LUCIANO CORDEIRO DE OLIVEIRA

PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS ILIMITADOS E/OU DECAIMENTO RADIAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2010

LUCIANO CORDEIRO DE OLIVEIRA

PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS ILIMITADOS E/OU DECAIMENTO RADIAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de Fevereiro de 2010.

Emerson A. Mendonça de Abreu

Ronaldo Brasileiro Assunção

Paulo César Carrião
(Co-orientador)

Sandro Vieira Romero
(Co-orientador)

Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)

"Falar obscuramente, qualquer um sabe;
com clareza, raríssimos."
Galileu Galilei

Agradecimentos

O autor expressa seus sinceros agradecimentos aos professores e funcionários do DMA/UFV que contribuíram para sua formação. Em especial ao professor Olímpio (Orientador) pela enorme paciência, mesmo quando fazia perguntas ingênuas.

Aos professores que compuseram minha banca por aceitarem o convite e pelas sugestões finais.

À Coordenação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa juntamente com todos os professores.

Aos colegas de curso e a todos que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada na UFV.

À CAPES/Reuni pelo apoio financeiro.

Sumário

Notações

Notações Gerais

$B_\delta(x)$	bola aberta de centro x e raio δ
$B_\delta(0) = B_\delta$	bola aberta de centro 0 e raio δ
ϖ_n	volume da esfera unitária em $I\!R^n$
X^c	indica o complementar de X em relação a U, $X \subset U$
$X \backslash Y$	indica o conjunto $\{x \in X \big\vert\, x \notin Y\}$
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\gg$	muito maior
q.t.p.	quase toda parte
supp$f$	suporte da função f
C_i	indicam constantes positivas independentes da funções
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	gradiente de u
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω

Espaços de Funções

$L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mensurável sobre } \Omega \text{ e} \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}, \;\; 1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mensurável sobre } \Omega \text{ e existe } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega\}$

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \{\sup |u(x)| = M, \;\mu\{x : u(x) > M\} = 0\}$

$C_0(\Omega)$: conjunto de todas as funções contínuas com suporte compacto em Ω

$C^k(\Omega)$: conjunto de todas as funções $k \in \mathbb{N}$ vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$

$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$: funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$

$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) \Big| \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$

$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$: conjunto de todas as funções suaves com suporte compacto em Ω

$C_{0,r}^\infty(I\!R^n) = \left\{ u \in C_0^\infty(I\!R^n) \big| \, u \text{ é radial} \right\}$

$L^p(I\!R^n, Q) = \left\{ u : I\!R^n \to I\!R \Big| \, u \text{ é mensurável, } Q \in C((0,\infty)) \text{ e } \int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p dx < \infty \right\}$

$L^2(I\!R^n, V) = \left\{ u : I\!R^n \to I\!R \Big| \, u \text{ é mensurável, } V \in C((0,\infty)) \text{ e } \int_{I\!R^n} V(|x|)|u|^2 dx < \infty \right\}$

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \Big| \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ e} \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi, \, \forall \varphi \in D(\Omega), \, \forall i = 1, ..., n \right\}$

$W_0^{1,p}(\Omega):$ completamento de $C_0^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

$D_r^{1,2}(I\!R^n)$ é o completamento de $C_{0,r}^{\infty}(I\!R^n)$, com a norma $\|u\| = \left(\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$

$H_r^1(I\!R^n, V) = D_r^{1,2}(I\!R^n) \cap L^2(I\!R^n, V)$

$H_r^1(I\!R^n, V)$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|u\|_V = \left(\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 + V(|x|)u^2 dx\right)^{1/2}$ e, por simplicidade, às vezes usaremos $\|u\|_{H_r^1(I\!R^n,V)} = \|u\|_V$

Resumo

OLIVEIRA, Luciano Cordeiro de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2010. **Problemas elípticos semilineares com potenciais ilimitados e/ou com decaimento radial**. Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki. Co-orientadores: Paulo César Carrião e Sandro Vieira Romero.

Neste trabalho, estudamos duas classes de problemas elípticos modeladas em domínios ilimitados. O estudo dessas classes de problemas é relevante não só no campo da matemática aplicada, mas também na área de análise não linear. Nesses problemas, como o domínio é ilimitado, há a perda de compacidade da "imersão" de Sobolev, dificultando a convergência da sequência de "soluções" (sequência de Palais Smale). Essa dificuldade é contornada trabalhando num subespaço do espaço de Sobolev usual onde se recupera a compacidade utilizando resultados de imersão. As soluções são obtidas via multiplicadores de Lagrange. Apresentamos uma outra maneira de resolver um problema em [6], devido a Wei-Yue Ding e Wei-Ming Ni, que utilizaram na solução o Teorema do Passo da Montanha e estimativas a priori. Os resultados de nosso estudo são devidos a Habao Su, Zhi-Qiang Wang e Michel Willem.

Abstract

OLIVEIRA, Luciano Cordeiro de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February 2010. **Elliptics semilineares problems with unbounded potential and/or with radial potential**. Adviser: Olímpio Hiroshi Miyagaki. Co-Advisers: Paulo César Carrião and Sandro Vieira Romero.

In this work we study two class of elliptic problems modeled on unbounded domains. The study of these class of problems is relevant not only in applied mathematics, but also in nonlinear analysis. In the these problems, since the domain is unbounded, there is a lack of compactness of the Sobolev embedding, bringing some difficults to show the convergence of the Palais-Smale sequence. To solve this difficulty we work in a subspace of the usual Sobolev space where we can recover some compactness result. The solutions are obtained by Lagrange multiplier. We give another proof of results in [6] due to Wei-Yue Ding and Wei-Ming Ni, who used to solve The Mountain Pass Theorem and a priori estimates. The results of our study are due to Habao Su, Zhi-Qiang Wang and Michel Willem.

Introdução

Em nosso estudo trataremos das equações de Schrödinger não-lineares com potenciais que podem ser ilimitados. Vamos concentrar nossos esforços no seguinte modelo de equação

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)u^{p-1}, & \text{com } u > 0, \text{ em } I\!R^n, \\ \\ |u(x)| \to 0, & \text{quando } |x| \to \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Em [17] os autores mencionam que o problema acima é mais sutil do que aqueles em que o potencial verifica a condição padrão de crescimento não-linear subcrítico, a saber, $\left|Q(|x|)u^{p-1}\right| \leq C\left(1 + |u|^{p-1}\right),\ 2 < p < 2^* = \dfrac{2n}{n-2}$.

Estabeleceremos o funcional que permite estudar, por métodos variacionais, as soluções examinando existência e propriedades qualitativas. Veremos que a existência de soluções está intimamente relacionada com o intervalo de variação de p e com os potenciais que aparecem em (1). Estudaremos a imersão entre alguns espaços de Sobolev com pesos. Os resultados serão utilizados para obter soluções para o problema (1) e nosso foco será o caso com simetria radial a fim de estabelecermos resultados mais fortes do que os que seriam possíveis para os casos gerais. Há várias possibilidades nesse campo de estudo, pois existem muitos problemas que ainda não foram estudados em detalhes.

Nosso objetivo é apresentar condições para que o problema acima admita solução. Esta dissertação teve como base de estudo vários artigos de pesquisa, entre eles os devido a Wei-Yue Ding e Wei-Ming NiDing-Ni [6] e a Habao Su, Zhi-Qiang Wang e Michel Willem [17].

Apresentamos, nessa dissertação, três capítulos e um apêndice. No capítulo 1 vamos enunciar e demonstrar lemas que serão utilizados para justificar os teoremas principais. No Capítulo 2 vamos enunciar e demonstrar teoremas que garantirão a existência de solução para o problema (1). No capítulo 3 apresentaremos exemplos com aplicação dos resultados obtidos na dissertação e recuperaremos um resultado já estabelecido em [6] no estudo da existência de solução de um problema similar a (1). No apêndice enunciaremos os teoremas utilizados em nosso trabalho dando a demonstração de alguns e fazendo referência de onde se pode encontrar a demonstração de outros.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Em nosso trabalho sempre consideraremos $n \geq 2$ e usaremos as hipóteses listadas abaixo.

(V) $V(r) \in C((0,\infty))$ com $V(r) \geq 0$ e existem constantes a e a_0 tais que

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^a} > 0, \qquad \liminf_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} > 0.$$

(Q) $Q(r) \in C((0,\infty))$ com $Q(r) > 0$ e existem constantes b_0 e b tais que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty, \qquad \limsup_{r\to\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} < \infty.$$

Se as condições **(V)** e **(Q)** são satisfeitas para $n \geq 3$, definimos

$$\overline{p} = \overline{p}(a_0, b_0) = \begin{cases} \dfrac{2(n+b_0)}{n-2}, & \text{se} \quad b_0 \geq -2, \quad a_0 \geq -2, \\ \dfrac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0}, & \text{se} \quad -2(n-1) < a_0 \leq -2, \quad b_0 \geq a_0, \\ \infty, & \text{se} \quad a_0 \leq -2(n-1), \quad b_0 > -2(n-1). \end{cases}$$

$$\underline{p} = \underline{p}(a, b) = \begin{cases} \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}, & \text{se} \quad -2 < a \leq b, \\ \dfrac{2(n+b)}{n-2}, & \text{se} \quad b \geq -2, \quad a \leq -2, \\ 2, & \text{se} \quad b \leq \max\{a, -2\}. \end{cases}$$

Nas figuras a seguir, mostramos as regiões onde os valores de $\overline{p}$ e de $\underline{p}$ se encontram em nosso trabalho.

Para $\overline{p}$ temos,

$$\overline{p} = \overline{p}(a_0, b_0) = \begin{cases} \dfrac{2(n+b_0)}{n-2}, & \text{se} \quad b_0 \geq -2, \quad a_0 \geq -2, \quad \mathbf{I} \\ \dfrac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0}, & \text{se} \quad -2(n-1) < a_0 \leq -2, \quad b_0 \geq a_0, \quad \mathbf{II} \\ \infty, & \text{se} \quad a_0 \leq -2(n-1), \quad b_0 > -2(n-1). \quad \mathbf{III} \end{cases}$$

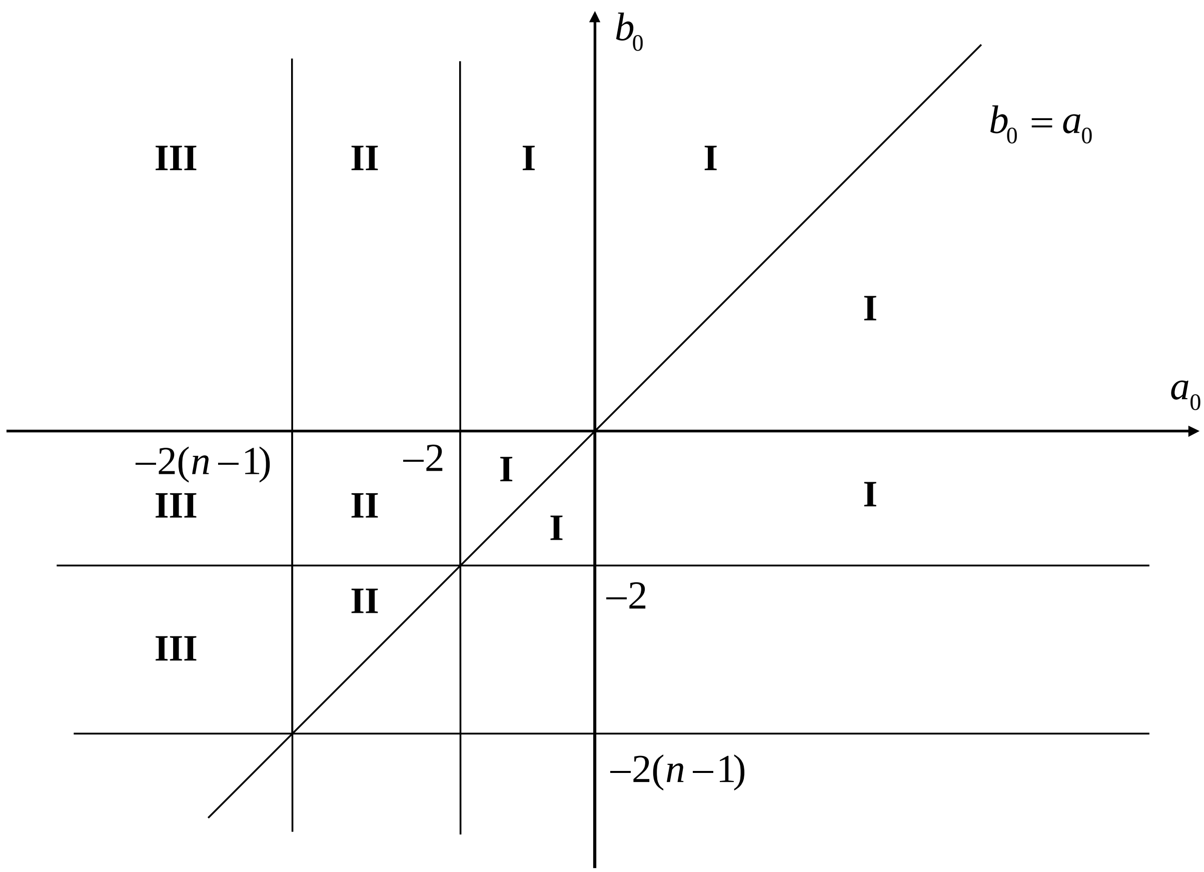


Figura 1.1: Regiões possíveis para $\overline{p}$

As possibilidades para $\overline{p}$ não cobrem todas as regiões possíveis como listado na Figura 1.1 e merecem especial atenção em futuros trabalhos.

