. T. Pires. Kosterlitz–thouless transition in a two-dimensional isotropic antiferromagnet in a uniform field. *Physical Review B*, 50(13):9592–9598, 1994.
- [24] M. E. Gouvêa and A. S. T. Pires. The two-dimensional classical anisotropic heisenberg ferromagnetic model with nearest- and next-nearest-neighbor interactions. *The European Physical Journal B*, 25:147–153, 2002.

-
- [25] A. R. Moura. Theoretical analysis of fmr-driven spin pumping current and its properties via the self-consistent harmonic approximation. *Physical Review B*, 106(5):054313, 2022.
- [26] A. R. Moura. Theoretical determination of ising-type transition by using the self-consistent harmonic approximation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 587:171267, 2023.
- [27] A. R. Moura. Effectiveness of the self-consistent harmonic approximation in ferromagnets with dipolar interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 562:169778, 2022.
- [28] G. C. Villela and A. R. Moura. Unveiling antiferromagnetic resonance: A comprehensive analysis via the self-consistent harmonic approximation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 606:172393, 2024.
- [29] N. David Mermin and Herbert Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Physical Review Letters*, 17(22):1133–1136, 1966.
- [30] Leon Balents. Spin liquids in frustrated magnets. *Nature*, 464:199–208, 2010.
- [31] Lucile Savary and Leon Balents. Quantum spin liquids: a review. *Reports on Progress in Physics*, 80(1):016502, 2016.
- [32] Antonio Sergio Teixeira Pires. *Theoretical Tools for Spin Models in Magnetic Systems*. IOP Publishing, 2021.
- [33] Assa Auerbach. *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Springer, 2012.
- [34] Jeffrey Goldstone. Field theories with “superconductor” solutions. *Il Nuovo Cimento*, 19(1):154–164, 1961.
- [35] Yoichiro Nambu and Giovanni Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Physical Review*, 122(1):345–358, 1961.
- [36] J. Villain. Quantum theory of one- and two-dimensional ferro- and antiferromagnets with an easy magnetization plane. i. ideal 1-d or 2-d lattices without in-plane anisotropy. *Journal de Physique*, 35(1):27–47, 1974.
- [37] Stephen W. Lovesey. *Theory of Neutron Scattering from Condensed Matter. Vol. 2: Polarization Effects and Magnetic Scattering*. Oxford University Press, 1984.
- [38] Andrii V. Chumak, Vitaliy I. Vasyuchka, Alexander A. Serga, and Burkard Hillebrands. Magnon spintronics. *Nature Physics*, 11(6):453–461, 2015.

- [39] D. Judge and J. T. Lewis. On the commutator $[l, z]$, φ . *Physics Letters*, 5(3):190–191, 1963.
- [40] D. Judge. On the uncertainty relation for angle variables. *Il Nuovo Cimento*, 31(2):332–340, 1964.
- [41] G. C. Villela and A. R. Moura. The quantum self-consistent harmonic approximation: A unified framework for quantum spin systems. *arXiv preprint arXiv:2511.01822*, 2025.
- [42] B. I. Halperin and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic theory of spin waves. *Physical Review*, 188(2):898–918, 1969.
- [43] E. B. Sonin. Spin currents and spin superfluidity. *Advances in Physics*, 59(3):181–255, 2010.
- [44] Houchen Chang, Peng Li, Wei Zhang, Tao Liu, Axel Hoffmann, Longjiang Deng, and Mingzhong Wu. Nanometer-thick yttrium iron garnet films with extremely low damping. *IEEE Magnetics Letters*, 5:1–4, 2014.
- [45] C. L. Jermain, H. Paik, S. V. Aradhya, R. A. Buhrman, D. G. Schlom, and D. C. Ralph. Low-damping sub-10-nm thin films of lutetium iron garnet grown by molecular-beam epitaxy. *Applied Physics Letters*, 109:192408, 2016.
- [46] Takahiro Moriyama, Kensuke Hayashi, Keisuke Yamada, Mutsuhiro Shima, Yutaka Ohya, and Teruo Ono. Intrinsic and extrinsic antiferromagnetic damping in nio. *Physical Review Materials*, 3:051402, 2019.
- [47] Wei Yuan, Qiong Zhu, Tang Su, Yunyan Yao, Wenyu Xing, Yangyang Chen, Yang Ma, Xi Lin, Jing Shi, Ryuichi Shindou, et al. Experimental signatures of spin superfluid ground state in canted antiferromagnet Cr_2O_3 via nonlocal spin transport. *Science Advances*, 4(4):eaat1098, 2018.
- [48] Stefan Klingler, A. V. Chumak, Tim Mewes, Behrouz Khodadadi, Claudia Mewes, Carsten Dubs, Oleksii Surzhenko, Burkard Hillebrands, and Andrés Conca. Measurements of the exchange stiffness of yig films using broadband ferromagnetic resonance techniques. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 48(1):015001, 2015.
- [49] M. A. Gilleo and S. Geller. Magnetic and crystallographic properties of substituted yttrium-iron garnet, $3\text{Y}_2\text{O}_3 \cdot x\text{M}_2\text{O}_3 \cdot (5-x)\text{Fe}_2\text{O}_3$. *Physical Review*, 110(1):73–78, 1958.
- [50] A. J. Princep, R. A. Ewings, S. Ward, S. Tóth, C. Dubs, D. Prabhakaran, and A. T. Boothroyd. The final chapter in the saga of yig. *arXiv preprint arXiv:1705.06594*, 2017.

