

AYRTON PEREIRA DA MOTA

**UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE EULER**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA**  
**MINAS GERAIS - BRASIL**  
**2014**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

M917e Mota, Ayrton Pereira da, 1980-  
2014 Um estudo sobre o Teorema de Euler / Ayrton Pereira da  
Mota. – Viçosa, MG, 2014.  
vii, 60f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Marinês Guerreiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.59-60.

1. Poliedros. 2. Geometria sólida. 3. Teorema de Euler.  
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de  
Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática.  
II. Título.

CDD 22. ed. 516.15

AYRTON PEREIRA DA MOTA

**UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE EULER**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 04 de abril de 2014.

---

Catarina Mendes de Jesus

---

Laércio José dos Santos

---

Marinês Guerreiro  
(Orientadora)

*”Instrua o homem sábio,  
e ele será ainda mais sábio;  
ensine o homem justo,  
e ele aumentará o seu saber.”  
Provérbios 9:9*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois é onde busco sabedoria e força.

A minha família, principalmente aos meus pais Antônio e Angelina, pela educação, apoio, por tudo. Por mais afastado que eu esteja sei que tenho para onde voltar.

A professora Marinês Guerreiro pela orientação e ensinamentos, pois sem eles não teria concluído este trabalho.

A professora Catarina Mendes de Jesus, por estar sempre disposta a ajudar.

A todos os professores e colegas que tive em toda minha vida: o que aprendi, o que vier a aprender, foi e será com a participação deles.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Enfim, agradeço a todos que tiveram participação na conclusão deste trabalho.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fatos históricos relacionados ao Teorema de Euler e aplicações</b>	<b>3</b>
1.1 René Descartes . . . . .	3
1.2 Leonhard Euler . . . . .	4
1.3 Adrien-Marie Legendre . . . . .	6
1.4 Henri Poincaré . . . . .	7
1.5 Aplicações da característica de Euler-Poincaré . . . . .	8
<b>2 Algumas demonstrações do Teorema de Euler</b>	<b>10</b>
2.1 A demonstração de Legendre para o Teorema de Euler . . . . .	10
2.1.1 Geometria esférica . . . . .	10
2.1.2 A demonstração de Legendre para o Teorema de Euler . . . . .	19
2.2 Demonstração por indução sobre o número de faces . . . . .	21
2.3 Teorema de Euler na Teoria de Grafos . . . . .	23
2.3.1 Noções da Teoria de Grafos . . . . .	24
2.3.2 O Teorema de Euler . . . . .	29
<b>3 Uma Cartilha para o Teorema de Euler</b>	<b>31</b>
3.1 Leonhard Euler . . . . .	31
3.2 Definição de poliedro . . . . .	33
3.3 Relações entre o número de faces, arestas e vértices . . . . .	38
3.4 O Teorema de Euler . . . . .	40
3.4.1 O Teorema de Euler e os poliedros convexos regulares . . . . .	42
3.4.2 O Teorema de Euler no plano . . . . .	46
<b>Considerações finais</b>	<b>49</b>
<b>Apêndice 1</b>	<b>50</b>
<b>Apêndice 2</b>	<b>54</b>



# Resumo

MOTA, Ayrton Pereira da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2014. **Um Estudo Sobre o Teorema de Euler**. Orientadora: Marinês Guerreiro.

Este trabalho aborda o Teorema de Euler para poliedros. Apresentamos fatos históricos relacionados ao Teorema de Euler, algumas demonstrações do teorema e uma noção da característica de Euler-Poincaré. Apresentamos também um material voltado para o Ensino Médio, com uma demonstração para o Teorema de Euler usando apenas Matemática básica, discutimos o caso plano do teorema e usamos o Teorema de Euler para mostrar a existência de apenas cinco poliedros convexos regulares.

# Abstract

MOTA, Ayrton Pereira da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, april, 2014. **A Study About Euler's Theorem.** Adviser: Marinês Guerreiro.

This work addresses the Euler's theorem for polyhedra. We present historical facts related to Euler's theorem, some proofs of the theorem and a notion of the Euler-Poincaré characteristic. We also present a material aimed for High School students, with a proof of Euler's theorem using only basic mathematics, discuss a version of the theorem for the plane and use Euler's theorem to show the existence of only five regular convex polyhedra.

# Introdução

Os poliedros são objetos de estudo desde a antiguidade, seja pela simples curiosidade humana, pela beleza das formas ou pelas utilidades práticas.

De acordo com Godino [13], na natureza existem objetos em formas poliédricas. Por exemplo, na cristalografia (cristais), biologia (vírus), colméias de abelha com dodecaedros em faces hexagonais, etc. Encontramos também poliedros em obras e atividades humanas, como arte, escultura e artesanato. Os poliedros foram estudados por filósofos e matemáticos famosos como Platão, Euclides, Arquimedes, Kepler, Poincaré, Hilbert, Coxeter.

Segundo Siqueira [25], Leonhard Euler (1707-1783) enunciou a relação  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces de um poliedro, em uma carta a um amigo. Apesar de descobrir esta relação, Euler não tinha uma definição formal de poliedros. Apenas em 1893, Henri Poincaré (1854-1912) esclareceu o verdadeiro significado da relação  $V - A + F = 2$  e estendeu seu conceito.

A partir dos estudos de Poincaré, o número  $V - A + F$  se tornou muito importante na Matemática com aplicações, segundo Lima [15], em Topologia, Análise, Geometria Diferencial e Equações Diferenciais. O número  $V - A + F$  também é uma ferramenta importante na triangulação de superfícies que, segundo Junior [14], tem aplicações em Geografia, Geologia, Cartografia e Computação Gráfica na animação e tratamento de imagens.

Neste trabalho fazemos um estudo mais aprofundado do que os encontrados nos livros de Matemática Básica sobre o Teorema de Euler, de modo que possa servir como um material que ajude o professor do Ensino Básico no estudo e no ensino deste assunto.

No Capítulo 1, fazemos um relato de fatos históricos sobre o Teorema de Euler e os principais personagens ligados ao assunto. Também citamos algumas aplicações da característica de Euler-Poincaré (a evolução da relação  $V - A + F = 2$ ) em alguns assuntos da Matemática e fora da Matemática.

No Capítulo 2, apresentamos algumas demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos, inclusive uma usando Teoria de Grafos.

O Teorema de Euler é tratado na maioria dos livros didáticos apenas como a fórmula  $V - A + F = 2$  e alguns exemplos da validade deste resultado. Com o intuito de abordar o tema Teorema de Euler para poliedros com mais resultados e fatos que normalmente os livros didáticos abordam, e também que seja acessível a professores e estudantes do Ensino Básico, no Capítulo 3, apresentamos um material com tópicos históricos, definições e resultados auxiliares, usando apenas matemática básica para a compreensão do Teorema de Euler para poliedros.

No Apêndice 1, falamos de alguns resultados de produto interno e produto vetorial e no Apêndice 2 definimos poliedros de dimensão  $n$  e introduzimos a característica de Euler-Poincaré para estes poliedros.

# Capítulo 1

## Fatos históricos relacionados ao Teorema de Euler e aplicações

A relação  $V - A + F = 2$  para poliedros, onde  $V$  é o número de vértices,  $F$  o número de faces e  $A$  o número de arestas, teve alguns personagens envolvidos em seu estudo até que chegasse ao que se conhece hoje sobre o assunto.

Neste capítulo, apresentamos um pouco da história de alguns personagens de destaque na história da relação  $V - A + F = 2$  e quais as contribuições deles no desenvolvimento dessa relação e também citamos algumas aplicações da dessa relação.

### 1.1 René Descartes



Figura 1.1: René Descartes

O primeiro personagem de destaque na história da relação  $V - A + F = 2$  foi o matemático francês René Descartes (1596-1650). Segundo Eves [11] e Boyer [7], Descartes nasceu perto de Tours, na França, em uma família estruturada que lhe proporcionou uma boa educação. Quando criança estudou em um colégio jesuíta em La Flèche e graduou-se em Direito, sem muito entusiasmo, em Poitier. Descartes seguiu um tempo em uma carreira militar, primeiro seguindo Maurice Príncipe de Nassau e também um tempo com o Duque Maximiliano I da Baviera e depois com o exército francês.

Descartes fazia parte do grupo de matemáticos que mantinham contato com o padre Marin Mersenne (1588-1648), uma espécie de divulgador de descobertas matemáticas da

época. Nesse período, Descartes estava muito interessado na Matemática e chegou a estudar poliedros. Vejamos o que alguns autores falam sobre até onde ele chegou em relação ao Teorema de Euler.

De acordo com Boyer [7, p.247], Descartes teria descoberto a relação  $V - A + F = 2$ .

“Foi durante esse período de sua vida que ele descobriu a fórmula sobre poliedros que usualmente leva o nome de Euler —  $V - A + F = 2$ , onde  $V$ ,  $F$  e  $A$  são o número de vértices, faces e arestas respectivamente, de um poliedro simples.”

Já Eves [11, p.389] diz

“Dentre outras contribuições atribuídas a Descartes figura a quase descoberta da relação  $V - A + F = 2$ , ligando o número de vértices  $V$ , arestas  $A$  e faces  $F$  de um poliedro conexo.”

Já Lima [16, p.69] diz

“Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1675, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula acima como consequência imediata. Mas Descartes não parece ter notado isso”.

De acordo com Sampaio [24], Descartes chegou as relações  $P = 2F + 2V - 4$  e  $P = 2A$ , sendo  $F$  o número de faces,  $V$  o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $P$  o número total de ângulos internos das várias faces de um poliedro convexo, sem notar que elas levam a  $V - A + F = 2$ .

## 1.2 Leonhard Euler



Figura 1.2: Leonhard Euler

Segundo Boyer [7] e Eves [11], Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Basileia, Suíça, em uma família religiosa. Seu pai era pastor e havia estudado matemática com Jakob Bernoulli. Euler teve uma educação privilegiada, por vontade de seu pai, para que fosse um pastor, mas por influência dos Bernoulli, Euler se dedicou à ciência. Além de Matemática, Euler estudou Teologia, Medicina, Astronomia, Física e línguas orientais. Em 1727, por

recomendação de Nicolaus Bernoulli e Daniel Bernoulli, Euler foi convidado a assumir a cadeira de Medicina da Academia de São Petersburgo, mas com a morte de Nicolaus e a saída de Daniel, Euler assumiu a cadeira de Filosofia Natural, onde permaneceu por 14 anos. Depois Euler iria para a Academia de Berlim, onde ficaria por vinte e cinco anos. A convite de Catarina, a Grande, Euler volta a São Petersburgo, onde perde a visão do olho que lhe restava, pois Euler já era cego de um olho desde a primeira passagem por São Petersburgo, o que não diminui a sua produção científica. Euler morreu enquanto tomava chá com um de seus netos aos 76 anos de idade.

Segundo Siqueira [25], Euler, em sua primeira passagem por São Petersburgo, conheceu Christian Goldbach (1690-1764), um matemático que também trabalhava em São Petersburgo. Com a saída de Goldbach de São Petersburgo Euler e Goldbach passaram a trocar correspondências, o que se tornou um grande acervo sobre as pesquisas que eles realizavam. Em uma dessas cartas a Goldbach, Siqueira [25, p.56], Euler enuncia, depois de uma argumentação,

“Em qualquer sólido limitado por faces planas, a soma do número de ângulos sólidos e o número de faces excede em dois o número de arestas.”

O que Euler chamava de ângulos sólidos hoje chamamos de vértices.

Alguns meses depois Euler apresenta a Academia de Berlim dois artigos, primeiro o “*Elementa doctrine solidorum*” e o segundo “*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*”, onde apresenta os resultados da carta a Goldbach e uma demonstração da validade de sua fórmula para o caso das pirâmides e dos prismas, no primeiro artigo. No segundo artigo Euler faz um argumentação para o caso geral, de acordo com Siqueira [25, p.57].

“Na quarta proposição do segundo artigo, Euler afirma ser sempre possível retirar um vértice (e as arestas conectadas a ele) de qualquer sólido de maneira que o sólido resultante tenha um vértice a menos e a soma  $F - A + V$  continue inalterada. Retira-se, prossegue Euler, cada vértice até que no sólido restem apenas quatro vértices, ou seja, até que uma pirâmide triangular seja obtida, Como as pirâmides triangulares possuem 4 faces, 4 vértices e 6 arestas, elas satisfazem  $F - A + V = 2$ . Dado que a fórmula, acreditava Euler, é invariante no processo, estava demonstrada a fórmula para qualquer sólido.”

O argumento usado por Euler é falho, pois o fato de retirar um vértice e as arestas ligadas a esse vértice, de um sólido, não preserva o valor  $V - A + F$ . Um exemplo dado por Ed Sandfer é encontrado em Siqueira [25, p.59].

Observe o poliedro da Figura 1.3. Esse poliedro tem 7 vértices, 15 arestas e 10 faces, assim  $V - A + F = 2$ . Retirando o vértice G e as arestas ligadas a ele, AG, CG, DG, EG, as faces ADE, DEG, CEG e ACG deixam de existir e obtém-se o poliedro da Figura 1.4. Esse novo poliedro possui 6 vértices, 11 arestas e 8 faces e é formado considerando os polígonos ACD e CDE como faces. Daí  $V - A + F = 3$ , mostrando que nem sempre que se retira um vértice e as arestas ligadas a esse vértice, o número  $V - A + F$  é preservado. Isto mostra que o argumento de Euler é falho.

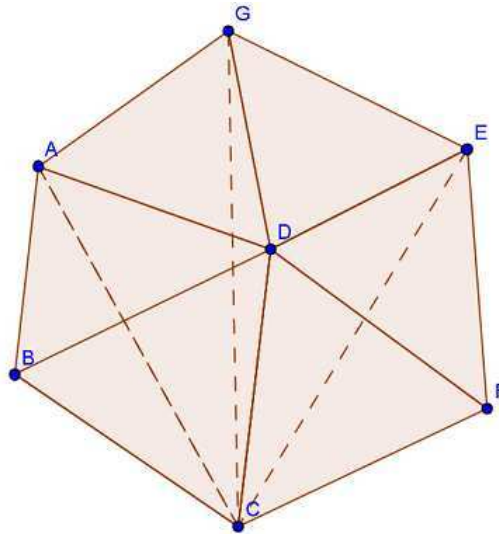


Figura 1.3: Poliedro convexo

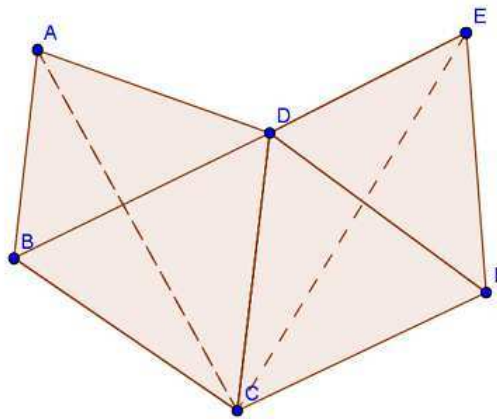


Figura 1.4: Poliedro 1.3 depois de retirado o vértice G

Uma demonstração bastante conhecida para essa relação foi dada por Augustin-Louis Cauchy (1759-1857) e um estudo mais detalhado sobre em quais condições é válida pode ser encontrado em Lima [16].

### 1.3 Adrien-Marie Legendre

De acordo com Boyer [7] e Eves [11], o matemático Adrien-Marie Legendre (1752-1833) nasceu e viveu na França e teve acesso a uma boa educação. As contribuições de Legendre para matemática estão em vários ramos como Equações Diferenciais, Cálculo, Teoria das Funções, Teoria dos Números e Matemática Aplicada.

Sobre Geometria Legendre publicou, em 1794, o “*Éléments de Géométrie*”, texto de grande influência no ensino de Geometria tanto na Europa como nos Estados Unidos, sendo que uma das traduções desse texto chegou a ter mais de trinta edições.

É devido a Legendre, segundo Lima [16], a primeira demonstração correta publicada, para o caso convexo, do Teorema de Euler para poliedros. Essa demonstração será apresentada na Seção 2.1.2.

## 1.4 Henri Poincaré



Figura 1.5: Henri Poincaré

Segundo Boyer [7] e Eves [11], Henri Poincaré(1854-1912) nasceu em Nancy, França. Teve acesso a uma boa educação estudando na École Polytechnique e doutorando-se em 1879 na Universidade de Paris com uma tese sobre teoremas de existência de soluções de equações diferenciais.

Poincaré é tido como o último matemático a trabalhar em todas as áreas da Matemática. Sempre lecionava disciplinas diferentes a cada ano, incluindo disciplinas de Matemática, Física e Engenharia. Era fisicamente desajeitado, míope e, ao contrário do que muitos podem pensar sobre um gênio da Matemática, admitia ter dificuldades em cálculos aritméticos simples.

De acordo com Lima [16], Poincaré foi a primeira pessoa a perceber que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia e não de Geometria. Em 1893, Poincaré nota que  $V - A + F$  é um invariante topológico e que poliedros **homeomorfos** satisfazem a relação  $V - A + F = 2$ . Além disso, poliedros que satisfazem a relação  $V - A + F = 2$  são **homeomorfos** à esfera. Dessa forma Poincaré explicou o fato de existirem poliedros não convexo que satisfazem a relação  $V - A + F = 2$ .

Diz-se que duas figuras  $A$  e  $B$  são **homeomorfas** quando existe uma transformação contínua  $f : A \rightarrow B$  cuja inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$  é também contínua, ou intuitivamente, quando podemos deformar uma figura na outra sem cortá-la de modo que se pode voltar à forma original, desfazendo-se a deformação.