Para $\underline{p}$ temos,

$$\underline{p} = \underline{p}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}, & \text{se} \quad -2 < a \leq b, \quad \textbf{I} \\ \dfrac{2(n+b)}{n-2}, & \text{se} \quad b \geq -2, \quad a \leq -2, \quad \textbf{II} \\ 2, & \text{se} \quad b \leq \max\{a,-2\}. \quad \textbf{III} \end{cases}$$

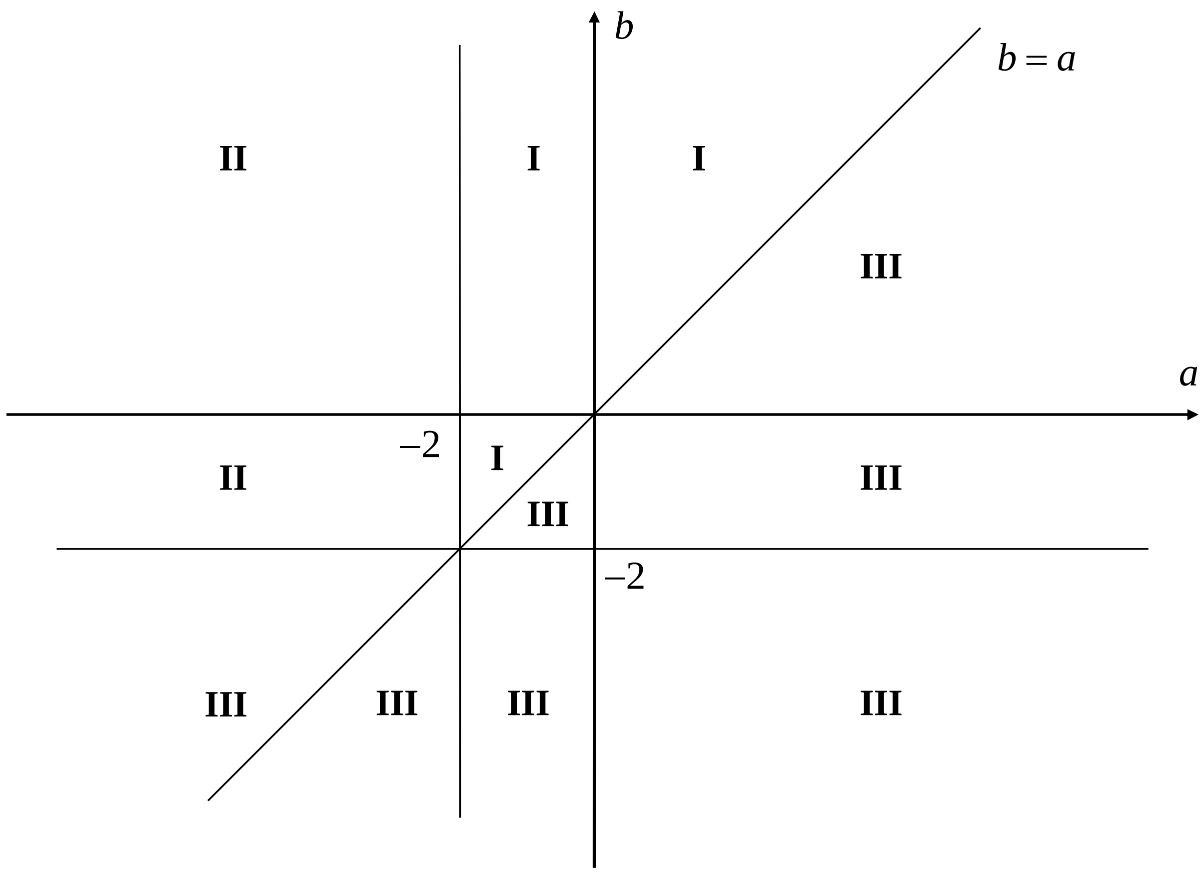


Figura 1.2: Regiões possíveis para $\underline{p}$

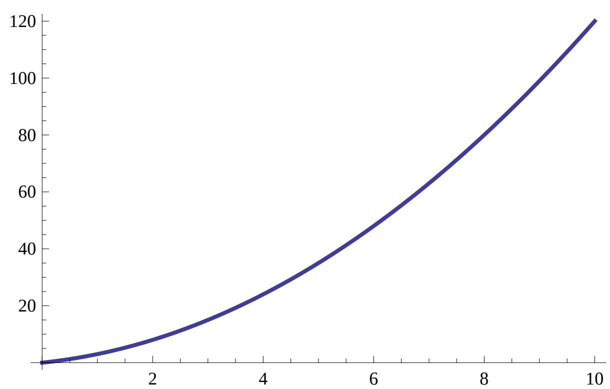
Diferentemente de $\overline{p}$ as possibilidades para $\underline{p}$ cobrem todas as regiões possíveis como listado na Figura 1.2.

A seguir daremos um exemplo ilustrando as funções $V(r)$, $\dfrac{V(r)}{r^a}$ e $\dfrac{V(r)}{r^{a_0}}$ e outro exemplo ilustrando as funções $Q(r)$, $\dfrac{Q(r)}{r^{b_0}}$ e $\dfrac{Q(r)}{r^b}$. Além disso, apresentaremos o comportamento destas funções graficamente e daremos o valor de $\underline{p}$ utilizando a, b e o valor de $\overline{p}$ utilizando a_0, b_0.

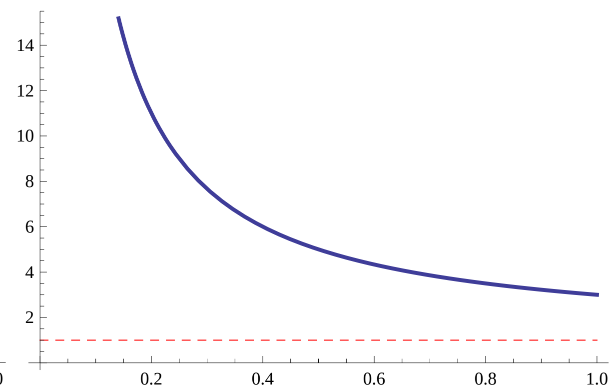
(i) Se $V(r) = r^2 + 2r$ tomamos $a = 2$ e $a_0 = 1$ e daí,

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^2} = \liminf_{r\to\infty} \frac{r^2+2r}{r^2} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{2}{r}+1\right) = 1 > 0$$

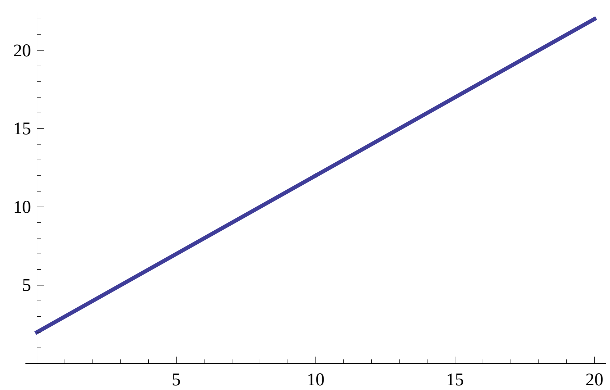
$$\liminf_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^1} = \liminf_{r\to 0} \frac{r^2+2r}{r^1} = \lim_{r\to 0}(r+2) = 2 > 0.$$



(a) gráfico da função $V(r)$



(b) gráfico da função $\dfrac{V(r)}{r^a}$



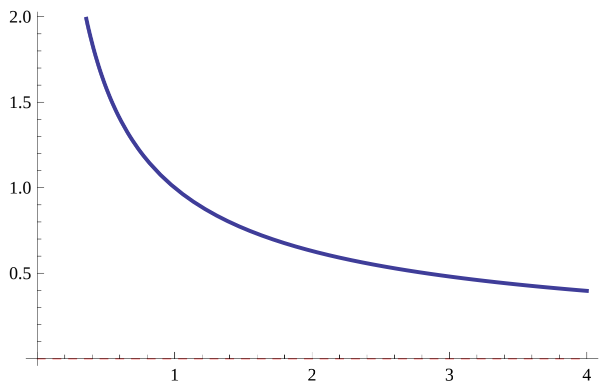
(c) gráfico da função $\dfrac{V(r)}{r^{a_0}}$

Figura 1.3: Comportamento das funções com a condição **(V)**

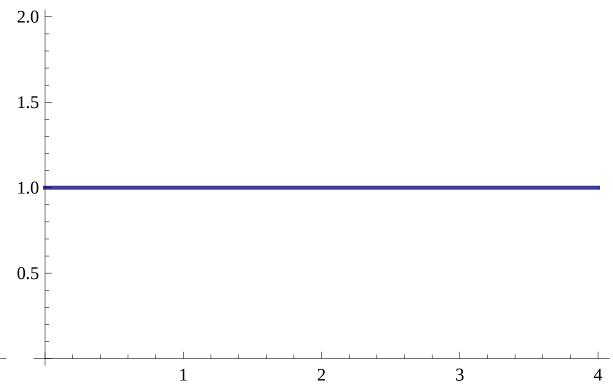
(ii) Se $Q(r) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{r^2}}$ tomamos $b_0 = -\dfrac{2}{3}$ e $b = 0$ e daí,

$$\limsup_{r \to 0} \frac{Q(r)}{r^{-\frac{2}{3}}} = \limsup_{r \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{r^2}}}{r^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{r \to 0} \frac{\sqrt[3]{r^2}}{\sqrt[3]{r^2}} = 1 < \infty$$

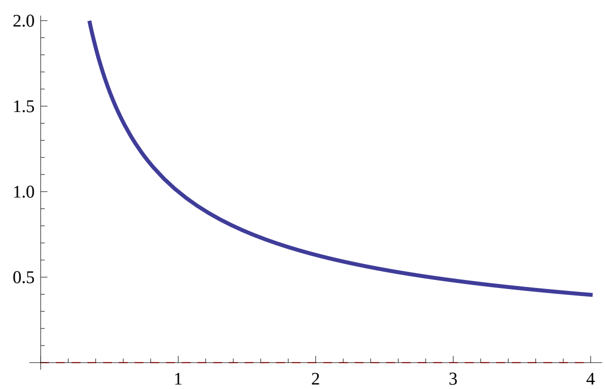
$$\limsup_{r \to \infty} \frac{Q(r)}{r^{0}} = \limsup_{r \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{r^2}}}{r^{0}} = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{r^2}} = 0 < \infty.$$



(a) gráfico da função $Q(r)$



(b) gráfico da função $\dfrac{Q(r)}{r^{b_0}}$



(c) gráfico da função $\dfrac{Q(r)}{r^{b}}$

Figura 1.4: Comportamento das funções com a condição **(Q)**

Com os valores $a = 2$, $a_0 = 1$, $b_0 = -\dfrac{2}{3}$ e $b = 0$, teremos $\underline{p} = \underline{p}(2, 0) = 2$ e $\overline{p} = \overline{p}\left(1, -\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2\left(n - \frac{2}{3}\right)}{n-2}$. Note que $\underline{p} = 2 < \dfrac{2\left(n - \frac{2}{3}\right)}{n-2} = \overline{p}$.

A seguir, apresentaremos os resultados preliminares que darão suporte para a demonstração dos teoremas principais no próximo capítulo. Para maior clareza, os lemas serão apresentados em detalhes e enfatizamos que os resultados não demonstrados estão listados no apêndice. Começaremos mostrando dois resultados de Strauss generalizados para os espaços com peso $H^1_r(I\!R^n, V)$ e $D^{1,2}_{0,r}(B_{r_0}(0)) \cap L^2(B_{r_0}(0), V)$ respectivamente.

Lema 1.1

Suponha **(V)** *com* $a > -2(n-1)$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *de modo que para toda função* $u \in H^1_r(I\!R^n, V)$,

$$|u(x)| \leq C||u||_V |x|^{-\frac{2(n-1)+a}{4}}, \qquad |x| \gg 1. \tag{1.1}$$

Demonstração:

Decorre de **(V)** que existe $R > 0$ tal que para alguma constante $C_1 > 0$,

$$V(|x|) \geq C_1 |x|^a, \qquad |x| \geq R.$$

Para $u \in C^\infty(I\!R^n) \cap H^1_r(I\!R^n, V)$ quando $\alpha > -(n-1)$ temos,

$$\frac{d}{dr}\left(r^{\alpha+n-1}|u|^2\right) = 2r^{\alpha+n-1}u\frac{du}{dr} + (\alpha+n-1)|u|^2 r^{\alpha+n-2} \geq 2r^{\alpha+n-1}u\frac{du}{dr}.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{a}{2}$, $r > R$ e utilizando Cauchy-Schwartz, Hölder (A.3), mudança de variável e a hipótese **(V)**, valem as desigualdades

$$\begin{aligned}
|u|^2 r^{\alpha+n-1} &\leq -2\int_r^\infty u s^{\alpha+n-1} u'(s) ds \\
&\leq 2\int_r^\infty |u| s^{\alpha+n-1} |u'(s)| ds = 2\int_r^\infty |u'(s)| s^{\frac{n-1}{2}} s^{\alpha+\frac{n-1}{2}} |u| ds \\
&\leq 2\left(\int_r^\infty |u'(s)|^2 s^{n-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^\infty s^{2\alpha}|u|^2 s^{n-1} ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\varpi_n^{-1}\left(\int_{I\!R^n\setminus B_r(0)} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I\!R^n\setminus B_r(0)} |x|^a |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\varpi_n^{-1}\left(\int_{I\!R^n\setminus B_r(0)} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I\!R^n\setminus B_r(0)} \frac{V(|x|)}{C_1} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; 2\varpi_n^{-1}C_1^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{I\!R^n\setminus B_r(0)}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I\!R^n\setminus B_r(0)}V(|x|)|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \; 2\varpi_n^{-1}C_1^{-\frac{1}{2}}\int_{I\!R^n}|\nabla u|^2+V(|x|)|u|^2dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|x|^{\frac{a}{2}+n-1}|u(x)|^2 &\leq 2\varpi_n^{-1}C_1^{-\frac{1}{2}}||u||_V^2 \\
|u(x)|^2 &\leq 2\varpi_n^{-1}C_1^{-\frac{1}{2}}|x|^{-\frac{a}{2}-n+1}\|u\|_V^2 \\
|u(x)| &\leq \left(2\varpi_n^{-1}C_1^{-\frac{1}{2}}\right)^{1/2}\left(|x|^{-\frac{a}{2}-n+1}\right)^{1/2}||u||_V.
\end{aligned}
$$

Tomando $C = \left(2\varpi_n^{-1}C_1^{-\frac{1}{2}}\right)^{1/2} > 0$ e utilizando o argumento da densidade segue que $u \in H_r^1(I\!R^n, V)$ implica

$$
|u(x)| \leq C||u||_V|x|^{-\frac{2(n-1)+a}{4}}, \qquad |x| \geq R \gg 1. \qquad \square
$$

Lema 1.2

Suponha **(V)** *com* $a_0 > -2(n-1)$. *Então existem* $r_0 > 0$ *e* $C_0 > 0$ *de modo que para toda função* $u \in D_{0,r}^{1,2}(B_{r_0}(0)) \cap L^2(B_{r_0}(0), V)$,

$$
|u(x)| \leq C_0\|u\|_V|x|^{-\frac{2(n-1)+a_0}{4}}, \qquad 0 < |x| < r_0. \tag{1.2}
$$

Demonstração:

Decorre de **(V)** que existe $r_0 > 0$ "pequeno" tal que, para alguma constante $C_2 > 0$,

$$
V(|x|) \geq C_2|x|^{a_0}, \quad 0 < |x| < r_0.
$$

Para $u \in C^\infty(B_{r_0}(0)) \cap D_{0,r}^{1,2}(B_{r_0}(0)) \cap L^2(B_{r_0}(0), V)$ com $\beta > -(n-1)$ temos,

$$
\frac{d}{dr}\left(r^{\beta+n-1}|u|^2\right) = 2r^{\beta+n-1}u\frac{du}{dr} + (\beta+n-1)|u|^2r^{\beta+n-2}.
$$

Utilizando Cauchy-Schwartz para $0 < r < r_0$ obtemos,

$$\begin{aligned}
-r^{\beta+n-1}|u|^2 &= \int_r^{r_0} 2s^{\beta+n-1}uu^{'}(s)ds + (\beta+n-1)\int_r^{r_0}|u|^2 s^{\beta+n-2}ds \\
r^{\beta+n-1}|u|^2 &\leq \left|\int_r^{r_0} 2s^{\beta+n-1}uu^{'}(s)ds\right| - (\beta+n-1)\int_r^{r_0}|u|^2 s^{\beta+n-2}ds \\
r^{\beta+n-1}|u|^2 &\leq 2\int_r^{r_0}|u|s^{\beta+n-1}|u^{'}(s)|ds - (\beta+n-1)\int_r^{r_0}|u|^2 s^{\beta+n-2}ds.
\end{aligned}$$