-
- [51] Sergio M. Rezende. *Fundamentals of Magnonics*, volume 969. Springer, 2020.
- [52] Norberto Majlis. *The Quantum Theory of Magnetism*. World Scientific, 2007.
- [53] Naoto Nagaosa. *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. Springer, 2013.
- [54] Alex Goldman. *Handbook of Modern Ferromagnetic Materials*, volume 505. Springer, 2012.
- [55] Wolfgang Nolting and Anupuru Ramakanth. *Quantum Theory of Magnetism*. Springer, 2009.
- [56] G. Chauveau, C. Maury, F. Rabec, C. Heintze, G. Brochier, S. Nascimbene, J. Dalibard, J. Beugnon, S. M. Roccuzzo, and S. Stringari. Superfluid fraction in an interacting spatially modulated bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 130(22):226003, 2023.
- [57] E. B. Sonin. Superfluid spin transport in magnetically ordered solids. *Low Temperature Physics*, 46(5):436–447, 2020.
- [58] Alexander M. Polyakov. Interaction of goldstone particles in two dimensions. applications to ferromagnets and massive yang–mills fields. *Physics Letters B*, 59(1):79–81, 1975.
- [59] C. Burrowes, B. Heinrich, B. Kardasz, E. A. Montoya, E. Girt, Yiyang Sun, Young-Yeal Song, and Mingzhong Wu. Enhanced spin pumping at yttrium iron garnet/au interfaces. *Applied Physics Letters*, 100(9):092403, 2012.

APÊNDICE A – Estados coerentes de spin

Um estado coerente de spin $|\varphi, \theta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\Omega\rangle$ é obtido rotacionando o estado polarizado $|S, S\rangle$, de modo a alinhar o spin ao longo da direção especificada pelos ângulos polar e azimutal (θ, φ) , expressa por:

$$|\Omega\rangle = e^{-\varphi \hat{S}^z} e^{-i\theta \hat{S}^y} |S, S\rangle . \quad (\text{A.1})$$

Essa construção assegura que $|\Omega\rangle$ seja autoestado do operador de projeção de spin $\hat{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ com o valor máximo S , no qual $\boldsymbol{\Omega} = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))$ é o vetor unitário da esfera S^2 . Assim, o espaço de Hilbert é representado em termos do conjunto sobrecompleto de estados $\{|\Omega\rangle\}$, o qual obedece à relação de resolução da identidade:

$$\mathbb{I} = \frac{2S+1}{4\pi} \int d\Omega |\Omega\rangle \langle\Omega| , \quad (\text{A.2})$$

em que $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$ é o elemento de ângulo sólido. Essa propriedade possibilita expressar traços, valores médios e grandezas termodinâmicas como integrais sobre as variáveis contínuas (θ, φ) . Os operadores de spin assumem, nesse contexto, a forma simples $\langle\Omega|\hat{\mathbf{S}}|\Omega\rangle = S\boldsymbol{\Omega}$, indicando que o estado coerente descreve um vetor de spin de módulo S orientado ao longo de $\boldsymbol{\Omega}$. Tais características tornam os estados coerentes de spin uma ferramenta fundamental para a construção de integrais de caminho no espaço de spins.