## 1.5 Aplicações da característica de Euler-Poincaré

Quando Euler enunciou a relação  $V - A + F = 2$  não fez nenhuma referência a alguma aplicação desse resultado. Com o aprofundamento dos estudos sobre essa relação, o número  $V - A + F$  passou a ser chamado a característica de Euler-Poincaré (veja o Apêndice 2) e é uma ferramenta com aplicações em várias áreas da Matemática e fora da Matemática.

### Aplicações na Matemática

Segundo Stadler [26], um dos principais problemas da Topologia é determinar quando dois espaços são ou não homeomorfos. Para mostrar que dois espaços são homeomorfos deve-se encontrar um homeomorfismo entre estes espaços, ou seja, uma função contínua que vai de um espaço no outro e cuja inversa também é contínua. Já para mostrar que dois espaços não são homeomorfos deve-se mostrar que não existe nenhuma função contínua com inversa contínua de um espaço no outro, o que não é uma tarefa muito fácil.

Os invariantes topológicos têm papel de grande importância quando se trata de mostrar que dois espaços não são homeomorfos. Particularmente, a característica de Euler-Poincaré é um invariante preservado por homeomorfismo (veja Lima [15]). Desta maneira, objetos que tenham característica de Euler-Poincaré diferentes não podem ser homeomorfos. Este argumento justifica o fato da esfera e do toro não serem homeomorfos, pois se o fossem teriam a mesma característica de Euler-Poincaré, o que não acontece.

Segundo Lima [15] a característica de Euler-Poincaré aparece como resultado de certas contagens ou aplicações em Topologia, Equações Diferenciais, Geometria Diferencial e Análise. Ainda em Lima [15] pode-se encontrar mais detalhes sobre essas aplicações.

### Aplicação na área da saúde

A característica de Euler-Poincaré aparece também em pesquisas relacionadas à saúde. De acordo com Roque [23], a osteoporose é considerada como uma alteração que reduz a resistência óssea e aumenta o risco de fratura. Existem alguns métodos para medir a força do osso, por exemplo, a medição da densidade mineral óssea é usada para o diagnóstico da osteoporose. No entanto, essa medição não abrange todos os fatores da qualidade óssea. Em Roque [23], foram usadas imagens tomográficas computadorizadas de ossos para investigar como as estimativas de conectividade da característica de Euler-Poincaré podem ser utilizadas para ajudar a distinguir entre um osso com osteoporose e um osso saudável. Mais detalhes sobre esse assunto podem ser encontrados em Roque [23] e Barbieri [2].

### Aplicação no tratamento de imagens

De acordo com Oliveira [21], uma **triangulação** é um conjunto de vértices, arestas e faces  $(V, A, F)$  onde a interseção de quaisquer triângulos  $T, S \in F$  é vazia, ou é um

vértice comum a  $T$  e  $S$ , ou é uma aresta comum a  $T$  e  $S$ . Uma triangulação também é chamada de **malha**.

Segundo Junior [14], Moutela [20] e Oliveira [21], triangulação de superfícies são utilizadas em Geologia, Geografia e cartografia, onde fornecem uma representação compacta dos dados dos terrenos, em Computação Gráfica, em animação e tratamentos de imagens e na solução numérica de Equações Diferenciais Parciais.

De acordo com Oliveira [21], uma das condições de análise de triangulações simplificadas é a análise da característica de Euler-Poincaré da triangulação. A Figura 1.6, encontrada em Oliveira [21], mostra diferentes triangulações de uma superfície.

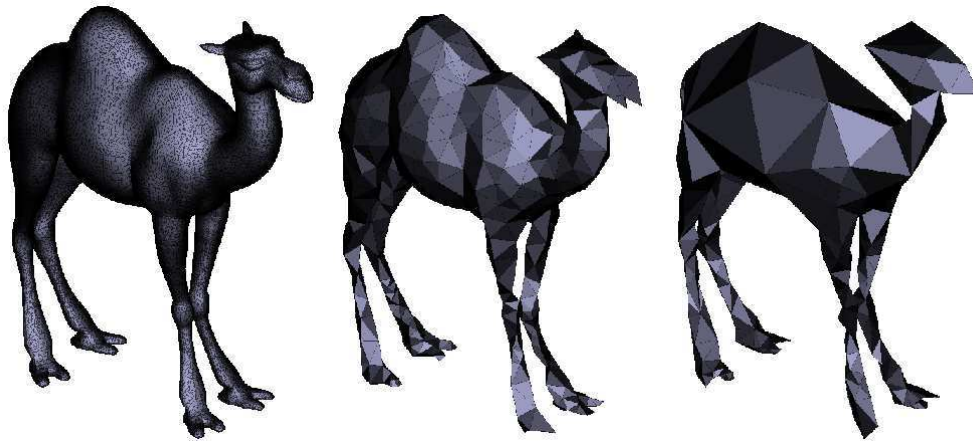


Figura 1.6: Imagem de uma triangulação

Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [9], [14], [20] e [21].

## Capítulo 2

# Algumas demonstrações do Teorema de Euler

Neste capítulo apresentamos algumas demonstrações para o Teorema de Euler para poliedros convexos, sendo que uma delas faz uso da Teoria de Grafos.

### 2.1 A demonstração de Legendre para o Teorema de Euler

Na demonstração de Legendre para o Teorema de Euler é usado um resultado da Geometria Esférica e por isso, primeiro, falaremos um pouco sobre esta assunto.

#### 2.1.1 Geometria esférica

As principais referências usadas nesta seção foram Alves [1], Boyer [7], Lima [16] e Ryan [22].

Segundo Boyer [7], por muito tempo vários matemáticos tentaram provar o chamado Quinto Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas, que diz que por um ponto fora de uma reta  $r$  passa uma única reta paralela a  $r$ .

O matemático russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) e o matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) foram os responsáveis, de forma independente, por mostrar que a não validade do Postulado das Paralelas leva a geometrias diferentes da geometria de Euclides. Os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai descreviam uma Geometria onde, por um ponto fora de uma reta  $r$ , passa mais de uma reta paralela a  $r$ . Já Georg Bernhard Riemman (1826-1866) descreve uma Geometria onde não existem retas paralelas, hoje chamada de Geometria Esférica.

Seja  $S^2$  a **esfera unitária** de  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem (veja a Figura 2.1), ou seja,

$$S^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / |X| = 1\}.$$

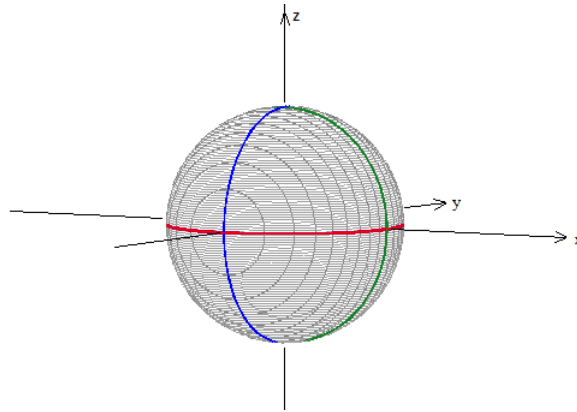


Figura 2.1: Esfera unitária  $S^2$

**Definição 2.1.** Uma **reta esférica** que passa por um ponto  $P$  em  $S^2$  é a interseção de  $S^2$  com um plano  $\pi$  de  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem e que contém  $P$ .

Desta maneira, uma reta esférica é um círculo máximo (veja a Figura 2.2). Olhando o globo terrestre como uma esfera, a linha do Equador é um exemplo de reta esférica.

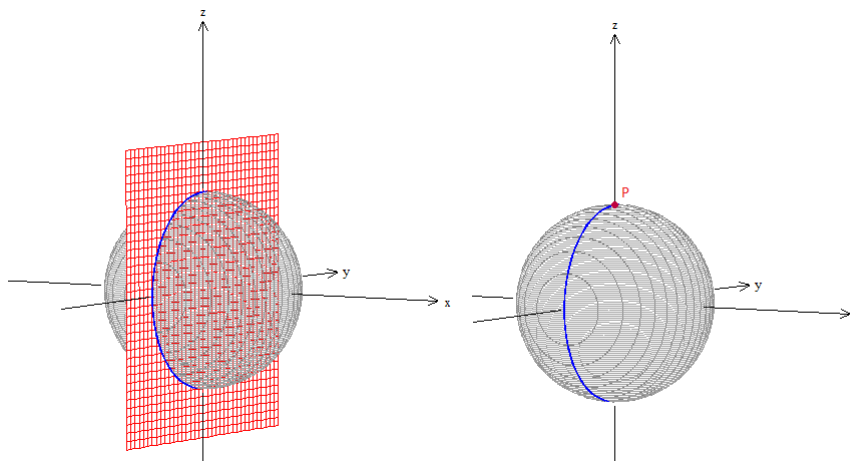


Figura 2.2: Reta esférica

**Definição 2.2.** Dado um ponto  $P$  em  $S^2$ , chamamos o ponto  $-P \in S^2$  de **antípoda** de  $P$  (observe a Figura 2.3).

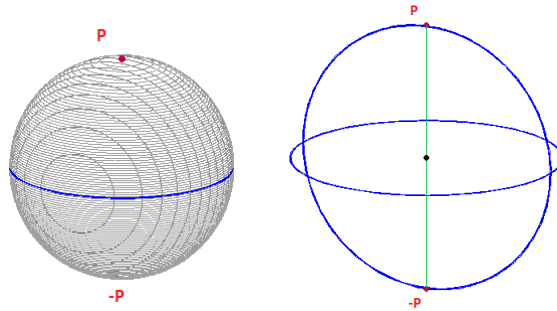


Figura 2.3: Pontos antípodas

Um exemplo de ponto e de seu ponto antípoda no globo terrestre são os Polo Sul e Polo Norte, respectivamente.

**Definição 2.3.** Dado um ponto  $P \in S^2$ , uma **reta polar** de **polo**  $P$  denotada por  $l_P$  é o subconjunto,  $l_P = \{X \in S^2; \langle X, P \rangle = 0\}$  de  $S^2$ .

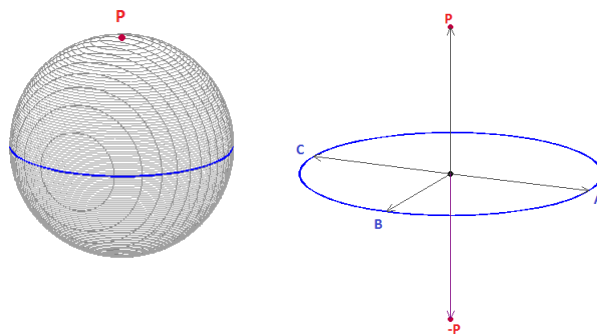


Figura 2.4: Reta polar de polo  $P$

A definição diz que uma reta polar de polo  $P$  é formada pelos pontos  $X$  de  $S^2$  tais que o segmento euclidiano  $OX$  é perpendicular ao segmento euclidiano  $OP$  (observe a Figura 2.4). No globo terrestre, por exemplo, o equador é a reta polar de polo Polo Norte.

**Observação 2.1.** Um ponto  $P \in S^2$  é polo de  $l_P$  se, e somente se,  $\langle X, P \rangle = 0$ , para todo  $X \in l_P$ .

**Observação 2.2.** Se  $P$  é polo de  $l_P$  então,  $-P$  também é polo de  $l_P$ , pois  $\langle X, -P \rangle = -\langle X, P \rangle = 0$ , para todo  $X \in l_P$ .

**Observação 2.3.** Seja  $r$  uma reta de  $S^2$ . Dados os pontos  $P, Q \in r$  tais que  $Q$  não é antípoda de  $P$ , tem-se que  $N = \frac{P \times Q}{|P \times Q|}$  é polo de  $r$ .

**Teorema 2.1.** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos distintos de  $S^2$  que não são antípodas. Existe uma única reta em  $S^2$  que passa por  $P$  e  $Q$ .

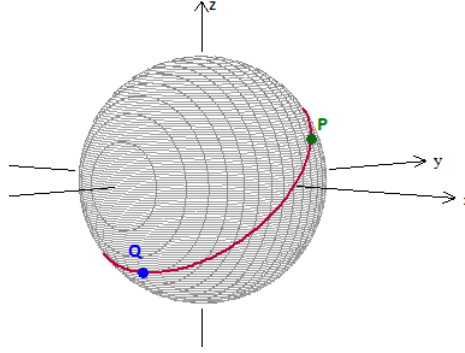


Figura 2.5: Reta que passa por  $P$  e  $Q$

*Demonstração.* Como os pontos  $P$  e  $Q$  de  $S^2$  não são antípodas, então a origem  $O$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $P$  e  $Q$  são pontos não colineares de  $\mathbb{R}^3$ . Assim existe um único plano  $\pi$  que passa por  $O$ ,  $P$  e  $Q$ . A interseção de  $\pi$  com  $S^2$  determina uma única reta em  $S^2$  passando por  $P$  e  $Q$ . Logo existe uma única reta em  $S^2$  passando por  $P$  e  $Q$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** *Se  $r$  e  $s$  são retas distintas de  $S^2$ , então a interseção de  $r$  e  $s$  possui exatamente dois pontos.*

Veja a Figura 2.6.

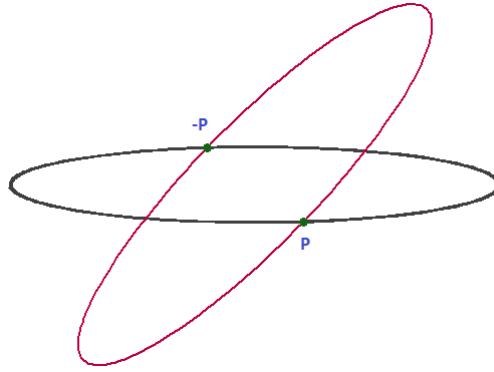


Figura 2.6: Retas  $r$  e  $s$

*Demonstração.* Sejam  $N$  e  $M$  polos de  $r$  e  $s$ , respectivamente. Os pontos  $\frac{N \times M}{|N \times M|}$  e  $-\frac{N \times M}{|N \times M|}$  pertencem a  $r \cap s$ , pois  $\left\langle \frac{N \times M}{|N \times M|}, N \right\rangle = 0$ ,  $\left\langle \frac{N \times M}{|N \times M|}, M \right\rangle = 0$ ,  $\left\langle -\frac{N \times M}{|N \times M|}, N \right\rangle = 0$  e  $\left\langle -\frac{N \times M}{|N \times M|}, M \right\rangle = 0$ .

Suponha que exista  $Q \in r \cap s$  tal que  $Q \neq \pm \frac{N \times M}{|N \times M|}$ . Como  $Q$  e  $\frac{N \times M}{|N \times M|}$  não são antípodas e são distintos, pelo Teorema 2.1, existe uma única reta que passa por  $Q$  e  $\frac{N \times M}{|N \times M|}$ . Mas isto é absurdo, pois  $Q$  e  $\frac{N \times M}{|N \times M|}$  pertencem a  $r \cap s$  e  $r \neq s$ . Portanto,  $r \cap s = \left\{ \frac{N \times M}{|N \times M|}, -\frac{N \times M}{|N \times M|} \right\}$ .  $\square$

**Definição 2.4.** Duas retas são paralelas se a interseção entre elas é vazia.

**Corolário 2.1.** Não existem retas paralelas em  $S^2$ .

*Demonstração.* De fato, pelo Teorema 2.2, quaisquer duas retas distintas em  $S^2$  possuem dois pontos comuns. □

**Definição 2.5.** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos em  $S^2$ , definimos a **distância de  $P$  a  $Q$** , denotada por  $d(P, Q)$ , por  $d(P, Q) = \arccos(\langle P, Q \rangle)$ , onde a função cosseno é considerada no intervalo  $[0, \pi]$ .

A Definição 2.5 diz que a distância de  $P$  a  $Q$  é a medida do ângulo  $POQ$  em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $O$  é a origem de  $\mathbb{R}^3$ .

**Propriedades de distância:**

1.  $d(P, Q) \geq 0$ .

*Demonstração.* Como na definição de distância a função cosseno é considerada com domínio  $[0, \pi]$ , temos que o domínio da função  $\arccos$  é  $[-1, 1]$  e a imagem de  $\arccos$  é  $[0, \pi]$ . Assim  $d(P, Q) = \arccos(\langle P, Q \rangle) \in [0, \pi]$  e, portanto  $d(P, Q) \geq 0$ , para todos  $P$  e  $Q$  em  $S^2$ . □

2.  $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$ .

*Demonstração.* Suponha  $d(P, Q) = 0$ , assim

$$\begin{aligned} \arccos(\langle P, Q \rangle) &= 0 \\ \langle P, Q \rangle &= \cos 0 \\ \langle P, Q \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Por definição  $\langle P, Q \rangle = \cos \theta |P| \cdot |Q|$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os segmentos euclidianos  $OP$  e  $OQ$  com  $O$  origem de  $\mathbb{R}^3$ , assim

$$\begin{aligned} \cos \theta |P| \cdot |Q| &= \langle P, Q \rangle = 1 \\ \implies \cos \theta |P| \cdot |Q| &= 1 \\ \implies \cos \theta &= 1, \text{ pois } |P| = |Q| = 1 \\ \implies \theta &= 0, \text{ pois } \theta \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Como a distância de  $P$  à  $Q$  é igual ao ângulo formado pelos segmentos euclidianos  $OP$  e  $OQ$ , temos  $d(P, Q) = 0$ .