Quando $\beta \geq a_0+1$, segue da condição **(V)** que

$$\begin{aligned}
\int_r^{r_0}|u|^2 s^{\beta+n-2}ds &= \int_r^{r_0}|u|^2 s^{a_0+n-1}s^{\beta-a_0-1}ds \\
&\leq r_0^{\beta-a_0-1}\int_r^{r_0}|u|^2 s^{a_0+n-1}ds \\
&\leq \varpi_n^{-1} r_0^{\beta-a_0-1}\int_{B_{r_0}(0)\backslash B_r(0)}|x|^{a_0}|u|^2dx \\
&\leq \varpi_n^{-1} r_0^{\beta-a_0-1}\int_{B_{r_0}(0)\backslash B_r(0)}\frac{V(|x|)}{C_2}|u|^2dx \\
&\leq \varpi_n^{-1}C_2^{-1}r_0^{\beta-a_0-1}\|u\|_V^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\beta = \dfrac{a_0}{2}$, utilizando Hölder (A.3) e a condição **(V)** temos,

$$\begin{aligned}
\int_r^{r_0}|u|s^{\beta+n-1}|u^{'}(s)|ds &= \int_r^{r_0}|u^{'}(s)|s^{\frac{n-1}{2}}|u|s^{\beta+\frac{n-1}{2}}ds \\
&\leq \left(\int_r^{r_0}|u^{'}(s)|^2 s^{n-1}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_r^{r_0}s^{2\beta}|u|^2s^{n-1}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varpi_n^{-1}\left(\int_{B_{r_0}(0)\backslash B_r(0)}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{r_0}(0)\backslash B_r(0)}|x|^{a_0}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varpi_n^{-1}\left(\int_{B_{r_0}(0)\backslash B_r(0)}|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{r_0}(0)\backslash B_r(0)}\frac{V(|x|)}{C_2}|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varpi_n^{-1}C_2^{-\frac{1}{2}}\|u\|_V^2.
\end{aligned}$$

Como $\beta+n-1\geq 0$ se, e somente se, $a_0\geq -2(n-1)$, segue que $\beta+n-1\leq 0$ implica $\beta-a_0-1\geq n-2$. Em seguida, temos

$$\begin{aligned} r^{\beta+n-1}|u|^2 &\leq 2\varpi_n^{-1}C_2^{-\frac{1}{2}}\|u\|_V^2-(\beta+n-1)\varpi_n^{-1}C_2^{-1}r_0^{\beta-a_0-1}\|u\|_V^2 \\ &\leq 2\varpi_n^{-1}C_2^{-\frac{1}{2}}\left(2-(\beta+n-1)C_2^{-\frac{1}{2}}r_0^{\beta-a_0-1}\right)\|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Como r_0 é "pequeno" conseguimos que $2-(\beta+n-1)C_2^{-\frac{1}{2}}r_0^{\beta-a_0-1}>0$ daí basta escolher $C_0=C_0(a_0,r_0,n)=\left(2\varpi_n^{-1}C_2^{-\frac{1}{2}}\left(2-(\beta+n-1)C_2^{-\frac{1}{2}}r_0^{\beta-a_0-1}\right)\right)^{1/2}>0$ e utilizar o argumento da densidade que $u\in D_{0,r}^{1,2}(B_{r_0}(0))\cap L^2(B_{r_0}(0),V)$ nos dará a desigualdade desejada

$$|u(x)|\leq C_0\|u\|_V|x|^{-\frac{2(n-1)+a_0}{4}},\qquad 0<|x|<r_0. \qquad \square$$

O resultado a seguir é devido a Strauss.

Lema 1.3

Suponha $1<p<n$. Então existe $C=C(n,p)>0$ de modo que para toda função $u\in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$|u(x)|\leq C|x|^{-\frac{n-p}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.3}$$

Demonstração:

Utilizando o argumento da densidade basta considerar $u\in C_{0,r}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Assim, temos

$$-u(r)=u(\infty)-u(r)=\int_r^{\infty}u'(s)ds.$$

Deste modo, usando Hölder (A.3) temos,

$$\begin{aligned} |u(r)| &\leq \int_r^{\infty}|u'(s)|ds \\ &= \int_r^{\infty}|u'(s)|s^{\frac{n-1}{p}}s^{-\frac{n-1}{p}}ds \\ &\leq \left(\int_r^{\infty}|u'(s)|^ps^{n-1}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_r^{\infty}s^{-\frac{n-1}{p-1}}ds\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \varpi_n^{-\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_r^{\infty}s^{-\frac{n-1}{p-1}}ds\right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\displaystyle\int_r^\infty s^{-\frac{n-1}{p-1}}ds = \frac{p-1}{n-p}r^{\frac{p-n}{p-1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} |u(r)| &\leq \varpi_n^{-\frac{1}{p}}\left(\int_{I\!R^n}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{n-p}r^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \varpi_n^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{I\!R^n}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{p-n}{p}} \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C = C(n,p) = \varpi_n^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$, segue a desigualdade desejada, isto é, qualquer que seja $u \in D_r^{1,p}(I\!R^n)$ vale $|u(x)| \leq C|x|^{-\frac{n-p}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(I\!R^n)}$. $\square$

O resultado a seguir estabelece uma relação de imersão contínua do espaço $D_r^{1,2}(I\!R^n)$ em $L^p(I\!R^n, |x|^c)$.

Lema 1.4

Sejam $n \geq 3$, $2 \leq p < \infty$ e $p = \frac{2(n+c)}{n-2}$ para algum $-2 \leq c < \infty$. Então existe $C > 0$ tal que para toda função $u \in D_r^{1,2}(I\!R^n)$

$$\left(\int_{I\!R^n}|x|^c|u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq C\int_{I\!R^n}|\nabla u|^2 dx \tag{1.4}$$

Demonstração:

Nas desigualdades do Lema 1.4 vamos precisar das observações:

(i) Existe $\widehat{C} > 0$ de modo que $|x|^{2+c}|u(x)|^{p-2} \leq \widehat{C}^{p-2}\|\nabla u\|^{p-2}_{L^2(I\!R^n)}$.

De fato, no Lema 1.3 com $p = 2$ temos $|u(x)| \leq \widehat{C}|x|^{-\frac{n-2}{2}}\|\nabla u\|_{L^2(I\!R^n)}$. Por hipótese $p = 2\dfrac{(n+c)}{p-2}$ para algum $-2 \leq c < \infty$ daí

$$\frac{2+c}{p-2} = \frac{2+c}{\dfrac{2(n+c)}{n-2}-2} = \frac{2+c}{\dfrac{2n+2c-2n+4}{n-2}} = \frac{2+c}{\dfrac{2(c+2)}{n-2}} = \frac{n-2}{2}.$$

Portanto $|x|^{\frac{2+c}{p-2}}|u(x)| \leq \widehat{C}\|\nabla u\|_{L^2(I\!R^n)}$ e daí $|x|^{2+c}|u(x)|^{p-2} \leq \widehat{C}^{p-2}\|\nabla u\|^{p-2}_{L^2(I\!R^n)}$.

(ii) Como $p = 2\dfrac{(n+c)}{p-2}$ para algum $-2 \leq c < \infty$ temos $\dfrac{p}{n+c} = \dfrac{2}{n-2}$.

Utilizando o argumento padrão da densidade, é suficiente considerar o caso $u \in C^\infty_{0,r}(I\!R^n)$. Para tal u, usando as observações acima, integração por partes e a Desigualdade de Hölder (A.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |u|^p dx &= \varpi_n \int_0^\infty r^{n-1+c} |u(r)|^p dr \\
&= \frac{\varpi_n}{n+c} r^{n+c} |u(r)|^p \Big|_0^\infty - \frac{p\varpi_n}{n+c} \int_0^\infty r^{n+c} |u(r)|^{p-2} u(r) u^{'}(r) dr \\
&= -\frac{p\varpi_n}{n+c} \int_0^\infty r^{n+c} |u(r)|^{p-2} u(r) u^{'}(r) dr \\
&\leq \frac{2\varpi_n}{n-2} \int_0^\infty r^{n+c} |u(r)|^{p-1} |u^{'}(r)| dr \\
&= \frac{2\varpi_n}{n-2} \int_0^\infty r^{n+c-\frac{n-1}{2}} |u(r)|^{p-1} |u^{'}(r)| r^{\frac{n-1}{2}} dr \\
&\leq \frac{2\varpi_n}{n-2} \left(\int_0^\infty |u^{'}(r)|^2 r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty r^{2(n+c-\frac{n-1}{2})} |u(r)|^{2(p-1)} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\varpi_n^{\frac{1}{2}}}{n-2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(\int_0^\infty r^{n+2c+1} |u(r)|^{2(p-1)} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\varpi_n^{\frac{1}{2}}}{n-2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(\int_0^\infty r^{n-1+c} |u(r)|^p r^{2+c} |u(r)|^{p-2} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \widehat{C}^{\frac{p-2}{2}} \frac{2\varpi_n^{\frac{1}{2}}}{n-2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^\infty r^{n-1+c} |u(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \widehat{C}^{\frac{p-2}{2}} \frac{2}{n-2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |u|^p dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |u|^p dx \leq \widehat{C}^{\frac{p-2}{2}} \frac{2}{n-2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |u|^p dx \right)^{\frac{1}{2}}$ o que nos dá $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leq \widehat{C}^{\frac{2(p-2)}{p}} \left(\frac{2}{n-2} \right)^{\frac{4}{p}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$.

Agora, tomando $C = \varpi_n^{-\frac{p-2}{p}} 2^{\frac{4}{p}} \left(\frac{1}{n-2}\right)^{\frac{p+2}{p}} > 0$ (depende somente de n e p) e observando que a constante $\widehat{C} > 0$ foi dada no Lema 1.3 temos a desigualdade desejada, ou seja,

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \qquad \square
$$

O resultado a seguir estabelece uma imersão compacta de $H^1_r(B_R\backslash B_r, V)$ em $L^p(B_R\backslash B_r, Q)$.

Lema 1.5

Sejam $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então para algum $0 < r < R < \infty$ com $R \gg 1$, a seguinte imersão é compacta

$$H^1_r(B_R\backslash B_r, V) \hookrightarrow L^p(B_R\backslash B_r, Q). \tag{1.5}$$

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em 3 etapas para concluir a imersão.

Etapa 1. Mostrar a imersão $H^1_r(B_R\backslash B_r, V) \hookrightarrow H^1_r(B_R\backslash B_r)$.

Dado $u \in H^1_r(B_R\backslash B_r) = \{u \in H^1(B_R\backslash B_r) \mid \text{u é radial}\}$ basta verificar que

$$\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)} \leq C\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r, V)}.$$

Tomando $0 < r < R$ com $R \gg 1$, observando que $V(|x|) \geq 0$ e usando a Desigualdade de Poincaré (A.17) obtemos,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1_r(B_R\backslash B_r, V)} &= \int_{B_R\backslash B_r} (|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2)dx \\
&\geq \int_{B_R\backslash B_r} |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_R\backslash B_r} (|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_R\backslash B_r} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_R\backslash B_r} |\nabla u|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}C_1\int_{B_R\backslash B_r} u^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_R\backslash B_r} |\nabla u|^2 dx \\
&\geq C_2\int_{B_R\backslash B_r} (|\nabla u|^2 + u^2)dx \\
&= C_2\|u\|^2_{H^1_r(B_R\backslash B_r)}.
\end{aligned}$$

Tomando $C = C_2^{-\frac{1}{2}} > 0$ temos a desigualdade desejada.

Etapa 2. Mostrar a imersão compacta $H^1_r(B_R\backslash B_r) \hookrightarrow L^p(B_R\backslash B_r)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Para a imersão basta verificar que $\|u\|_{L^p(B_R\backslash B_r)} \leq C\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)}$.

Se $1 \leq p < \infty$ usando Hölder (A.3) temos,

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p(B_R\backslash B_r)} &= \int_{B_R\backslash B_r} |u|^p dx \\
&\leq \left(\int_{B_R\backslash B_r} |u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{B_R\backslash B_r} 1 dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq C_1 \left\{ \left(\int_{B_R\backslash B_r} (|\nabla u|^2 + u^2) dx\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^p \\
&= C_1 \left(\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)}\right)^p .
\end{aligned}$$

Tomando $C = C_1^{\frac{1}{p}} > 0$ temos a desigualdade desejada.

Se $p = \infty$ vamos usar a desigualdade $|u(x)| \leq C_1|x|^{-\frac{n-2}{2}}\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)}$ decorrente da desigualdade (1.3) dada no Lema 1.3 com $p = 2$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(B_R\backslash B_r)} &= \sup\{|u(x)| = M,\ \mu\{x : u(x) > M\} = 0\} \\
&\leq C_1|x|^{-\frac{n-2}{2}}\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)} \\
&\leq C_1 r^{-\frac{n-2}{2}}\|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)}.
\end{aligned}$$

Como $n \geq 2$ tome $C = C_1 r^{-\frac{n-2}{2}} > 0$ e a desigualdade segue.

Para provar a compacidade seja $(u_m) \subset H^1_r(B_R\backslash B_r)$ com $\|u_m\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)} \leq C$.

Afirmamos que (u_m) é equicontínua. De fato, tomando $R > |x| > |y| > r > 0$ e utilizando Cauchy-Schwartz e Hölder (A.3) temos,

$$\begin{aligned}
|u_m(x) - u_m(y)| &\leq \int_{|y|}^{|x|} |u_m'(s)| ds \\
&\leq ||x| - |y||^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|y|}^{|x|} |u_m'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||x| - |y||^{\frac{1}{2}} |y|^{-\frac{n-1}{2}} \varpi^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(B_R\backslash B_r)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |x-y|^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{n-1}{2}} \varpi^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(B_R\backslash B_r)}\\
&\leq C_1 |x-y|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r)}\\
&\leq CC_1 |x-y|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \frac{\epsilon^2}{CC_1} > 0$ e daí se $|x-y| < \delta$ implica $|u_m(x) - u_m(y)| < \epsilon$.

Como (u_m) é limitada e equicontínua, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (A.14), existe uma subsequência (u_{m_j}) de (u_m) que converge uniformemente, ou seja, $u_{m_j} \to u$.

Das condições anteriores temos,

(i) $|u_{m_j}| \leq C$(uniforme);
(ii) $u_{m_j}(x) \to u(x)$ q.t.p.;
(iii) $|u_{m_j} - u|^p \to 0$ q.t.p.;
(iv) $|u_{m_j} - u|^p \leq 2^{p-1}(|u_{m_j}|^p + |u|^p) \leq 2^{p-1}(C^p + |u|^p) \in L^1$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada (A.15), temos $u_{m_j} \to u$ em $L^p(B_R\backslash B_r)$.

Portanto $H^1_r(B_R\backslash B_r)$ está compactamente imerso em $L^p(B_R\backslash B_r)$.

Etapa 3. Mostrar a imersão $L^p(B_R\backslash B_r) \hookrightarrow L^p(B_R\backslash B_r, Q)$.

De **(Q)** temos a existência de $r_0 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que $Q(|x|) \leq C_2|x|^b$ sempre que $|x| \geq r_0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p(B_R\backslash B_r)} &= \int_{B_R\backslash B_r} |u|^p dx\\
&= \int_{B_R\backslash B_r} |u|^p \frac{C_2|x|^b}{C_2|x|^b} dx\\
&\geq C_3 \int_{B_R\backslash B_r} |u|^p Q(|x|) dx\\
&= C_3 \|u\|^p_{L^p(B_R\backslash B_r, Q)}.
\end{aligned}
$$

Tomando $C = C_3^{-\frac{1}{p}} > 0$ temos a desigualdade desejada.

