UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

RENATO NOGUEIRA DE FREITAS JÚNIOR

TOPOLOGIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021

RENATO NOGUEIRA DE FREITAS JÚNIOR

TOPOLOGIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Alverenga Rocha

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

F866t
2021

Freitas Júnior, Renato Nogueira de, 1991-
Topologia na educação básica / Renato Nogueira de Freitas Júnior. – Florestal, MG, 2021.
55 f.: il. (algumas color.).

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2021.
Referências bibliográficas: f. 55.

1. Topologia. 2. Jogos no ensino de matemática. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Matemática recreativa. I. Rocha, Alexandre Alvarenga, 1984-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22. ed. 510

Bibliotecário(a) responsável: Elaine da Cunha CRB6/2844

RENATO NOGUEIRA DE FREITAS JÚNIOR

TOPOLOGIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 12 de novembro de 2021.

Assentimento:

Renato Nogueira

Renato Nogueira de Freitas Júnior
Autor

Alexandre A. Rocha

Alexandre Alverenga Rocha
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha tia Rosângela de Freitas e aos meus pais Renato Nogueira e Celeidi Aparecida!

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer à minha tia Rosa que, infelizmente não está entre nós para ver onde cheguei. Por isto, estendo o agradecimento a seus filhos Tatiana, Rustan, Juliana e Netinho, que vocês sejam luz na vida das pessoas como ela foi na minha.

Agradeço também a meus pais, Renato Nogueira e Celeidi Aparecida, por me ensinarem o amor incondicional, que sempre me fez ir para frente e acreditar em um mundo melhor.

À minhas irmãs Renata, Fernanda e Stephanie, pela cumplicidade e irmandade e por me mostrarem que com minha fámilia eu tenho tudo.

Agradeço a minha companheira Carina Roriz, pelo apoio e principalmente inspiração. Minha admiração por você me fez ser um ser humano melhor.

Aos meus amigos Bruno Pinheiro e Thiago Alonso por toda amizade e parceria durante toda minha vida.

A todos os meus colegas do PROFMAT-2019 e em especial para Fernanda França, pela amizade, caronas, parceria e por ter topado esse desafio de tentar um novo título em outra cidade. E para Laís Nunes, pela amizade, parceria e ajuda durante todo o processo.

Por fim, para meus sobrinhos e afilhados, em especial para Beatriz Araújo, você é a luz da minha vida e tudo que eu faço é para ser uma pessoa melhor para você.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

JÚNIOR, Renato Nogueira de Freitas, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2021. **Topologia na Educação Básica**. Orientador: Alexandre Alverenga Rocha.

Na Educação Básica a geometria Euclidiana é o foco currículo, entretanto existem várias outras geometrias e contrapontos à própia Euclidiana que podem ser apresentadas e são aplicadas em diversas áreas do conhecimento da educação básica. Uma área interessante é a Topologia, que está presente em áreas como rede de computadores, biologia molecular, química, dentre outras. Este trabalho irá realizar uma breve apresentação sobre o tema e como aplicá-lo por meio de atividades lúdicas para alunos da Educação Básica. Será feita, no final, uma sequência didática de aplicação para o modelo remoto ou híbrido, levando em conta a pandemia de Covid-19.

Palavras-chave: Matemática. Ensino. Ciência. Topologia. Jogos Matemáticos.

Abstract

JÚNIOR, Renato Nogueira de Freitas, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2021. **Topology in elementary schol**. Adviser: Alexandre Alverenga Rocha.

In Primary Education Eclidian geometry is the focus of study curriculum , even though there are many other geometries and counterpoint of Euclidian geometry that can be presented and applied in several areas of knowledge. Topology is one of them and is present in areas such as computing networks, molecular biology, chemistry and others. This works presents briefly the topic and how to apply through activities for students in High school Education. It will be concluded with a didactic sequence for application of remote modelling or hybrid, taking into consideration global pandemics of COVID-19.

Keywords: Mathematics. Teaching. Science. Topology. Matematics games.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A Topologia é uma área da matemática diferente das usualmente trabalhadas na Educação Básica e um dos primeiros estudos nessa área começou com o suíço Leonard Euler, resolvendo o problema das pontes de Könisberg.

Neste trabalho será apresentado o problema citado, como Euler resolveu a situação e a sua generalização, criando a área da teoria de Grafos. Também serão apresentados algumas origens da área da topologia, como o própio termo, por exemplo.

O intuito final deste trabalho é apresentar atividades lúdicas que trabalhem com a Topologia, também serão feitas algumas definições matemáticas dessa área, sendo o foco principal as superfícies topológicas e como formá-las. Figuras famosas como a faixa de Moebius, Toro e Garrafa de Klein serão estudadas topologicamente.