Reciprocamente, se  $P = Q$ , então  $\theta = 0$  e  $\cos \theta = 1$ .

$$\begin{aligned} \cos \theta |P| \cdot |Q| &= 1, \text{ pois } |P| = |Q| = 1 \\ \langle P, Q \rangle &= 1 \\ \arccos(\langle P, Q \rangle) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $d(P, Q) = 0$ . □

3.  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .

*Demonstração.*

$$d(P, Q) = \arccos(\langle P, Q \rangle) = \arccos(\langle Q, P \rangle) = d(Q, P).$$

Portanto,  $d(P, Q) = d(Q, P)$ . □

4.  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$  (Desigualdade Triangular).

*Demonstração.* Observe que

$$|\langle P, Q \rangle| \leq |P| \cdot |Q| \text{ com } P \text{ e } Q \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

De fato, dados  $P$  e  $Q$  em  $\mathbb{R}^3$ ,  $|\langle P, Q \rangle| = |P| \cdot |Q| \cdot |\cos \theta|$ , como  $0 \leq |\cos \theta| \leq 1$ , temos  $|\langle P, Q \rangle| \leq |P| \cdot |Q|$ .

Sejam  $r = d(P, Q)$ ,  $p = d(Q, R)$  e  $q = d(P, R)$ .

$$\begin{aligned} |\langle P \times Q, R \times Q \rangle| &\leq |P \times Q| \cdot |R \times Q| \\ \implies |\langle P \times Q, R \times Q \rangle|^2 &\leq |P \times Q|^2 \cdot |R \times Q|^2. \end{aligned}$$

Pelas propriedades 6, 7, 2 de produto interno e vetorial, temos

$$\begin{aligned} |\langle P \times Q, R \times Q \rangle|^2 &= |\langle (P \times Q) \times R, Q \rangle|^2 \\ &= |\langle (\langle P, R \rangle \cdot Q - \langle Q, R \rangle \cdot P), Q \rangle|^2 \\ &= |\langle P, R \rangle \cdot \langle Q, Q \rangle - \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, Q \rangle|^2 \\ &= |\langle P, R \rangle - \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, Q \rangle|^2 \\ &= (\cos q - \cos p \cdot \cos r)^2. \end{aligned}$$

Da propriedade 9, temos

$$\begin{aligned} |P \times Q|^2 \cdot |R \times Q|^2 &= (1 - (\langle P, Q \rangle)^2) \cdot (1 - (\langle R, Q \rangle)^2) \\ &= (1 - \cos^2 r) \cdot (1 - \cos^2 p) \\ &= \sin^2 r \cdot \sin^2 p. \end{aligned}$$

Logo  $(\cos q - \cos p \cdot \cos r)^2 \leq \sin^2 r \cdot \sin^2 p$  e, como  $r, p \in [0, \pi]$ , então  $\sin r \geq 0$  e  $\sin p \geq 0$ . Daí

$$\cos q - \cos p \cdot \cos r \leq \sin p \cdot \sin r,$$

ou seja,

$$\cos q \leq \cos p \cdot \cos r + \sin p \cdot \sin r = \cos(r - p).$$

Como a função cosseno é decrescente no intervalo  $[0, \pi]$ , então  $q \geq r - p$  e, portanto,  $r \leq p + q$ , sempre que  $0 \leq r - p \leq \pi$ . Assim,

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q).$$

Se  $r - p < 0$ , então  $r < p$  e, como  $r, p > 0$ , temos  $r < p < p + r$ , ou seja,

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q).$$

Finalmente, para  $r = d(P, Q)$ , temos

$$\langle P, Q \rangle = \cos \theta \implies \arccos(\langle P, Q \rangle) = \theta \implies d(P, Q) = \theta \leq \pi \implies 0 \leq r \leq \pi.$$

Do mesmo modo, chegamos em  $0 \leq p \leq \pi$  e conseqüentemente a  $r - p < \pi$ . Portanto,

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q),$$

para todo  $P, Q$  e  $R$  em  $S^2$ .

□

**Definição 2.6.** *Sejam  $P$  e  $Q$  pontos distintos de  $S^2$  que não são antípodas. Chamamos de **segmento menor** determinado por  $P$  e  $Q$  o subconjunto da reta dado por*

$$\overline{PQ} = \{X \in S^2; d(P, Q) = d(P, X) + d(X, Q)\}.$$

*O complementar de  $\overline{PQ}$  em relação à reta que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  é chamado de **segmento maior** determinado por  $P$  e  $Q$  (observe a Figura 2.7).*

*Quando  $Q$  é antípoda de  $P$ , os segmentos menor e maior têm o mesmo comprimento. Dizemos, neste caso, que  $P$  e  $Q$  definem duas **semirretas**.*

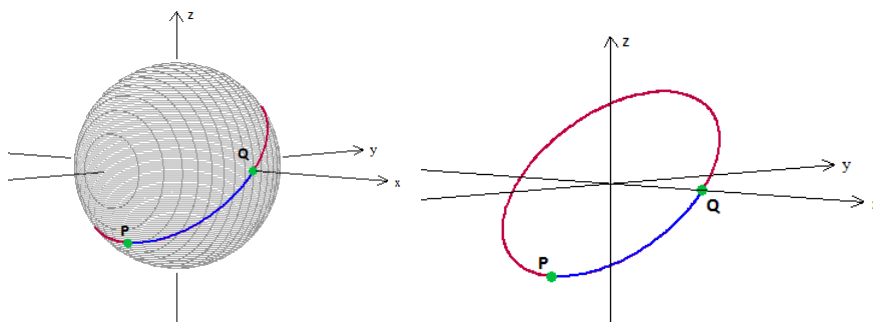


Figura 2.7: Segmentos determinados por  $P$  e  $Q$

Observe que existem infinitas semirretas determinadas por  $P$  e pelo antípoda  $-P$ . Por exemplo, os meridianos estão contidos em planos perpendiculares ao plano que contém a linha do Equador e são linhas sobre o globo terrestre com extremos no Polo Norte e no Polo Sul. Logo os meridianos podem ser vistos como semirretas esféricas com extremos no Polo Norte e no Polo Sul.

**Definição 2.7.** Um **raio esférico** é uma semirreta em  $S^2$  da qual retiramos um de seus extremos. O extremo que não é extraído da semirreta é chamado **origem do raio**.

**Definição 2.8.** Um **ângulo esférico** é a união de dois raios com origem comum. Denotamos por  $\angle PQR$  o ângulo determinado pelos raios  $QP$  e  $QR$ .

**Definição 2.9.** Um ponto  $X \in S^2$  é **ponto interior** do ângulo  $\angle PQR$  se o segmento menor  $\overline{XR}$  não intersecta a reta determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$ . Caso contrário, dizemos que  $X$  é **ponto exterior** ao ângulo  $\angle PQR$ .

**Definição 2.10.** O conjunto dos pontos interiores ao ângulo  $\angle PQR$  é chamado de **lua** e a união de uma lua com os pontos antípodas aos pontos pertencentes a ela é chamada de **lua dupla**.

**Definição 2.11.** A medida em radianos de um ângulo  $\angle PQR$  é dada por

$$\arccos \left( \left\langle \frac{Q \times P}{|Q \times P|}, \frac{Q \times R}{|Q \times R|} \right\rangle \right).$$

**Definição 2.12.** Sejam  $P, Q$  e  $R$  pontos não colineares de  $S^2$ , o **triângulo esférico**  $PQR$  é definido pela união dos segmentos menores  $PQ, QR, PR$ . Esses segmentos são chamados **lados do triângulo** (veja as Figuras 2.8, 2.9).

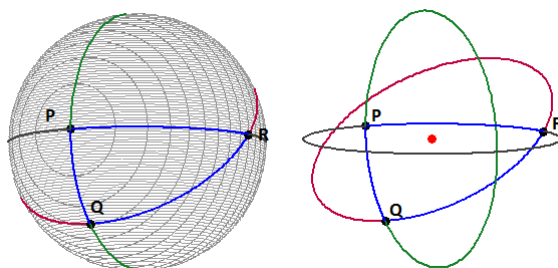


Figura 2.8: Triângulo  $PQR$

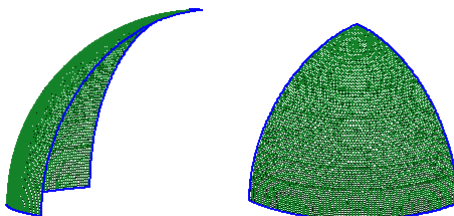


Figura 2.9: Triângulo esférico

**Definição 2.13.** Dado um triângulo esférico  $PQR$ , os pontos antípodas dos pontos do triângulo  $PQR$  formam um triângulo esférico chamado de **triângulo antípoda** do triângulo  $PQR$ .

A **área de uma região esférica** é igual a área euclidiana dessa região. Assim a área total da esfera unitária  $S^2$  é igual a  $4 \cdot \pi$ .

**Observação 2.4.** Um triângulo esférico e seu antípoda possuem a mesma área.

**Teorema 2.3.** *Seja  $T$  um triângulo esférico de ângulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$  medidos em radianos, então a soma dos ângulos internos de  $T$  é  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A_T$  onde  $A_T$  é a área do triângulo  $T$ .*

*Demonstração.* Prolongando os lados do triângulo nos dois sentidos, formam-se três luas duplas. A razão entre a área  $A$  da esfera e a área da lua de ângulo  $\alpha$  é igual a razão de  $2\pi$  por  $\alpha$ . Como estamos considerando uma lua dupla temos,

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_\alpha} &= \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \alpha} \\ \frac{4 \cdot \pi}{A_\alpha} &= \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \alpha} \\ A_\alpha &= \frac{8 \cdot \pi \cdot \alpha}{2 \cdot \pi} \\ A_\alpha &= 4 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Da mesma forma, denotando por  $A_\beta$  e  $A_\gamma$  as áreas das luas duplas de ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , respectivamente, temos  $A_\beta = 4 \cdot \beta$  e  $A_\gamma = 4 \cdot \gamma$ .

Chamando de  $A_T$  a área do triângulo  $T$  e  $A_{-T}$  a área do triângulo antípoda de  $T$  e observando que  $A_T = A_{-T}$ , temos

$$A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = A + 2 \cdot A_T + 2 \cdot A_T,$$

pois, quando somamos as áreas das luas duplas, somamos as áreas de  $A_T$  e  $A_{-T}$  duas vezes a mais. Assim,

$$4 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta + 4 \cdot \gamma = 4 \cdot \pi + 4 \cdot A_T$$

Portanto,  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A_T$ .

□

Apesar da Terra não ser exatamente uma esfera, podemos pensar como se fosse e analisar a Geometria Esférica no globo terrestre, veja a Figura 2.10.

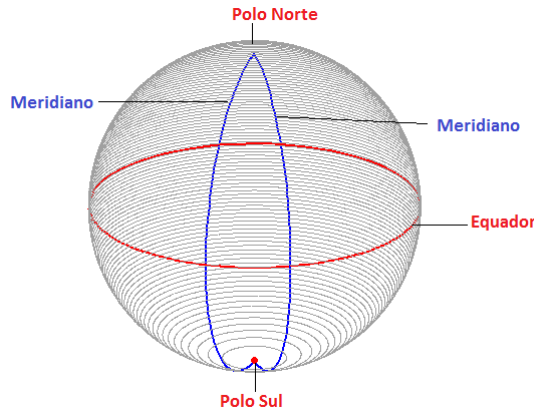


Figura 2.10: Globo terrestre

Maiores detalhes sobre a relação entre a Geometria Esférica e o globo terrestre podem ser encontrados em Alves [1].

### 2.1.2 A demonstração de Legendre para o Teorema de Euler

Nesta seção trataremos da demonstração de Legendre para o Teorema de Euler, tendo como principal referência Lima [16]. Para isso precisaremos definir o que é um poliedro e o que é um poliedro convexo.

**Definição 2.14.** Um *poliedro*  $P$  é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as **faces** de  $P$ , tal que a interseção de duas faces distintas de  $P$  seja uma aresta, um vértice ou seja vazia. As **arestas** de  $P$  são os lados das faces e os **vértices** de  $P$  são os vértices de suas faces.

**Definição 2.15.** Um poliedro é **convexo** se, qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos.

**Definição 2.16.** Sendo  $Q$  um ponto do poliedro  $P$ , a **projeção radial** de  $Q$  sobre a esfera  $E$  de raio 1 e centro  $O$  no interior de  $P$ , é a interseção da semirreta de origem em  $O$  e que passa por  $Q$  com a esfera  $E$ .

**Teorema 2.4** (Teorema de Euler). Se  $P$  é um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, então vale a relação  $V - A + F = 2$ .

*Demonstração.* Podemos supor todas as faces de  $P$  sendo triângulos pois, caso isso não ocorra, podemos decompor as faces, por meio de diagonais, em faces triangulares sem afetar a relação  $V - A + F = 2$ , pois cada diagonal traçada cria mais uma face e mais uma aresta. Assim,

$$V - (A + 1) + (F + 1) = V - A + F.$$

Seja  $E$  uma esfera de raio 1 e centro  $O$  no interior de  $P$ . Projetando radialmente o poliedro sobre a esfera  $E$ , obtemos para cada ponto de  $P$  um único correspondente em

$E$  e, reciprocamente, para cada ponto de  $E$  corresponde um único ponto de  $P$ , pois  $P$  é convexo. Assim, obtemos uma decomposição de  $E$  em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante às faces de  $P$ .

Sabemos que, para cada triângulo esférico  $T$ , a soma dos ângulos internos de  $T$  é  $S_T = \pi + A_T$ , onde  $A_T$  é a área do triângulo  $T$ . Como a esfera está decomposta em  $F$  triângulos, somando os ângulos internos de todos os triângulos esféricos, temos

$$\sum S_T = \pi \cdot F + \sum A_T. \quad (2.1)$$

Observando que em torno de cada vértice tem-se um ângulo de  $2 \cdot \pi$  radianos e como o total de vértices sobre a esfera é  $V$ , então a soma de todos esses ângulos é  $2 \cdot \pi \cdot V$ . Essa soma de ângulos é igual a soma dos ângulos internos dos triângulos e, assim,

$$\sum S_T = 2 \cdot \pi \cdot V. \quad (2.2)$$

Observe que  $\sum A_T = 4 \cdot \pi$  é a área da superfície da esfera e que, em um poliedro, vale a relação  $3 \cdot F = 2 \cdot A$ , ou seja  $F = 2 \cdot A - 2 \cdot F$ , Com isso, de (2.1) e (2.2), temos

$$\pi \cdot F + \sum A_T = 2 \cdot \pi \cdot V \implies \pi \cdot F + 4 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot V \implies F + 4 = 2 \cdot V.$$

Como  $F = 2 \cdot A - 2 \cdot F$ , temos  $2 \cdot A - 2 \cdot F + 4 = 2 \cdot V$  e daí  $V - A + F = 2$ .

□

A demonstração de Legendre para o Teorema de Euler garante a validade da relação  $V - A + F = 2$  somente para poliedros convexos, mas é possível encontrar poliedros não convexos para os quais ainda é verdade essa relação. Por exemplo, observe a Figura 2.11, um prisma de bases triangulares, onde a base inferior foi substituída pelas faces superiores de uma pirâmide de base triangular.

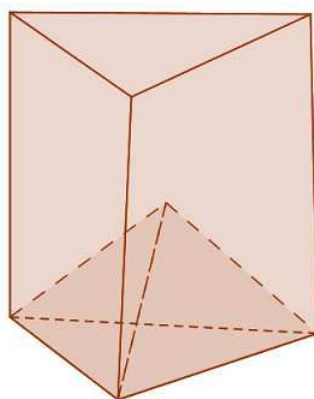


Figura 2.11: Poliedro não convexo

Esse exemplo mostra que a recíproca do Teorema de Euler não é verdadeira.

Um estudo mais aprofundado desse assunto, deixa de usar apenas geometria clássica e passa a usar idéias topológicas para explicar essa relação. No Capítulo 3.4.2 tratamos um pouco dessas idéias topológicas.

## 2.2 Demonstração por indução sobre o número de faces

O conteúdo desta seção é encontrado em Dolce [10, p.123-127].

**Definição 2.17.** *Superfície poliédrica limitada convexa* é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que: (veja a Figura 2.12)

- a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
- b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
- c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada **contorno**;
- d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-plano.

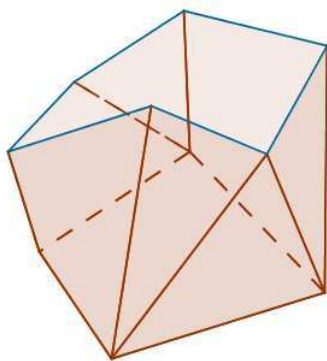


Figura 2.12: Superfície poliédrica limitada convexa e aberta

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas **abertas** e as que não têm contorno são chamadas **fechadas**.

As superfícies poliédricas limitadas convexas fechadas são poliedros convexas.

As **faces** de uma superfícies poliédricas limitadas convexas são os polígonos, os **vértices** são os vértices dos polígonos e as **arestas** são os lados dos polígonos.

**Observação 2.5.** Um poliedro é convexo se, e somente se, todo plano que contenha uma das faces do poliedro deixa o poliedro em um dos semi-espacos determinados por este plano.

**Lema 1.** *Para toda superfície poliédrica limitada convexa aberta vale a relação*

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

em que  $V_a$  é o número de vértices,  $A_a$  é o número de arestas e  $F_a$  é o número de faces da superfície limitada convexa aberta.

