

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA**

**O Quociente dos Números de Milnor e Tjurina de Hipersuperfícies com  
Singularidades Isoladas**

Larissa de Jesus Cabral  
*Magister Scientiae*

**VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2025**

**LARISSA DE JESUS CABRAL**

**O Quociente dos Números de Milnor e Tjurina de Hipersuperfícies com Singularidades Isoladas**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Diogo da Silva Machado

**VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

C117q  
2025 Cabral, Larissa de Jesus, 1992-  
O quociente dos números de Milnor e Tjurina de  
hipersuperfícies com singularidades isoladas / Larissa de Jesus  
Cabral. – Viçosa, MG, 2025.  
1 dissertação eletrônica (44 f.)

Orientador: Diogo da Silva Machado.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,  
Departamento de Matemática, 2025.  
Referências bibliográficas: f. 42-44.  
DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2025.443>  
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Funções holomórficas. 2. Invariantes. I. Machado, Diogo  
da Silva, 1983-. II. Universidade Federal de Viçosa.  
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.98

**LARISSA DE JESUS CABRAL**

**O Quociente dos Números de Milnor e Tjurina de Hipersuperfícies com Singularidades Isoladas**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de junho de 2025.

Assentimento:

---

Larissa de Jesus Cabral  
Autora

---

Diogo da Silva Machado  
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pela autora em 04/07/2025 às 09:41:52 e pelo orientador em 04/07/2025 às 10:13:41. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **O5QH.GKXW.DY2P** e clique no botão 'Validar documento'.

Dedico este trabalho à minha mãe Maria de Fátima (*in memoriam*), cuja presença, mesmo na ausência, continua sendo minha maior fonte de força e inspiração

## **AGRADECIMENTOS**

Chegar até aqui foi um percurso repleto de desafios, aprendizados e, sobretudo, de apoio. Por isso, é com profunda gratidão que registro aqui meus agradecimentos:

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

À minha família, em especial meus tios Rodrigo, Noélia e Cândida e minha madrinha Dalma que me apoiaram e estiveram ao meu lado. O carinho e a força de vocês fizeram toda a diferença;

As minhas amigas Beatriz, Eliara, Paula e Rebeca pelo carinho constante e pelas palavras de incentivo;

Ao professor Oscar agradeço pelas contribuições valiosas, pelas reflexões instigantes e pelo apoio ao longo do percurso acadêmico;

Ao meu orientador, expressei minha gratidão pela orientação, pela paciência e pelo comprometimento com meu desenvolvimento acadêmico e pessoal;

Aos meus colegas de trabalho, em especial a Euclides pela compreensão, apoio e companheirismo ao longo deste período.

"As escolhas mais difíceis requerem as vontades mais fortes." (Thanos)

## RESUMO

CABRAL, Larissa de Jesus, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, junho de 2025.  
**O Quociente dos Números de Milnor e Tjurina de Hipersuperfícies com Singularidades Isoladas.** Orientador: Diogo da Silva Machado.

Nesse trabalho vamos considerar o número de Milnor e o número de Tjurina de uma hipersuperfície com singularidade isolada. Vamos tratar o problema de encontrar um limitante superior para o quociente entre o número de Milnor e o número de Tjurina em uma singularidade isolada.

Palavras-chave: funções holomorfas; anel de germe de funções; invariantes analíticos

## ABSTRACT

CABRAL, Larissa de Jesus, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, June, 2025. **The Quotient of the Milnor and Tjurina Numbers of Hypersurfaces with Isolated Singularities.** Adviser: Diogo da Silva Machado.

In this work, we consider the Milnor number and the Tjurina number of a hypersurface with an isolated singularity. We address the problem of finding an upper bound for the ratio between the Milnor number and the Tjurina number at an isolated singularity.

Keywords: holomorphic functions; germ ring of functions; analytic invariants

# Sumário

|          |                                      |           |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                    | <b>9</b>  |
| 1.0.1    | Breve relato histórico               | 11        |
| <b>2</b> | <b>PRELIMINARES</b>                  | <b>15</b> |
| 2.1      | Módulos e Álgebras                   | 15        |
| 2.2      | Função Holomorfa de uma variável     | 17        |
| 2.3      | Função Holomorfa de várias variáveis | 18        |
| 2.4      | Germe de Função Holomorfa            | 18        |
| 2.5      | Subvariedades Analíticas             | 19        |
| 2.6      | Germe de Subvariedades Analíticas    | 20        |
| 2.7      | O Número de Milnor                   | 22        |
| 2.8      | O Número de Tjurina                  | 23        |
| <b>3</b> | <b>TEOREMA PRINCIPAL</b>             | <b>26</b> |
| <b>4</b> | <b>APLICAÇÃO</b>                     | <b>41</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>                   | <b>42</b> |

# 1 Introdução

O número de Milnor de uma singularidade isolada de uma hipersuperfície analítica foi concebida por J. Milnor [22]. Este conceito foi posteriormente generalizado por diversos autores em diferentes contextos. Hann [17] estendeu os resultados de Milnor para uma interseção completa com singularidade isolada, e posteriormente Greuel [13] e Lê [21] - de forma independente - obtiveram uma definição algébrica para o número de Milnor, em termos das derivadas parciais das equações de definição da subvariedade analítica em questão. Mais recentemente, A. Parusinski [24] estendeu a noção de número de Milnor para hipersuperfícies com singularidades não isoladas, obtendo uma fórmula para este invariante, em termos das classes de Chern da variedade ambiente e da característica de Euler da hipersuperfície.

Por outro lado, temos também o número de Tjurina, um conceito que remonta os trabalhos de Galina N. Tjurina [27], o qual constitui um invariante analítico para singularidades isoladas de germes funções holomorfas. É interessante observar que o nome “número de Tjurina” foi cunhado posteriormente, por Greuel [13], em homenagem a Galina N. Tjurina, para determinar a dimensão do espaço base da deformação semi-universal de uma singularidade isolada.

Para tratarmos com um pouco mais de precisão estes dois conceitos, denotemos por  $O_n$  o conjunto de germes de funções holomorfas em  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Observamos que  $O_n$  tem estrutura natural de anel comutativo com as respectivas operações induzidas pela adição e multiplicação de funções. Além disso, com essa estrutura, o anel  $O_n$  constitui um domínio de integridade de fatoração única. Outra importante propriedade do anel  $O_n$  é o fato de que o mesmo seja também um anel Noetheriano, ou seja, todo ideal em  $O_n$  é finitamente gerado.

Agora, seja  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$  um germe de hipersuperfície com singularidade isolada na origem, definida por  $f \in O_n$ , e considere o seu ideal jacobiano

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle = \left\{ a_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \in O_n : a_1, \dots, a_n \in O_n \right\}.$$

A dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle},$$

denotada por  $\mu(f)$ , é chamada de número de Milnor de  $f$  (em 0). Existem na literatura diferentes caracterizações deste conceito, por exemplo: o número de Milnor coincide com o número de pontos críticos em uma morsificação de  $f$  e também é igual ao grau da aplicação diferencial  $df$  na origem.

Por outro lado, o número de Tjurina de  $f$  (em 0), denotado por  $\tau(f)$ , é a dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ , ou seja,  $\tau(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ .

Evidentemente que a inclusão  $\langle J_f \rangle \subset \langle J_f, f \rangle$  nos diz que  $0 \leq \tau(f) \leq \mu(f)$  e, portanto, temos a seguinte desigualdade

$$1 \leq \frac{\mu(f)}{\tau(f)}.$$

Além disso, K. Saito [25] mostrou que a igualdade

$$1 = \frac{\mu(f)}{\tau(f)}$$

ocorre se, e somente se,  $f$  quasi-homogênea.

**Uma questão natural é:** *Qual seria um limitante superior para o quociente  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)}$ ?*

A. Dimca e G.-M. Greuel [10] mostraram que o limite superior  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)} \leq 2$  nunca pode ser alcançado, no caso de curvas planas com singularidades isoladas (a menos que a curva seja suave na origem). Além disso, estes autores obtiveram uma sequência de curvas planas, com singularidades isoladas, cujas razões  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)}$  definem uma sequência estritamente crescente, tendendo à  $4/3$ . Com base nesses cálculos, eles perguntaram se o número  $4/3$  constitui uma cota superior, para qualquer curva plana com singularidade isolada. Respostas parciais, de alguns casos específicos, foram obtidas em [5], [7], [15] e a resposta definitiva foi dada por P. Almirón [6], provando que o número  $4/3$  é de fato uma cota superior para o quociente  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)}$  (para o caso de curvas planas).