Lema 1.6

A aplicação $u \mapsto \|u\|_V$, $\|u\|_V = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2\right) dx}$ *está bem definida e define uma norma em* $H^1_r(\mathbb{R}^n, V)$*. Além disso, para* $R \gg 1$*,*

$$H^1_r(B_R, V) \hookrightarrow H^1(B_R), \tag{1.6}$$

em que $H^1_r(B_R, V) = \{u\big|_{B_R} \mid u \in H^1_r(\mathbb{R}^n, V)\}$.

Demonstração:

Primeiramente, vamos mostrar que a norma está bem definida. De fato

(i) Se $\|u\|_V = 0$, então $\int |\nabla u|^2 = 0$ e u é constante. Decorre de **(V)** que $\liminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^a} > 0$ e $u = 0$. Portanto $\|u\|_V = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

(ii) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1_r(\mathbb{R}^n, V)$ temos

$$\|\alpha u\|_V = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla \alpha u|^2 + V(|x|)(\alpha u)^2\right) dx} = |\alpha|\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2\right) dx} = |\alpha|\|u\|_V.$$

Portanto $\|\alpha u\|_V = |\alpha|\|u\|_V$;

(iii)(Desigualdade Triangular) Sejam $u, v \in H^1_r(\mathbb{R}^n, V)$. Então

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_V^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla(u+v)|^2 + V(|x|)(u+v)^2\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u + \nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(|x|)(u+v)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u| + |\nabla v|)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(|x|)(u+v)^2 dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u| + |\nabla v|)^2 dx\right)^{1/2} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}\right) \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} V(|x|)(u+v)^2 dx\right)^{1/2}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} V(|x|)u^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} V(|x|)v^2 dx\right)^{1/2}\right) \\
&\leq \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u| + |\nabla v|)^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} V(|x|)(u+v)^2 dx\right)^{1/2}\right)(\|u\|_V + \|v\|_V).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a proposição (A.19), temos

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_V &= \left(\int_{I\!R^n} \left(|\nabla(u+v)|^2 + V(|x|)(u+v)^2\right) dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{I\!R^n} |\nabla(u+v)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{I\!R^n} V(|x|)(u+v)^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{I\!R^n} (|\nabla u| + |\nabla v|)^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{I\!R^n} V(|x|)(u+v)^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, do exposto acima, temos $\|u+v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V$. $\square$

Em seguida, para mostrar que $H_r^1(B_R, V) \hookrightarrow H^1(B_R)$, vamos utilizar as desigualdades 1 e 2 listadas abaixo. Seja $R_1 > 0$ tal que $(suppV)^c \subset B_{R_1}$. Para $R \geq R_1 + 1$.

Desigualdade 1. Para cada $u \in H_r^1(B_R, V)$, temos $\displaystyle\int_{B_R \setminus B_{R_1}} u^2 \leq C_2 \int_{B_R} V u^2$ com $C_2 > 0$. De fato, por **(V)** existe $C_1 > 0$ tal que $V(|x|) \geq C_1 |x|^a$ sempre que $|x| \geq R$ e daí,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R \setminus B_{R_1}} u^2 dx &= \int_{B_R \setminus B_{R_1}} u^2 \frac{C_1 |x|^a}{C_1 |x|^a} dx \\
&\leq \int_{B_R \setminus B_{R_1}} u^2 \frac{V(|x|)}{C_1 |x|^a} dx \\
&\leq C_2 \int_{B_R \setminus B_{R_1}} V(|x|) u^2 dx \\
&\leq C_2 \int_{B_R} V(|x|) u^2 dx.
\end{aligned}
$$

Na desigualdade anterior tomamos $C_2 = (C_1 R_1^a)^{-1} > 0$.

Desigualdade 2. Escolha uma função corte ou "cut-off" $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$ satisfazendo $\varphi(x) = 1$ para $|x| \leq R_1$. Então, usando a Desigualdade de Poincaré (A.17) e a desigualdade 1, temos $\displaystyle\int_{B_{R_1}} u^2 dx \leq C_6 \int_{B_R} |\nabla u|^2 + V u^2 dx$ com $C_6 > 0$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{R_1}} u^2 dx &\leq \int_{B_R} (\varphi u)^2 dx \\
&\leq C_3 \int_{B_R} |\nabla(\varphi u)|^2 dx \\
&= C_3 \int_{B_R} |\nabla\varphi . u + \varphi . \nabla u|^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2C_3 \int_{B_R} |\nabla\varphi . u|^2 + |\varphi . \nabla u|^2 dx \\
&= 2C_3 \left(\int_{B_R} |\varphi . \nabla u|^2 dx + \int_{B_R} |\nabla\varphi . u|^2 dx \right) \\
&\le 2C_3 \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R \setminus B_{R_1}} C_4 u^2 dx \right) \\
&\le C_5 \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R \setminus B_{R_1}} u^2 dx \right) \\
&\le C_6 \int_{B_R} |\nabla u|^2 + V u^2 dx.
\end{aligned}
$$

Para a imersão basta verificar que $\|u\|_{H^1(B_R)} \le C\|u\|_{H^1_r(B_R,V)}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(B_R)} &= \int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx = \int_{B_{R_1}} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx + \int_{B_R \setminus B_{R_1}} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \\
&= \int_{B_{R_1}} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_{R_1}} u^2 dx + \int_{B_R \setminus B_{R_1}} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R \setminus B_{R_1}} u^2 dx \\
&\le \int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 + V u^2\right) dx + C_6 \int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 + V u^2\right) dx + \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{B_R} V u^2 dx \\
&\le 3C_7 \int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 + V u^2\right) dx = 3C_7 \|u\|^2_{H^1_r(B_R,V)}.
\end{aligned}
$$

Tomando $C = \sqrt{3C_7} > 0$ com $C_7 = \max\{1, C_2, C_6\} > 0$ segue a desigualdade $\|u\|_{H^1(B_R)} \le C\|u\|_{H^1_r(B_R,V)}$. □

Nós precisaremos também da Desigualdade de Hardy e da Desigualdade de Hardy 2-dimensional.

Lema 1.7 (Desigualdade de Hardy)

Seja $n \ge 3$. Para toda função radial $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \ge \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx. \tag{1.7}
$$

Demonstração:

Da desigualdade (1.4) dada no Lema 1.4, com $p = 2$ e $c = -2$, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2}|u|^2 dx\right)^1 \leq 2^2 \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

Portanto, segue a desigualdade $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx.$ □

Lema 1.8 (Desigualdade de Hardy 2-dimensional)
Considere $n = 2$. Para toda função radial $u \in D_0^{1,2}(B_1)$

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{B_1} |x|^{-2} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{-2} |u|^2 dx. \tag{1.8}$$

Demonstração:

Para $u \in C_0^1(B_1)$, $u > 0$ radial definimos $\psi(r) = \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} u(r)$ para $r \in (0, 1]$. Então, derivando u em termos de ψ temos

$$\begin{aligned}
u'(r) &= \psi'(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\psi(r)}{2} \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r \left(-\frac{1}{r^2}\right) \\
u'(r) &= \psi'(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2r}\psi(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
u'(r) &= -\frac{1}{2r}\psi(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2r\psi'(r)}{\psi(r)} \ln \frac{1}{r}\right).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
|u'(r)|^2 &= \frac{1}{4r^2}\psi^2(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2r\psi'(r)}{\psi(r)} \ln \frac{1}{r}\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{4r^2}\psi^2(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{4r\psi'(r)}{\psi(r)} \ln \frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{1}{4r^2}\psi^2(r) \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{-1} - \frac{\psi(r)\psi'(r)}{r}.
\end{aligned}$$

Como $\psi(r) \to 0$ quando $r \to 0$ e $\psi(1) = 0$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx &= \varpi_n \int_0^1 |u'(r)|^2 r dr \\
&\geq \varpi_n \int_0^1 \left(\frac{1}{4r^2} \psi^2(r) \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-1} - \frac{\psi(r)\psi'(r)}{r} \right) r dr \\
&= \frac{\varpi_n}{4} \int_0^1 \frac{1}{r} \psi^2(r) \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-1} dr - \frac{\varpi_n}{2} \int_0^1 \left(\frac{d}{dr} \psi^2(r) \right) dr \\
&= \frac{\varpi_n}{4} \int_0^1 \frac{1}{r} |u(r)|^2 \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-2} dr - \frac{\varpi_n}{2} \int_0^1 \left(\frac{d}{dr} \psi^2(r) \right) dr \\
&= \frac{1}{4} \int_{B_1} \frac{u^2}{|x|^2} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-2} dx
\end{aligned}
$$

Uma função radial $u \in D_0^{1,2}(B_1)$ pode ser aproximada por uma sequência (u_m) de funções radiais suaves. Usando a convergência forte de (u_m) para u na norma do gradiente e o Lema de Fatou (A.18) a desigualdade desejada é válida para toda função radial $u \in D_0^{1,2}(B_1)$. $\square$

Capítulo 2

Teoremas Principais

Nesta seção apresentamos as demonstrações dos teoremas principais. Para maior clareza, os teoremas serão apresentados em detalhes e enfatizamos que os resultados não demonstrados estão listados no apêndice. Começaremos provando um resultado de compacidade no $I\!R^n$. Iremos suprimir, nas integrais, o dx a fim de tornar a escrita menos densa.

Teorema 2.1

Seja $n \geq 3$, suponha **(V)** *e* **(Q)** *tal que $\overline{p} = \overline{p}(a_0, b_0) \geq \underline{p} = \underline{p}(a, b)$ como definimos anteriormente. Então, para $p < \infty$, temos,*

$$H^1_r(I\!R^n, V) \hookrightarrow L^p(I\!R^n, Q) \text{ para } \underline{p} \leq p \leq \overline{p}. \tag{2.1}$$

Além disso,

(i) *se $b \geq \max\{a, -2\}$, a imersão é compacta para $\underline{p} < p < \overline{p}$;*

(ii) *se $b < \max\{a, -2\}$, a imersão é compacta para $2 \leq p < \overline{p}$.*

Demonstração:

Por **(Q)** para qualquer $r > 0$, "pequeno" o suficiente, $Q(|x|) \leq C_1|x|^{b_0}$, $|x| \leq r$ para algum $C_1 > 0$.

Por **(V)** para qualquer $r > 0$, "pequeno" o suficiente, $V(|x|) \geq C_2|x|^{a_0}$, $|x| \leq r$ para algum $C_2 > 0$.

Para a imersão é suficiente mostrar que

$$S_r(V, Q) = \inf_{u \in H^1_r(I\!R^n, V)} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 + Vu^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} Q|u|^p\right)^{\frac{2}{p}}} > 0.$$

Por contradição, suponha que exista uma sequência $(u_m) \subset H_r^1(I\!R^n, V)$ tal que $\displaystyle\int_{I\!R^n} Q|u_m|^p = 1$ e $\displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla u_m|^2 + V u_m^2 = o(1)$.

Distinguimos dois casos.

Caso 1. Primeiramente supomos **(V)** e **(Q)** com $a \geq -2$. Podem ocorrer dois casos para $\underline{p}$, a saber,

(i) $\underline{p} = 2$ se $b \leq \max\{a, -2\} = a$;

(ii) $\underline{p} = \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}$ se $-2 < a \leq b$.

Apresentam-se três subcasos de acordo com a_0 e b_0.

Subcaso 1. $b_0 \geq -2$, $a_0 \geq -2$.

Colocando $p = \dfrac{2n}{n-2} + \dfrac{2c}{n-2}$ e por $p \leq \overline{p}$ nós temos, observando a definição de $\overline{p}$, que $c \leq b_0$.

(i) $\underline{p} = 2$ se $b \leq \max\{a, -2\} = a$.

Afirmamos que $\underline{p} < p$ sempre que $-2 \leq c$. De fato,

$$\begin{aligned} -2 &\leq c \\ 2(n-2) &\leq 2(n+c) \\ \frac{2(n-2)}{n-2} &\leq \frac{2n+2c}{n-2} \\ \underline{p} = 2 &\leq \frac{2n+2c}{n-2} = p \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $-2 \leq c \leq b_0$ temos $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$.

(ii) $\underline{p} = \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}$ se $-2 < a \leq b$.

Afirmamos que $\underline{p} < p$ sempre que $b \leq c$. De fato,

$$\begin{aligned} \underline{p} = \frac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a} &\leq \frac{2(2n-2+2b+2)}{2n-2-2} \\ &= \frac{2(2n+2b)}{2n-4} \\ &\leq \frac{2(n+c)}{n-2} = p. \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $b \leq c \leq b_0$ temos $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$. Note que para termos $b \leq c \leq b_0$ precisamos que $b < b_0$.

Usaremos o LEMA 1.4 na desigualdade abaixo,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_m|^p \\
&= C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0-c}|x|^c|u_m|^p \\
&\leq C_1 r^{b_0-c} \int_{B_r} |x|^c|u_m|^p \\
&\leq C_1 r^{b_0-c} \left(C_4 \int_{B_r} |\nabla u_m|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq C_1 C_4^{\frac{p}{2}} r^{b_0-c} \left(\int_{B_r} |\nabla u_m|^2 + V(u_m)^2 \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq C_1 C_4^{\frac{p}{2}} r^{b_0-c} \left(o(1)\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \overline{o(1)} r^{b_0-c}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

A desigualdade acima foi possível, pois $b_0 - c > 0$.

Subcaso 2. $-2(n-1) < a_0 \leq -2$ e $b_0 \geq a_0$.

Tomando $p \leq \overline{p} = \dfrac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0}$ para termos $\underline{p} \leq p$ basta exigir que $p \geq \max\left\{2, \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}\right\}$. De fato,

(i) $\underline{p} = 2$ se $b \leq \max\{a, -2\} = a$.

Nestas condições precisamos saber se $\underline{p} = 2 \leq \overline{p}$ para termos $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$.

$$
\begin{aligned}
\underline{p} = 2 &= \frac{2(2n-2+a_0)}{2n-2+a_0} \\
&= \frac{2(2n-2+2a_0-a_0)}{2n-2+a_0} \\
&\leq \frac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0} = \overline{p}.
\end{aligned}
$$

(ii) $\underline{p} = \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}$ se $-2 < a \leq b$.

Nestas condições precisamos saber se $\underline{p} = \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a} \leq \overline{p}$ para termos $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$. A desigualdade será verificada quando $b < b_0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\underline{p} = \frac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a} &\leq \frac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a_0} \\
&\leq \frac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0} = \overline{p}.
\end{aligned}$$

Usaremos o Lema 1.2 e $p \leq \overline{p}$ na desigualdade abaixo.