*Demonstração.* Vamos usar indução finita sobre o número de faces.

Se o número de faces  $F_a$  é igual a 1, então temos um polígono convexo. Observe que, em todo polígono convexo, o número de vértices é igual ao número de arestas. Assim

$$\begin{aligned} V_a - A_a + F_a &= V_a - V_a + F_a \\ \implies V_a - A_a + F_a &= F_a \\ \implies V_a - A_a + F_a &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a relação está verificada para  $F_a = 1$ .

Suponha que a relação vale para toda superfície poliédrica limitada convexa aberta  $Q$ , de  $F'$  faces (que possui  $V'$  vértices e  $A'$  arestas), ou seja,  $V' - A' + F' = 1$ . Devemos mostrar que a relação é válida para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta com  $F' + 1$  faces.

Acrescentando uma nova face de  $p$  arestas (lados) de modo que superfície continue limitada convexa e aberta e, considerando que  $q$  dessas arestas coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície poliédrica limitada convexa aberta com  $F_a$  faces,  $V_a$  vértices e  $A_a$  arestas tais que,

$$\begin{aligned} F_a &= F' + 1 \\ A_a &= A' + p - q \\ V_a &= V' + p - (q + 1), \end{aligned}$$

onde observamos que as  $q$  arestas que coincidem formam uma poligonal aberta e, portanto, tem  $q + 1$  vértices que, conseqüentemente, estão na interseção da superfície inicial com o polígono acrescentado.

Substituindo os valores de  $F_a$ ,  $V_a$  e  $A_a$  na relação  $V_a - A_a + F_a$  e usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} V_a - A_a + F_a &= V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 \\ \implies V_a - A_a + F_a &= V' - A' + F' \\ \implies V_a - A_a + F_a &= 1. \end{aligned}$$

Assim, a relação  $V_a - A_a + F_a = 1$  é verdadeira para toda superfície poliédrica limitada convexa aberta. □

**Teorema 2.5** (Teorema de Euler). *Se  $P$  é um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, então vale a relação  $V - A + F = 2$ .*

*Demonstração.* Retiremos uma das faces de  $P$ . Isso não altera o número de vértices nem o número de arestas e o resultado é uma superfície poliédrica limitada aberta (veja a Figura 2.13),  $Q'$  e, pela Observação 2.5, como  $P$  é convexo,  $Q'$  também é convexa.

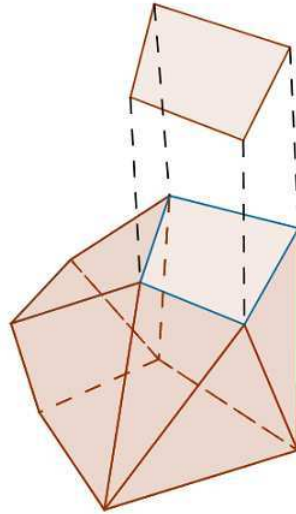


Figura 2.13: Poliedro convexo sendo retirada uma face

Pelo Lema 1, para  $Q'$  vale a relação  $V_a - A_a + F_a = 1$ , onde  $V_a$  é o número de vértices,  $A_a$  é o número de arestas e  $F_a$  o número de faces de  $Q'$ . Como  $V_a = V$ ,  $A_a = A$  e  $F_a = F - 1$ , daí

$$\begin{aligned} V - A + F &= V_a - A_a + F_a + 1 \\ \implies V - A + F &= 1 + 1 \\ \implies V - A + F &= 2. \end{aligned}$$

□

## 2.3 Teorema de Euler na Teoria de Grafos

Segundo Boaventura [6], o primeiro registro do que hoje se chama Teoria de Grafos foi em 1736. Existia na cidade de Königsberg, na região da Prússia Oriental um famoso problema que circulava entre seus moradores. Em um rio que corta a cidade, havia duas ilhas que, na época, eram ligadas entre si por uma ponte. As duas ilhas se ligavam ainda às margens por mais seis pontes ao todo. O problema consistia em encontrar o percurso para o passeio que partisse de uma das margens e, atravessando uma única vez cada uma das sete pontes, retornasse a margem de partida (veja a Figura 2.14).

Em 1736 Leonhard Euler visitou a cidade de Königsberg e tomou conhecimento do problema das pontes. Euler usou um esquema de representação para ajudá-lo a resolver o problema, esse esquema de representação gráfica usado por Euler, hoje em dia, é chamado um modelo de grafo. Na Figura 2.15, temos um modelo de grafo para o problema das pontes de Königsberg.

Ainda segundo Boaventura [6], a Teoria de Grafos hoje é um campo de aplicações para problemas de localização e traçados de rotas, no estudo da estrutura do DNA, na engenharia molecular, no estudo de circuitos elétricos e outros.

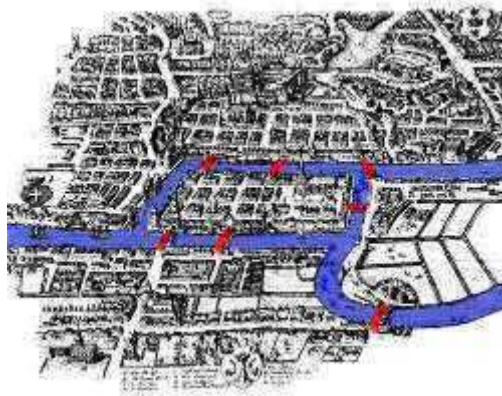


Figura 2.14: As pontes em vermelho

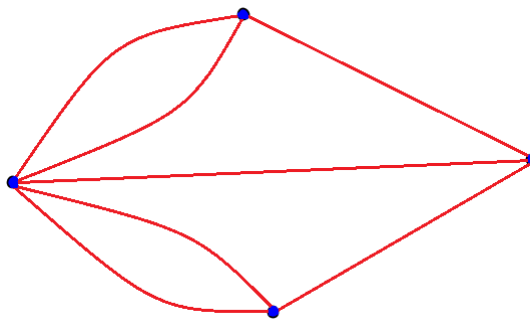


Figura 2.15: Representação gráfica das pontes

Veremos que o Teorema de Euler também é válido na Teoria de Grafos e para isso, primeiro, falaremos um pouco sobre grafos.

### 2.3.1 Noções da Teoria de Grafos

As definições e resultados descritos nesta seção são encontrados em Boaventura [5] e [6].

**Definição 2.18.** Um **grafo** é um objeto matemático abstrato (ou uma estrutura matemática) formado por dois conjuntos. O primeiro deles, que denotamos por  $V$ , é um conjunto dos **vértices**, o outro é um conjunto de relações entre os vértices, que chamaremos de conjunto das **arestas** e o representaremos por  $A$ .

Se dois vértices  $v$  e  $w$  de  $V$  estão relacionados, diremos que entre eles existe uma aresta pertencente a  $A$ , que chamaremos  $(v, w)$ .

Denotamos um grafo com conjunto de vértices  $V$  e conjunto de arestas  $A$  por  $G = (V, A)$  e criamos um esquema gráfico associando cada vértice a um ponto e cada aresta (relação) a uma linha.

Na Figura 2.16, temos uma representação do grafo  $G = (V, A)$ , onde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$ , com  $(a, b)$ ,  $a$  e  $b$  em  $V$ , representando a relação entre  $a$  e  $b$  ou a aresta de  $a$  a  $b$ .

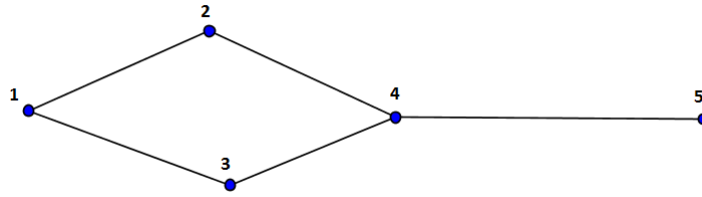


Figura 2.16: Grafo  $G = (V, A)$

A cada aresta de um grafo  $G(V, A)$  associamos um par ordenado  $(a, b)$ , onde  $a$  é ponto inicial e  $b$  é o ponto final da aresta e dizemos que  $G(V, A)$  é **orientado**. Na Figura 2.18, o conjunto de arestas de  $G(V, A)$  é  $\{(A, B), (B, D), (D, B), (A, C), (C, A), (C, E), (C, D)\}$ .

**Definição 2.19.** *Se para toda aresta  $(a, b)$  do grafo  $G(V, A)$  a aresta  $(b, a)$  também pertence ao grafo  $G(V, A)$ , então dizemos que o grafo é **não orientado**.*

Exemplo: Em um grupo de pessoas, a relação “gostar de” determina um grafo orientado, pois pode ocorrer que João goste de Maria mas Maria não goste de João. Observe que pode ocorrer em grupo de pessoas que todos gostem de todos e, assim a relação “gostar de”, apesar de determinar um grafo orientado, pode ter uma representação de grafo não orientado.

Representaremos a relação entre dois vértices de um grafo não orientado por uma aresta (segmento de reta) e entre dois vértices de grafo orientado por uma seta, veja as Figuras 2.17 e 2.18.

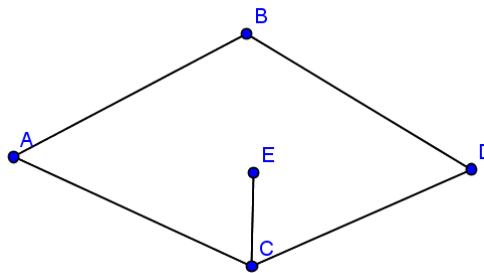


Figura 2.17: Grafo não orientado

No que apresentamos a seguir consideramos apenas grafos não orientados.

**Definição 2.20.** *A **ordem** de um grafo é o número de vértices que ele possui.*

**Definição 2.21.** *O **tamanho** de um grafo é o número de arestas que ele possui.*

**Definição 2.22.** *Dois **vértices** são ditos **adjacentes** se houver uma aresta entre eles e duas **arestas** são ditas **adjacentes** se elas partilharem o mesmo vértice.*

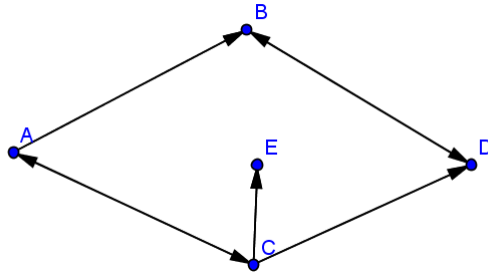


Figura 2.18: Grafo orientado

**Definição 2.23.** Um *percurso* em um grafo é uma coleção de vértices (ou arestas) sequencialmente adjacentes, ou seja, o primeiro elemento é adjacente ao segundo, que é adjacente ao terceiro e assim por diante até chegar ao último. Se o último vértice for igual ao primeiro dizemos que o percurso é **fechado** e se o último vértice for diferente do primeiro dizemos que o percurso é **aberto**.

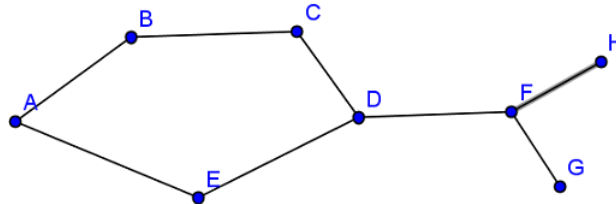


Figura 2.19: Grafo com percurso fechado

Na Figura 2.19, o percurso determinado pelos vértices A, B, C, D, E e A é fechado enquanto que o percurso determinado pelos vértices A, B, C, D e F é aberto.

**Definição 2.24.** Um *percurso simples* é um percurso que não repete arestas.

**Definição 2.25.** Um *percurso elementar* é um percurso que não repete vértices.

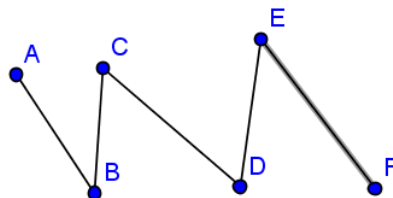


Figura 2.20: Grafo que não possui um percurso fechado

É importante notar que em um percurso fechado do tipo  $(A, B, C, D, E, A)$  na Figura 2.19, não se considera que tenha uma repetição do vértice A mas sim um retorno que fecha o percurso, portanto o percurso  $(A, B, C, D, E, A)$  é elementar.

**Definição 2.26.** *Ciclo* é um percurso elementar fechado.

Na Figura 2.19, o percurso determinado pelos vértices A, B, C, D, E e A é um ciclo e, na Figura 2.20, o percurso determinado pelos vértices A, B, C, D, E e F é um percurso simples e elementar.

**Definição 2.27.** Um grafo não orientado  $G$  que para quaisquer dois vértices de  $G$  sempre existe um percurso ligando os dois vértices é chamado de **grafo conexo**. Quando um grafo não é conexo dizemos que ele é **não conexo** ou **desconexo** (observe as Figuras 2.21 e 2.22).

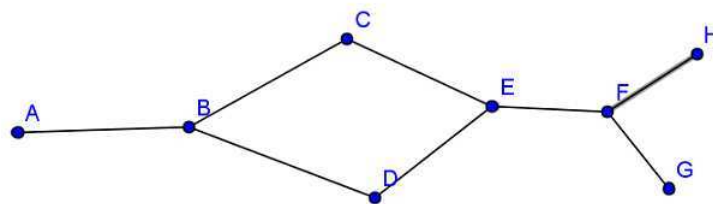


Figura 2.21: Grafo conexo

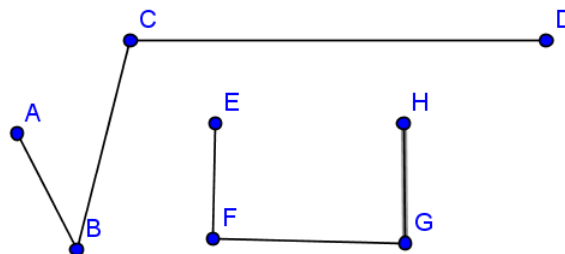


Figura 2.22: Grafo não conexo

Uma aresta que, ao ser retirada de um grafo, faz com que o grafo fique desconexo chama-se **ponte**.

Observe que na Figura 2.21 a aresta determinada pelos vértices A e B e a aresta determinada pelos vértices E e F são pontes, já a aresta determinada pelos vértices B e C não é uma ponte.

**Definição 2.28.** Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos.

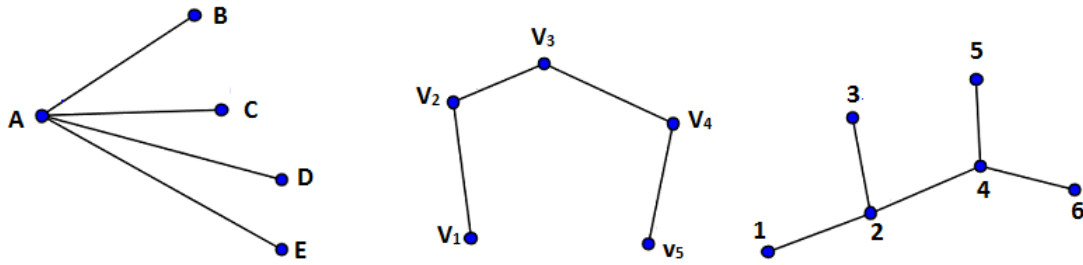


Figura 2.23: Árvores

**Teorema 2.6.** *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices, então as afirmações a seguir são equivalentes.*

1.  $G$  é conexo e sem ciclos.
2.  $G$  é conexo e possui  $n - 1$  arestas.
3.  $G$  é conexo e cada aresta de  $G$  é uma ponte.

*Demonstração.*  $(1 \implies 2)$  Devemos mostrar que  $G$  possui  $n - 1$  arestas.

Para  $n = 1$  é trivial. Para  $n = 2$ ,  $G$  necessariamente possui uma aresta.

Suponha, por indução, que todo grafo conexo e sem ciclo com o número de vértices menor que  $n$  possua o número de arestas igual ao número de vértices menos um.

Dado um grafo conexo com  $n$  vértices e sem ciclo, retirando uma aresta desse grafo ficamos com duas componentes conexas, uma de  $p$  vértices e outra de  $r$  vértices, onde  $p + r = n$ . Pela hipótese de indução, as componentes conexas tem  $p - 1$  e  $r - 1$  arestas, respectivamente. Somando essas arestas à aresta retirada temos

$$\begin{aligned} p - 1 + r - 1 + 1 &= p + r - 1 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

Portanto,  $G$  possui  $n - 1$  arestas.

$(2 \implies 3)$  Suponha que  $G$  tenha uma aresta  $e$  que não seja uma ponte, assim  $G$  possui um ciclo. Retirando a aresta  $e$  de  $G$ ,  $G$  se transforma em um grafo  $G'$  que ainda é conexo, sem ciclos, possui  $n - 2$  arestas e  $n$  vértices. Como de  $1 \implies 2$  temos que  $G'$  possui  $n - 1$  arestas, isto nos dá uma contradição. Portanto, toda aresta de  $G$  é uma ponte.

$(3 \implies 1)$  Devemos mostrar que  $G$  é sem ciclos.

Suponha que  $G$  possua um ciclo, então retirando uma aresta desse ciclo  $G$  continua conexo, uma contradição com o fato de cada aresta de  $G$  ser uma ponte. Portanto,  $G$  é sem ciclos e conexo.  $\square$

**Definição 2.29.** Um **grafo planar** é um grafo que admite uma representação gráfica na qual as arestas só se encontram, possivelmente, nos vértices aos quais são incidentes.