Para o caso geral, considerando-se hipersuperfícies com singularidades isoladas sobre  $\mathbb{C}^n$ , Liu [19] foi o primeiro a encontrar um limitante superior para o quociente  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)}$ . Mais precisamente, ele provou o seguinte resultado:

**Teorema 1.0.1** (Liu, [19]). *Seja  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$  um germe de hipersuperfície com singularidade isolada na origem, definida por  $f \in O_n$ . Então,*

$$\frac{\mu(f)}{\tau(f)} \leq n.$$

Como aplicação do Teorema (1.0.1), Liu [19] obteve um limitante inferior para o número de Tjurina  $\tau(f)$  em termos da multiplicidade  $m$  de  $f$  na origem. Mais precisamente:

**Corolário 1.0.2** (Liu, [19]). *Assuma que  $f \in O_n$  é um germe de função holomorfa com uma única singularidade isolada na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Então,*

$$\tau(f) \geq \frac{(m-1)^n}{n},$$

onde  $m$  é a multiplicidade de  $f$  na origem.

O objetivo principal desta dissertação é abordar o problema de limitar o quociente  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)}$ , para uma hipersuperfície com singularidade isolada na origem de  $\mathbb{C}^n$ . Para tal, vamos nos concentrar no trabalho de Liu[19] e nos resultados que foram apresentados ali.

Cabe frisar que o conceito de número de Milnor foi adaptado à teoria de folheações holomorfas singulares, sendo, por exemplo, usado na descrição dos resíduos dessas folheações (ver [9]). Mais recentemente, inspirado no número de Tjurina, um novo invariante também foi concebido na teoria de resíduos de folheações (ver [11]).

Diante disso, no primeiro capítulo, apresenta-se uma introdução com o contexto histórico e a motivação para o estudo desses invariantes, destacando suas origens e relevância na geometria e na topologia. O segundo capítulo é dedicado às preliminares necessárias para a compreensão do tema, abordando conceitos fundamentais como módulos e álgebras, germes de funções holomorfas, subvariedades analíticas, bem como a definição formal dos números de Milnor e Tjurina.

No terceiro capítulo, é apresentado e demonstrado lemas e teoremas que deram subsídios para a demonstração do teorema principal da dissertação:

**Teorema Principal:** Seja  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$  um germe de hipersuperfície com singularidade isolada na origem, definida por  $f \in O_n$ . Então,

$$\frac{\mu(f)}{\tau(f)} \leq n.$$

Estabelecendo uma relação importante entre esses invariantes no contexto de hipersuperfícies com singularidade isolada. Por fim, no quarto e último capítulo, discutem-se algumas aplicações apresentando uma cota inferior para os números de Milnor e Tjurina, em particular, discutem-se condições sob os quais atingem seus valores mínimos possíveis reforçando a importância desses invariantes na análise local de hipersuperfícies singulares.

### 1.0.1 Breve relato histórico

Será apresentada um breve relato da trajetória de dois matemáticos notáveis: Galina Nikolaevna Tjurina e John Willard Milnor, cujas contribuições tiveram grande

impacto no desenvolvimento da geometria algébrica, da teoria das singularidades e da topologia. Embora tenham atuado em contextos históricos e geográficos distintos, ambos se destacaram por sua originalidade, profundidade e influência duradoura na matemática do século XX. A seguir, exploraremos suas histórias de vida, descobertas marcantes e o legado deixado por suas pesquisas.

John Willard Milnor é um dos matemáticos mais influentes do século XX e início do XXI, conhecido por suas contribuições profundas em diversas áreas da Matemática, especialmente topologia diferencial, geometria e teoria dos números. Estudou na Princeton University, onde também obteve seu doutorado em 1954 sob a orientação de Ralph Fox, um especialista em topologia.

Também conhecido por sua contribuição à topologia diferencial, Milnor começou a investigar como a topologia local de um espaço singular pode ser entendida por meio de ferramentas combinatórias e algébricas. Sua abordagem uniu ideias da análise complexa, geometria diferencial e topologia algébrica.

John Willard Milnor mostrou que existem esferas de 7 dimensões que são homeomorfas (mesma estrutura topológica) à esfera padrão  $S^7$ , mas não difeomorfas a ela, ou seja, possuem diferentes estruturas suaves, o que levou à criação do conceito de esferas exóticas, revolucionando a topologia diferencial. Milnor contribuiu para a teoria dos nós, estudando invariantes que distinguem nós diferentes e fez avanços importantes na K-teoria, uma área que conecta álgebra, topologia e geometria.

Além disso, ele mostrou que próximo a uma singularidade isolada, a função  $f$  define um fibrado local, conhecido como fibrado de Milnor que exibe uma estrutura topológica rica e invariantes computáveis. O número de Milnor foi conhecido como um invariante desse fibrado, contando os ciclos independentes (geradores) no espaço de cohomologia desse fibrado.

O número de Milnor foi formalmente introduzido no livro “Singular Points of Complex Hypersurfaces” ver [22]. Nesse trabalho, John Milnor estudou singularidades de funções analíticas complexas  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , focando em singularidades isoladas, ou seja, aquelas para as quais há um único ponto crítico num domínio pequeno em torno da origem.

Milnor demonstrou que esse número é igual a dimensão do espaço vetorial denotado por  $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{J_f}$ , onde  $O_n$  é o conjunto de germes na origem de funções holomorfas e  $J_f$  é o ideal de  $O_n$  gerado pelos germes em 0 das derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Além disso, Milnor observou que o número  $\mu$  possui interpretações importantes, para a topologia em que  $\mu$  é o número de ciclos no espaço do fibrado de Milnor

que colapsam quando a singularidade é removida. Já Algebricamente  $\mu$  mede a complexidade do anel jacobiano da singularidade e, geometricamente está relacionado à multiplicidade da singularidade e ao comportamento local da subvariedade analítica, especificamente a hipersuperfície definida por  $V(f) = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\} = f^{-1}(0)$ , onde  $f$  é uma função holomorfa.

Já Galina Nikolaevna Tjurina viveu até os trinta e dois anos, estudou na Faculdade de Mecânica e Matemática e enquanto era estudante experimentou suas habilidades em teoria dos números, teoria dos jogos, topologia, grupos de Lie e teoria das variedades analíticas homogêneas. Após se formar na universidade, Galina Nikolaevna interessou cada vez mais pela geometria algébrica, área na qual trabalhou até o fim da sua vida. Nessa área ela sentiu especialmente atraída por um ramo da geometria algébrica que estuda as variedades definidas sobre o campo dos números complexos, utilizando para isso ferramentas da análise e da topologia.

Durante sua vida estudou profundamente superfícies K3, variedades complexas de dimensão 2 com classe de Chern zero. Demonstrou que, localmente, uma superfície K3 é determinada unicamente pelos períodos de sua forma holomorfa de grau dois. Além disso, investigou pontos singulares racionais em variedades algébricas e desenvolveu critérios para sua rigidez, ou seja, quando uma singularidade é determinada unicamente por suas características topológicas locais. Estendeu esses resultados a singularidades triplas, sendo a primeira a mostrar que certas classes de singularidades não admitiam deformações não triviais.

Então, Galina Nikolaevna desenvolveu uma série de trabalhos notáveis e dedicou-se à Matemática com um entusiasmo impressionante, colocando nela toda a energia de sua alma. Mais informações sobre a obra de Tjurina podem ser encontradas em [1].

Uma de suas contribuições foi o denominado número de Tjurina, que é definido como  $\tau = \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ , onde  $O_n$  é o conjunto de germes na origem de funções holomorfas e  $\langle J_f, f \rangle$  é o ideal de  $O_n$  gerado pelos germes em 0 das derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  e a função  $f$ . Portanto, o número de Tjurina mede a dimensão do espaço vetorial associado à singularidade que combina informações sobre o ideal Jacobiano (gerado pelas derivadas parciais de  $f$ ) e a função  $f$ .

Portanto, tanto o número de Tjurina quanto o número de Milnor desempenha um papel essencial em diversos contextos, por exemplo, na classificação de singularidades  $\tau$  refina a classificação fornecida por  $\mu$ , permitindo distinguir entre singularidades com a mesma topologia, mas diferentes estruturas algébricas. Já na Teoria de Deformações  $\tau$  mede o número de parâmetros necessários para descrever uma deformação miniversal da singularidade. Em Geometria Algébrica, o número de Tjurina está relacionado à resolução de singularidades e ao estudo do esquema de singularidades.

E, o número de Milnor forneceu ferramentas práticas e conceituais para estudar singularidades em diversas áreas, como por exemplo, em Geometria algébrica relaciona-se com a resolução de singularidades, em Sistemas dinâmicos complexos ajuda a entender bifurcações e mudanças estruturais, em Física modela fenômenos críticos em sistemas físicos e em teoria dos invariantes contribui para a classificação e análise de singularidades.

## 2 Preliminares

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos necessários para o desenvolvimento de tópicos mais avançados que serão abordados posteriormente. As referências básicas para este capítulo são [4], [12], [31], [32] e [33].

### 2.1 Módulos e Álgebras

Vamos apresentar alguns conceitos básicos de Álgebra Comutativa que são utilizados ao longo da dissertação. Esperamos que o leitor já tenha familiaridade com os conceitos de Anel, Ideais e Espaços Vetoriais.