É importante dizer o motivo de aplicar este trabalho por atividades lúdicas e para isto, será feita uma análise da importância deste tipo de trabalho na educação básica, seja por um contexto histórico, seja pela própria documentação norteadora da educação básica no Brasil. Justificando então, o motivo para aplicar temas complexos como o deste trabalho através de atividades mais leves e atrativas.

Por fim, serão apresentadas atividades lúdicas sobre o tema e o processo de aplicação seguirá a sequência de como montá-las, aplicá-las e algumas sugestões didáticas úteis sobre o tema. Uma sequência didática será feita como sugestão da aplicação, esta foi feita como solução para o período de pandemia de Covid-19, considerando que as aulas presenciais foram substituídas por aulas virtuais e após algum tempo aulas híbidras foram adotadas.

2

Aspectos Históricos

Em 1735, o suíço Leonard Euler resolveu um famoso problema da época, conhecido como problema das pontes de Könisberg. Sua solução foi apresentada em um artigo chamado *Solution Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* [4]. Esse artigo tem duas traduções famosas, para o inglês, por Biggs, Lloyd e Wilson (p. 3-8) [1], e por Newman (p. 564-571) [7]. O problema era: A cidade de Könisberg é formada por dois rios, quatro divisões de terra e sete pontes, como na Figura 2.1. Seria possível passar por todas as pontes da cidade uma vez e não mais que isso?

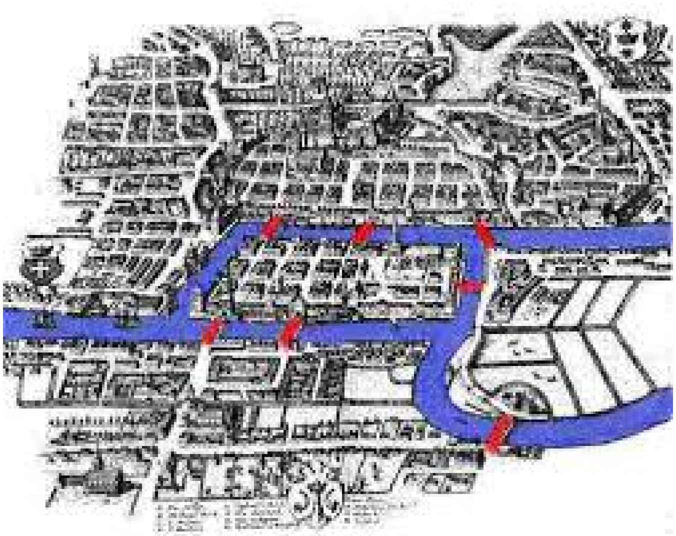


Figura 2.1: Problema das pontes de Könisberg

Para resolver este problema, Euler criou o que ele chamou de Geometria de Situação. Para ele, essa era uma geometria que não dependia de medidas, e assim ele explorou não só a solução deste caso, que ele resolveu logo no início do seu artigo, como generalizações de casos semelhantes, criando o que hoje conhecemos como Teoria de Grafos.

É muito comum ver como solução de Euler para o problema o grafo da Figura 2.2. Entretanto, Euler não criou, no seu artigo, este grafo como solução. A solução foi descritiva e suas generalizações também. Euler percebeu que a Geometria de Situação era uma nova maneira de analisar situações, saindo assim, da Geometria Euclidiana.

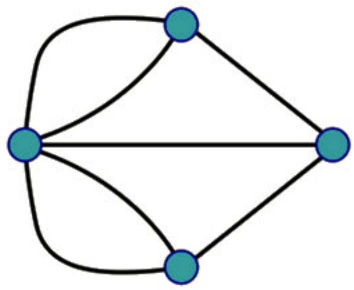


Figura 2.2: Grafo das pontes de Könisberg

Em sua solução, o suíço observou que não importava por quais pontes era feito o trajeto, e sim a região de origem e de chegada. Como pode ser visto na Figura 1, existem 4 regiões, que ele definiu como região central A e regiões externas B, C e D. O caminho de A para B seria definido por AB, o caminho de A para C por AC, não sendo importante por qual ponte foi feito este caminho, e assim sucessivamente. Por esta notação, ele percebeu que precisaria de 8 letras para determinar um caminho de 7 pontes. Antes de procurar uma solução para o problema, ele analisou um caso particular com duas regiões e percebeu que para um número de pontes ímpar, cada região deveria aparecer, no trajeto, a metade deste número acrescentado de 1, como por exemplo, em um caso de duas regiões com 3 pontes, cada região deveria aparecer 3 mais 1 dividido por dois, neste caso, duas vezes. Olhando para este caso, para a região A temos cinco pontes possíveis, logo, a região A deve aparecer 3 vezes e, seguindo este raciocínio, a região B deverá aparecer 2 vezes, a C 2 vezes e a D 2 vezes. Com essa conclusão, ele percebeu que não seria possível passar por todas as pontes apenas uma vez, solucionando a situação, pois precisaria de 9 letras pelas regiões, mas no início do problema ele concluiu que precisa de 8 letras para passar apenas uma vez em cada ponte.