Um cubo pode ser representado em forma de um grafo planar. O processo para chegar à representação do grafo planar pode ser feito do seguinte modo: “estique” uma das faces do cubo sobre um plano e “amasse” o restante do cubo sobre este mesmo plano, formando um desenho dentro da face esticada (veja a Figura 2.24).

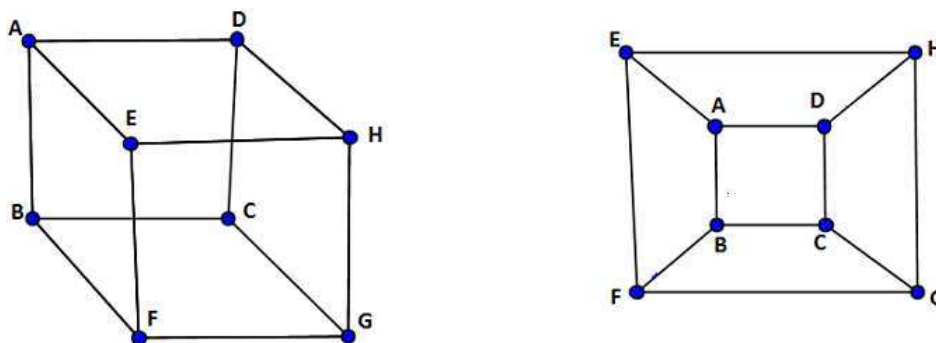


Figura 2.24: Cubo

Uma representação gráfica de um grafo planar separa o plano em regiões, as regiões limitadas pelos ciclos e uma região ilimitada fora dos ciclos. Essas regiões são chamadas de **faces** do grafo e representaremos o número de faces de um grafo por  $F$ .

**Observação 2.6.** Toda árvore é planar e por não possui ciclos, uma árvore determina uma única região.

**Observação 2.7.** Um grafo planar sempre possui uma representação gráfica na qual as arestas só se encontram uma com outra nos vértices, essa representação se chama **forma topológica** ou **grafo plano**.

### 2.3.2 O Teorema de Euler

**Teorema 2.7** (Teorema de Euler). *Em um grafo planar conexo vale a relação*

$$V - A + F = 2.$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo. Então ou  $G$  possui ciclo ou  $G$  não possui ciclo, vamos analisar cada caso.

Se  $G$  não possui ciclos, então  $G$  é uma árvore. Pelo Teorema 2.6,  $A = V - 1$  e, pela Observação 2.6,  $F = 1$ . Daí

$$\begin{aligned} V - A + F &= V - (V - 1) + F \\ \implies V - A + F &= V - V + 1 + 1 \\ \implies V - A + F &= 2 \end{aligned}$$

Suponha que  $G$  possua um ciclo. Então  $A \geq 2$ . Vamos proceder por indução sobre o número de arestas. Se  $A = 2$ , então pelo fato de  $G$  ser um grafo planar conexo e possuir um ciclo, necessariamente possui dois vértices e duas faces. Daí  $V - A + F = 2$ .

Suponha, por indução, que, para qualquer grafo plano conexo com um ciclo e com  $A$  arestas, vale a igualdade  $V - A + F = 2$ . Seja  $G$  um grafo plano conexo com um ciclo,  $V$  vértices,  $F$  faces e  $A + 1$  arestas. Como  $G$  possui um ciclo podemos retirar uma aresta desse ciclo sem que  $G$  deixe de ser conexo. Ao retirarmos essa aresta,  $G$  fica com o mesmo número de vértices e diminui uma face (o ciclo). Pela hipótese de indução  $V - A + F - 1 = 2$ . Assim

$$\begin{aligned} V - (A + 1) + F &= V - A + F - 1 \\ \implies V - (A + 1) + F &= 2. \end{aligned}$$

□

## Capítulo 3

# Uma Cartilha para o Teorema de Euler

O Teorema de Euler é uma ferramenta matemática usada na Topologia, na Teoria de Grafos e em outras áreas bastante atuais e, na maioria das vezes, nada elementares. No entanto, também é um assunto tratado no Ensino Médio e as demonstrações feitas neste trabalho, até aqui, usam ferramentas, como indução finita e a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, que não são abordados no Ensino Médio.

Com o intuito de tornar este assunto mais acessível aos professores e estudantes do Ensino Médio, apresentamos aqui uma cartilha com tópicos históricos, definições e resultados auxiliares para o tema Teorema de Euler.

### 3.1 Leonhard Euler



Figura 3.1: Leonhard Euler

Segundo Boyer [7] e Eves [11], Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Basileia, Suíça, em uma família religiosa. Seu pai era pastor e havia estudado matemática com Jakob Bernoulli. Euler teve uma educação privilegiada, por vontade de seu pai, para que fosse um pastor, mas por influência dos Bernoulli, Euler se dedicou à ciência. Além de Matemática, Euler estudou Teologia, Medicina, Astronomia, Física e línguas orientais.

Em 1727, por recomendação de Nicolaus Bernoulli e Daniel Bernoulli, Euler foi convidado a assumir a cadeira de Medicina da Academia de São Petersburgo, mas com a morte de Nicolaus e a saída de Daniel, Euler assumiu a cadeira de Filosofia Natural, onde permaneceu por 14 anos. Nesse período, com a idade de vinte e oito anos Euler, por excesso de trabalho, ficou cego do olho direito, o que não diminui a sua produção científica. Depois Euler iria para a Academia de Berlim, onde ficaria por vinte e cinco anos.

Euler é responsável por muitas das notações que usamos hoje, como por exemplo,  $e$  para o número de Euler,  $i$  para a unidade imaginária e a popularização do símbolo  $\pi$ . É responsável por criar a fórmula  $e^{\pi i} - 1 = 0$ , que é considerada uma das belas fórmulas matemáticas existentes. Observe que nesta fórmula estão os números irracionais mais famosos,  $\pi$  e  $e$ , a unidade natural, 1, o elemento nulo, 0, a unidade imaginária  $i$  e a principal relação da matemática, a igualdade.

Segundo um documentário da BBC [4], Euler não era apenas um matemático puro. Ele usou números primos na Óptica, trabalhou com Astronomia, desenvolveu um novo sistema de pesos e medidas, escreveu um manual escolar sobre Mecânica e ainda desenvolveu uma Teoria da Música.

Em sua vida pessoal, Euler pode ser considerado uma pessoa normal, com alegrias e tristezas. Casou-se, mas sua primeira esposa morreu ainda jovem. Teve treze filhos, mas apenas cinco chegaram à idade adulta.

De acordo com Boyer [7], a convite de Catarina, a Grande, Euler volta a São Petersburgo em 1766, onde perde a visão do olho que lhe restava, o que não diminui a sua produção científica. Segundo a BBC [4], Euler dizia que a cegueira de certo modo o ajudou, pois o deixou sem distrações.

Segundo Boyer [7] e Eves [11], Euler foi o matemático mais produtivo de todos os tempos, escrevendo em média 800 páginas de pesquisa por ano e deixando mais de 800 trabalhos científicos entre livros e artigos. Por quarenta e oito anos após sua morte a Academia de São Petersburgo ainda publicou seus trabalhos. Euler morreu enquanto tomava chá com um de seus netos aos 76 anos de idade.

Segundo Siqueira [25], Euler, em sua primeira passagem por São Petersburgo, conheceu Christian Goldbach (1690-1764), um matemático que também trabalhava em São Petersburgo. Com a saída de Goldbach de São Petersburgo, Euler e Goldbach passaram a trocar correspondências, o que se tornou um grande acervo sobre as pesquisas que eles realizavam. Em uma dessas cartas a Goldbach, Siqueira [25, p.56], Euler enuncia, depois de uma argumentação,

“Em qualquer sólido limitado por faces planas, a soma do número de ângulos sólidos e o número de faces excede em dois o número de arestas.”

O que Euler chamava de ângulos sólidos hoje chamamos de vértices.

Esse resultado passou a ser chamado de Teorema de Euler para poliedros e esse vai ser o nosso objeto de estudo. Para isso precisaremos de algumas definições e resultados, o que faremos na seção a seguir.

## 3.2 Definição de poliedro

O conteúdo dessa seção pode ser encontrado em Barbosa [3] e Lima [17].

O resultado a que pretendemos chegar é o Teorema de Euler para poliedros. Mas, o que é um poliedro? Euler não tinha uma definição formal para poliedro, no entanto encontrou uma importante relação entre objetos de um poliedro.

Intuitivamente um poliedro é um objeto que pode ser feito com tábuas, ou qualquer outro objeto plano, de modo que sirva como recipiente para armazenar algo líquido ou em grãos.

O dicionário Aurélio traz a seguinte definição de poliedro:

“Poliedro é um sólido limitado por polígonos planos”.

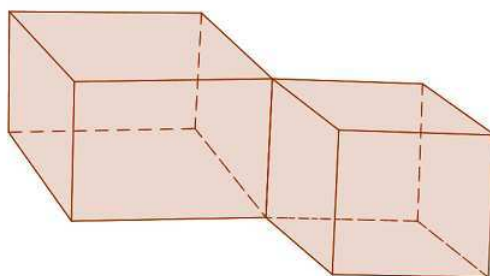


Figura 3.2: Paralelepípedos unidos por uma aresta

O objeto da Figura 3.2 é um poliedro? É um sólido limitado por polígonos planos? Ou são dois sólidos encostados um no outro? Na definição de poliedro encontrada no dicionário deve ser esclarecido o que é um sólido.

Observe o objeto da Figura 3.3, esse objeto é um poliedro? Pensando em poliedro como recipiente, o objeto da Figura 3.3 é um poliedro. No entanto, não seria natural que alguém construísse um recipiente com esse formato.

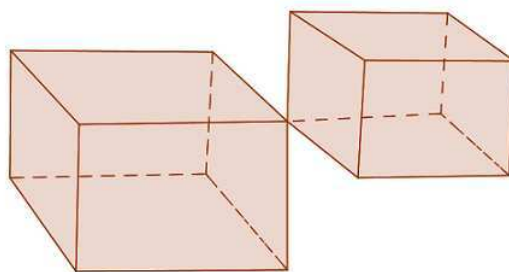


Figura 3.3: Paralelepípedos unidos por um vértice

Observamos que nem sempre as definições encontradas nos dicionários satisfazem às necessidades matemáticas.

No nosso estudo necessitamos de uma definição precisa de poliedro, uma vez que a ideia de poliedro como recipiente não é suficiente para o que queremos.

Começaremos definindo outros objetos geométricos.

**Definição 3.1.** Uma **poligonal** é uma figura formada por uma sequência de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e pelos segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ .

Os pontos são os **vértices** da poligonal e os segmentos são seus **lados**.

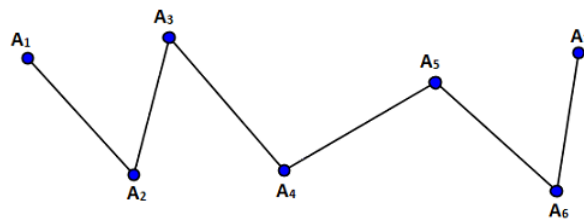


Figura 3.4: Poligonal formada pelos pontos  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$

**Definição 3.2.** Um **polígono** é uma poligonal em que as seguintes quatro condições são satisfeitas:

- $A_n = A_1$  (isto é, o primeiro e o último ponto coincidem).
- Os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades.
- Cada vértice é extremidade de somente dois lados.
- Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Observe as Figuras 3.5 e 3.6.

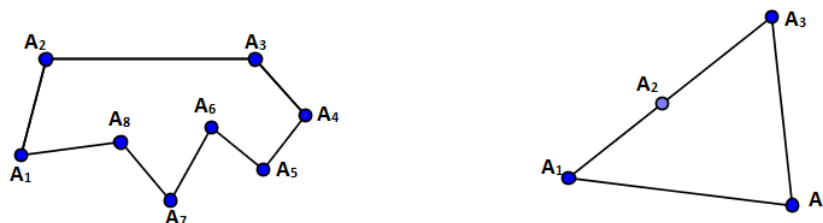


Figura 3.5: Polígonos  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  e  $A_1A_3A_4$

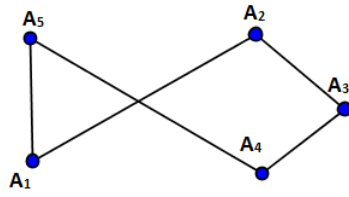


Figura 3.6: Não é um polígono

**Definição 3.3.** Um polígono é **convexo** se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados (veja a Figura 3.7).

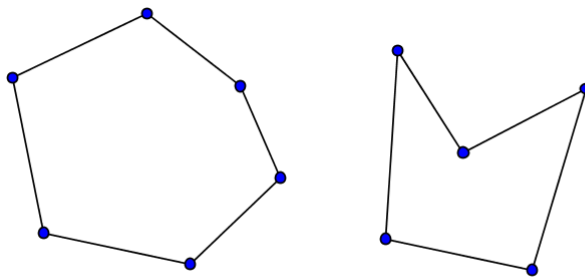


Figura 3.7: Um polígono convexo e um polígono não convexo

Agora podemos definir poliedro.

**Definição 3.4.** Um poliedro  $P$  é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as faces de  $P$ , tal que a interseção de duas faces distintas de  $P$  seja uma aresta, um vértice ou seja vazia. As **arestas de  $P$**  são os lados das faces e os **vértices de  $P$**  são os vértices de suas faces.

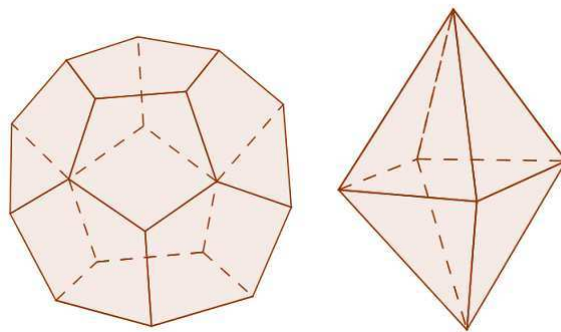


Figura 3.8: Exemplos de poliedros

Observe que, de acordo com esta definição, os objetos tratados na Figura 3.2 e na Figura 3.3 são poliedros. Nas Figuras 3.8 e 3.9 estão outros exemplos de poliedros:

Entre os poliedros existe uma classe que é muito importante: a classe dos chamados poliedros convexos.

**Definição 3.5.** Um poliedro é **convexo** se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em, no máximo, dois pontos.

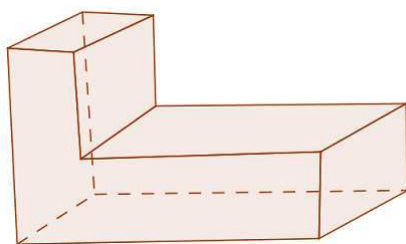
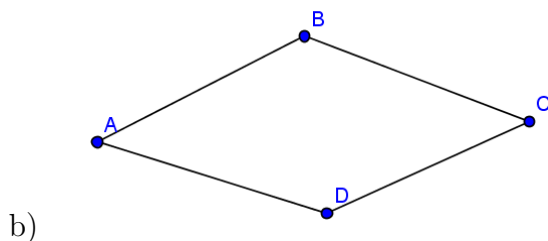
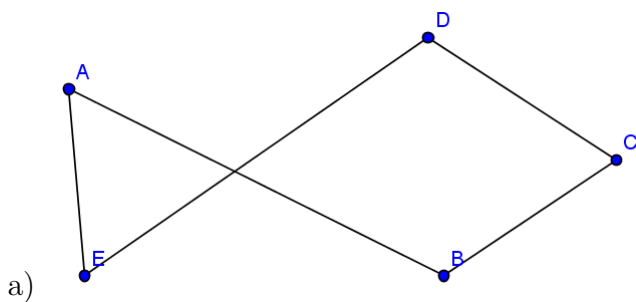


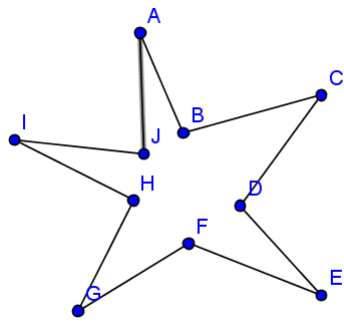
Figura 3.9: Poliedro não convexo

Observe que os poliedros da Figura 3.8 são convexos e o poliedro da Figura 3.9 não é convexo.

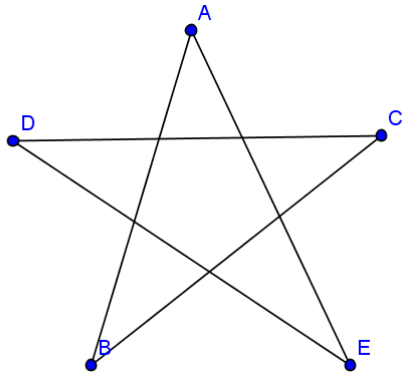
## Exercícios

**Questão 1.** Quais as figuras abaixo são polígonos e quais não são polígonos? Explique, caso não seja polígono, qual condição da definição não é satisfeita.