**Definição 1.** *Seja  $R$  um anel. Um grupo abeliano aditivo  $A$  dotado de uma multiplicação por escalar*

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (r, a) &\longrightarrow ra\end{aligned}$$

*é um  $R$ -módulo à esquerda se satisfaz os seguintes axiomas, para quaisquer  $r, s \in R$  e  $a, b \in A$ :*

- $(i) = r(a + b) = ra + rb$
- $(ii) = (r + s)a = ra + sa$
- $r(sa) = (rs)a$

Se  $R$  é um anel com elemento unidade  $1$  e  $1a = a$  para todo  $a \in A$ , então  $A$  é dito um  $R$ -módulo unitário.

**Definição 2.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois módulos sobre um anel  $R$ . Uma função  $f : A \longrightarrow B$  é um homomorfismo de  $R$ -módulos ou  $R$ -homomorfismos desde que para todos  $a, c \in A$  e  $r \in R$ :*

- $f(a + c) = f(a) + f(c)$
- $f(ra) = rf(a)$

**Definição 3.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois  $R$ -módulos e  $f : A \longrightarrow B$  um  $R$ -homomorfismo. Então:*

- (i) O conjunto

$$\text{Ker}(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$$

é chamado de núcleo de  $f$ .

- (ii) O conjunto

$$\text{Im}(f) = \{b \in B : f(a) = b, \text{ para todo } a \in A\}$$

**Teorema 2.1.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois  $R$ -módulos e  $f : A \rightarrow B$  um  $R$ -homomorfismo. Então*

$$\frac{A}{\text{Ker}(f)} \approx \text{Im}(f)$$

**Definição 4.** *Sejam  $F, G, H$  três  $R$ -módulos,  $f : F \rightarrow G$  e  $g : G \rightarrow H$  homomorfismos. Dizemos que o diagrama*

$$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$$

é uma seqüência de 2ª ordem em  $G$  se  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ . Em particular, se  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ , dizemos que o diagrama é uma seqüência exata em  $G$ .

**Definição 5.** *Uma seqüência finita de homomorfismos de módulos*

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

é exata quando  $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

**Definição 6.** *Uma seqüência infinita de homomorfismos de módulos*

$$\dots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots$$

é exata quando  $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ , para  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Observação.** *Sejam  $0 = \{0\}$  um  $R$ -módulo nulo e  $f : E \rightarrow F$  um  $R$ -homomorfismo. A seqüência*

$$0 \xrightarrow{0} E \xrightarrow{f} F$$

é exata, se e somente se,  $f$  é um monomorfismo.

**Observação.** *A seqüência*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{0} 0$$

é exata, se e somente se,  $f$  é um epimorfismo.

**Definição 7.** *Chamamos de seqüência exata curta a toda seqüência exata da forma*

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \rightarrow 0$$

Note que  $f$  é um monomorfismo e  $g$  é um epimorfismo.

**Definição 8.** *Seja  $K$  um anel comutativo com identidade. Uma  $K$ -álgebra  $A$  (ou álgebra sobre  $K$ ) é um anel  $A$  tal que:*

- (i)  $(A, +)$  é um módulo  $K$  unitário (esquerda);
- (ii)  $k(ab) = (ka)b = a(kb)$  para todos  $k \in K$  e  $a, b \in A$ ;

Uma  $K$ -álgebra  $A$  que, como anel, é um anel de divisão, que é chamada de álgebra de divisão.

Sabemos que a teoria clássica das Álgebras trata de Álgebras sobre um corpo  $K$ . Essa Álgebra é um espaço vetorial sobre  $K$  e, com isso vários resultados da Álgebra Linear são aplicáveis. Uma Álgebra sobre um corpo  $K$  que possui dimensão finita como um espaço vetorial sobre  $K$  é chamada de Álgebra de dimensão finita sobre  $K$ .

## 2.2 Função Holomorfa de uma variável

**Definição 9.** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida no aberto  $A \subset \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é uma função holomorfa em  $A$  se  $f'(z)$  existe para todo ponto  $z \in A$ , onde*

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

O número  $f'(z)$  quando existe é chamado de derivada de  $f$  em  $z$ .

Dada uma função  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , para cada  $z = x + iy \in A$ , podemos escrever  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  onde  $u$  e  $v$  são funções reais de duas variáveis reais. Da teoria, sabemos que  $f$  é uma função holomorfa em  $A$  se, e somente se,  $f$  é contínua e as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

em todos os pontos  $z = x + iy \in A$ .

**Exemplo 2.2.1.** *A função exponencial  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \exp(z)$  onde*

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

*é uma função contínua que  $u(x, y) = e^x \cos(y)$  e  $v(x, y) = e^x \sin(y)$  e, além disso, satisfaz as Condições de Cauchy-Riemann. Portanto é holomorfa em todo  $\mathbb{C}$ .*

## 2.3 Função Holomorfa de várias variáveis

**Definição 10.** Dada uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $U \subset \mathbb{C}^n$  aberto, dizemos que  $f$  é parcialmente holomorfa se, para cada ponto  $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$  e cada  $j = 1, \dots, n$  a função de uma variável definida por

$$z_j \rightarrow f(p_1, \dots, p_{j-1}, z_j, p_{j+1}, \dots, p_n)$$

é holomorfa. Se  $f$  é parcialmente holomorfa e contínua, dizemos que  $f$  é holomorfa.

**Definição 11.** Um subconjunto  $U \subset \mathbb{C}^n$  é chamado domínio se  $U$  é aberto e conexo.

**Definição 12.** Um aplicação  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ , onde  $U$  é um domínio em  $\mathbb{C}^n$  é holomorfa se cada componente  $f_j$  for uma função holomorfa. Se, além disso,  $f$  for uma bijeção e a  $f^{-1}$  for holomorfa, então  $f$  é um biholomorfismo.

**Observação.** Existem outras definições equivalentes para funções holomorfas de várias variáveis. Em algumas ocasiões, este conceito é estabelecido usando-se séries de potências convergentes, como por exemplo em [12].

**Definição 13.** Se  $f$  é uma aplicação holomorfa de um conjunto aberto  $D \subset \mathbb{C}^n$  em  $\mathbb{C}^m$ , podemos escrever  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , com cada  $f_i$  sendo funções holomorfas em  $D$ . A matriz

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n}(a) \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz Jacobiana de  $f$  em  $a$ .

**Definição 14.** Dizemos que um ponto  $a \in D$  é um ponto regular de  $f$  se o posto da matriz Jacobiana  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(a)$  for máximo. Caso contrário, dizemos que  $a$  é um ponto crítico (ou singular) de  $f$ .

## 2.4 Germe de Função Holomorfa

Para o estudo de funções holomorfas definidas numa vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^n$  vamos considerar o conceito de germes de funções.

Seja  $H$  o conjunto de funções holomorfas em alguma vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Definimos uma relação  $\sim$  em  $H$  da seguinte forma. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções em  $H$ , dizemos que  $f \sim g$ , se houver uma vizinhança  $U$  de  $0$  tal que as restrições de  $f$  e  $g$  para  $U$  são idênticas. A classe de equivalência da função  $f$  é chamado de germe de  $f$  em  $0$ .

**Definição 15.** O conjunto quociente por esta relação de equivalência é denotado por  $O_n$

$O_n$  tem estrutura de Anel Comutativo com as respectivas operações induzida pela adição e multiplicação de funções. Com essa estrutura, o anel  $O_n$  constitui um domínio de integridade de fatoração única. Outra importante propriedade do anel  $O_n$  é o fato de que o mesmo é um anel Noetheriano, ou seja, todo ideal em  $O_n$  é finitamente gerado (ver [33]).

## 2.5 Subvariedades Analíticas

**Definição 16.** Seja  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}^n$  e  $V$  um subconjunto de  $D$ . Dizemos que  $V$  é uma subvariedade analítica em  $D$  se, para qualquer ponto  $p$  em  $D$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e um número finito de funções holomorfas  $f_1, \dots, f_r$  em  $U$  tais que

$$V \cap U = \{q \in U : f_1(q) = \dots = f_r(q) = 0\}.$$

Chamamos  $(f_1, \dots, f_r)$  de um sistema de funções locais de  $V$  e  $f_1 = f_2 = \dots = f_r = 0$  equações locais para  $V$  em  $p$ .

**Definição 17.** Seja  $V$  é um subconjunto fechado em  $D$ .  $V$  é uma subvariedade analítica em  $D$ , se e somente se, cada ponto  $p_0$  em  $V$  admite uma vizinhança  $U$  com as propriedades da definição de subvariedade analítica.

**Definição 18.** Uma subvariedade analítica não-vazia que é definida localmente por uma única função holomorfa (não identicamente nula) é chamada de hipersuperfície.