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_m|^p \\
&= C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0-a_0}|u_m|^{p-2}u_m^2|x|^{a_0} \\
&\leq C_1 r^{b_0-a_0} \int_{B_r} C_0^{p-2}\|u_m\|^{p-2}_{H^1_r(I\!R^n,V)}|x|^{-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)}u_m^2|x|^{a_0} \\
&= C_1 C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)} \int_{B_r} |x|^{a_0}u_m^2 \\
&\leq C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)} \int_{B_r} V u_m^2 \\
&\leq C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)} \int_{B_r} |\nabla u_m|^2 + V u_m^2 \\
&= C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)} \\
&= \overline{o(1)} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Precisamos que $b_0 - a_0 - \frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2) \geq 0$. Das condições $b_0 \geq a_0$ e $a_0 > -2(n-1)$ temos

$$\begin{aligned}
b_0 - a_0 - \frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2) &\geq b_0 - a_0 - \frac{2(n-1)+a_0}{4}(\overline{p}-2) \\
&= b_0 - a_0 - \frac{2(n-1)+a_0}{4}\left(\frac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0} - 2\right) \\
&= b_0 - a_0 - \frac{2(n-1)+a_0}{4}\frac{4(b_0-a_0)}{2n-2+a_0} \\
&= b_0 - a_0 - b_0 + a_0 = 0.
\end{aligned}$$

Subcaso 3. $a_0 \leq -2(n-1)$, $b_0 > -2(n-1)$.

Tomando $p \leq \overline{p} = \infty$ basta $p \geq \max\left\{2, \dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}\right\}$ para que $\underline{p} \leq p$ ocorra trivialmente.

Para qualquer p escolha $a_0^{'} > -2(n-1)$ tal que $b_0 - a_0 - \frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2) > 0$ e $r_0 > 0$, $C_0^{'} > 0$ tal que $V(r) \geq C_0^{'} r^{a_0} \geq C_0^{'} r^{a_0^{'}}$ para $r \leq r_0$.

Seja ϕ uma função “cut-off” tal que $\phi(t) = 1$ para $0 \leq t \leq \dfrac{r_0}{2}$ e $\phi(t) = 0$ para $t \geq r_0$. Note que $\phi u_n \in D^{1,2}_{0,r}(B_{r_0}(0)) \cap L^2(B_{r_0}(0), V)$ e para $r < \dfrac{r_0}{2}$, usando o Lema 1.2, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_m|^p \\
&= C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0-a_0}|\phi u_m|^{p-2}(\phi u_m)^2|x|^{a_0} \\
&\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0-a_0} C_0^{p-2}\|\phi u_m\|^{p-2}_{H^1_r(I\!R^n,V)}|x|^{-\frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2)}(\phi u_m)^2|x|^{a_0} \\
&\leq C_1 C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2)} \int_{B_r} |x|^{a_0}u_m^2 \\
&\leq C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2)} \int_{B_r} Vu_m^2 \\
&\leq C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2)} \int_{B_r} |\nabla u_m|^2 + Vu_m^2 \\
&= C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2}\left(o(1)\right)^{\frac{p}{2}} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2)} \\
&= \overline{o(1)} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0^{'}}{4}(p-2)}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, por **(V)** e **(Q)**, existem $R_0 > 0$, $C_4 > 0$ e $C_5 > 0$ tais que

$$Q(|x|) \leq C_4|x|^b \text{ e } V(|x|) \geq C_5|x|^a \text{ sempre que } |x| \geq R_0.$$

Então, pelo Lema 1.1, para $R > R_0$,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q|u_m|^p &\leq C_4 \int_{B_R^c} |x|^b |u_m|^p \\
&= C_4 \int_{B_R^c} |x|^{b-a}|u_m|^{p-2}|x|^a|u_m|^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2}\|u_m\|^{p-2}_{H^1_r(I\!R^n,V)} R^{b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)} \int_{B_R^c} |x|^a u_m^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} C_5^{-1} \left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} R^{b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)} \int_{B_R^c} V u_m^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} C_5^{-1} \left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} R^{b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)} \int_{B_R^c} |\nabla u_m|^2 + V u_m^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} C_5^{-1} \left(o(1)\right)^{\frac{p}{2}} R^{b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)} \\
&\leq \overline{o(1)} R^{b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)}. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.5 podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\|u_m\|_{L^p(B_R\setminus B_r,Q)} &= \left(\int_{B_R\setminus B_r} Q|u_m|^p\right)^{1/p} \\
&\leq C_8 \left(\int_{B_R\setminus B_r} |\nabla u_m|^2 + V u_m^2\right)^{1/2} \\
&= C_8 \|u_m\|_{H^1_r(B_R\setminus B_r,V)} \leq C_8 o(1)^{1/2} = \overline{o(1)}.
\end{aligned}
$$

Como $\int_{I\!R^n} Q|u_m|^p = \int_{B_r} Q|u_m|^p + \int_{B_R^c} Q|u_m|^p + \int_{B_R\setminus B_r} Q|u_m|^p$ e observando as estimativas feitas em (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) obtemos $\int_{I\!R^n} Q|u_m|^p \to 0$, o que é uma contradição já que $\int_{I\!R^n} Q|u_m|^p = 1$. Portanto a imersão se verifica.

Agora, vamos considerar compacidade no **Caso 1.**

Considere $(u_m) \subset H^1_r(I\!R^n, V)$ de modo que $\|u_m\|_{H^1_r(I\!R^n,V)} \leq C$. Sem perda de generalidade, podemos supor $u_m \rightharpoonup 0$. Afirmamos que $u_m \to 0$ em $L^p(I\!R^n, Q)$ nas condições abaixo. De fato,

(i) se $b \geq \max\{a, -2\} = a$ a imersão é compacta para $\underline{p} < p < \overline{p}$.

Repetindo as estimativas que fizemos em (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5), em cada caso, teremos as desigualdades

$$\left.\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 C_4^{\frac{p}{2}} r^{b_0-c} \|u_m\|^p_{H^1_r(\mathbb{R}^n,V)} \\
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2)} \|u_m\|^p_{H^1_r(\mathbb{R}^n,V)} \\
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 C_2^{-1} C_0^{p-2} r^{b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0'}{4}(p-2)} \|u_m\|^p_{H^1_r(\mathbb{R}^n,V)}
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$\int_{B_R^c} Q|u_m|^p \leq C_7 C^{p-2} C_5^{-1} R^{b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)} \|u_m\|^p_{H^1_r(\mathbb{R}^n,V)} \tag{2.7}$$

Neste caso ocorre $b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) < 0$. De fato, da condição $b \geq a$ temos

$$\begin{aligned}
b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) &< b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}(\underline{p}-2) \\
&= b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}\left(\frac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}-2\right) \\
&= b-a-\frac{2(n-1)+a}{4}\frac{4(b-a)}{2n-2+a} \\
&= b-a-b+a = 0.
\end{aligned}$$

As desigualdades abaixo já foram apresentadas anteriormente.

$$\begin{aligned}
b_0-c &> 0 \\
b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0}{4}(p-2) &> 0 \\
b_0-a_0-\frac{2(n-1)+a_0'}{4}(p-2) &> 0
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.5 e $\int_{\mathbb{R}^n} Q|u_m|^p = \int_{B_r} Q|u_m|^p + \int_{B_R^c} Q|u_m|^p + \int_{B_R\setminus B_r} Q|u_m|^p$ obtemos $\int_{\mathbb{R}^n} Q|u_m|^p \to 0$ quando $n \to \infty$.

(ii) se $b < \max\{a,-2\} = a$ a imersão é compacta para $2 \leq p < \overline{p}$.

Similarmente a (2.7) temos

$$\int_{B_R^c} Q|u_m|^2 \leq C_7 C_5^{-1} R^{b-a} \|u_m\|^2_{H^1_r(\mathbb{R}^n,V)} \tag{2.8}$$

Usando o Lema 1.7 temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^2 &\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_m|^2 \\
&= C_1 \int_{B_r} |x|^{-2}|u_m|^2|x|^{b_0+2} \\
&\leq C_1 r^{b_0+2} \int_{B_r} |x|^{-2}|u_m|^2 \\
&\leq C_1 r^{b_0+2} \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \int_{B_r} |\nabla u_m|^2 \\
&\leq C_1 \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 r^{b_0+2} \|u_m\|^2_{H^1_r(\mathbb{R}^n,V)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Desde que $b_0 > -2$ e $b < a$ nós obtemos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} Q|u_m|^p \to 0$ quando $n \to \infty$ de forma análoga a (i). Assim, terminamos o **Caso 1**.

Caso 2. Assumimos **(V)** e **(Q)** com $a \leq -2$. Podem ocorrer dois casos para $\underline{p}$ a saber

(i) $\underline{p} = 2$ se $b \leq \max\{a, -2\} = -2$;

(ii) $\underline{p} = \dfrac{2(n+b)}{n-2}$ se $b \geq -2$.

Apresentam-se três subcasos de acordo com a_0 e b_0.

Subcaso 1. $b_0 \geq -2$, $a_0 \geq -2$.

Colocando $p = \dfrac{2n}{n-2} + \dfrac{2c}{n-2}$ e por $p \leq \overline{p}$ nós temos, observando a definição de $\overline{p}$, que $c \leq b_0$.

(i) $\underline{p} = 2$ se $b \leq \max\{a, -2\} = -2$.

Da mesma forma que fizemos no **Caso 1.** basta escolher $-2 \leq c \leq b_0$ e teremos $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$.

(ii) $\underline{p} = \dfrac{2(n+b)}{n-2}$ se $b \geq -2$.

Para que $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$ basta tomar $b \leq c \leq b_0$ com $b_0 > b$. De fato,

$$\underline{p} = \frac{2n - 2b_0}{n-2} \leq p = \frac{2n-2c}{n-2} \leq \frac{2n-2b}{n-2} = \overline{p}.$$

A estimativa feita em (2.2) continua válida para $b \geq -2$.

Subcaso 2. $-2(n-1) < a_0 \leq -2$ e $b_0 \geq a_0$.

Tomando $p \leq \overline{p} = \dfrac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0}$ para termos $\underline{p} \leq p$ basta exigir que $p \geq \max\left\{2, \dfrac{2(n+b)}{n-2}\right\}$. De fato,

(i) $\underline{p} = 2 \quad$ se $\quad b \leq \max\{a, -2\} = -2$.

Basta observar que $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$ sempre, pois $\underline{p} = 2 \leq \overline{p}$ exatamente como fizemos no **Caso 1.**

(ii) $\underline{p} = \dfrac{2(n+b)}{n-2} \quad$ se $\quad b \geq -2,\ a \leq -2$.

Nestas condições precisamos saber se $\underline{p} = \dfrac{2(n+b)}{n-2} \leq \overline{p}$ para termos $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$. A desigualdade segue quando $-2 + 2b_0 - a_0 \geq 2b$. De fato,

$$\begin{aligned}\underline{p} = \frac{2(n+b)}{n-2} &\leq \frac{2n-2+2b_0-a_0}{n-2} \\ &= \frac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-4} \\ &\leq \frac{2(2n-2+2b_0-a_0)}{2n-2+a_0} = \overline{p}.\end{aligned}$$

A estimativa feita em (2.3) continua válida para $b \geq -2$.

Subcaso 3. $a_0 \leq -2(n-1)$, $b_0 > -2(n-1)$.

Tomando $p \leq \overline{p} = \infty$ basta $p \geq \max\left\{2, \dfrac{2(2n+b)}{n-2}\right\}$ para que $\underline{p} \leq p$ ocorra trivialmente.

As estimativas feitas em (2.4) e (2.6) continuam válidas para $b \geq -2$. Agora, precisamos obter estimativas como em (2.5) e (2.7).

Escrevendo $p = \dfrac{2n+2c}{n-2}$ temos $c \geq b$. Então para $R > R_0$ usamos o Lema 1.4 para obter

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q|u_m|^p &\leq C_4 \int_{B_R^c} |x|^b |u_m|^p \\
&= C_4 \int_{B_R^c} |x|^{b-c}|x|^c|u_m|^p \\
&\leq C_1 R^{b-c} \|\nabla u_m\|^p_{L^2(B_R^c)} \\
&\leq C_1 R^{b-c} \left(\|u_m\|_{H^1_r(I\!\!R^n,V)}\right)^p. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Usando $b-c \leq 0$ temos estimativas como em (2.4) e (2.6). De forma análoga ao que fizemos no **Caso 1.** para mostrar a imersão também teremos a contradição no **Caso 2.** já que estimativas similares são mantidas. Portanto a imersão se verifica.

Agora, vamos considerar compacidade no **Caso 2.**.

Considere $(u_m) \subset H^1_r(I\!\!R^n, V)$ de modo que $\|u_m\|_{H^1_r(I\!\!R^n,V)} \leq C$. Sem perda de generalidade, podemos supor $u_m \rightharpoonup 0$. Afirmamos que $u_m \to 0$ em $L^p(I\!\!R^n, Q)$ nas condições abaixo. De fato,

(i) se $b \geq \max\{a, -2\} = -2$ a imersão é compacta para $\underline{p} < p < \overline{p}$.
Neste caso, basta observar as estimativas feitas no **Caso 1.**(i).

(ii) se $b < \max\{a, -2\} = -2$ a imersão é compacta para $2 \leq p < \overline{p}$.
Para $2 < p < \overline{p}$ as estimativas feitas no **Caso 1.**(ii) são mantidas e podem ser utilizadas aqui de forma análoga. Quando $b < -2$ precisamos mostrar a compacidade para $p = 2$. Seja ϕ uma função "cut-off" tal que $\phi(r) = 1$ para $r \geq 2R_0$ e $\phi(r) = 0$ para $r \leq R_0$. Então pelo Lema 1.6,

$$
\int_{B_R^c} Q|u_m|^2 \leq C_1 R^{b+2} \|\nabla(\phi u_m)\|^p_{L^2(B_R^c)} \leq C_2 R^{b+2} \|\nabla u_m\|^p_{L^2(B_R^c)} \leq C_2 R^{b+2} \left(\|u_m\|_{H^1_r(I\!\!R^n,V)}\right)^p.
$$

Como (2.9) ainda se mantém para $b < -2$, concluímos a parte restante da prova exatamente como fizemos no **Caso 1**. Assim, terminamos o **Caso 2**. $\square$

Para $n = 2$ definimos $\underline{p}(a, b)$ da mesma forma como foi definido para $a > -2$. O teorema seguinte nos dá um resultado de compacidade no plano.

Teorema 2.2

Seja $n=2$, suponha **(V)** *e* **(Q)**. *Então*

$$H_r^1(I\!R^2, V) \hookrightarrow L^p(I\!R^2, Q) \text{ para } \underline{p} \le p < \infty. \tag{2.11}$$

Além disso,

(i) *se $b \ge a$, a imersão é compacta para $\underline{p} < p < \infty$;*

(ii) *se $b < a$, a imersão é compacta para $2 \le p < \infty$.*

Demonstração:

Antes de realizarmos a demonstração, observe que $\overline{p} = \infty$ e que há possibilidades para $\underline{p}$.

Pode ocorrer $\underline{p} = \underline{p}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{2(2+2b-a)}{2+a}, & \text{se} \quad -2 < a \le b, \\ 2, & \text{se} \quad b \le \max\{a, -2\} \end{cases}$.

Se $a > -2$ temos dois valores possíveis para $\underline{p}$, isto é, $\underline{p} = \dfrac{2(2+2b-a)}{2+a}$ ou $\underline{p} = 2$ e se $a \le -2$ temos somente $\underline{p} = 2$.

As desigualdades que vamos precisar dependem somente dos valores de b_0 e, portanto, precisamos separar a demonstração levando em consideração somente os valores de b_0.

Para a imersão é suficiente mostrar que

$$S_r(V,Q) = \inf_{u \in H_r^1(I\!R^2, V)} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^2} |\nabla u|^2 + Vu^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^2} Q|u|^p\right)^{\frac{2}{p}}} > 0.$$

Por contradição, suponha que exista uma sequência $(u_m) \subset H_r^1(I\!R^2, V)$ tal que $\displaystyle\int_{I\!R^2} Q|u_m|^p = 1$ e $\displaystyle\int_{I\!R^2} |\nabla u_m|^2 + Vu_m^2 = o(1)$.