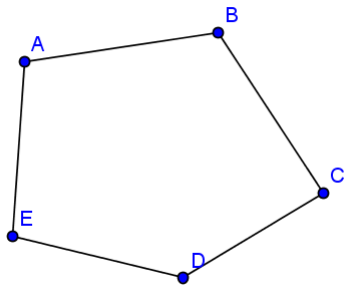




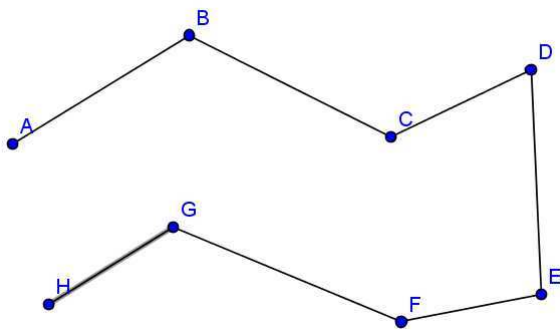
c)



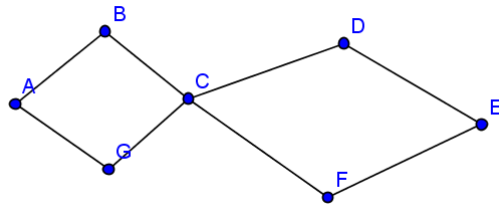
d)



e)



f)



g)

**Questão 2.** Quais dos objetos tratados na Questão 1 são polígonos convexos?

**Questão 3.** Os objetos da Figura 3.10 são poliedros? Caso não seja, explique qual condição da definição falha em cada caso.

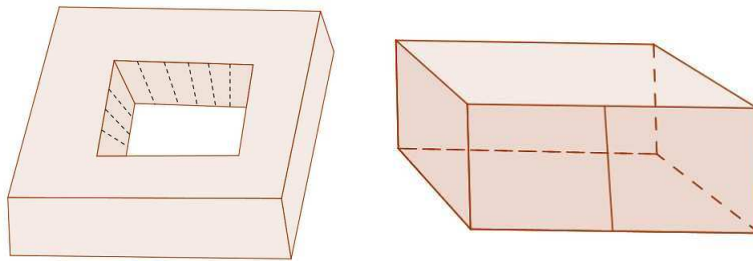


Figura 3.10:

**Questão 4.** Dê alguns exemplos de poliedros convexos e de poliedros não convexos.

### 3.3 Relações entre o número de faces, arestas e vértices

O conteúdo dessa seção pode ser encontrado em Lima [17].

Se ainda pensarmos em poliedros como objetos feitos de “tábuas” ou de “recortes de tábuas”, certamente iríamos querer saber quantas tábuas seriam necessárias para construir um tipo de poliedro ou se, dado um poliedro, quantas e quais tipos de tábuas foram usadas. Esses recortes de tábuas são retangulares? Triangulares?

Agora já sabemos que os nomes dos objetos que formam um poliedro são vértices, arestas e faces. Existe uma relação entre as quantidades desses objetos?

Representaremos por  $A$  o número de arestas, por  $F$  o número de faces e por  $V$  o número de vértices de um poliedro convexo.

Como as faces podem ter diferentes quantidades de arestas representaremos por  $F_n$  o número de faces de  $n$  lados. Lembramos que  $n \geq 3$ , já que não existem polígonos com menos de três lados. Por exemplo,  $F_3$  é o número de faces triangulares, enquanto  $F_5$  é o número de faces pentagonais. Na Figura 3.11, o número de faces triangulares  $F_3$  é 5 e o número de faces pentagonais  $F_5$  é 1.

Da mesma forma, os vértices podem estar associados a números diferentes de arestas. Assim, representaremos por  $V_n$  o número de vértices nos quais concorrem  $n$  arestas. Observe que cada vértice é um ponto comum a duas ou mais arestas. Na Figura 3.11 temos  $V_3 = 5$  e  $V_5 = 1$ .

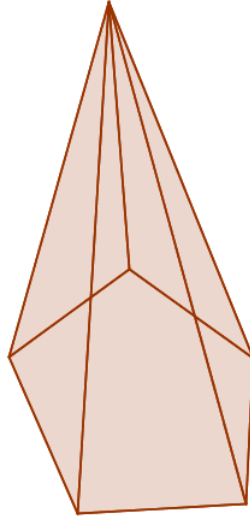


Figura 3.11:  $F_3 = 5$  e  $F_5 = 1$

Se o número máximo de arestas de uma face de um poliedro é  $n$ , então o número de faces do poliedro é a soma do número das faces com três arestas, com número de faces com quatro arestas, com o número de faces com cinco arestas e assim por diante. Logo

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_{n-1} + F_n.$$

Do mesmo modo, se o número máximo de arestas que concorrem em um vértice de um poliedro é  $n$ , então o número de vértices do poliedro é a soma do número de vértices nos quais concorrem duas arestas, com o número de vértices nos quais concorrem três arestas, com o número de vértices nos quais concorrem quatro arestas e assim por diante. Logo

$$V = V_2 + V_3 + V_4 + \dots + V_{n-1} + V_n.$$

Para contarmos o número de arestas podemos usar as faces do seguinte modo: as faces triangulares têm 3 arestas cada, enquanto que as faces quadrangulares têm 4 arestas cada e assim por diante. Assim,  $3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + \dots + n \cdot F_n$  é o dobro do número de arestas, já que cada aresta é comum a exatamente duas faces. Logo

$$2 \cdot A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + \dots + n \cdot F_n.$$

Para contarmos o número de arestas também podemos usar os vértices. Separando os vértices pelo número de arestas que concorrem nesse vértice, temos que  $2 \cdot V_2 + 3 \cdot V_3 + \dots + n \cdot V_n$  é o dobro do número de arestas, já que cada aresta está associada a exatamente dois vértices. Logo

$$2 \cdot A = 2 \cdot V_2 + 3 \cdot V_3 + \dots + n \cdot V_n.$$

Observe que na Figura 3.11, usando as faces, temos  $2 \cdot A = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 20$  e, usando os vértices, temos  $2 \cdot A = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 20$ .

**Observação 3.1.** Um poliedro convexo tem como faces polígonos convexos.

### 3.4 O Teorema de Euler

O conteúdo dessa seção pode ser encontrada em Lima [17].

No final da Seção 3.3, vimos uma relação entre o número de arestas e o número de faces, também uma relação entre o número de arestas e o número de vértices de um poliedro.

Uma relação muito importante envolvendo vértices, arestas e faces foi descoberta em 1758, pelo matemático suíço Leonhard Euler. Essa relação,  $V - A + F = 2$ , não foi provada por Euler, mas em homenagem a ele, hoje é chamada de Teorema de Euler para poliedros.

Existem muitas e importantes aplicações desse resultado, tanto na matemática como em áreas aplicadas como computação e outras.

Vamos agora enunciar e provar o Teorema de Euler para poliedros convexos.

**Teorema 3.1** (Teorema de Euler). *Se  $P$  é um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices, então vale a relação  $V - A + F = 2$ .*

*Demonstração.* A ideia usada na demonstração é a de calcular a soma dos ângulos de todas as faces do poliedro de dois modos diferentes e a partir disso chegar à relação desejada.

Seja  $F$  o número de faces do poliedro e suponha que as faces estejam numeradas de 1 a  $F$ . Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_F$ , o número de arestas das faces 1, 2, ...,  $F$ , respectivamente. Do fato das faces de um poliedro convexo serem polígonos convexos e a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados ser  $(n - 2)\pi$ , temos que a soma  $S$  dos ângulos de todas as faces é

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot \pi + (n_2 - 2)\pi + \dots + (n_F - 2) \cdot \pi \\ S &= n_1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi + n_2 \cdot \pi + \dots + n_F \cdot \pi - 2 \cdot \pi \\ S &= (n_1 + n_2 + \dots + n_F) \cdot \pi - \overbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}^{F \text{ vezes}} \cdot \pi \\ S &= (n_1 + n_2 + \dots + n_F) \cdot \pi - 2 \cdot F \cdot \pi. \end{aligned}$$

Já vimos que a soma do número de arestas dos polígonos que formam as faces do poliedro é o dobro do número de arestas do poliedro. Assim,

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot A \cdot \pi - 2 \cdot F \cdot \pi \\ S &= (2 \cdot A - 2 \cdot F) \cdot \pi \\ S &= (2 \cdot A - 2 \cdot F) \cdot \pi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para a segunda parte vamos escolher uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro (veja a Figura 3.12). Como as faces do poliedro são em número finito, é possível encontrar uma reta que satisfaça esta condição.

Escolhamos um plano  $H$  perpendicular à reta  $r$  e que não intersecte o poliedro. O plano  $H$  será chamado de **plano horizontal** e as retas paralelas a  $r$  serão chamadas de

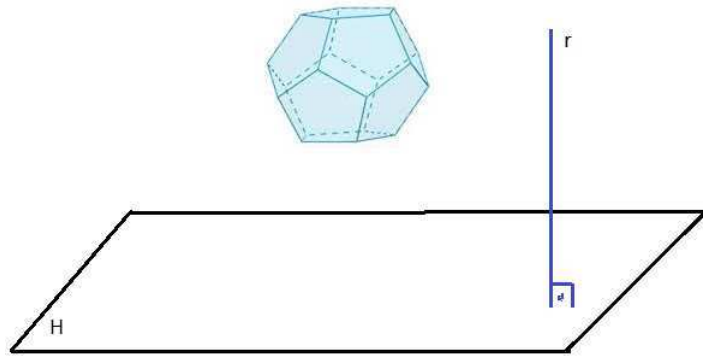


Figura 3.12:

**retas verticais.** O plano  $H$  divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém o poliedro (veja a Figura 3.12). Este será chamado de **semi-espaco superior** e diremos que seus pontos estão acima de  $H$ .

Traçando retas paralelas a  $r$  (e perpendiculares a  $H$ ), as interseções dessas retas com o poliedro só podem ser 1 ou 2 pontos, pois o poliedro é convexo. Olhando apenas as retas que intersectam o poliedro, a interseção dessas retas com o plano  $H$  formam um polígono convexo (veja a Figura 3.13).

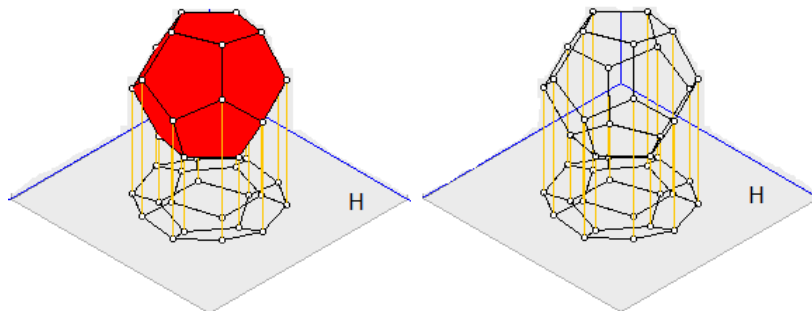


Figura 3.13:

Para melhor ilustrar o nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semi-espaco superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto  $X$  do semi-espaco superior corresponde um ponto  $X'$  em  $H$ , chamado **sombra** de  $X$ . A sombra de qualquer conjunto  $C$ , contido no semi-espaco superior, é por definição, o conjunto  $C'$ , contido em  $H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $C$ .

Assim consideremos a sombra  $P'$  do poliedro  $P$ . A sombra  $P'$  tem como contorno um polígono convexo  $K'$ , sombra de uma poligonal fechada  $K$  formada por arestas de  $P$ . Como os raios não são paralelos a nenhuma face e  $P$  é convexo, então cada ponto de  $K'$  é sombra de um único ponto de  $P$ . A poligonal  $K$  é chamada de **contorno aparente** do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$  é sombra de exatamente dois pontos de  $P$ . Dados dois pontos de  $P$  que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de  $H$ ) chamaremos de **ponto iluminado** e o mais baixo (menos distante de  $H$ ) será chamado de **ponto sombrio**. Observe que a soma dos ângulos internos de uma face de  $P$  é a mesma

soma dos ângulos internos da sombra dessa face, pois como a face não é paralela aos raios, ou seja, a  $r$ , a sombra será um polígono convexo com o mesmo número de arestas da face (veja a Figura 3.13).

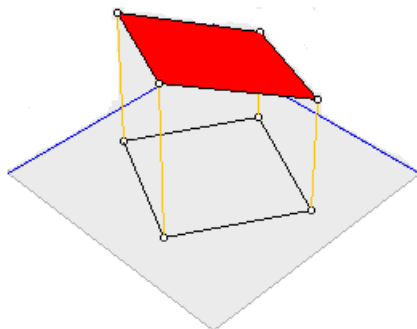


Figura 3.14: A soma dos ângulos internos é preservada

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $K$ . Então  $V = V_0 + V_1 + V_2$ . Notemos ainda que  $V_0$  é o número de vértices da poligonal  $K'$ , contorno de  $P'$ .

Consideremos então a sombra das faces iluminadas. A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com  $V_0$  vértices em seu contorno e com isso temos que a soma dos ângulos internos desse polígono é  $(V_0 - 2) \cdot \pi$ . Temos ainda que o polígono tem  $V_1$  pontos interiores que são sombras dos vértices iluminados de  $P$ . Como em torno de cada um desses pontos interiores forma-se um ângulo de  $2\pi$ , temos que a soma de todos os ângulos dessa figura é  $S_1 = 2 \cdot \pi \cdot V_1 + \pi \cdot (V_0 - 2)$ .

Agora, olhando a sombra das faces sombrias temos, usando o mesmo argumento anterior, que a soma de todos os ângulos dessa figura é  $S_2 = 2 \cdot \pi \cdot V_2 + \pi \cdot (V_0 - 2)$ .

Somando  $S_1$  com  $S_2$  temos a soma  $S$  dos ângulos do poliedro  $P$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \pi \cdot V_1 + \pi \cdot (V_0 - 2) + 2 \cdot \pi \cdot V_2 + \pi \cdot (V_0 - 2) \\
 S &= 2 \cdot \pi(V_1 + V_2) + 2 \cdot \pi(V_0 - 2) \\
 S &= 2 \cdot \pi(V_0 + V_1 + V_2 - 2) \\
 S &= 2 \cdot \pi(V - 2)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

De (3.1) temos que  $S = (2 \cdot A - 2 \cdot F) \cdot \pi$  e igualando a (3.2), temos

$$2 \cdot \pi(V - 2) = (2 \cdot A - 2 \cdot F) \cdot \pi \implies V - 2 = A - F.$$

Portanto, para todo poliedro convexo vale a relação  $V - A + F = 2$ .

□

### 3.4.1 O Teorema de Euler e os poliedros convexos regulares

**Definição 3.6.** Um poliedro convexo é **regular** quando todas as faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Segundo Boyer [7] e Eves [11], os poliedros convexos regulares são estudados desde a antiguidade. É devido aos pitagóricos o descobrimento do tetraedro, do cubo e do dodecaedro. O octaedro e o icosaedro foram descobertos por Teatetus.

Os gregos antigos associavam esses cinco poliedros aos elementos da natureza: o tetraedro era associado ao fogo, o cubo a terra, o octaedro ao ar, o icosaedro a água e o dodecaedro era associado ao Universo.

O filósofo grego Platão (427-347 a.C.) escreveu um texto, o Timaeus, sobre os poliedros convexos regulares. Por isso esses poliedros também ficaram conhecidos como sólidos de Platão.

No livro Os Elementos de Euclides há uma demonstração de que existem apenas cinco poliedros convexos regulares. Usaremos o Teorema de Euler para verificar esse resultado.

**Teorema 3.2.** *Existem apenas cinco poliedros regulares convexo não planos.*

*Demonstração.* Dado um poliedro convexo regular  $P$ , seja  $V$  o número de vértices,  $A$  o número de arestas,  $F$  o número de faces,  $n$  o número de lados de cada face e  $m$  o número de arestas que concorrem em cada vértice de  $P$ .

Pelo fato de as faces de  $P$  serem todas iguais e em cada vértice concorrem o mesmo número de arestas, por  $P$  ser regular, e pelas relações vistas na Seção 3.3, temos,

$$2 \cdot A = n \cdot F \implies A = \frac{n \cdot F}{2}$$

e

$$2 \cdot A = m \cdot V \implies V = \frac{n \cdot F}{m}.$$

Do Teorema de Euler, temos  $V - A + F = 2$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot F}{m} - \frac{n \cdot F}{2} + F &= 2 \\ 2 \cdot n \cdot F - m \cdot n \cdot F + 2 \cdot m \cdot F &= 4 \cdot m \\ F &= \frac{4 \cdot m}{2 \cdot n - m \cdot n + 2 \cdot m} \end{aligned}$$

Como  $F > 0$ , devemos ter

$$2 \cdot n - m \cdot n + 2 \cdot m > 0 \implies 2 \cdot n > m \cdot n - 2 \cdot m \implies \frac{2 \cdot n}{n - 2} > m.$$

Como  $m \geq 3$ , temos

$$\frac{2 \cdot n}{n - 2} > m \geq 3 \implies \frac{2 \cdot n}{n - 2} > 3$$

$$2 \cdot n > 3 \cdot n - 6 \implies n < 6.$$

Como  $n$  é o número de lados de uma face, temos  $n \geq 3$  e assim  $3 \leq n < 6$ . Deste modo, temos três possibilidades para  $n$ :  $n = 3$ ,  $n = 4$  ou  $n = 5$ .

Vamos analisar caso a caso.

1. Para  $n = 3$ :

$$F = \frac{4 \cdot m}{6 - 3 \cdot m + 2 \cdot m} = \frac{4 \cdot m}{6 - m}.$$

Como  $m \geq 3$ , temos:

(a) Para  $m = 3$ :

$$F = \frac{12}{3} = 4.$$

Assim, temos um poliedro regular com quatro faces, o tetraedro regular.