**Definição 19.** Seja  $V$  uma subvariedade analítica. Um ponto  $p$  em  $V$  é chamado de ponto regular de  $V$  se existe um sistemas de funções locais  $(f_1, \dots, f_r)$  definindo  $V$  em uma vizinhança de  $p$  tal que  $p$  é um ponto regular da função  $f = (f_1, \dots, f_r)$ . Dizemos que  $p$  é um ponto singular se  $p$  não é um ponto regular. O conjunto dos pontos regulares de  $V$  será denotado por  $Reg(V)$  e o conjunto dos pontos singulares de  $V$  será denotado por  $Sing(V)$ .

**Exemplo 2.5.1.** Considere  $\mathbb{C}^2$  com coordenadas  $(z_1, z_2)$  e sejam

$$f(z_1, z_2) = z_1 z_2$$

e

$$V = \{(z_1, z_2) : f(z_1, z_2) = 0\}$$

Assim,  $V$  consiste de duas linhas complexas que se interceptam em  $\mathbb{C}^2$  apenas na origem  $(0,0)$ .

$$Jf(z_1, z_2) = \left( \frac{\partial f}{\partial z_1} \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Note que

$$\text{Reg}(V) = V - \{(0,0)\}$$

e

$$\text{Sing}(V) = \{(0,0)\}$$

**Exemplo 2.5.2.** Considere  $\mathbb{C}^3$  com coordenadas  $(z_1, z_2, z_3)$  e seja  $V$  a subvariedade analítica (hipersuperfície) definida pela função

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2^2 - z_3^2.$$

Temos,

$$Jf(z_1, z_2, z_3) = \left( \frac{\partial f}{\partial z_1} \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} \quad \frac{\partial f}{\partial z_3} \right) = \begin{pmatrix} z_2^2 & 2z_1 z_2 & -2z_3 \end{pmatrix}$$

Note que a Matriz Jacobiana tem posto máximo quando  $z_2 \neq 0$  ou  $z_3 \neq 0$ . Então

$$\text{Reg}(V) = \{(z_1, z_2, z_3) : z_2 \neq 0 \text{ ou } z_3 \neq 0\}$$

Agora note,

$$\begin{cases} z_2^2 = 0 \\ 2z_1 z_2 = 0 \\ -2z_3 = 0 \end{cases}$$

Então

$$\text{Sing}(V) = \{(z_1, z_2, z_3) : z_2 = z_3 = 0\}$$

## 2.6 Germe de Subvariedades Analíticas

No conjunto de subconjuntos de  $\mathbb{C}^n$ , vamos considerar a seguinte relação de equivalência: dizemos que dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{C}^n$  são equivalentes se existe uma vizinhança  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^n$  tal que

$$A \cap U = B \cap U.$$

Neste caso, denotamos  $A \sim B$ . Além disso, a classe de equivalência de um subconjunto  $A$  é chamada de germe de  $A$  em  $0$  e será denotada também por  $A$ .

Observamos que para dois germes  $A$  e  $B$  em  $0$ , estão bem definidas as operações

$$A \cap B, A \cup B, A - B, A \subset B$$

usuais de conjuntos.

Sejam  $f_1, \dots, f_r$  germes de  $O_n$ . Escolhemos uma vizinhança  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^n$  tal que esses germes são representados por funções holomorfas em  $U$ , que também denotamos por  $f_1, \dots, f_r$ . Definimos o germe de subvariedade analítica definida por  $f_1, \dots, f_r$ , denotada por  $V(f_1, \dots, f_r)$ , como sendo o germe do subconjunto

$$\{z \in U : f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$$

em 0.

Seja  $I$  um ideal em  $O_n$ . Pela propriedade Noetheriana de  $O_n$ , existe um número finito de germes  $f_1, \dots, f_r$  tal que

$$I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

(o ideal gerado por  $f_1, \dots, f_r$ ). Definimos

$$V(I) = V(f_1, \dots, f_r)$$

e chamamos de germe de subvariedade analítica definida por  $I$ .

Reciprocamente, seja um germe  $V$  de uma subvariedade analítica na origem. Escolhemos uma vizinhança  $U$  de 0 tal que o germe é representado por uma subvariedade analítica em  $U$ , que também denotamos por  $V$ . Definimos

$$I(V) = \{f \in O_n : f(z) = 0, \forall z \in V\}.$$

**Proposição 1.** *Sejam  $V, V_1$  e  $V_2$  germes de variedades analíticas em 0 e  $I, I_1$  e  $I_2$  os ideais em  $O_n$ .*

(i) *Se  $I_1 \subset I_2$ , então  $V(I_2) \subset V(I_1)$*

(ii) *Se  $V_1 \subset V_2$ , então  $I(V_2) \subset I(V_1)$*

(iii)  *$V(I(V)) = V$*

(iv)  *$I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$*

**Definição 20.** *Seja  $V$  um germe de subvariedade analítica no 0. Dizemos que  $V$  é irredutível se  $V \neq \emptyset$  e se  $V = V_1 \cup V_2$  implica  $V_1 = V$  ou  $V_2 = V$ .*

**Teorema 2.6.1.** *Um germe de uma subvariedade analítica  $V$  é irredutível se, e somente se, o ideal  $I(V)$  é primo.*

Sabemos que um elemento  $u$  é dito uma unidade de um anel se

$$uv = 1$$

para algum elemento  $v$ .

**Proposição 2.** *Um germe  $g \in O_n$  é uma unidade, se, e somente se,  $g(0) \neq 0$ .*

Em  $O_n$  o conjunto dos elementos não unidades formam o único ideal maximal, mais precisamente:

**Proposição 3.** *O conjunto*

$$\mathcal{M} = \{g \in O_n : g \text{ é não unidade}\}$$

*é o único ideal maximal de  $O_n$ .*

Por um resultado devido a J. Briançon e A. Skoda [8], se  $g \in \mathcal{M}$  (isto é,  $g$  é não unidade) então  $g^n$  pertence ao ideal jacobiano de  $g$ . Em particular, se  $f \in O_n$  é um germe com singularidade isolada na origem, então

$$f^n \in J_f \tag{2.1}$$

## 2.7 O Número de Milnor

O número de Milnor de uma singularidade isolada de uma hipersuperfície analítica foi concebida por J. Milnor [22]. Este conceito foi posteriormente generalizado por diversos autores em diferentes contextos.

Hann [17] estendeu os resultados de Milnor para uma interseção completa com singularidade isolada, e posteriormente Greuel [13] e Lê [20] - de forma independente - obtiveram uma definição algébrica para o número de Milnor, em termos das derivadas parciais das equações de definição.

Mais recentemente, A. Parusinski [24] estendeu a noção de número de Milnor para singularidades não isoladas obtendo uma fórmula para ele em termos das classes de Chern e da característica de Euler.

Sejam  $f \in O_n$  um germe de função holomorfa na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$  e  $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle$  o seu ideal jacobiano. A dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle},$$

denotada por  $\mu(f)$ , é chamada de número de Milnor de  $f$  (em 0).

**Exemplo 2.7.1.** *Vamos determinar  $\mu(f)$  para o germe  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por  $f(z, w) = z^3 + w^3$*

*O ideal Jacobiano é:*

$$J_f = \langle 3z^2, 3w^2 \rangle$$

Como o anel  $O_2$  é formado pelos polinômios em  $z$  e  $w$ , o ideal  $J_f = \langle 3z^2, 3w^2 \rangle$  impõe que todos os monômios que contenham  $z^2$  e  $w^2$  sejam equivalentes a 0 no quociente, ou seja, esses monômios pertencerão a  $J_f$ .

Portanto, o espaço  $\frac{O_2}{\langle J_f \rangle}$  consiste nos monômios que não pertencem a  $J_f$ , ou seja, aqueles  $\deg(z) < 2$  e  $\deg(w) < 2$ . Com isso,

$$1, z, w, zw \notin J_f$$

Logo,

$$\frac{O_2}{\langle J_f \rangle} = \langle 1, z, w, zw \rangle$$

Portanto, o número de monômios independentes na base é 4. Logo:

$$\mu(f) = 4$$

**Exemplo 2.7.2.** Vamos determinar  $\mu(f)$  para o germe  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por

$$f(z, w) = z^2 + w^5$$

O ideal Jacobiano é:

$$J_f = \langle 2z, 5w^4 \rangle$$

O anel  $O_2$  é formado pelos polinômios em  $z$  e  $w$  e o ideal  $J_f = \langle 2z, 5w^4 \rangle$  impõe que todos os monômios que contenham  $z$  sejam equivalentes a 0 no quociente.

E, todos os monômios com  $w^4$  ou graus maiores em  $w$  sejam equivalentes a 0 no quociente, ou seja, os monômios pertencerão a  $J_f$ .