Dessa forma, ao adotar o formalismo de tempo imaginário, os estados coerentes de spin permitem escrever a função de partição como uma integral de caminho,

$$Z = \int \mathcal{D}\Omega \left(e^{-\mathcal{A}/\hbar} \right) , \quad (\text{A.3})$$

onde a medida de integração é dada por $\mathcal{D}\Omega = \prod_i d\Omega_i$. A ação correspondente assume a forma:

$$\mathcal{A} = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[i\hbar \sum_i S_i^z \dot{\varphi}_i - H(\tau) \right] . \quad (\text{A.4})$$

Aqui, $H(\tau)$ denota o valor esperado $H(\tau) = \langle\Omega|\hat{H}|\Omega\rangle$.

Uma vez que o Hamiltoniano $\hat{H}$ é linear nos operadores de spin, $H(\tau)$ pode ser obtido substituindo-se o operador $\hat{\mathbf{S}}_i$ pelo campo clássico $\mathbf{S}_i^\alpha$. Vale ressaltar que operadores de spin não lineares não produzem valores médios idênticos aos correspondentes clássicos. Ainda assim, essa discrepância diminui com o aumento do módulo do spin S , o que viabiliza a aplicação desse método, ao menos de forma qualitativa, em sistemas que envolvem anisotropias de íon único, por exemplo.

APÊNDICE B – Valor médio das funções de correlação

Para a avaliação da função de correlação envolvendo operadores mistos, adotamos o teorema de Wick para o cálculo das médias dos operadores eletrônicos. Desse modo, o uso do teorema decorre da escolha do regime de pequenas perturbações e do tratamento em resposta linear adotado neste trabalho, no qual o acoplamento entre os operadores eletrônicos e magnéticos é considerado fraco. Portanto:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{ij}^{-+}(0) &= \langle A_{ikp}^\dagger(0) A_{jkp} \rangle_0 \\ &= \sum_{kp} \int dt \left[\langle S_i^-(t) S_j^-(0) \rangle_{cs} \langle c_{k\uparrow}^\dagger(t) c_{k\uparrow}(0) \rangle_0 \langle c_{p\downarrow}(t) c_{p\downarrow}^\dagger(0) \rangle_0 \right] e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\Delta\mathbf{r}_\perp}.\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

em que, $\Delta\mathbf{r}_\perp = (y_j - y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z_j - z_i)\hat{\mathbf{z}}$, e passamos a definir a correlação entre spins por $D_{ij}^{-+}(t) = \langle S_i^-(t) S_j^-(0) \rangle_{cs}$. Ademais, passando o somatório para o limite contínuo,

$$\frac{1}{V_e} \sum_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

onde V_e representa o volume eletrônico. Simplificando os termos $f_{k\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} f(\nu_{k\sigma})$ e manipulando a integral em coordenadas esféricas, temos:

$$\tilde{F}_{ij}^{-+}(0) = \frac{V_e^2}{(2\pi)^6} \int \int d^3k d^3p \left[k^2 p^2 f_{k\uparrow} (1 - f_{p\downarrow}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\Delta\mathbf{r}_\perp} \right] \int d\nu \left[\tilde{D}_{ij}^{-+}(\nu) \delta(\nu - \nu_k + \nu_p) \right], \quad (\text{B.2})$$

onde a parte angular da integral fornece como resultado:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-ik\Delta r \cos\theta} = 4\pi \frac{\text{sen}(k\Delta r)}{k\Delta r} = 4\pi \text{sinc}(k\Delta r), \quad (\text{B.3})$$

aproximamos $\text{sinc}^2(k_F \Delta r) \simeq \delta_{ij}$, uma vez que a função $\text{sinc}(k_F \Delta r)$ é fortemente localizada em torno de $\Delta r = 0$ e decai rapidamente para separações espaciais maiores que a escala de comprimento de onda de Fermi $\hbar/k_F$. Além disso, tomamos $k \simeq k_F$, uma vez que, em modelos eletrônicos usuais, os processos físicos relevantes são dominados por estados próximos à superfície de Fermi, que define a escala característica de momento do sistema. Dessa forma:

$$\tilde{F}_{ii}^{-+}(0) = \frac{\hbar V_e^2 \delta_{ij}}{4\pi^4} \int d\nu \frac{\tilde{D}_{ii}^{-+}(\nu)}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dp \left[k^2 p^2 (f_{p\downarrow} - f_{k\uparrow}) \delta(\hbar\nu - \xi_{k\uparrow} + \xi_{p\downarrow} - \Delta\mu) \right], \quad (\text{B.4})$$

no qual $\xi_{k\sigma} = \hbar\nu_{k\sigma}$. Outrossim, usando a relação de dispersão $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$, reescrevemos a integral no espaço de momentos como uma integral em energia. Isso leva naturalmente à:

$$k^2 dk = \frac{\sqrt{2\epsilon} m^{3/2}}{\hbar^3} d\epsilon = \frac{\pi^2}{V_e} \rho(\epsilon) d\epsilon, \quad (\text{B.5})$$

em que, podemos definir a densidade de estados eletrônicos como:

$$\rho(\epsilon) \simeq \rho_F = \frac{mV_e k_F}{\pi^2 \hbar^2}, \quad (\text{B.6})$$

o que nos fornece:

$$\tilde{F}_{ij}^{-+}(0) = \frac{\hbar\delta_{ij}\rho_F}{4} \int d\nu \left[\frac{\hbar\nu - \Delta\mu}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \tilde{D}^{-+}(\nu) \right] \int d\epsilon [f(\xi_{k\uparrow} - \hbar\nu + \Delta\mu) - f(\xi_{k\uparrow})]. \quad (\text{B.7})$$

No regime de baixas temperaturas, podemos realizar a seguinte aproximação:

$$f(\xi - \Delta\xi) \approx f(\xi) - \Delta\xi \delta(\xi). \quad (\text{B.8})$$

Então, encontramos como resultado:

$$\tilde{F}_{ij}^{-+}(0) = \frac{\hbar\delta_{ij}\rho_F}{4} \int d\nu \left[\frac{\hbar\nu - \Delta\mu}{e^{\beta(\hbar\nu - \Delta\mu)} - 1} \tilde{D}^{-+}(t) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Desse modo, com o intuito de calcular a correlação entre os spins em $D_{ij}^{-+}(t)$, utilizamos a representação de Villain, para pequenos valores de δS_j^z . Assim,

$$S_j^+ = e^{i\delta\varphi_j} \sqrt{\tilde{S}^2 - \delta S_j^z (\mathbb{I} + \delta S_j^z)} \simeq \tilde{S} e^{i\delta\varphi_j}. \quad (\text{B.10})$$

Dessa maneira, levando em conta δ_{ij} na equação acima, temos:

$$D_{ii}^{-+}(t) \simeq \tilde{S}^2 \langle e^{-i(\delta\varphi_i(t) - \delta\varphi_j(0))} \rangle_0 = \tilde{S}^2 e^{-\frac{1}{2} \langle (\delta\varphi_i(t) - \delta\varphi_j(0))^2 \rangle_0}, \quad (\text{B.11})$$

onde, adotamos a distribuição Gaussiana para calcular a média do ângulo. Logo, realizando a soma $D^{-+}(t) = \sum_i D_{ii}(t)$ e considerando a aproximação $\Delta\varphi \ll 1$, obtemos:

$$D^{-+}(t) = \sum_i \tilde{S}^2 \left(1 - \frac{\rho}{2} \langle (\delta\varphi_i(t) - \delta\varphi_j(0))^2 \rangle_0 \right). \quad (\text{B.12})$$

Finalmente,

$$D^{-+}(t) = N\tilde{S}^2 - \frac{1}{2Jz} \sum_q \frac{\hbar\omega_q}{(1 - \gamma_q)} \left[(2n_q + 1) - n_q e^{i\omega_q t} - (n_q + 1) e^{-i\omega_q t} \right], \quad (\text{B.13})$$

cuja transformada de Fourier nos fornece:

$$\tilde{D}^{-+}(\nu) = 2\pi N \tilde{S}^2 \delta(\nu) - \frac{\pi}{J \tilde{S}^2 z \rho} \sum_q \frac{\hbar \omega_q}{(1 - \gamma_q)} [(2n_q + 1)\delta(\nu) - n_q \delta(\nu + \omega_q) - (n_q + 1)\delta(\nu - \omega_q)] . \quad (\text{B.14})$$

Assim, substituindo a equação (Referências BibliográficasD-+fourier) em (Referências BibliográficasF-+apendice), podemos obter uma forma final para a correlação, escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ij}^{-+}(0) = \frac{\hbar \delta_{ij} \rho_F}{4} e^{\beta \Delta \mu} n(\Delta \mu) & \left\{ 2\pi N \tilde{S}^2 \Delta \mu - \frac{\pi}{J z} \sum_q \frac{\epsilon_q}{1 - \gamma_q} \left[\Delta \mu + (\epsilon_q + \Delta \mu) n(\epsilon_q + \Delta \mu) \right. \right. \\ & \left. \left. - (\epsilon_q - \Delta \mu) n(\epsilon_q - \Delta \mu) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

com $\epsilon_q = \hbar \omega_q$.