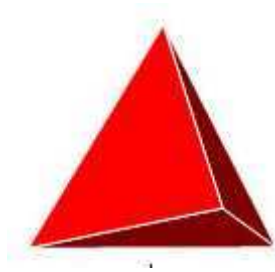


Figura 3.15: Tetraedro regular

(b) Para  $m = 4$ :

$$F = \frac{16}{2} = 8$$

Assim, temos um poliedro regular com oito faces, o octaedro regular.



Figura 3.16: Octaedro regular

(c) Para  $m = 5$ :

$$F = \frac{20}{1} = 20$$

Assim, temos um poliedro regular com vinte faces, o icosaedro.



Figura 3.17: Icosaedro regular

2. Para  $n = 4$ :

$$F = \frac{2 \cdot m}{4 - m}$$

Como  $m \geq 3$  e  $F > 0$ , temos  $m = 3$  e  $F = 6$ .

Assim, temos um poliedro regular de seis faces, o cubo.



Figura 3.18: Cubo

3. Para  $n = 5$ :

$$F = \frac{4 \cdot m}{10 - 3 \cdot m}$$

Como  $m \geq 3$  e  $F > 0$ , temos  $m = 3$  e  $F = 12$ .

Assim, temos um poliedro regular de 12 faces, o dodecaedro regular.



Figura 3.19: Dodecaedro

Como esgotamos as possibilidades podemos concluir que só existem cinco poliedros convexos regulares.

□

### 3.4.2 O Teorema de Euler no plano

Observe o polígono da Figura 3.20.

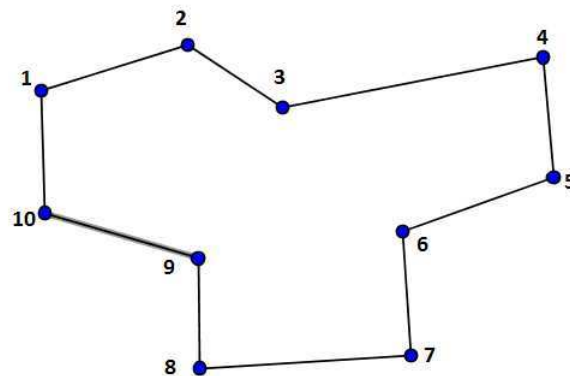


Figura 3.20:

O polígono tem o número de vértices igual ao número de arestas (lados) e uma região limitada pelo polígono, a face, e outra ilimitada. Dessa forma temos  $V - A + F = 2$ , onde consideramos a região ilimitada como uma face. Esse fato não é exclusividade desse polígono.

Todo polígono tem o número de vértices igual ao número de arestas e determina duas faces, uma limitada e uma ilimitada. Assim para todo polígono vale a relação  $V - A + F = 2$ .

Ao acrescentarmos um novo polígono a um polígono já existente, por justaposição, podemos fazer isso juntando dois polígonos por um vértice ou por arestas e vértices. Suponha que ao juntarmos dois polígonos, isso seja feito encostando  $p$  arestas e  $r$  vértices.

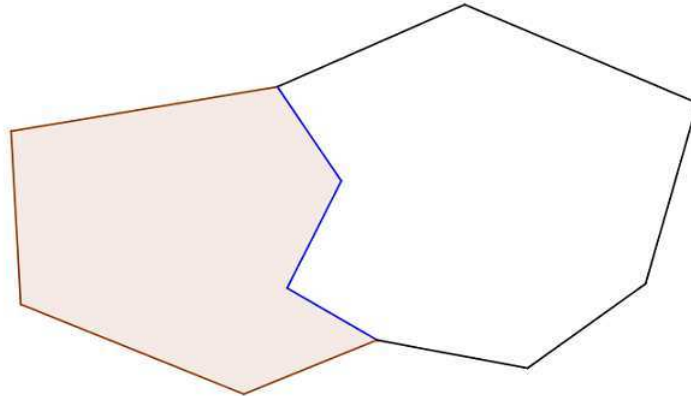


Figura 3.21:

Para o primeiro polígono a relação  $V - A + F = 2$  é válida. Se o segundo polígono tem  $V'$  vértices,  $A'$  arestas e  $F'$  faces, a figura formada pela justaposição dos dois terá  $V + (V' - r)$  vértices,  $A + (A' - p)$  arestas e  $F + 1$  faces.

Observe que no polígono que será acrescentado temos  $V' = A'$  e que uma poligonal aberta sempre tem o número de arestas igual ao número de vértices menos 1. Como a interseção entre os polígonos é uma poligonal aberta, temos  $p = r - 1$  e assim

$$\begin{aligned} V + (V' - r) - (A + A' - p) + F + 1 &= V + V' - r - (A + V' - r + 1) + F + 1 \\ V + (V' - r) - (A + A' - p) + F + 1 &= V - A + F \end{aligned}$$

Assim temos que o número  $V - A + F$  não se altera pelo processo de acrescentar um novo polígono a um já existente por justaposição. Dessa forma, em uma figura formada por justaposição de polígonos ainda vale o Teorema de Euler,  $V - A + F = 2$ .

Se imaginarmos os polígonos com arestas como linhas que não são necessariamente segmentos de retas, o número  $V - A + F$  ainda será o mesmo.

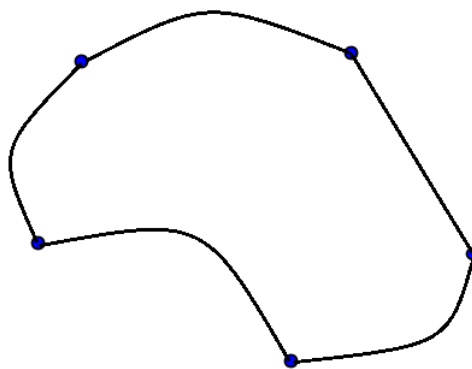


Figura 3.22:

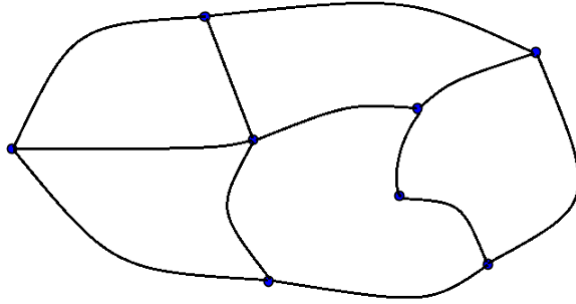


Figura 3.23:

O Teorema de Euler é válido, por exemplo, no mapa da América do Sul, onde os países são as faces e as fronteiras são as arestas.

## Exercícios

**Questão 1. (PUC-MG)** Seja  $P$  poliedro convexo que tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares?

**Questão 2. (Fatec-SP)** Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Qual o número de vértices desse poliedro?

**Questão 3.** Existem 7 lagos na Terra dos Lagos. Eles estão ligados por 10 canais de modo que seja possível usá-los para nadar de qualquer um dos lagos para qualquer outro. Quantas ilhas existem na Terra do Lagos?

**Questão 4.** Vinte pontos estão marcados dentro de um quadrado. Eles estão conectados entre si por segmentos que não se intersectam e estão conectados com os vértices do quadrado de tal modo que o quadrado fica dividido em triângulos. Quantos triângulos temos?

# Considerações finais

Neste trabalho abordamos o Teorema de Euler para poliedros, expondo fatos históricos, algumas de suas demonstrações, a relação do Teorema de Euler com a característica de Euler-Poincaré e algumas aplicações deste resultado.

Para um estudo mais aprofundado sobre o tema, recomenda-se fazer um estudo de Topologia e para isso indicamos as referências [18] e [26].

Apresentação de um material voltado para o Ensino Médio, onde mostramos uma demonstração que usa apenas matemática no nível do Matemática básica e fizemos um apanhado histórico sobre Euler e este teorema. O intuito deste material é servir de referência para o ensino do teorema de Euler no Ensino Médio, sem evitar sua demonstração, e ao mesmo tempo incentivar o estudo do mesmo.

Com a minha experiência como professor de Ensino Médio, sei que nem sempre é possível deter-se no Teorema de Euler nas aulas ministradas. Isso ocorre por vários motivos, como cronograma extenso, número de aulas reduzidos, nível baixo de aprendizado dos alunos que chegam ao Ensino Médio e muitos outros fatores que podem influenciar negativamente. No entanto, o professor deve saber distinguir entre turmas e alunos que podem ou não avançar um pouco mais, sem deixar de motivar os estudantes e aguçar a sua curiosidade para o estudo de temas não previsto no currículo. Neste aspecto, para o leitor interessado, incluímos nesta dissertação várias referências adicionais do teorema e suas aplicações.

# Apêndice 1

Neste apêndice são apresentados algumas definições e resultados sobre produto interno e produto vetorial. As principais referências para este Apêndice são Carvalho [8] e Ryan [22].

## Produto interno e Produto vetorial

Para medir a distância entre dois objetos no espaço, podemos esticar uma corda de um objeto ao outro e olhar o comprimento do pedaço de corda, esticada, que vai de um objeto ao outro. Olhando para o espaço com coordenadas, podemos tomar retas fazendo o papel da corda e a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que vai de um ponto ao outro.

**Definição 3.7.** *O comprimento do segmento de reta determinado por dois pontos  $P = (x, y, z)$  e  $Q = (a, b, c)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  é*

$$|PQ| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Assim, dados dois pontos  $P = (x, y, z)$  e  $Q = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  a **distância** entre  $P$  e  $Q$  é

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

A distância de um ponto  $P = (x, y, z)$  à origem  $O = (0, 0, 0)$  é

$$\begin{aligned} d(P, O) &= |PO| = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2 + (0-z)^2} \\ d(P, O) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

e será representada apenas por  $|P| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $\mathbb{R}^3$ , precisamos determinar o ângulo formado pelos segmentos euclidianos  $OP$  e  $OQ$  e precisaremos encontrar um ponto  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  de modo que o segmento euclidiano  $OT$  seja ortogonal aos segmentos  $OP$  e  $OQ$  ao mesmo tempo. Para isso definimos produto interno e produto vetorial além de estudar algumas de suas propriedades.

**Definição 3.8.** Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos no espaço e  $\theta$  o menor ângulo formado pelos segmentos euclidianos  $OP$  e  $OQ$ . O **produto interno** entre os pontos  $P$  e  $Q$  é o número real

$$\langle P, Q \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } P = (0, 0, 0) \text{ ou } Q = (0, 0, 0), \\ |P| \cdot |Q| \cdot \cos \theta, & \text{se } P \neq (0, 0, 0) \text{ e } Q \neq (0, 0, 0) \text{ (veja a Figura 3.24)}. \end{cases}$$

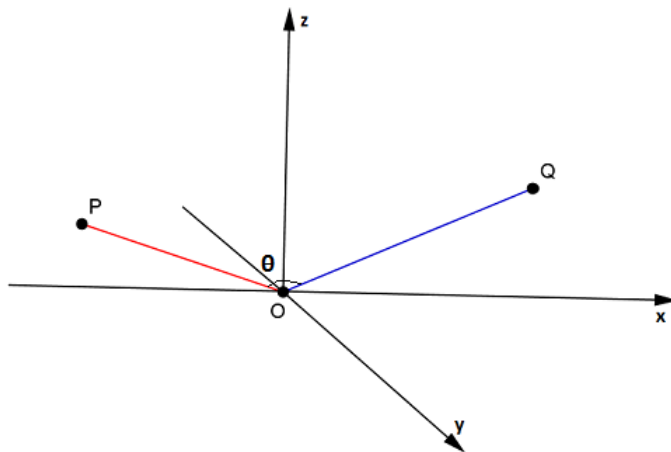


Figura 3.24: Produto interno entre  $P$  e  $Q$

Como  $\theta$  é o menor ângulo entre os dois segmentos, temos  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ . Se  $P$  e  $Q$  são pontos de  $\mathbb{R}^3$  tais que os segmentos  $OP$  e  $OQ$  formam um ângulo reto, então o produto interno entre  $P$  e  $Q$  é igual a zero, pois  $\cos 90^\circ = 0$ .

**Definição 3.9.** Dados  $P$  e  $Q$  em  $\mathbb{R}^3$ , **produto vetorial** de  $P = (x, y, z)$  por  $Q = (a, b, c)$  é dado por

$$P \times Q = (y \cdot c - z \cdot b, z \cdot a - x \cdot c, x \cdot b - y \cdot a).$$

Observe que o produto vetorial é um novo ponto de  $\mathbb{R}^3$  enquanto que o produto interno é um número real.

### Propriedades de produto interno e produto vetorial:

Para quaisquer pontos  $P, Q, R$  e  $T$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  e  $\lambda$  real, valem as seguintes propriedades:

1.  $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ .
2.  $\langle P \pm Q, R \rangle = \langle P, R \rangle \pm \langle Q, R \rangle$ .
3.  $\langle P \times Q, P \rangle = \langle P \times Q, Q \rangle = 0$ , isto é, o segmento euclidiano  $O(P \times Q)$  é ortogonal ao segmento euclidiano  $OP$  e ao segmento euclidiano  $OQ$  (veja a Figura 3.25).

4.  $P \times Q = 0$  se, e somente se,  $P$  é múltiplo de  $Q$ , ou seja,  $P = \lambda Q$ .
5.  $P \times Q = -Q \times P$ .
6.  $\langle P \times Q, R \rangle = \langle P, Q \times R \rangle$ .
7.  $(P \times Q) \times R = (\langle P, R \rangle) \cdot Q - (\langle Q, R \rangle) \cdot P$ .
8.  $\langle P \times Q, R \times T \rangle = \langle P, R \rangle \cdot \langle Q, T \rangle - \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, T \rangle$ .
9. Se  $P$  e  $Q$  são unitários, então  $|P \times Q| = 1 - (\langle P, Q \rangle)^2$ .

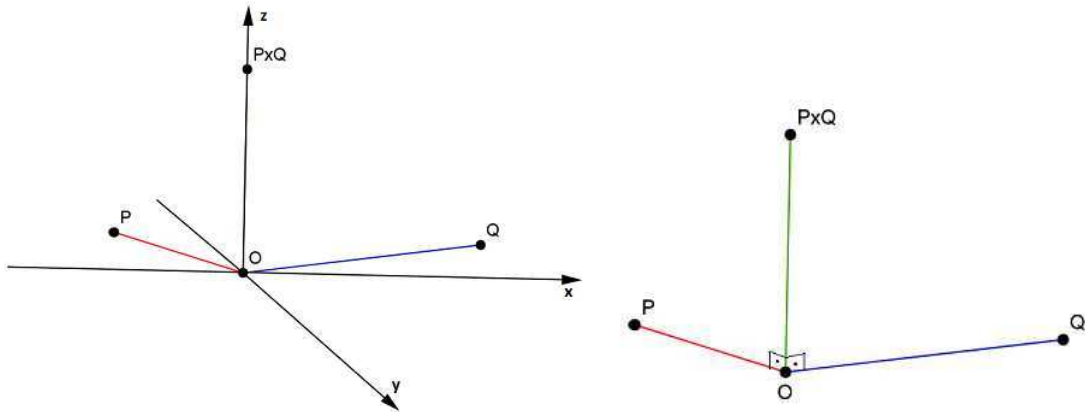


Figura 3.25: Produto vetorial de  $P$  por  $Q$

Demonstraremos apenas as Propriedades 8 e 9.