Com isso, os monômios restantes são  $z^0$  e  $\deg(w) < 4$

$$z^0, w, w^2, w^3 \notin J_f$$

Portanto, o espaço

$$\frac{O_2}{\langle J_f \rangle} = \langle 1, w, w^2, w^3 \rangle$$

Portanto, o número de monômios independentes da base são 4. Logo,

$$\mu(f) = 4$$

## 2.8 O Número de Tjurina

O número de Tjurina constitui um invariante analítico para singularidades isoladas de germes de funções holomorfas. Trata-se de um conceito que remonta os

trabalhos de Galina N. Tjurina [27]. Em sua homenagem, Greuel [13] designou a dimensão do espaço base da deformação miniversal de uma singularidade isolada por número de Tjurina.

No presente capítulo vamos apresentar o conceito de número de Tjurina para singularidades isoladas de hipersuperfícies analíticas. Também vamos apresentar alguns exemplos e propriedades.

Seja  $V$  um germe de hipersuperfície na origem, com singularidade isolada, definida por  $f \in O_n$ . O número de Tjurina de  $f$  (em 0), denotado por  $\tau(f)$ , é a dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ , ou seja,

$$\tau(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$$

Como  $\langle J_f \rangle \subset \langle J_f, f \rangle$ , segue diretamente da definição que

$$0 \leq \tau(f) \leq \mu(f),$$

$$\tau(f) = \dim_{\mathbb{C}} T_f$$

**Exemplo 2.8.1.** *Vamos determinar o número de  $\tau(f)$  para o germe  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por*

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

*O número de Tjurina está definido por*

$$\tau(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_2}{\langle J_f, f \rangle}$$

*Com isso,*

$$\langle J_f, f \rangle = \langle 2x, 3y^2, x^2 + y^3 \rangle$$

*O espaço quociente  $\frac{O_2}{\langle J_f, f \rangle}$  é descrito pelas funções que não são eliminadas pelas relações  $2x = 0, 3y^2 = 0, x^2 + y^3 = 0$ .*

*1 -  $2x = 0$  implica  $x = 0$ . Portanto, descartamos todos os monômios com  $x$ .*

*2 -  $3y^2 = 0$  implica  $y^2 = 0$ , ou seja, todos os monômios com  $y^2$  ou maior grau são descartados.*

*3 - Como  $x = 0$ , a relação  $x^2 + y^3 = 0$  já é automaticamente satisfeita.*

*Diante disso, os monômios restantes são aqueles com  $x^0, y^0, y$ , ou seja,  $1, y \notin J_f$*

Logo,

$$\frac{O_2}{\langle J_f, f \rangle} = \langle 1, y \rangle$$

O número de monômios independentes na base são 2. Portanto,

$$\tau(f) = 2$$

### 3 Teorema Principal

Este capítulo tem como objetivo apresentar a demonstração do resultado principal desta dissertação, o qual estabelece uma cota superior para o quociente  $\frac{\mu(f)}{\tau(f)}$  de um germe de função holomorfa  $f \in O_n$  com singularidade isolada na origem:

**Teorema 3.0.1** (Liu, [19]). *Seja  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$  um germe de hipersuperfície com singularidade isolada na origem, definida por  $f \in O_n$ . Então,*

$$\frac{\mu(f)}{\tau(f)} \leq n.$$

Antes da demonstração desse teorema será necessário fazer algumas considerações de forma preliminar.

Seja  $M$  um  $O_n$ -módulo com as operações

$$\begin{aligned} + : M \times M &\longrightarrow M \\ (a, b) &\longrightarrow a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : O_n \times M &\longrightarrow M \\ (f, a) &\longrightarrow fa \end{aligned}$$

Observamos que  $M$  possui estrutura natural de  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial: identificando cada número complexo  $\lambda \in \mathbb{C}$  com a função constante  $f_\lambda \equiv \lambda$ , temos a multiplicação por escalares

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times M &\longrightarrow M \\ (\lambda, a) &\longrightarrow f_\lambda a \end{aligned}$$

$(M, +, \cdot)$  constitui um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

Quando estivermos considerando um  $O_n$ -módulo  $M$  com a sua estrutura de  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, vamos usar o símbolo

$$M_{\mathbb{C}}$$

para explicitar a estrutura considerada, e o símbolo

$$\dim_{\mathbb{C}}(M)$$

para designar a sua dimensão como  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

**Proposição 4.** *Seja  $M'$  um  $O_n$ -submódulo de um  $O_n$ -módulo  $M$  e considere o  $O_n$ -módulo quociente  $\frac{M}{M'}$ . Então, as seguintes condições ocorrem:*

(i)  $\left(\frac{M}{M'}\right)_{\mathbb{C}}$  é um isomorfo à  $\frac{M_{\mathbb{C}}}{M'_{\mathbb{C}}}$

(ii) Se  $M_{\mathbb{C}}$  tem dimensão finita, então  $M'_{\mathbb{C}}$  tem dimensão finita e vale

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{M}{M'}\right) = \dim_{\mathbb{C}}(M) - \dim_{\mathbb{C}}(M')$$

Prova: (i) Fixando as notações, obtemos por definição,

$$\left(\frac{M}{M'}\right)_{\mathbb{C}} = \{[a] : a \in M\}, \text{ com } [a] = \{a + h : h \in M'\}$$

e

$$\frac{M_{\mathbb{C}}}{M'_{\mathbb{C}}} = \{\bar{a} : a \in M\}, \text{ com } \bar{a} = \{a + h : h \in M'\}$$

Assim, segue que a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \left(\frac{M}{M'}\right)_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \frac{M_{\mathbb{C}}}{M'_{\mathbb{C}}} \\ [a] &\longrightarrow \bar{a} \end{aligned}$$

constitui um isomorfismo. Logo,  $\left(\frac{M}{M'}\right)_{\mathbb{C}}$  e  $\frac{M_{\mathbb{C}}}{M'_{\mathbb{C}}}$  são isomorfos.

(ii) Suponhamos que  $M_{\mathbb{C}}$  tenha dimensão finita. Sendo  $M'_{\mathbb{C}} \subset M_{\mathbb{C}}$  um subespaço vetorial, segue que  $M'_{\mathbb{C}}$  tem dimensão finita.

Por outro lado, sendo  $M_{\mathbb{C}}$  e  $M'_{\mathbb{C}}$  de dimensão finita, segue da Álgebra linear que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{M_{\mathbb{C}}}{M'_{\mathbb{C}}} = \dim_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{C}} M'_{\mathbb{C}}$$

Mas, pelo item (i),  $\left(\frac{M}{M'}\right)_{\mathbb{C}} \approx \frac{M_{\mathbb{C}}}{M'_{\mathbb{C}}}$ .

Assim,

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{M}{M'}\right) = \dim_{\mathbb{C}} M - \dim_{\mathbb{C}} M'$$

□

Para cada germe  $g \in O_n$  vamos denotar, respectivamente, por  $[g]$  e  $[[g]]$  as classes de equivalência de  $g$  em  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  e  $\frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ . Nós observamos que existe uma projeção natural  $\pi : \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \longrightarrow \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$  definida por  $\pi([g]) = [[g]]$ , a qual é um homomorfismo sobrejetor, conforme provado no lema a seguir.

**Lema 3.0.2.** *A aplicação*

$$\begin{aligned} \pi : \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} &\longrightarrow \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle} \\ [g] &\longmapsto [[g]] \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor.

Prova: Em primeiro lugar vejamos que  $\pi$  está bem definida. Com efeito, dados  $g, h \in O_n$  tais que  $[g] = [h]$ , mostremos que  $\pi([g]) = \pi([h])$ . Sabemos que  $[g] = [h]$  se, e somente se, existem  $a_1, \dots, a_n \in O_n$  tais que

$$g - h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

Em particular,

$$g - h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + 0f,$$

e, portanto,  $[[g]] = [[h]]$ . Logo,  $\pi$  está bem definida.

Para provarmos que  $\pi$  é um  $O_n$ -homomorfismo, sejam  $a \in O_n$  e  $[g], [h] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ . Temos

$$\begin{aligned} \pi(a[g] + [h]) &= \pi([ag] + [h]) \\ &= \pi([ag + h]) \\ &= [[ag + h]] \\ &= [[ag]] + [[h]] \\ &= a[[g]] + [[h]] \\ &= a\pi([g]) + \pi([h]). \end{aligned}$$

Logo,  $\pi$  é um  $O_n$ -homomorfismo.

Finalmente, para provarmos que  $\pi$  é sobrejetor, seja  $[[g]] \in \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ , com  $g \in O_n$ . Tomando  $[g] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ , obtemos

$$\pi([g]) = [[g]].$$

□

A projeção natural  $\pi$  será utilizada na obtenção da seguinte sequência exata:

**Lema 3.0.3.** *A seguinte sequência*

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\psi) \xrightarrow{i} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \xrightarrow{\psi} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \xrightarrow{\pi} \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle} \longrightarrow 0,$$

onde  $i$  é a inclusão,  $\psi$  é a multiplicação por  $f$  e  $\pi$  é a projeção natural, é exata.