Por **(Q)** para qualquer $r > 0$, "pequeno" o suficiente, $Q(|x|) \le C_1|x|^{b_0}$, $|x| \le r$ para algum $C_1 > 0$.

Por **(V)** para qualquer $r > 0$, "pequeno" o suficiente, $V(|x|) \ge C_2|x|^{a_0}$, $|x| \le r$ para algum $C_2 > 0$.

Por **(V)** e **(Q)** existem $R_0 > 0$, $C_4 > 0$ e $C_5 > 0$ tais que $Q(|x|) \le C_4|x|^b$ e $V(|x|) \ge C_5|x|^a$ sempre que $|x| \ge R_0$.

Caso 1. $a > -2$

Usando o LEMA 1.1 com $n = 2$ e $R > R_0$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q|u_m|^p &\leq C_4 \int_{B_R^c} |x|^b |u_m|^p \\
&= C_4 \int_{B_R^c} |x|^{b-a} |u_m|^{p-2} |x|^a |u_m|^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} \|u_m\|^{p-2}_{H^1_r(\mathbb{R}^2,V)} R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \int_{B_R^c} |x|^a u_m^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} C_5^{-1} \left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \int_{B_R^c} V u_m^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} C_5^{-1} \left(o(1)\right)^{\frac{p-2}{2}} R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \int_{B_R^c} |\nabla u_m|^2 + V u_m^2 \\
&\leq C_4 C^{p-2} C_5^{-1} \left(o(1)\right)^{\frac{p}{2}} R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \\
&\leq \overline{o(1)} R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Algumas passagens na desigualdade acima foram omitidas já que desigualdades análogas foram vistas no TEOREMA 2.1 onde podemos ver que $b - a - \dfrac{2+a}{4}(p-2) < 0$.

Repetindo as estimativas feitas em (2.12) obtemos

$$\int_{B_R^c} Q|u_m|^p \leq C_3 R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \|u_m\|^p_{H^1_r(\mathbb{R}^2,V)}. \qquad (2.13)$$

Caso 2. $a \leq -2$

$$\begin{aligned}
\int_{B_R^c} Q|u_m|^p &\leq C_4 \int_{B_R^c} |x|^b |u_m|^p \\
&\leq C_4 R^b C_3 \left(\int_{B_R^c} |u_m|^2\right)^{p/2} \\
&\leq C_3 C_4 C_7 R^b \left(\int_{B_R^c} |\nabla u_m|^2\right)^{p/2} \\
&\leq \overline{o(1)} R^b. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Repetindo as estimativas feitas em (2.14) obtemos

$$\int_{B_R^c} Q|u_m|^p \ \leq \ CR^b \|u_m\|^p_{H_r^1(\mathbb{R}^2,V)}. \tag{2.15}$$

Agora, note que $\dfrac{2(2+2b-a)}{2+a} \geq 2$ para $-2 < a \leq b$. De fato,

$$2 = \frac{2(2+a)}{2+a} = \frac{2(2+2a-a)}{2+a} \leq \frac{2(2+2v-a)}{2+a}.$$

Se $b_0 > 0$ e $p \geq 2$ usando o Lema 1.6 temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_m|^p \\
&\leq C_1 r^{b_0} \int_{B_r} |u_m|^p \\
&\leq C_1 r^{b_0} \int_{B_1} |u_m|^p \\
&\leq C_1 r^{b_0} \left(\int_{B_1} |u_m|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{B_1} 1 \right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq C_3 r^{b_0} \|u_m\|^p_{H^1(B_R)} \\
&\leq C_6 r^{b_0} \|u_m\|^p_{H_r^1(B_R,V)} \\
&\leq r^{b_0}\overline{o(1)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Repetindo as estimativas feitas em (2.16) obtemos

$$\int_{B_r} Q|u_m|^p \ \leq \ C_6 r^{b_0} \|u_m\|^p_{H_r^1(\mathbb{R}^2,V)}. \tag{2.17}$$

Se $b_0 \in (-2,0]$ e $p \geq 2$ escolhemos $\delta > 0$ tal que $b_0 - \delta > -2$ e uma função "cut-off" $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$, tal que $\varphi(x) = 1$ para $|x| \leq \dfrac{1}{2}$. Então pelo Lema 1.8

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r} Q|u_m|^p &\leq C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_m|^p \\
&= C_1 \int_{B_r} |x|^{b_0-\delta}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{b_0-\delta}(u_m\varphi)^{-b_0+\delta}|x|^{\delta}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{\delta-b_0}|u_m|^{p+b_0-\delta} \\
&\leq C_1 r^{\delta}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-b_0}\int_{B_r}|x|^{b_0-\delta}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{b_0-\delta}(u_m\varphi)^{-b_0+\delta}|u_m|^{p+b_0-\delta} \\
&\leq C_1 r^{\delta}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-b_0}\left(\int_{B_1}|x|^2\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-2}(u_n\varphi)^2\right)^{\frac{-b_0+\delta}{2}}\left(\int_{B_r}|u_m|^{\frac{2(p+b_0-\delta)}{2+b_0-\delta}}\right)^{\frac{2+b_0-\delta}{2}} \\
&\leq C_3C_6 r^{\delta}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-b_0}\left(\int_{B_1}|\nabla u_m\varphi|^2\right)^{\frac{-b_0+\delta}{2}}\left(\int_{B_r}|u_m|^2\right)^{\frac{2+b_0-\delta}{2}\frac{p+b_0-\delta}{2+b_0-\delta}} \\
&\leq C_7 r^{\delta}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-b_0}\|u_m\|^{-b_0+\delta}_{H^1_r(I\!R^2,V)}\|u_m\|^{p+b_0-\delta}_{H^1_r(I\!R^2,V)} \\
&\leq r^{\delta}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-b_0}\overline{o(1)}. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Repetindo as estimativas feitas em (2.18) obtemos

$$
\int_{B_r} Q|u_m|^p \;\leq\; C_7 r^{\delta}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\delta-b_0}\|u_m\|^{p}_{H^1_r(I\!R^2,V)}. \qquad (2.19)
$$

Pelo Lema 1.5 podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\|u_m\|_{L^p(B_R\backslash B_r,Q)} &= \left(\int_{B_R\backslash B_r} Q|u_m|^p\right)^{1/p} \\
&\leq C_8\left(\int_{B_R\backslash B_r}|\nabla u_m|^2+Vu_m^2\right)^{1/2} \\
&= C_8\|u_m\|_{H^1_r(B_R\backslash B_r,V)} \leq C_8 o(1)^{1/2} = \overline{o(1)}.
\end{aligned}
$$

Como $\int_{I\!R^2} Q|u_m|^p = \int_{B_r} Q|u_m|^p + \int_{B_R^c} Q|u_m|^p + \int_{B_R\backslash B_r} Q|u_m|^p$ e observando as estimativas feitas em (2.12), (2.14), (2.16) e (2.18) nós obtemos $\int_{I\!R^2} Q|u_m|^p \to 0$ o que é uma contradição já que $\displaystyle\int_{I\!R^2} Q|u_m|^p = 1$. Portanto a imersão se verifica.

No seguinte, consideramos compacidade. Seja $(u_m) \subset H_r^1(I\!R^2, V)$ de modo que $\|u_m\|_{H_r^1(I\!R^2,V)} \leq C$. Sem perda de generalidade, podemos supor $u_m \rightharpoonup 0$. Afirmamos que $u_m \to 0$ em $L^p(I\!R^2, Q)$ nas condições abaixo. De fato,

(i) se $b \geq a$ a imersão é compacta para $\underline{p} < p < \infty$.

Repetindo as estimativas que fizemos em (2.13), (2.17) e (2.19) teremos as desigualdades

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{B_R^c} Q|u_m|^p & \leq & C_3 R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \|u_m\|^p_{H_r^1(I\!R^2,V)} \\ \displaystyle\int_{B_r} Q|u_m|^p & \leq & C_6 r^{b_0} \|u_m\|^p_{H_r^1(I\!R^2,V)} \\ \displaystyle\int_{B_r} Q|u_m|^p & \leq & C_7 r^{\delta} \left(\ln \dfrac{1}{r}\right)^{\delta - b_0} \|u_m\|^p_{H_r^1(I\!R^2,V)} \end{array}\right\} \tag{2.20}$$

Usando o Lema 1.5 e $\displaystyle\int_{I\!R^2} Q|u_m|^p = \int_{B_r} Q|u_m|^p + \int_{B_R^c} Q|u_m|^p + \int_{B_R \setminus B_r} Q|u_m|^p$ temos $\displaystyle\int_{I\!R^2} Q|u_m|^p \to 0$ quando $m \to \infty$.

Portanto, segue a imersão compacta desejada.

(ii) se $b < a$ a imersão é compacta para $2 \leq p < \infty$.

Repetindo as estimativas que fizemos em (2.13), (2.17) e (2.19) teremos as desigualdades

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{B_R^c} Q|u_m|^p & \leq & C_3 R^{b-a-\frac{2+a}{4}(p-2)} \|u_m\|^p_{H_r^1(I\!R^2,V)} \\ \displaystyle\int_{B_r} Q|u_m|^p & \leq & C_6 r^{b_0} \|u_m\|^p_{H_r^1(I\!R^2,V)} \\ \displaystyle\int_{B_r} Q|u_m|^p & \leq & C_7 r^{\delta} \left(\ln \dfrac{1}{r}\right)^{\delta - b_0} \|u_m\|^p_{H_r^1(I\!R^2,V)} \end{array}\right\} \tag{2.21}$$

Usando o LEMA 1.5 e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} Q|u_m|^p = \int_{B_r} Q|u_m|^p + \int_{B_R^c} Q|u_m|^p + \int_{B_R \setminus B_r} Q|u_m|^p$ temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} Q|u_m|^p \to 0$ quando $m \to \infty$.

Para $b < a$ temos $\underline{p} = 2$ e como $(p-2)\dfrac{2+a}{4} > (2-2)\dfrac{2+a}{4} = 0$ concluímos que $b - a - \dfrac{2+a}{4}(p-2) < 0$.

Portanto, segue a imersão compacta desejada.

De posse dos resultados de imersão contínuas e compactas, provaremos que o problema (1) possui uma solução **"ground state"** também chamada solução estacionária ou solução de estado fundamental.

TEOREMA 2.3

Seja $n \geq 2$. Suponha **(V)** *e* **(Q)** *com o correspondente $\overline{p}$ e $\underline{p}$ definidos de modo que $\underline{p} < p < \overline{p}$. Então a equação* (1) *tem uma solução* **"ground state"** $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n, V)$, *a saber*

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + V(|x|)u^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} Q(|x|)u^p\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{\substack{v \in H_r^1(\mathbb{R}^n, V) \\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + V(|x|)v^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} Q(|x|)|v|^p\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Além disso,

(i) *quando $a > -2$ existem C, $c > 0$ tais que $u(x) \leq C \exp\left(-cr^{\frac{2+a}{2}}\right)$;*

(ii) *quando $a \leq -2$, existe $C > 0$ tal que $u(x) \leq C|x|^{-\frac{n-2}{2}}$.*

Demonstração:

A existência de uma solução **"ground state"** segue da imersão compacta. De fato,

$$M = \inf_{\substack{v \in H_r^1(\mathbb{R}^n, V) \\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + V(|x|)v^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} Q(|x|)|v|^p\right)^{\frac{2}{p}}} \equiv \inf_{\substack{v \in H_r^1(\mathbb{R}^n, V) \\ v \neq 0}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + V(|x|)v^2; \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} Q(|x|)|v|^p = 1 \end{array} \right.$$

Assim, segue que existe $(v_m) \subset H_r^1(\mathbb{R}^n, V)$ (chamada sequência minimizante) de modo que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} Q(|x|)|v_m|^p = 1$ e $\|v_m\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 + V(|x|)v_m^2 \to M$.

Portanto, a sequência $(\|v_m\|_V)$ é limitada e pela imersão compacta vista nos TEOREMAS 2.1 e 2.2 ($H^1_r(I\!R^n, V) \hookrightarrow L^p(I\!R^n, Q)$) existe uma subsequência (v_{m_j}) de (v_m) de modo que $v_{m_j} \to u$ em $L^p(I\!R^n, Q)$, ou seja, $\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|v_{m_j}|^p \to \int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p$ donde $\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p = 1$.

Agora, usando que a norma é fracamente semicontínua inferiormente (A.24) temos $M \leq \|u\|_V^2 \leq \liminf\limits_{m_j \to \infty} \|v_{m_j}\|_V^2 = \lim\limits_{m_j \to \infty} \|v_{m_j}\|_V^2 = M$ e daí $\|u\|_V^2 = m$.

Sendo assim, $\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p = 1$ e $\|u\|_V^2 = \displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 + V(|x|)u^2 = M$, ou seja, a equação (1) tem uma solução **"ground state"** $u \in H^1_r(I\!R^n, V)$.

Em seguida mostraremos a propriedade do decaimento no caso $a > -2$.

Por **(V)** existem $C_1 > 0$, $R_1 > 0$ tais que $V(|x|) \geq C_1|x|^a$, para $|x| \geq R_1$.

Considere $\varphi(r) = \exp\left(-cr^{\frac{2+a}{2}}\right)$ em que $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ e $c = \dfrac{\sqrt{2C_1}}{2+a} > 0$.

Derivando φ em relação a x_i, $1 \leq i \leq n$ obtemos,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(r) = \exp\left(-cr^{\frac{2+a}{2}}\right)\left(-c\frac{2+a}{2}r^{\frac{a}{2}}\frac{x_i}{r}\right) = -\frac{\sqrt{2C_1}}{2}\varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}}x_i.$$

Derivando $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(r)$ em relação a x_i, $1 \leq i \leq n$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(r) &= -\frac{\sqrt{2C_1}}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(r)r^{\frac{a-2}{2}}x_i + \varphi(r)\left(\frac{a-2}{2}r^{\frac{a-4}{2}}\frac{x_i^2}{r} + r^{\frac{a-2}{2}}\right)\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2C_1}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2C_1}}{2}\varphi(r)r^{a-2}x_i^2 + \frac{a-2}{2}\varphi(r)r^{\frac{a-6}{2}}x_i^2 + \varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\varphi(r) = \frac{C_1}{2}\varphi(r)r^a - \frac{(a-2)\sqrt{2C_1}}{4}\varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}} - n\varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}}\frac{\sqrt{2C_1}}{2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
-\Delta\varphi(r)+V(|x|)\varphi(r) &\geq \frac{C_1}{2}\varphi(r)r^a+\frac{(a-2)\sqrt{2C_1}}{4}\varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}}+n\varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}}\frac{\sqrt{2C_1}}{2}\\
&= \frac{C_1}{2}\varphi(r)r^a+\frac{\sqrt{2C_1}}{2}\varphi(r)r^{\frac{a-2}{2}}\left(\frac{a-2}{2}+n\right)\\
&\geq \frac{C_1}{2}\varphi(r)r^a.
\end{aligned}$$

Para a desigualdade acima, devemos observar que $a>-2\Rightarrow a-2>-4\Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{a-2}{2}>-2$ e $n\geq 2$ nos dá $\dfrac{a-2}{2}+n\geq 0$.