Esta solução é uma tradução sem modernizar a notação e linguagem adotada por Euler. Sendo mais comum ver a solução com o conhecido grafo de Euler, no qual ele tem solução se, e somente se, todos os seus vértices são de grau par. Nesta situação podemos ver pelo grafo da **Figura 2.2** que o problema não tem solução.

O termo topologia surgiu vários anos depois no artigo *Vorstudien zur Topologie, Vandernhoeckund Ruprencht, GGottingen* [5], de Johann Benedict Listing (1848, p. 67). Acredita-se que *Listing* já usava o termo em suas correspondências há pelo menos 10 anos.

Nos anos seguintes, vários matemáticos exploraram e escreveram sobre essa área, tais como: Georg Cantor, Felix Hausdorff, August Möebius, entre outros. E foi Hausdorff que trabalhou com espaços topológicos conhecidos espaços de *Hausdorf*, e

Möebius, que criou a famosa faixa de *Moebius*, esta que é formada pela colagem de uma faixa com uma torção. Hoje, a topologia tem diversas aplicações em redes de computadores, biologia molecular, química, etc.

Outra aplicação da teoria de grafos é em redes de crimes para relacionar e organizar investigações como dito por Cunha [3] em seu trabalho em que ele aponta como ótima ferramenta para sair do método tradicional e ineficiente de investigações. A imagem seguinte apresenta a rede de grafos criminais federais no Brasil em 2017.

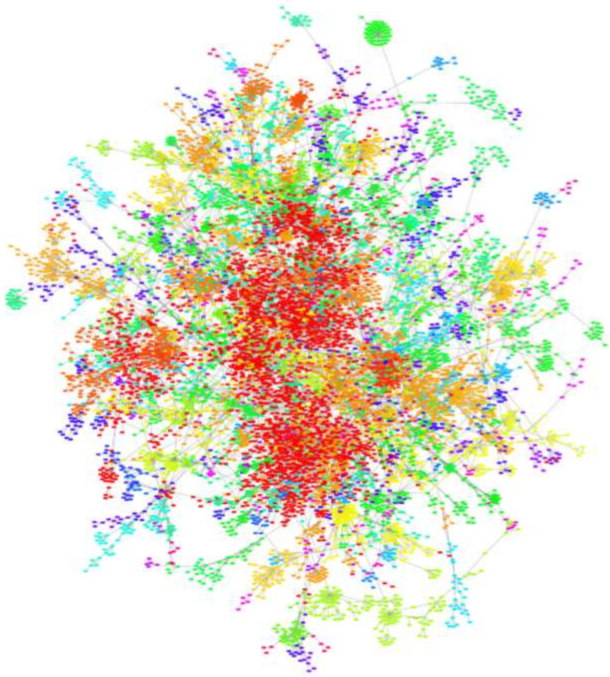


Figura 2.3: Rede de crimes federais no Brasil

3
Topologia

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições topológicas importantes. Vale ressaltar que a intenção do trabalho é apresentar a área para alunos da Educaçãom Básica, portanto é de se esperar que não se aplique diretamente nenhuma definição criteriosa. Entretanto é interessante que ela seja feita neste trabalho para correlacionar o tema com as atividades propostas.

3.1 Definições sobre conuntos

Dado um conjunto X, não vazio e $A \subset X$, vamos definir como:

1. $A^c = X - A$, sendo A^c o complementar de A em X.
2. $\mathfrak{P}(X)$ será a família de todos os subconjuntos de X.

3.2 Topologia e conjuntos abertos

Definição 3.1: Seja um conjunto X, chamamos de uma topologia sobre X uma família $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(X)$, tal que:

1. O conjunto X e o vazio pertencem a $\mathfrak{T}$, ou seja:

   $$X, \emptyset \in \mathfrak{T}$$

2. Seja $\{A_\alpha \in \mathfrak{T} / \alpha \in \Gamma\}$ uma família arbitrária, então a reunião dos membros dessa famílias devem pertencer a $\mathfrak{T}$, ou seja:

   $$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathfrak{T}$$

3. Sejam B_1,B_2, ...,$B_n \in \mathfrak{T}$ um número finito conjuntos da topologia, então a

interseção de todos esses conjuntos também pertence a topologia, ou seja:

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathfrak{T}$$

Dizemos que os conjuntos de $\mathfrak{T}$ são **abertos** de X.