Prova: Em primeiro lugar vamos mostrar que a multiplicação por  $f$  definida por

$$\begin{aligned} \psi : \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} &\longrightarrow \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \\ [g] &\longmapsto [fg] \end{aligned}$$

é um  $O_n$ -homomorfismo. Com efeito, vejamos inicialmente que  $\psi$  está bem definida: sejam  $g, h \in O_n$  tais que  $[g] = [h]$ . Daí, existem  $a_1, \dots, a_n \in O_n$  tais que

$$g - h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} fg - fh &= f(g - h) \\ &= f \left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (fa_i) \frac{\partial f}{\partial z_i} \end{aligned}$$

E, portanto,  $[fg] = [fh]$ . Logo,  $\psi$  está bem definida.

Agora, sejam  $a \in O_n$  e  $[g], [h] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ . Temos

$$\begin{aligned} \psi(a[g] + [h]) &= \psi([ag] + [h]) \\ &= \psi([ag + h]) \\ &= [f(ag + h)] \\ &= [fag + fh] \\ &= [a(fg)] + [fh] \\ &= a[fg] + [fh] \\ &= a\psi(g) + \psi(h). \end{aligned}$$

Logo,  $\psi$  é um  $O_n$ -homomorfismo.

Para finalizarmos a demonstração do teorema, basta verificar que  $Im(\psi) = Ker(\pi)$ .

De fato, seja  $[h] \in Im(\psi)$ . Então existe  $[g] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  tal que  $\psi([g]) = [h]$ , ou seja,  $[fg] = [h]$ . Assim, existem  $a_1, \dots, a_n \in O_n$  tais que

$$h - fg = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

donde,

$$h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + fg,$$

Assim,  $h \in \langle J_f, f \rangle$  e, portanto,

$$[[h]] = [[0]].$$

Logo,  $[h] \in Ker(\pi)$ . Portanto,

$$Im(\psi) \subset Ker(\pi).$$

Por outro lado, seja  $[h] \in Ker(\pi)$ . Então, por definição de  $Ker(\pi)$ , temos

$$\begin{aligned} \pi([h]) = [[0]] &\Leftrightarrow [[h]] = [[0]] \\ &\Leftrightarrow h \in \langle J_f, f \rangle \end{aligned}$$

Ou seja, existem  $a_1, \dots, a_n, b \in O_n$  tais que

$$h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + bf.$$

Donde

$$h - fb = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

e, conseqüentemente,

$$[h] = [fb]$$

Assim, tomando  $[b] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ , obtemos

$$\psi([b]) = [fb] = [h]$$

e, portanto,  $[h] \in Im(\psi)$ . Logo,

$$Ker(\pi) \subset Im(\psi).$$

□

O lema a seguir estabelece uma relação entre o núcleo do homomorfismo  $\psi$  e o número de Tjurina.

**Lema 3.0.4.** *Considere o homomorfismo*

$$\begin{aligned} \psi : \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} &\longrightarrow \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \\ [g] &\longrightarrow [fg] \end{aligned}$$

então

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\psi) = \tau$$

Prova: Pelo Teorema (2.1.1)

$$\frac{\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}}{\text{Ker}(\psi)} \approx \text{Im}(\psi)$$

Usando a proposição (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}(\text{Im}(\psi)) &= \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}}{\text{ker}(\psi)} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \right) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\psi) \end{aligned}$$

Donde

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\psi) = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \right) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\psi) \quad (3.1)$$

Considerando a projeção

$$\pi : \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \longrightarrow \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$$

Segue do Teorema (2.1.1) que

$$\frac{\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}}{\text{ker}(\pi)} \approx \text{Im}(\pi)$$

Logo, usando a proposição (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\pi) &= \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \right) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\pi) \end{aligned}$$

Donde

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\pi) = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \right) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\pi) \quad (3.2)$$

Por outro lado, a sequência exata do Lema 3.0.3 nos diz que

$$\text{Im}(\psi) = \text{Ker}(\pi).$$

Assim, obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\psi) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\pi)$$

e, conseqüentemente, usando (3.1) e (3.2)

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\psi) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\psi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\pi) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} - \left( \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\pi) \right) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\pi) \end{aligned}$$

Mas, sendo  $\pi$  sobrejetora, temos

$$\text{Im}(\pi) = \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$$

e, portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im}(\pi) = \tau$$

Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\psi) = \tau$$

□

Para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ , vamos considerar o ideal  $\langle f^k \rangle$  adaptado ao espaço quociente  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ , ou seja, o conjunto

$$\langle f^k \rangle = \left\{ [g][f^k] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} : g \in O_n \right\}.$$

**Lema 3.0.5.**  $\langle f^k \rangle$  tem estrutura de submódulo de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ .

Prova: Sejam  $h \in O_n$  e  $[g_1][f^k], [g_2][f^k] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ . Temos

$$\begin{aligned} h([g_1][f^k]) + [g_2][f^k] &= h[g_1 f^k] + [g_2 f^k] \\ &= [hg_1 f^k] + [g_2 f^k] \\ &= [hg_1 f^k + g_2 f^k] \\ &= [(hg_1 + g_2)f^k] \\ &= [hg_1 + g_2][f^k] \end{aligned}$$

Logo,  $h([g_1][f^k]) + [g_2][f^k] \in \langle J_f \rangle$ .

□

**Observação.** Se considerarmos  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  como  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, temos que  $\langle f^k \rangle$  constitui um subespaço vetorial de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ .

Notamos que  $\langle f^{k+1} \rangle \subset \langle f^k \rangle$  e, portanto,  $\langle f^{k+1} \rangle$  constitui um submódulo de  $\langle f^k \rangle$ . Dessa forma, está bem definido o  $O_n$ -módulo quociente

$$\frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle},$$

cujos elementos serão denotados por

$$[[a]]_k,$$

para cada  $[a] \in \langle f^k \rangle$ . Note que  $\frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle}$  também tem estrutura natural de  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

Por outro lado, a condição  $\langle f^{k+1} \rangle \subset \langle f^k \rangle$  determina a seguinte cadeia decrescente de ideais  $\left( \text{de } \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \right)$ :

$$\frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \supset \langle f \rangle \supset \langle f^2 \rangle \supset \dots \supset \langle f^{n-1} \rangle \supset \langle f^n \rangle = \{0\}. \quad (3.3)$$

Note que por (2.1)

$$f^n \in J_f,$$

e, portanto,  $\langle f^n \rangle = \{0\}$  é o submódulo trivial nulo de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ .

**Lema 3.0.6.** *Considere o homomorfismo*

$$\begin{aligned} \psi : \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} &\longrightarrow \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \\ [g] &\longmapsto [fg] \end{aligned}$$

então

$$\langle f^{n-1} \rangle \subset \text{Ker}(\psi).$$

Prova: Dado  $[g][f^{n-1}] \in \langle f^{n-1} \rangle$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi([g][f^{n-1}]) &= \psi([gf^{n-1}]) \\ &= [fgf^{n-1}] \\ &= [gf^n] \\ &= [g][f^n] \end{aligned}$$

Sendo  $f$  uma não unidade de  $O_n$ , segue de (2.1) que

$$f^n \in J_f,$$

em particular,  $[f^n] = [0]$ . Assim,

$$\begin{aligned} \psi([g][f^{n-1}]) &= [g][0] \\ &= [0], \end{aligned}$$

donde

$$[g][f^{n-1}] \in \text{Ker}(\psi).$$

□

No próximo resultado vamos considerar  $\langle f^k \rangle$  e  $\frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle}$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) com estrutura de  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Também vamos tomar a seguinte projeção

$$\begin{aligned} \pi_k : \langle f^k \rangle &\longrightarrow \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} \\ [a] &\longrightarrow [[a]]_k \end{aligned}$$

a qual é um  $\mathbb{C}$ -homomorfismo.

**Lema 3.0.7.** Para cada  $k = 1, \dots, n - 1$ , a seqüência

$$0 \longrightarrow Ker(\psi_k) \xrightarrow{i} \langle f^k \rangle \xrightarrow{\psi_k} \langle f^k \rangle \xrightarrow{\pi_k} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} \longrightarrow 0 \quad (3.4)$$

onde  $i$  é a inclusão e  $\psi_k$  é a multiplicação  $[f]$  definida em  $\langle f^k \rangle$ , é exata. Além disso,

$$(i) \quad Ker(\psi_k) = Ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle$$

$$(ii) \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \{Ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle\}$$

Prova: Sendo  $\pi_k$  sobrejetora, basta mostrar que

$$Im(\psi_k) = Ker(\pi_k)$$

para concluirmos que a seqüência é exata.