Vamos mostrar que existe $R>0$ de modo que $Q(|x|)|u(x)|^{p-2}\leq \dfrac{C_1}{2}|x|^a$ sempre que $|x|\geq R$. De fato, pelo Lema 1.1 com $a>-2$, existem $C_2>0$, $R_2>0$ de modo que $|u(x)|\leq C_2\|u\|_V|x|^{-\frac{2(n-1)+a}{4}}$ sempre que $|x|\geq R_2\gg 1$.

Por **(Q)** existem $C_3>0$, $R_3>0$ tais que $Q(|x|)\leq C_3|x|^b$ sempre que $|x|\geq R_3$. Assim,

$$\begin{aligned}
Q(|x|)|u(x)|^{p-2} &\leq C_3|x|^bC_2^{p-2}\|u\|_V^{p-2}|x|^{-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)}\\
&\leq C_4|x|^{b-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)}.
\end{aligned}$$

Como $|x|\gg 1$ para termos $Q(|x|)|u(x)|^{p-2}\leq C_4|x|^a$ basta verificar se $b-\dfrac{2(n-1)+a}{4}(p-2)<a$.

Podem ocorrer dois casos

Caso 1. $-2<a\leq b$ com $\underline{p}=\dfrac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}$

$$\begin{aligned}
-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) &< -\frac{2(n-1)+a}{4}\left(\frac{2(2n-2+2b-a)}{2n-2+a}-2\right)\\
&< -\frac{2(n-1)+a}{4}\left(\frac{4n-4+4b-2a-4n+4-2a}{2n-2+a}\right)\\
&< -\frac{1}{4}(4b-4a)=a-b
\end{aligned}$$

Assim,

$$b - \frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) < a.$$

Caso 2. $b \leq \max\{a, -2\} = a$ com $\underline{p} = 2$

$$b - \frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) < b < a.$$

Portanto, $Q(|x|)|u(x)|^{p-2} \leq C_4|x|^a$ sempre que $R \geq \max\{R_2, R_3\}$. Agora, precisamos justificar que podemos tomar a desigualdade acima com $\frac{C_1}{2}$ no lugar de C_4.

Como $b - \frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) < a$, é possível encontrar $\delta > 0$ de modo que $b - \frac{2(n-1)+a}{4}(p-2) + \delta < a$.

Assim, para $R \geq \max\{R_2, R_3\}$, temos

$$\begin{aligned} Q(|x|)|u(x)|^{p-2} &\leq C_4|x|^{b-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)} \\ &= C_4|x|^{-\delta}|x|^{b-\frac{2(n-1)+a}{4}(p-2)+\delta} \\ &\leq C_4|x|^{-\delta}|x|^a \leq \frac{C_1}{2}|x|^a \end{aligned}$$

Portanto, para $|x| \geq R = \max\{R_2, R_3\}$, obtemos

$$-\Delta(u-\varphi) + \left(V(|x|) - \frac{C_1}{2}|x|^a\right)(u-\varphi) =$$

$$= -\Delta u + \Delta\varphi + V(|x|)u - V(|x|)\varphi - \frac{C_1}{2}|x|^a u + \frac{C_1}{2}|x|^a\varphi =$$

$$= (-\Delta u + V(|x|)u) + (\Delta\varphi - V(|x|)\varphi) - \frac{C_1}{2}|x|^a u + \frac{C_1}{2}|x|^a\varphi \leq$$

$$\leq Q(|x|)|u(x)|^{p-1} - \frac{C_1}{2}|x|^a\varphi - \frac{C_1}{2}|x|^a u + \frac{C_1}{2}|x|^a\varphi \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{2}|x|^a u - \frac{C_1}{2}|x|^a u = 0.$$

Como $-\Delta(u-\varphi)+\left(V(|x|)-\frac{C_1}{2}|x|^a\right)(u-\varphi)\leq 0$ para $|x|\geq R$ temos, pelo Princípio de Máximo, que $u(x)\leq\varphi(x)$ para $|x|\geq R$.

Portanto, existem $C>0$, $c>0$ tais que

$$u(x)\leq C\exp\left(-cr^{\frac{2+a}{2}}\right).$$

Finalmente, quando $a\leq -2$, a propriedade do decaimento segue diretamente da estimativa dada no Lema 1.3 com $p=2$, isto é, existe $C_2=C_2(n)>0$ de modo que $|u(x)|\leq C_2|x|^{-\frac{n-2}{2}}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq C_2|x|^{-\frac{n-2}{2}}\|u\|_V$.

Portanto, existe $C>0$ tal que

$$u(x)\leq C|x|^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Concluímos assim, a prova do Teorema 2.3. $\square$

Capítulo 3

Aplicações do Teorema 2.3

Apresentamos, no TEOREMA 2.3, condições que garantem a existência de soluções radiais para a equação (1) mostrando o comportamento das soluções de acordo com os valores assumidos pelo parâmetro a. Vamos apresentar três exemplos ilustrando as afirmações.

EXEMPLO 3.1 *Considere a equação,*

$$\begin{cases} -\Delta u + \left(1 + \dfrac{6}{|x|^2}\right) u = 6|x|e^{-|x|}u^{p-1}, & \textit{com } u > 0, \textit{ em } \mathbb{R}^n, \\ |u(x)| \to 0, & \textit{quando } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Neste exemplo temos

$V(|x|) = 1 + \dfrac{6}{|x|^2}$ com $a = 0$, $a_0 = -2$

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{V(|x|)}{|x|^0} = \liminf_{|x|\to\infty} \frac{1 + \frac{6}{|x|^2}}{|x|^0} = \lim_{|x|\to\infty} \left(1 + \frac{6}{|x|^2}\right) = 1 > 0$$

$$\liminf_{|x|\to 0} \frac{V(|x|)}{|x|^{-2}} = \liminf_{|x|\to 0} \frac{1 + \frac{6}{|x|^2}}{|x|^{-2}} = \lim_{|x|\to 0} \left(|x|^2 + 6\right) = 6 > 0$$

$Q(|x|) = 6|x|e^{-|x|}$ com $b_0 = 0$, $b = 0$

$$\limsup_{|x|\to 0} \frac{Q(|x|)}{|x|^0} = \limsup_{|x|\to 0} \frac{6|x|e^{-|x|}}{|x|^0} = \lim_{|x|\to 0} 6|x|e^{-|x|} = 0 < \infty$$

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{Q(|x|)}{|x|^0} = \limsup_{|x|\to\infty} \frac{6|x|e^{-|x|}}{|x|^0} = \lim_{|x|\to\infty} 6|x|e^{-|x|} = 0 < \infty$$

Sendo assim, $\underline{p} = \underline{p}(0,0) = \dfrac{2(n-2)}{n-2} = 2$ e $\overline{p} = \overline{p}(-2,0) = \dfrac{2n}{n-2}$ para $n \geq 3$ e daí basta que $\underline{p} < p < \overline{p}$.

Nas condições acima o TEOREMA 2.3 fornece uma solução **"ground state"** $u \in H^1_r(\mathbb{R}^n, V)$ para o problema, a saber

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + \left(1 + \frac{6}{|x|^2}\right) u^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} 6|x|e^{-|x|}u^p\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{\substack{v \in H^1_r(\mathbb{R}^n, V)\\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + \left(1 + \frac{6}{|x|^2}\right) v^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} 6|x|e^{-|x|}|v|^p\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Observamos que o TEOREMA 2.3 garante a existência de constantes C, $c > 0$ tais que a solução $u \in H^1_r(\mathbb{R}^n, V)$ satisfaz $u(x) \leq C \exp\left(-cr^{\frac{2+a}{2}}\right)$ já que $a > -2$.

EXEMPLO 3.2

Considere a equação,

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{5}{|x|^6} u = \dfrac{|x|^2}{|x|+1} u^{p-1}, & \text{com } u > 0, \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ |u(x)| \to 0, & \text{quando } |x| \to \infty. \end{cases}$$

Neste exemplo temos

$V(|x|) = \dfrac{5}{|x|^6}$ com $a = -6$, $a_0 = -6$

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{V(|x|)}{|x|^{-6}} = \liminf_{|x|\to\infty} \frac{\frac{5}{|x|^6}}{|x|^{-6}} = \lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{5|x|^6}{|x|^6}\right) = 5 > 0$$

$$\liminf_{|x|\to 0} \frac{V(|x|)}{|x|^{-6}} = \liminf_{|x|\to 0} \frac{\frac{5}{|x|^6}}{|x|^{-6}} = \lim_{|x|\to 0} \left(\frac{5|x|^6}{|x|^6}\right) = 5 > 0$$

$Q(|x|) = \dfrac{|x|^2}{|x|+1}$ com $b_0 = 0$, $b = 1$

$$\limsup_{|x|\to 0} \frac{Q(|x|)}{|x|^0} = \limsup_{|x|\to 0} \frac{\frac{|x|^2}{|x|+1}}{|x|^0} = \lim_{|x|\to 0} \frac{|x|^2}{|x|+1} = 0 < \infty$$

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{Q(|x|)}{|x|^1} = \limsup_{|x|\to\infty} \frac{\frac{|x|^2}{|x|+1}}{|x|^1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{|x|^2}{|x|^2+1} = 1 < \infty$$

Sendo assim, $\underline{p} = \underline{p}(-6,1) = \dfrac{2(3+1)}{n-2} = 8$ e $\overline{p} = \overline{p}(-6,0) = \infty$ e daí basta que $\underline{p} < p < \overline{p}$.

Nas condições acima o Teorema 2.3 fornece uma solução **"ground state"** $u \in H^1_r(I\!R^3, V)$ para o problema, a saber

$$\frac{\displaystyle\int_{I\!R^3} |\nabla u|^2 + \frac{5}{|x|^6}u^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^3} \frac{|x|^2}{|x|+1}u^p\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{\substack{v \in H^1_r(I\!R^3,V)\\ v\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^3} |\nabla v|^2 + \frac{5}{|x|^6}v^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^3} \frac{|x|^2}{|x|+1}|v|^p\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Observamos que o Teorema 2.3 garante a existência de uma constante $C > 0$ tal que a solução $u \in H^1_r(I\!R^3, V)$ satisfaz $u(x) \leq C|x|^{-\frac{1}{2}}$ já que $a \leq -2$.

Exemplo 3.3

Consideremos o seguinte problema

$$(\mathrm{P}) - \Delta u + u = (1+|x|)^{l/2}\, u^p \;\; em\; I\!R^n \;\; com\; 1 < p < \frac{n+2}{n-2} \;\; e\; 0 \leq l < \frac{1}{2}(n-1)(p-1).$$

Os pesquisadores Wei-Yue Ding e Wei-Ming Ni em [6] estudaram o problema (P) obtendo uma solução via argumentos de aproximação combinado com o Teorema do Passo da Montanha e estimativas a priori.

Utilizando nosso estudo esse problema também pode ser solucionado visto que é um caso particular do Teorema 2.3. De fato, neste caso,

$$V(r) = 1 \text{ e } Q(r) = \left(1+r^2\right)^{l/2}$$

o que nos fornece,

(a) $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^a} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^a} > 0$ com $a = 0$;

(b) $\displaystyle\liminf_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^{a_0}} > 0$ com $a_0 = 0$;

(c) $\displaystyle\limsup_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} = \lim_{r\to 0} \frac{(1+r^2)^{l/2}}{r^{b_0}} < \infty$ com $b_0 = 0$;

(d) $\displaystyle\limsup_{r\to\infty} \frac{Q(r)}{r^{b}} = \lim_{r\to\infty} \frac{(1+r^2)^{l/2}}{r^{b}} < \infty$ com $b = l$.

Para $\underline{p}$, como $l \geq 0$, temos $\underline{p} = \dfrac{2(2n-2+2l)}{2n-2} = \dfrac{2(n-1+l)}{n-1} \geq 2$.

Para $\overline{p}$ temos $\overline{p} = \dfrac{2(n+b_0)}{n-2} = \dfrac{2n}{n-2}$.

Portanto basta estudar $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$ que é equivalente à $1 < q < \dfrac{n+2}{n-2}$ com $q = p-1$.

É importante notar que precisamos ter $\underline{p} = \dfrac{2(n-1+l)}{n-1} < \dfrac{2n}{n-2} = \overline{p}$ para que faça sentido $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$ e isso ocorre se $l < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$ que é dado pela condição $0 \leq l < \dfrac{1}{2}(n-1)(p-1)$.

Pelo Teorema 2.3 (P) tem uma solução **"ground state"** $u \in H_r^1(I\!R^n, V)$, a saber

$$\frac{\displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 + u^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} \left(1+|x|^2\right)^{l/2} u^p\right)^{\frac{2}{p}}} = \inf_{\substack{v \in H_r^1(I\!R^n, V) \\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla v|^2 + v^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} \left(1+|x|^2\right)^{l/2} |v|^p\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Além disso, como $a = 0$, pelo Teorema 2.3 existem constantes C, $c > 0$ tais que a solução satisfaz $u(x) \leq C \exp(-cr)$

Apêndice A

Apêndice

Estão enunciadas aqui definições e teoremas necessários para a realização do presente trabalho. Os teoremas enunciados que não apresentam demonstração possuem referências de onde encontrá-las.

Definição A.1 (Limite Superior e Inferior de uma Função)

Seja $x_0 \in \Omega \subset I\!R^n$ *e* $T : \Omega \to I\!R$. *Definimos,*

(i) $\displaystyle \limsup_{x \to x_0} T(x) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0 < |x - x_0| < \delta} T(x) \right),$

(ii) $\displaystyle \liminf_{x \to x_0} T(x) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0 < |x - x_0| < \delta} T(x) \right),$

(iii) $\displaystyle \limsup_{|x| \to \infty} T(x) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{x > \delta} T(x) \right),$

(iv) $\displaystyle \liminf_{|x| \to \infty} T(x) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{x > \delta} T(x) \right).$

Teorema A.2 (Desigualdade de Young)

Considere $0 < \lambda < 1$. *Então para quaisquer números reais* $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$, *temos* $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda) b$.

Demonstração:

Fazendo $x = a^\lambda$, $y = b^{1-\lambda}$, $\lambda = \dfrac{1}{p}$ e $1 - \lambda = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$ a desigualdade de Young se tranforma em $xy \leq \dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{q} y^q$ (como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ dizemos que $p, q \geq 1$ são expoentes conjugados). Observamos que a ingualdade se dá quando $a = b$.

Se $b = 0$ a desigualdade é verdadeira. Suponha $b \neq 0$ então, dividindo a desigualdade por b, temos $\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq \lambda\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\lambda)$. Tomando $t = \frac{a}{b}$ temos $t^{\lambda} \leq \lambda t + (1-\lambda)$.

Note que a função $H(t) = t^{\lambda} - \lambda t$ é crescente para $t < 1$ e decrescente para $t > 1$ e portanto, assume o máximo em $t = 1$. Assim, $H(t) = t^{\lambda} - \lambda t \leq H(1) = 1 - \lambda$ e a desigualdade segue. $\square$

Teorema A.3 (Desigualdade de Hölder)

Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (expoentes conjugados). Então $uv \in L^1(\Omega)$ e $\|uv\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Demonstração:

Se $p = 1$ $q = \infty$, então basta observar $\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|v\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |u(x)| dx$. Para $p > 1$, supondo $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ com $\|u\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$, $\|v\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$ e tomando $\alpha = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}$, $\beta = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}$ na Desigualdade de Young $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$ $\forall\ \alpha, \beta \geq 0$, temos $\frac{|u(x)v(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{|u(x)|^p}{p\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{|v(x)|^q}{q\|v\|^q_{L^q(\Omega)}}$. Assim, integrando em Ω, temos $\frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e a desigualdade segue. $\square$

Definição A.4 (Espaços de Banach)

Um espaço de Banach é um espaço vetorial H normado e completo.