*Demonstração da Propriedade 8.* Sejam  $P = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $Q = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $R = (w_1, w_2, w_3)$  e  $T = (t_1, t_2, t_3)$  pontos de  $\mathbb{R}^3$ . Temos:

$$\begin{aligned} P \times Q &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\ R \times T &= (w_2t_3 - w_1t_2, w_1t_1 - w_1t_3, w_1t_2 - w_2t_1). \end{aligned}$$

Assim, pela definição de produto interno,

$$\begin{aligned} \langle P \times Q, R \times T \rangle &= (u_2v_3 - u_3v_2)(w_2t_3 - w_3t_2) + (u_3v_1 - u_1v_3)(w_3t_1 - w_1t_3) \\ &\quad + (u_1v_2 - u_2v_1)(w_1t_2 - w_2t_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P \times Q, R \times T \rangle &= (u_2v_3w_2t_3 - u_2v_3w_3t_2 - u_3v_3w_2t_3 + u_3v_2w_3t_2) \\ &\quad + (u_3v_1w_3t_1 - u_3v_1w_1t_3 - u_1v_3w_3t_1 + u_1v_3w_1t_3) \\ &\quad + (u_1v_2w_1t_2 - u_1v_2w_2t_1 - u_2v_1w_1t_2 + u_2v_1w_2t_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P \times Q, R \times T \rangle &= (u_1v_2w_1t_2 + u_2v_1w_2t_1 + u_2v_3w_2t_3 + u_3v_2w_3t_2) \\ &\quad + (u_3v_1w_3t_1 + u_1v_3w_1t_3) - (u_1v_2w_2t_1 + u_2v_1w_1t_2 \\ &\quad + u_2v_3w_3t_2 + u_3v_3w_2t_2 + u_3v_1w_1t_3 + u_1v_3w_3t_1). \end{aligned}$$

Agora vamos calcular  $\langle P, R \rangle \cdot \langle Q, T \rangle - \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, T \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle P, R \rangle \cdot \langle Q, T \rangle &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) \cdot (v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3) \\ &= u_1 w_1 v_1 t_1 + u_1 w_1 v_2 t_2 + u_1 w_1 v_3 t_3 + u_2 w_2 v_1 t_1 + u_2 w_2 v_2 t_2 \\ &\quad + u_2 w_2 v_3 t_3 + u_3 w_3 v_1 t_1 + u_3 w_3 v_2 t_2 + u_3 w_3 v_3 t_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, T \rangle &= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \cdot (u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3) \\ &= v_1 w_1 u_1 t_1 + v_1 w_1 u_2 t_2 + v_1 w_1 u_3 t_3 + v_2 w_2 u_1 t_1 + v_2 w_2 u_2 t_2 \\ &\quad + v_2 w_2 u_3 t_3 + v_3 w_3 u_1 t_1 + v_3 w_3 u_2 t_2 + v_3 w_3 u_3 t_3. \end{aligned}$$

Observe que  $v_1 w_1 t_1$ ,  $v_2 w_2 u_2 t_2$ ,  $v_3 w_3 u_3 t_3$  é comum a  $\langle P, R \rangle \cdot \langle Q, T \rangle$  e  $\langle Q, R \rangle \cdot \langle P, T \rangle$ . Assim subtraindo e reagrupando, temos

$$\begin{aligned} \langle P, R \rangle \cdot \langle Q, T \rangle - \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, T \rangle &= (u_1 v_2 w_1 t_2 + u_2 v_1 w_2 t_1 + u_2 v_3 w_2 t_3 \\ &\quad + u_3 v_2 w_3 t_2 + u_3 v_1 w_3 t_1 + u_1 v_3 w_1 t_3) - (u_1 v_2 w_2 t_1 + u_2 v_1 w_1 t_2 + u_2 v_3 w_3 t_2 \\ &\quad + u_3 v_3 w_2 t_2 + u_3 v_1 w_1 t_3 + u_1 v_3 w_3 t_1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle P \times Q, R \times T \rangle = \langle P, R \rangle \cdot \langle Q, T \rangle - \langle Q, R \rangle \cdot \langle P, T \rangle.$$

□

*Demonstração da Propriedade 9.* Observe que  $|P \times Q|^2 = \langle P \times Q, P \times Q \rangle$  e  $\langle P, P \rangle = \langle Q, Q \rangle = 1$ . Assim, pela Propriedade 8,

$$\begin{aligned} |P \times Q|^2 &= \langle P \times Q, P \times Q \rangle \\ &= \langle P, P \rangle \cdot \langle Q, Q \rangle - \langle Q, P \rangle \cdot \langle P, Q \rangle \\ &= 1 - (\langle P, Q \rangle)^2. \end{aligned}$$

□

## Apêndice 2

A partir dos estudos de Poincaré sobre o Teorema de Euler, houve uma generalização dos resultados usando o número  $V - A + F$  e esse número passou a se chamar **característica de Euler-Poincaré**. Neste apêndice apresentamos uma generalização da característica de Euler-Poincaré para poliedros de dimensão  $n$ .

### Poliedros de dimensão $n$ e a característica de Euler-Poincaré

Segundo Lima [15], Poincaré generalizou o Teorema de Euler para poliedros em qualquer dimensão. Para que possamos ter uma noção do que foi feito por Poincaré, vamos definir alguns objetos matemáticos em  $\mathbb{R}^m$ . Utilizamos aqui algumas noções básicas de Álgebra Linear, para as quais indicamos Carvalho [8] como referência.

**Definição 3.10.** *Sejam  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ , com  $m > n$ . Um **simplexo**  $s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  é o menor subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  que contém os pontos (vértices)  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .*

Um **simplexo de dimensão  $n$**  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$  ( $m > n$ ) é determinado por  $n + 1$  vértices (pontos)  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$  tais que os vetores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0$  sejam linearmente independentes. Assim, um simplexo de dimensão zero é um ponto, de dimensão um é um segmento de reta, de dimensão dois é um triângulo e de dimensão três é um tetraedro.

**Definição 3.11.** *Uma **face** de um simplexo  $s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  é qualquer simplexo  $t = [a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$  que tenha por vértices alguns dos vértices de  $s$ .*

As faces de dimensão zero de  $s$  são os vértices  $[a_0], [a_1], \dots, [a_n]$ , as faces de dimensão um são os segmentos  $[a_i, a_j]$ ,  $i \neq j$ , etc.

**Definição 3.12.** *Um **poliedro de dimensão  $n$**  é a reunião de um número finito de simplexos de dimensão menor ou igual a  $n$  (as faces) de tal modo que dois simplexos diferentes tem interseção vazia ou intersectam-se ao longo de um simplexo de dimensão inferior.*

**Observação 3.2.** Um poliedro de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^3$ , de acordo com a Definição 3.12, é uma coleção finita de pontos, segmentos de retas e triângulos, onde a interseção entre duas faces (pontos, segmentos de reta e triângulos) é uma face de dimensão inferior comum as

duas faces ou é vazia. Assim a interseção entre duas faces distintas de um poliedro de dimensão 2 é um ponto, ou um segmento de reta ou é vazia.

Na Definição 2.14, as faces de um poliedro são polígonos convexos, assim as faces de um poliedro não são necessariamente simplexos. Mas se em cada face (polígono convexo) da Definição 2.14, através de um de seus vértices, traçarmos todas as diagonais partindo desse vértice teremos a face dividida em triângulos, que são simplexos. Dessa forma a Definição 2.14 passa a ser um caso particular da Definição 3.12 (veja a Figura 3.26).

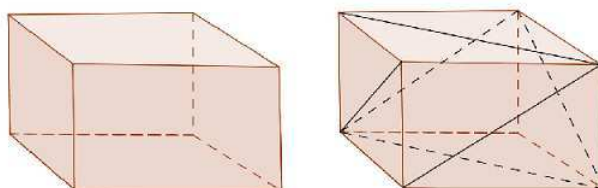


Figura 3.26: Paralelepípedo com faces retangulares e paralelepípedo com faces triangulares

**Definição 3.13.** Dado um poliedro  $P$  de dimensão  $n$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , seja  $\alpha_i$  o número de simplexos de dimensão  $i$  em  $P$ . O número

$$\chi(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n$$

chama-se a **característica de Euler-Poincaré** de  $P$ .

Em um poliedro  $P$  de dimensão 2 no  $\mathbb{R}^3$  os simplexos têm dimensão 0, 1, e 2, assim a característica de Euler-Poincaré é  $\chi(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ . Mas observe que  $\alpha_0$  é o número de vértices,  $\alpha_1$  é o número de arestas e  $\alpha_2$  é o número de faces do poliedro, assim  $\chi(P) = V - A + F$ .

Segundo Lima [15], Poincaré mostrou que se  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  são os números de Betti do poliedro  $P$  (A definição de número de Betti pode ser encontrada em Lima [15]), vale a igualdade

$$\chi(P) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots + (-1)^n \beta_n.$$

No entanto, Poincaré não mostrou que os número de Betti são invariantes através de homeomorfismos, isso foi feito por J.Alexander (1888-1971) em 1915. Com isso conclui-se que  $\chi(P)$  é um invariante topológico do poliedro  $P$ .

Na prática, o homeomorfismo entre  $A$  e  $B$  quer dizer que  $A$  pode ser deformado, sem ser “cortado”, apenas “amassando” e “esticando” até se transformar em  $B$ . Imagine um cubo feito de borracha bastante flexível (veja a Figura 3.27). Se “inflarmos” o cubo, então quando estiver muito esticado se transformará em uma esfera. Do mesmo modo, se “esvaziarmos” a esfera, então podemos obter novamente o cubo. Esse ato de inflar e esvaziar está fazendo o papel do homeomorfismo. Assim dizemos que a esfera é homeomorfa ao cubo.

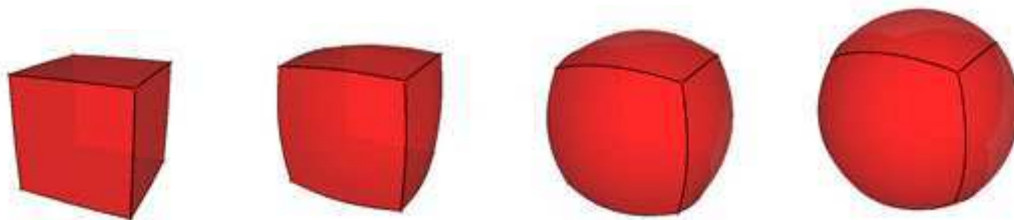


Figura 3.27: Cubo sendo deformado em uma esfera

Como o cubo tem  $V - A + F = 2$  e a esfera é homeomorfa ao cubo, então a esfera tem característica de Euler-Poincaré igual a 2.

Observe o poliedro da Figura 3.28. Esse poliedro é formado por uma pirâmide da qual foi retirada sua base quadrangular e, a partir de um ponto interior dessa pirâmide, foram criadas quatro novas faces cujas arestas são os segmentos obtidos unindo este ponto interior com os vértices do quadrilátero retirado. O poliedro assim formado não é convexo.

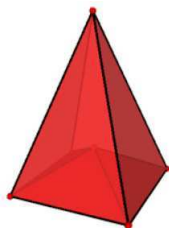


Figura 3.28: Poliedro não convexo

Se imaginarmos o mesmo processo de inflar que imaginamos para o cubo, também teremos o poliedro inflado igual a uma esfera.

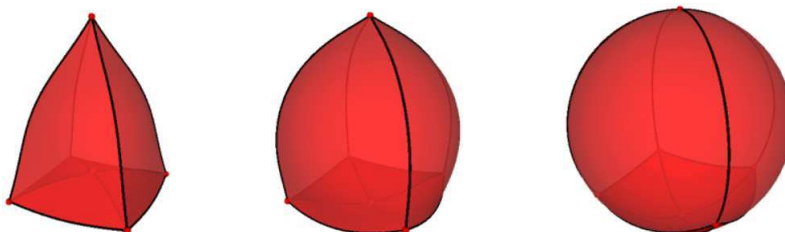


Figura 3.29: Poliedro não convexo sendo deformado em uma esfera

Assim, o poliedro da Figura 3.28 também é homeomorfo à esfera e segundo Poincaré também tem característica de Euler-Poincaré igual a 2. Contando os vértices, as arestas e as faces do poliedro da Figura 3.28, encontramos  $V = 6$ ,  $A = 12$  e  $F = 8$  o que mostra que  $V - A + F = 2$ .

Observe o poliedro da Figura 3.30.

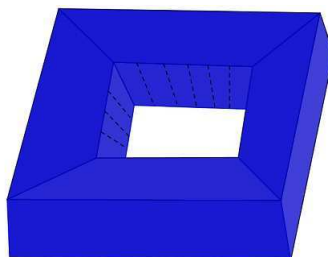


Figura 3.30: Poliedro homeomorfo ao toro

Agora imaginemos esse poliedro sendo inflado como foi feito com o cubo. Isso indica que esse poliedro não é homeomorfo à esfera, não é possível, através de transformações contínuas, sair desse poliedro e chegar à esfera.

Ao inflarmos o poliedro da Figura 3.30 ele se transformará em um objeto conhecido como **toro** (veja a Figura 3.31).



Figura 3.31: Toro

Isso indica que o poliedro da Figura 3.30 é homeomorfo ao toro. Como o poliedro da Figura 3.30 tem  $V = 16$  vértices,  $A = 32$  arestas e  $F = 16$  faces, a característica de Euler-Poincaré desse poliedro é  $V - A + F = 0$ . Pelo fato do poliedro da Figura 3.30 e o toro serem homeomorfos, podemos concluir que o toro tem característica de Euler-Poincaré igual a zero.

Um caso interessante relacionado ao toro sólido (uma rosquinha), de acordo com Moreno [19], é que uma xícara de café tem a mesma característica de Euler-Poincaré que uma rosquinha. Imaginando a xícara feita de massa flexível, é possível transformar a xícara, apenas amassando, esticando e dobrando, em um toro sólido (veja a Figura 3.32). Isso indica que a xícara é homeomorfa ao toro e conseqüentemente à rosquinha. Assim, a xícara e a rosquinha possuem a mesma característica de Euler-Poincaré igual. Do ponto de vista topológico uma xícara não se distingue de uma rosquinha.

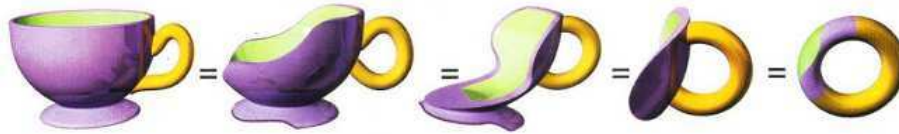


Figura 3.32: Xícara sendo deformada em um toro

Vimos poliedros com característica de Euler-Poincaré igual a 2 e igual a 0. A pergunta que fica é: dado um número inteiro qualquer, é possível encontrar um poliedro que tenha a característica de Euler-Poincaré igual a esse número? Segundo Lima [16] a resposta é positiva, isto é, para qualquer número inteiro  $n$  existe um poliedro com característica de Euler-Poincaré igual a  $n$ .

O que fizemos nesta seção foi tentar dar uma ideia do que é a característica de Euler-Poincaré de um objeto (superfície). Um estudo aprofundado desse assunto envolve uma matemática bem mais avançada do que foi proposto neste trabalho. O leitor interessado pode se aprofundar neste assunto a partir do estudo das referências [18] e [26].

# Bibliografia

- [1] S.ALVES, **A Geometria do Globo Terrestre**, 2009. Disponível em: [http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/apostilas\\_pic2010/Apostila6.pdf](http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/apostilas_pic2010/Apostila6.pdf).
- [2] D.X.BARBIERI, **Avaliação de Processo de Análise da Estrutura Trabecular do Corpo Vertebral como Elemento Preditor de Risco de Fratura**. Tese de Doutorado, Instituto de Geriatria e Gerontologia, PUC-RS, 2010.
- [3] J.L.M.BARBOSA, **Geometria Euclidiana Plana**. Editora SBM, 2012.
- [4] BBC, **História da Matemática, Episódio III, As Fronteiras do Espaço**. Disponível em: [http://www.mayaraclara.mat.br/videos/doc/story\\_of\\_maths/story\\_of\\_maths.html](http://www.mayaraclara.mat.br/videos/doc/story_of_maths/story_of_maths.html).
- [5] P.O.BOAVENTURA, **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. Editora Blucher, 2011.
- [6] P.O.BOAVENTURA, S.JURKIEWICZ, **Grafos: Introdução e Prática**. Editora Blucher, 2009.
- [7] C.B.BOYER, **História da Matemática**. Editora Edgar Blucher LTDA, 1994.
- [8] J.P. DE CARVALHO, **Álgebra Linear - Introdução**. Editora Universidade de Brasília, 1977.
- [9] J.R.P.COÊLHO, **Uma Solução Eficiente para Subdivisão de Malhas Triangulares**. Dissertação de Mestrado, PUC-RIO, 2013.
- [10] O.DOLCE, J.N.POMPEO, **Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica**. Editora Atual, 1993.
- [11] H.EVES, **Introdução à História da Matemática**. Editora UNICAMP, 2004.
- [12] D.FOMIN, S.GENKIN, I. ITENBERG, **Círculos Matemáticos, A Experiência Russa**. Editora Impa, 2010.
- [13] J.D.GODINO, F.RUIZ, **Geometría y su didáctica para maestros**. Universidade de Granada. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.

- [14] C.R.M.JUNIOR, **Geração de Malhas para Domínios 2,5 Dimensionais Usando Triangulação de Delaunay Restrita**. Dissertação de Mestrado, UFSC, 2001.
- [15] E.L.LIMA, **A Característica de Euler-Poincaré**. Revista Matemática Universitária, n°1, p.47-62, 1985. Disponível em: <http://www.matematicauniversitaria.ime.usp.br/artigos.php>.
- [16] E.L.LIMA, **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Editora SBM, 1991.
- [17] E.L.LIMA, P.C.CARVALHO, E.WAGNER, A.C.MORGADO, **A Matemática do Ensino Médio, volume 2**. Editora SBM, 2004.
- [18] W.S.MASSEY, **Basic Course in Algebraic Topology**. Editora Springer, 1991.
- [19] D.G.MORENO, **Historia de la Topología**. Universidad Autónoma de Madrid. Disponível em: [http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/HISTORIADELATOPOLOGIA.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/HISTORIADELATOPOLOGIA.pdf).
- [20] M.J.MOUTELA, **Malhas de Polígonos para Simulação de Tecidos Baseadas em Regiões Afins**. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [21] D.C.OLIVEIRA, **Simplificação de Malhas Triangulares Baseada no Diagrama de Voronoi Intrínseco**. Dissertação de Mestrado, UFAL, 2011.
- [22] P.J.RYAN, **Euclidean and Non-Euclidean Geometry, an Analytic Approach**, Editora Cambridge University Press, 2006.
- [23] W.L.ROQUE, A.C.A.DE SOUZA, D.X.BARBIERI **Característica de Euler-Poincaré Aplicada para Identificar Baixa Densidade Óssea a Partir de Imagens Tomográficas de Vertébras**. Revista Brasileira de Reumatologia, Vol.49 n°2, SP, 2009.
- [24] J.C.V.SAMPAIO, **Uma Introdução à Topologia Geométrica, Passeios de Euler, Superfícies e o Teorema das Quatros Cores**. Editora EdUFSCar, 2008.
- [25] R.M.DE SIQUEIRA, **História, Tradição e Pesquisa sob Disputa: O Caso dos Poliedros na Geometria**. Revista Brasileira de História da Matemática, Vol.9 n°17, p.53-63, 2009.
- [26] M.M.STADLER, **Fundamentos de Topología**. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Disponível em: <http://www.ehu.es/~mtwmastm/FT1011.pdf>.
- [27] L.F.SUAREZ, **O que é a Característica de Euler?**. Gazeta da Matemática. Disponível em: <http://www.gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=251>.