Com efeito,

$$\begin{aligned} [g][f^k] \in Ker(\pi_k) &\Leftrightarrow \pi_k([g][f^k]) = [[0]]_k \\ &\Leftrightarrow \pi_k([gf^k]) = [[0]]_k \\ &\Leftrightarrow [[gf^k]]_k = [[0]]_k \\ &\Leftrightarrow [gf^k] \in \langle f^{k+1} \rangle \\ &\Leftrightarrow \exists h \in O_n / [gf^k] = [h][f^{k+1}] \\ &\Leftrightarrow \exists h \in O_n / [g][f^k] = [f]([h][f^k]) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in O_n / [g][f^k] = \psi_k([h][f^k]) \\ &\Leftrightarrow [g][f^k] \in Im(\psi_k) \end{aligned}$$

Portanto,

$$Im(\psi_k) = Ker(\pi_k).$$

Por outro lado,  $[a] \in Ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle$  se, e somente se, existe  $h \in O_n$  tal que  $[a] = [h][f^k]$  e  $\psi([a]) = [0]$ . Assim, nessas condições, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_k([a]) = [0] &\Leftrightarrow [fa] = [0] \\ &\Leftrightarrow [f][a] = [0] \\ &\Leftrightarrow [f]([h][f^k]) = [0] \\ &\Leftrightarrow \psi_k([a]) = [0] \\ &\Leftrightarrow [a] \in Ker(\psi_k) \end{aligned}$$

Logo,

$$Ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle = Ker(\psi_k)$$

e, o item (i) está provado.

Como  $(\langle f^k \rangle)_{\mathbb{C}}$  e  $(Ker(\psi_k))_{\mathbb{C}}$  são subespaços vetoriais de  $\left(\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}\right)_{\mathbb{C}}$ , o qual tem dimensão finita, temos que ambos têm dimensão finita e pela proposição (4),

$$\dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\langle f^k \rangle}{Ker(\psi_k)} \right) = \dim_{\mathbb{C}}(\langle f^k \rangle) - \dim_{\mathbb{C}}(Ker(\psi_k)) \quad (3.5)$$

Por outro lado, segue do Teorema (2.1.1) que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} Im(\psi_k) &= \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\langle f^k \rangle}{Ker(\psi_k)} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(\langle f^k \rangle) - \dim_{\mathbb{C}} Ker(\psi_k), \end{aligned}$$

Donde da última etapa, usamos (3.5). Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} Ker(\psi_k) = \dim_{\mathbb{C}}(\langle f^k \rangle) - \dim_{\mathbb{C}} Im(\psi_k) \quad (3.6)$$

Sendo (3.4) uma sequência exata, temos  $Im(\psi_k) = Ker(\pi_k)$  e, portanto, usando (3.5) e (3.6),

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} ker(\psi_k) &= \dim_{\mathbb{C}}(\langle f^k \rangle) - \dim_{\mathbb{C}} Im(\psi_k) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(\langle f^k \rangle) - (\dim_{\mathbb{C}}(\langle f^k \rangle) - \dim_{\mathbb{C}} Im(\pi_k)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} Im(\pi_k) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de  $\pi_k$  ser sobrejetora. Por outro lado, o item (i) nos diz que

$$\dim_{\mathbb{C}} (Ker(\psi_k)) = \dim_{\mathbb{C}} \{ Ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle \}.$$

Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \{ Ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle \} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle}$$

e o item (ii) está provado.

□

**Observação.** Para  $k = n - 1$ , o item (ii) do Lema (3.0.7) nos diz que

$$\dim_{\mathbb{C}} \langle f^{n-1} \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \{ \ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle \}$$

uma vez que  $\langle f^n \rangle = \{0\}$  é o submódulo trivial nulo de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$ .

**Lema 3.0.8.**  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  e  $\frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$  são isomorfos.

Prova: Como anteriormente, para cada  $g \in O_n$ , vamos denotar respectivamente por

$$[g] \text{ e } [[g]]$$

os elementos de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  e  $\frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ . Os elementos de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  serão denotados por  $\overline{[g]}$ , ou seja, para cada  $g \in O_n$ , temos

$$\begin{aligned} \overline{[g]} &= \left\{ [g] + [h] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} : [h] \in \langle f \rangle \right\} \\ &= \left\{ [g] + [l][f] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} : l \in O_n \right\} \\ &= \left\{ [g + lf] \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} : l \in O_n \right\} \end{aligned}$$

Vamos considerar a função

$$\theta : \begin{array}{ccc} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} & \longrightarrow & \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle} \\ \overline{[g]} & \longrightarrow & [[g]] \end{array}$$

e, mostraremos que  $\theta$  é um isomorfismo.

Com efeito, em primeiro lugar vejamos que  $\theta$  está bem definida: sejam  $\overline{[g]}, \overline{[h]} \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$  tais que  $\overline{[g]} = \overline{[h]}$ .

$$\begin{aligned}
\overline{[g]} = \overline{[h]} &\Leftrightarrow [g] - [h] \in \langle f \rangle \\
&\Leftrightarrow \exists l \in O_n / [g] - [h] = [l][f] \\
&\Leftrightarrow \exists l \in O_n / [g - h] = [lf] \\
&\Leftrightarrow \exists l \in O_n / (g - h) - (lf) \in \langle J_f \rangle \\
&\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n, l \in O_n / g - h - lf = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial z_j} \\
&\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n, l \in O_n / g - h = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial z_j} + lf \\
&\Leftrightarrow g - h \in \langle J_f, f \rangle \\
&\Leftrightarrow [[g]] = [[h]] \\
&\Leftrightarrow \theta(\overline{[g]}) = \theta(\overline{[h]})
\end{aligned}$$

e, portanto,  $\theta$  está bem definida.

Agora, sejam  $l \in O_n$  e  $\overline{[g]}, \overline{[h]} \in \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} / \langle f \rangle$  temos:

$$\begin{aligned}
\theta(l\overline{[g]} + \overline{[h]}) &= \theta(\overline{[lg] + [h]}) \\
&= \theta(\overline{[lg] + [h]}) \\
&= \theta(\overline{[lg + h]}) \\
&= [[lg + h]] \\
&= l[[g]] + [[h]] \\
&= l\theta(\overline{[g]}) + \theta(\overline{[h]})
\end{aligned}$$

Portanto,  $\theta$  é um  $O_n$ -homomorfismo.

Para finalizar vejamos que  $\theta$  é bijetora.

De fato,

$$\begin{aligned}
 \theta(\overline{[g]}) = \overline{[[0]]} &\Leftrightarrow [[g]] = \overline{[[0]]} \\
 &\Leftrightarrow g \in \langle J_f, f \rangle \\
 &\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n, l \in O_n / g = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial z_j} + lf \\
 &\Leftrightarrow \exists l \in O_n / g - lf \in \langle J_f \rangle \\
 &\Leftrightarrow \exists l \in O_n / [g] = [lf] \\
 &\Leftrightarrow \exists l \in O_n / [g] = [l][f] \\
 &\Leftrightarrow [g] \in \langle f \rangle \\
 &\Leftrightarrow \overline{[g]} = \overline{[0]}
 \end{aligned}$$

Logo,  $\theta$  é injetora.

Por outro lado, dado  $[[h]] \in \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$ , tomando  $\overline{[h]} \in \frac{\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}}{\langle f \rangle}$ , obtemos

$$\overline{[h]} = [[h]]$$

e, portanto,  $\theta$  é sobrejetora.

□

Com as ferramentas necessárias já estabelecidas, estamos prontos para enunciar e demonstrar o teorema principal deste trabalho:

**Teorema Principal:** Seja  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$  um germe de hipersuperfície com singularidade isolada na origem, definida por  $f \in O_n$ . Então,

$$\frac{\mu(f)}{\tau(f)} \leq n.$$

**Prova do Teorema Principal:** Pelo item (ii) do Lema 3.0.7, para cada  $k = 1, \dots, n - 1$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \{ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle\}.$$

Assim, obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \{ker(\psi) \cap \langle f^k \rangle\} \leq \dim_{\mathbb{C}} Ker(\psi).$$

Daí, usando o Lema 3.0.4 temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} \leq \tau(f) \tag{3.7}$$

para todo  $k = 1, \dots, n - 1$ . Em particular, para  $k = n - 1$ ,

$$\dim \langle f^{n-1} \rangle \leq \tau(f), \quad (3.8)$$

uma vez que  $\langle f^n \rangle = \{0\}$  é o submódulo trivial nulo de  $\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}$

Por outro lado, (3.3) determina a seguinte sequência de subespaços vetoriais de  $\left(\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}\right)_{\mathbb{C}}$

$$\left(\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}\right)_{\mathbb{C}} \supset \langle f \rangle_{\mathbb{C}} \supset \langle f^2 \rangle_{\mathbb{C}} \supset \dots \supset \langle f^{n-1} \rangle_{\mathbb{C}} \supset \langle f^n \rangle_{\mathbb{C}} = \{0\}_{\mathbb{C}}$$

Note que cada subespaço  $\langle f^k \rangle$  tem dimensão finita, uma vez que  $\left(\frac{O_n}{\langle J_f \rangle}\right)_{\mathbb{C}}$  tem dimensão finita. Assim, da Álgebra Linear, obtemos