Definição A.5 (Espaços de Hilbert)

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto escalar (u, v) completo para a norma $\|u\|_H = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Definição A.6 (Espaço de Funções Testes e Suporte)

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in I\!N^n$, denotamos o operador de derivação de ordem α por $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} \partial^{\alpha_2}_{x_2} ... \partial^{\alpha_n}_{x_n}}$, onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Se u é uma função mensurável sobre Ω e $(\omega_i)_{i \in I}$ é a família de todos os subconjuntos abertos de Ω, tal que $u = 0$ q.t.p. em cada ω_i, temos que $u = 0$ q.t.p. em $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$, e o suporte de u ($\text{supp} u = \Omega \setminus \omega$). Se u for uma função contínua, então $\text{supp} u = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}$. Dizemos que uma função u tem suporte compacto em Ω, se existir $K \subset \Omega$ compacto tal que $\text{supp} u \subset K$.

Representa-se por $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, com suporte compacto e derivadas parciais de todas as ordens. Em $C_c^\infty(\Omega)$ considera-se a seguinte noção de convergência.

Uma sequência de funções $(\varphi_m)_{m\in I\!N}$ converge para zero em $C_c^\infty(\Omega)$ quando:

(i) *Todas as φ_m possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;*

(ii) *A sequência $(\varphi_m)_{m\in I\!N}$ converge para zero uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.*

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que $(\varphi_m)_{m\in I\!N}$ converge para φ em $C_c^\infty(\Omega)$ se $(\varphi_m - \varphi)_{m\in I\!N}$ converge para zero como definimos acima. Denotamos por $D(\Omega)$ o espaço $C_c^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência. Chamamos $D(\Omega)$ de espaço das funções testes.

Teorema A.7

O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \le p < \infty$.

Demonstração:

Veja [4] página 71.

Definição A.8 (Espaço de Sobolev)

Seja $1 \le p \le \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ por $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \big| \ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ e \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\varphi, \ \forall \varphi \in D(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n \right\}$ *munido com a norma dada por* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \displaystyle\sum_{i=1}^n \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$ *ou de forma equivalente* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \displaystyle\sum_{i=1}^n \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$ *se $1 \le p < \infty$. Para $p = \infty$ temos a norma* $\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max\left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, ..., \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$ *ou de forma equivalente* $\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \displaystyle\sum_{i=1}^n \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Teorema A.9

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$, para $1 \le p \le \infty$ com as normas acima definidas é um espaço de Banach.

Demonstração:

Veja [4] página 121.

Observação. Denotamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno $(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$.

Definição A.10 (O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema A.11

Suponha Ω de classe C^1, tal que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $1 \leq p < \infty$, então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$*;*

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração:

Veja [4] página 172.

Definição A.12

Dizemos que (f_m), $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma sequência equicontínua quando, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_m(x) - f_m(y)| < \epsilon$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição A.13

Uma sequência (f_m), $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se uniformemente limitada quando existe $M > 0$ de modo que $|f_m(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Teorema A.14 (Teorema de Arzelá - Ascoli)

Suponha que $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções, $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de modo que as funções f_m são equicontínuas e uniformemente limitadas. Então existem uma subsequência $(f_{m_j}) \subset (f_m)$, $j \in \mathbb{N}$ e uma função contínua f tais que $f_{m_j} \to f$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração:

Veja [7] página 622.

Teorema A.15 (Convergência Dominada de Lebesgue)

Seja (f_m) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que,

(i) $f_m \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada m $|f_m(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω;*

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_m - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$, quando $m \to \infty$.

Demonstração:

Veja [3] página 359.

TEOREMA A.16

Seja E um espaço vetorial munido de duas normas $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$. Suponha que E de posse de cada uma das normas $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ é um espaço de Banach e que existe uma constante $C \geq 0$ de modo que

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \text{ para todo } x \in E.$$

Demonstração:

Veja [4], página 19.

A importância do resultado acima é mostrar a equivalência entre as normas $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$.

TEOREMA A.17 (DESIGUALDADE DE POINCARÉ)

Seja Ω aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C (dependendo somente de Ω e p) tal que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.

Demonstração:

Veja [4] página 134.

Da desigualdade acima a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$, definimos o produto interno $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ equivalente à norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Faremos uso do caso particular $u \in H_0^1(\Omega)$ então $\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ onde $C = C(\Omega)$ é uma constante possivelmente dependendo de Ω mas independente de u.

LEMA A.18 (LEMA DE FATOU)

Seja (f_m) uma sequência de funções mensuráveis positivas. Então

$$\int_\Omega \liminf_{m\to\infty} f_m(x)dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega f_m(x)dx.$$

Demonstração:

Veja [8] página 52.

Proposição A.19

Sejam x, y números reais positivos, então $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Demonstração:

Como x, y são números reais positivos temos,

$$\begin{aligned} 0 &\leq xy \\ 0 &\leq 2\sqrt{xy} \\ x+y &\leq x + 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \\ \sqrt{x+y} &\leq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Segue a desigualdade. □

Observação. No Teorema 2.3 usamos a seguinte afirmação

$$M = \inf_{\substack{v \in H_r^1(I\!R^n, V) \\ v \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla v|^2 + V(|x|)v^2}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|v|^p\right)^{\frac{2}{p}}} \equiv \inf_{\substack{v \in H_r^1(I\!R^n, V) \\ v \neq 0}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla v|^2 + V(|x|)v^2 \\ \displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|v|^p = 1 \end{array} \right. .$$

Fazendo $v = \dfrac{u}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ temos $\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|v|^p = \int_{I\!R^n} Q(|x|)\frac{u^p}{\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)u^p} = 1$ e

$$M = \inf_{\substack{v \in H_r^1(I\!R^n, V) \\ v \neq 0}} \left[\int_{I\!R^n} \left| \nabla \left(\frac{u}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \right) \right|^2 + V(|x|) \left(\frac{u}{\left(\displaystyle\int_{I\!R^n} Q(|x|)|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \right)^2 \right]$$

Portanto, $M = \inf\limits_{\substack{v \in H_r^1(I\!R^n, V) \\ v \neq 0}} \left\{ \displaystyle\int_{I\!R^n} |\nabla v|^2 + V(|x|)v^2 : \int_{I\!R^n} Q(|x|)|v|^p = 1 \right\}.$

Definição A.20

Uma função $f : D_f \subset I\!R \to I\!R$ é dita côncava em seu domínio se para quaisquer $x, y \in D_f$ e para todo $t \in [0,1]$ tivermos

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Observação: Podemos olhar para a derivada segunda de f, se possível, e daí se $f''(x) \leq 0$ para $x \in D_f$, então f é côncava em D_f.

Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual. Defina para cada $f \in E'$ $\varphi f : E \to I\!R$ a aplicação $\varphi f(x) = f(x)$. Quando f percorre E' obtemos uma família $\{\varphi f\}_{f \in E'}$ de aplicações de E em $I\!R$.

Definição A.21 (Topologia Fraca)

A topologia fraca, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia menos fina (possui menos abertos), tal que todas as aplicações $\{\varphi f\}_{f \in E'}$ sejam contínuas, isto é, esta topologia tem como sub-base todos os conjuntos da forma $f^{-1}(I)$ onde I é um aberto de $I\!R$ (topologia usual) e f é um funcional linear de E em $I\!R$. Isto significa que os abertos dessa topologia são dados por interseções finitas de conjuntos dessa forma.

Notação: Seja x_m uma sequência em E. Denotamos por $x_m \rightharpoonup x$ a convergência de x_m a x na topologia fraca. O elemento x é chamado de limite fraco de x_m e dizemos que x_m converge fracamente a x. Caso $x_m \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} x$, isto é, $\|x_m - x\| \to 0$ quando $m \to \infty$, dizemos que x_m converge fortemente para x.

Lema A.22

Seja x_m uma sequência fracamente convergente no espaço normado E. Então

(a) *O limite fraco x de x_m é único;*

(b) *Toda subsequência de x_m converge fracamente para x;*

(c) *A sequência $\|x_m\|$ é limitada.*

Demonstração:

Veja [10] página 258.

Definição A.23

Dizemos que um funcional linear $F : E \to I\!R$, é fracamente semicontínuo inferiormente se dado $x_m \rightharpoonup x$ então $F(x) \leq \liminf_{m\to\infty} F(x_m)$

Lema A.24

Seja x_m uma sequência em E. Então as seguintes afirmações são verdadeiras

(a) *Se $x_m \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ então $\|x\| \leq \liminf_{m\to\infty} \|x_m\|$ (a função norma é fracamente semicontínua inferiormente);*

(b) *Se $x_m \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e $f_m \to f$ fortemente em E' ($\|x_m - x\| \to 0$ quando $m \to \infty$), então $f_m(x_m) \to f(x)$.*

Demonstração:

Veja [4] página 41.

DEFINIÇÃO A.25

Sejam E e F espaços métricos.

(i) *Dizemos que $K \subset E$ é relativamente compacto se $\overline{K}$ for compacto;*

(ii) *Dada a aplicação $T : E \to F$, dizemos que T é compacta se T leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos.*

DEFINIÇÃO A.26

Sejam X e Y espaços de Banach reais. Dizemos que X está imerso continuamente em Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, se $X \subset Y$ e a inclusão $i : X \to Y$ é contínua, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \text{ para todo } u \in X.$$

Se a inclusão for compacta, diremos que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é compacta.

DEFINIÇÃO A.27 (A CONDIÇÃO DE PALAIS-SMALE)

Sejam V um espaço de Banach, $f \in C^1(V)$. Dizemos que $(u_m) \subset V$ é uma sequência de Palais-Smale no nível β, denotado por $(PS)_\beta$, se

(i) *$f(u_m) \to \beta$;*

(ii) *$df(u_m) \to 0$.*

Dizemos que f satisfaz a condição $(PS)_\beta$ se cada sequência $(PS)_\beta$ tem uma subsequência convergente.

Dizemos que f satisfaz a condição (PS) se ela satisfaz a condição $(PS)_\beta$ para todo $\beta \in I\!R$.

Observação. O Espaço $H^1_r(I\!R^n, V)$

Ao utilizar métodos variacionais no estudo de equações diferenciais parciais é necessário algum tipo de compacidade. Porém, nos problemas onde o domínio Ω não é limitado, por exemplo $\Omega = I\!R^n$, há uma perda de compacidade nas imersões de Sobolev e não conseguimos as limitações nas sequências (PS). A fim de contornar esse problema, foi necessário estudar o subespaço $H^1_r(I\!R^n, V)$ das funções radiais de $H^1(I\!R^n, V)$. Como referência a esse assunto podemos citar os trabalhos de SU, WANG e WILLEM [17], DING e NI [6] e Kavian [9].

Definição A.28

Dados $\Omega \subset I\!R^n$ radialmente simétrico e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, dizemos que u é uma função radial se existe $f : [0, +\infty) \to I\!R$ tal que $u(x) = f(|x|)$ para quase todo $x \in \Omega$.

Definição A.29

Definimos o espaço $H^1_r(I\!R^n, V)$ como

$$H^1_r(I\!R^n, V) = D^{1,2}_r(I\!R^n) \cap L^2(I\!R^n, V)$$

Onde $D^{1,2}_r(I\!R^n)$ é o completamento de $C^\infty_{0,r}(I\!R^n)$ com a norma $\|u\| = \left(\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ e $L^2(I\!R^n, V) = \left\{u : I\!R^n \to I\!R \Big| \, u \text{ é mensurável, } \int_{I\!R^n} V(|x|)|u|^2 dx < \infty\right\}$.

Aqui V satisfaz as hipóteses do início do trabalho.

Proposição A.30

$H^1_r(I\!R^n, V)$ é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|u\|_V = \left(\int_{I\!R^n} |\nabla u|^2 + V(|x|)u^2 dx\right)^{1/2}.$$

Demonstração:

Pela definição de função radia é imediato que $0 \in H^1_r(I\!R^n, V)$. Além disso, se $u_1, u_2 \in H^1_r(I\!R^n, V)$ e $\alpha \in I\!R$, temos

$$(u_1 + \alpha u_2)(x) = u_1(x) + \alpha u_2(x) = f_1(|x|) + \alpha f_2(|x|) = g(|x|)$$

onde $g = f_1 + \alpha f_2$. Então, como já vimos que $\|u\|_V$ define uma norma para $H^1_r(I\!R^n, V)$ pelo Lema 1.6, temos que $H^1_r(I\!R^n, V)$ é um espaço vetorial normado.

Considere uma sequência de Cauchy $(u_n) \subset H^1_r(I\!R^n, V)$. Como $H^1(I\!R^n, V)$ é um espaço de Hilbert segue que

$$u_n \to u \text{ para alguma função } u \in H^1(I\!R^n, V).$$

Por resutaldos de imersões (ver Brézis [4]), a menos de subsequência, temos $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $I\!R^n$. Segue que

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(|x|) = f(|x|),$$

para quase todo $x \in I\!R^n$. Portanto $u \in H^1_r(I\!R^n, V)$ e o resultado segue. $\square$

Teorema A.31 (Princípio do Máximo Forte)

Seja $\Omega \subset I\!R^n$ suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é harmônica em Ω.

(i) *Então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) *Além disso, se Ω é conexo e existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u,$$

então, u é constante em Ω.

Demonstração:

Veja [7] página 27.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] AMBROSETTI, A.; FELLI, V.; MALCHIODI, A. *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity.* J. Eur. Math. Soc. 7(2005), 117-144.

[3] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* New York: Wiley Classics Library Edition Published. John Wiley & Sons, 1995.

[4] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[5] DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag Heidelberg, 1985.

[6] DING, W. Y.; NI, W. M. *On the existence of positive entire solution of a semilinear elliptic equations.* Arch. Rat. Mech. Anal. 91 (1986), 283-308.

[7] EVANS, L. C. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, Providence, 1997.

[8] FOLLAND, G. B. *Real analysis: Modern techniques and their applications.* Jonh Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.

[9] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* Springer-Verlag, Paris, 1993.

[10] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley, New York, 1989.

[11] MAZ'YA, V. G. *Sobolev spaces.* Springer - Verlag, Berlin, 1985.

[12] RABINOWITZ, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* CBMS - AMS 65, Providence, 1986.

[13] ROYDEN, H. L. *Real analysis.* Stanford University, New York, 1995.

[14] RUDIN, W. *Functional analysis.* McGraw Hill International Editions, New York, 1991.

[15] STRAUSS, W. A. *Existence of solitary waves in higher dimensions.* Commun. Math. Phys. 55 (1977), 149-162.

[16] STRUWE, M. *Variational methods.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.

[17] SU, J.; WANG, Z. Q.; WILLEM, M. *Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potential.* Comm. Contemporary Math. 9 (2007), 571-583.

[18] WILLEM, M. *Minimax theorem.* Birkhäuser, Berlin, 1996.