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle J_f \rangle}{\langle f \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \langle f \rangle \\ \dim_{\mathbb{C}} \langle f \rangle &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f \rangle}{\langle f^2 \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \langle f^2 \rangle \\ \dim_{\mathbb{C}} \langle f^2 \rangle &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^2 \rangle}{\langle f^3 \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \langle f^3 \rangle \\ &\vdots \\ \dim_{\mathbb{C}} \langle f^{n-1} \rangle &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^{n-2} \rangle}{\langle f^{n-1} \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \langle f^{n-1} \rangle \end{aligned}$$

Donde,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle J_f \rangle}{\langle f \rangle} + \sum_{k=1}^{n-2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle f^k \rangle}{\langle f^{k+1} \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \langle f^{n-1} \rangle$$

Assim, usando (3.7) e (3.8), obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle J_f \rangle}{\langle f \rangle} + (n - 2)\tau(f) + \tau(f)$$

Mas, sabemos que  $\frac{\langle J_f \rangle}{\langle f \rangle}$  e  $\frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle}$  são isomorfos e, portanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle J_f \rangle}{\langle f \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f, f \rangle} = \tau(f)$$

Logo,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_n}{\langle J_f \rangle} \leq n\tau(f)$$

□

## 4 Aplicação

B. Teissier [29] introduziu o conceito de  $i$ -ésimo número de Milnor ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) de um germe de hipersuperfície  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$ , denotado por  $\mu^i$ , o qual é definido como o número de Milnor de uma interseção de  $(V, 0)$  com um plano genérico de dimensão  $i$  passando pela origem.

De acordo com [30], vale a relação envolvendo os  $i$ -ésimos números de Milnor

$$\frac{\mu^n}{\mu^{n-1}} \geq \frac{\mu^{n-1}}{\mu^{n-2}} \geq \dots \geq \frac{\mu^1}{\mu^0} = \mu^1.$$

Além disso, se  $m(f)$  denota a multiplicidade do germe  $f \in O_n$  que define  $(V, 0)$ , então

$$\mu^1 = m(f) - 1$$

Dessa forma, sendo  $\mu(f) = \mu^n$ , obtêm-se a seguinte cota inferior para o número de Milnor (veja [34])

$$\mu(f) \geq (m(f) - 1)^n \quad (4.1)$$

Como aplicação do Teorema Principal (Teorema (3.0.1)) e da relação (4.1) temos o seguinte corolário que estabelece uma cota inferior para o número de Tjurina:

**Corolário 4.0.1.** *Seja  $(V, 0) \subset \mathbb{C}^n$  um germe de hipersuperfície com singularidade isolada na origem, definido por  $f \in O_n$ . Então,*

$$\tau(f) \geq \frac{(m(f) - 1)^n}{n}$$

Prova: De acordo com o Teorema (3.0.1),

$$\tau(f) \geq \frac{\mu(f)}{n}.$$

Usando (4.1) obtemos

$$\tau(f) \geq \frac{(m(f) - 1)^n}{n}.$$

□

**Observação.** *Se  $f$  é um polinômio homogêneo e  $n = 1$ , então a cota inferior é atingida, pois,*

$$\tau(f) = \mu(f) = (m(f) - 1)$$

# Referências

- [1] Arnold, V. I., Gelfand, I. M. , Manin, Yu. I. , Moishezon, B. G. , Novikov, S. P. and Shafarevich, I. R. Galina Nikolaevna Tjurina (obituary). Russian Mathematical Surveys, Londres, v. 26, n. 1, p. 193–198, 1971. Disponível em: <https://www.mathnet.ru/eng/rm5169>. Acesso em: 17 abr. 2025.
- [2] Arnold, V. I.: Singularities of Smooth Mappings. Russ. Math. Surv, 1976. Citado na página 13.
- [3] Arnold, V. I., Gusein-Zade, S. M., Varchenko, A. N.: Singularities of Differentiable Maps, Volume II: Monodromy and Asymptotics of Integrals. Birkhäuser, 1985.. Nenhuma citação no texto.
- [4] Atiyah, M. F. , Macdonald, I. G.: Introduction to Commutative Algebra. Reading: Addison-Wesley, 1969. Nenhuma citação no texto.
- [5] Alberich-Carraminana, M., Almiron, P., Blanco, G. and Melle-Hernandez, A.: The minimal Tjurina number of irreducible germs of plane curve singularities, Indiana Univ. Math. J. 70 (2021), 1211-1220. Citado na página 15.
- [6] Almirón P.: On the quotient of Milnor and Tjurina numbers for two-dimensional isolated hypersurface singularities, Mathematische Nachrichten 295 (2022), 1254-1263. Citado na página 10.
- [7] Almirón P. and Blanco G.: A note on a question of Dimca and Greuel, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 357 (2019), no. 2, 205-208. Citado na página 10.
- [8] Briançon, J., Skoda, H.: Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de  $\mathbb{C}^n$ , C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 278 (1974) 949–951 (in French). Citado na página 10.
- [9] Camacho, C. , Neto, A. Lins and Sad, P.: Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. J. Differential Geom. 20 (1) (1984), 143-174. Citado na página 22.  
Citado na página 11.
- [10] Dimca, A., Greuel G.-M. : On 1-forms on isolated complete intersection curve singularities, J. Singul. 18 (2018), 114-118. Citado na página 10.
- [11] Fernández-Pérez, A., García Barroso, E.R. and Saravia-Molina, N.: On Milnor and Tjurina Numbers of Foliations. Bull Braz Math Soc, New Series 56, 23 (2025). Citado na página 11.

- [12] Gunning, Robert C.: Introduction to Holomorphic Functions of Several Variable. Wadsworth e Brooks/Cole, Belmont, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.
- [13] Greuel, G.M.: Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, Math. Ann. 214 (1975), 235-266. (German) Citado 3 vezes nas páginas 9, 22 e 24.
- [14] Greuel, G. M.: Dualität in der lokalen kohomologie isolierter Singularitäten, Math. Ann. 250 (1980), no. 2, 157-173. (German). Nenhuma citação no texto.
- [15] Genzmer, Y., E. Hernandez, M.: On the Saito basis and the Tjurina number for plane branches, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020),no. 5, 3693-3707. Citado na página 10.
- [16] Hironaka, H.: Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero. Annals of Mathematics. 1964 Nenhuma citação no texto.
- [17] Hamm, H.: Lokale topologische Eigenschaften Komplexer Räume, Math. Ann. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 22.
- [18] Hungerford, T. W.: Algebra. New York: Springer-Verlag, 1974. (Graduate Texts in Mathematics, 73). Nenhuma citação no texto.
- [19] Liu, Y.: Milnor and Tjurina numbers for a hypersurface germ with isolated singularity. Comptes Rendus. Mathématique, vol. 356, no. 9, 2018, pp. 963–966. Elsevier, DOI: 10.1016/j.crma.2018.07.004. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 26.
- [20] Lê.D.T. :Computation of the Milnor number of an isolated singularity of a complete intersection, Funktsional. ANal. i Priloen. 8 (1974), no. 2, 45-49 Citado na página 22.
- [21] Lê. D.T.: Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection. Funct Anal Its Appl 8, 127-131 (1974). Citado na página 9.
- [22] Milnor, J.: Singular Points of Complex Hypersurfaces. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, 1968 Citado 3 vezes nas páginas 9, 12 e 22.
- [23] Seade, J., Suwa, T.: Residues and topological invariants of singular holomorphic foliations, Internat. J. Math. 8 (1997), 825–847. Nenhuma citação no texto.
- [24] Parusinski, A.: A generalization of the Milnor number. Math. Ann. 281, 247-254 (1988). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 22.
- [25] Saito, K.: Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Invent. Math. 14 (1971), 123-142. (German). Citado na página 10.

- [26] Tjurina, G. N.: Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points. *Functional Analysis and Its Applications*, 3 (1969), 62–65. Nenhuma citação no texto.
- [27] Tjurina, G. N.: Locally Semi-Universal flat of Isolated Singularities of Complex Spaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 33 (1969), 1026-1058. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 24.
- [28] Tomazella, J. N.: O número de Milnor. 1992. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-02122019-170107/>. Acesso em: 15 ago 2024. Nenhuma citação no texto.
- [29] Teissier B.: Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. : Singularités à Cargèse. *Asterisque*, vol7 et 8, Société mathématique de France, Paris, (1973), pp. 285-362. Citado na página 41.
- [30] Teissier B.: Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités. *Ann. of Math.*(2)106(1)(1997) 38-44. Citado na página 41.
- [31] Soares, M. G.: Cálculo em uma variável complexa. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado na página 15.
- [32] Soares, M. G.: Lectures on Point Residues. 1. ed. Lima: Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 2002. v. 01. 108p. Citado na página 15.
- [33] Suwa, T.: Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliation, *Actualités Mathématique*, Herman Éditeurs des Sciences et des Arts, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- [34] Yau, S.S.T., Zuo, H.: Complete characterization of isolated homogeneous hypersurface singularities, *Pac. J. Math.* 273(1)(2015)213-224. Citado na página 41.