E chamamos de espaço topológico o par $(X,\mathfrak{T})$.

Vamos ver agora alguns exemplos e definições de topologias simples.

Exemplo 3.2.1: Seja um conjunto X não vazio temos as seguintes topologias:

- Topologia indiscreta: $\mathfrak{T}_{ind} = \{X,\emptyset\}$, nelas os únicos subconjuntos abertos de X são $\emptyset$ e ele próprio.
- Topologia discreta: $\mathfrak{T}_{dis} = \mathfrak{P}(X)$, nela todos os subconjuntos de X são abertos.

  Obs: Se X tem mais de 1 elementos, então $\mathfrak{T}_{ind} \neq \mathfrak{T}_{dis}$

Exemplo 3.2.2: Seja um conjuntos $X = \{a, b, c\}$. Podemos ver que:

- $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ é um topologia em X.
- $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ não é uma topologia em X, pois $\{a\} \cup \{b\} \notin \mathfrak{T}_2$.

Exemplo 3.2.3: Seja $X = \mathbb{R}$ podemos definir a topologia **euclidiana** ou **usual** denotada por $\mathfrak{T}_{us}$ sendo ela:

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, A \subset \mathbb{R}\},$$

Sendo que $A \in \mathfrak{T}$ se, e somente se para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto (a,b) tal que:

$$x \in (a,b) \subset A$$

Neste caso podemos estender os casos em que $X = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}^3$, ..., $X = \mathbb{R}^n$.

3.3 Conjuntos Fechados

Podemos caracterizar uma topologia também por conjuntos fechados, sendo estes tipos de conjuntos duais aos abertos.

Definição 3.2: Seja $F \subset X$. F é um conjunto fechado em X se $F^c \in \mathfrak{T}$. Ou seja, um conjunto é fechado se, e somente se seu complementar é um conjunto aberto.

Teorema 3.3: Sejam $(X,\mathfrak{T})$ espaço topológico e $\mathfrak{F}$ a família de conjuntos fechados, então:

1. $X, \emptyset \in \mathfrak{F}$.
2. Sejam $F_1, F_2, ..., F_n$ conjuntos fechados em X, então:

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

   é fechado em X.

3. Sejam $F_\alpha \in \mathfrak{F}$, arbitrários tal que $\alpha \in \Gamma$, então:

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha \in \mathfrak{F}$$

Demonstração. Vamos demonstrar os tópicos 1, 2 e 3:

1. Neste caso por definição X e $\emptyset$ são fechados, pois seus complementares são abertos e assim pertencem a $\mathfrak{F}$.
2. Como $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i)^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i^c$ e podemos afirmar pela **Definição 3.1** que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i^c \in \mathfrak{T}$; logo, se seu complementar é aberto, então $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ é fechado em X.
3. Análogo ao caso anterior temos que $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha)^c = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha^c \in \mathfrak{T}$, então a união de fechados arbitrários é fechada.

□

Exemplo 3.3.1: Considere o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{us})$, então todo conjunto finito em $\mathbb{R}$ é fechado.
Todo conjunto unitário é fechado pois, seja $x \in \mathbb{R}$ sabemos que $\{x\}^c = (-\infty,x) \cup (x, +\infty)$, então $\{x\}^c$ é aberto e assim $\{x\}$ é fechado.

Agora vamos pegar um conjunto finito $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, sabemos que B é formado pela união de conjuntos unitários fechados, ou seja:

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\},$$

como visto pelo **Teorema 3.3** podemos falar que B é fechado.

Um conjunto pode ser aberto e fechado ao mesmo tempo, ou seja, essas propriedades são independentes. Podemos definir uma topologia em um espaço topológico da mesma maneira com conjuntos abertos ou fechados.

Bons exemplos de conjuntos abertos e fechados, ao mesmo tempo, são todos os subconjuntos de um conjunto X, se X tem a topologia discreta.

Definição 3.4: Sejam $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_2$ topologias sobre X. Se $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$, então dizemos que $\mathfrak{T}_2$ é mais fina que $\mathfrak{T}_1$.

Exemplo 3.3.2: Seja $X = \{a,b\}$ com as topologias $\mathfrak{T}_{ind}$ e $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, então $\mathfrak{T}_{ind} \subset \mathfrak{T}$ e portanto $\mathfrak{T}$ é mais fina que $\mathfrak{T}_{ind}$.

De fato, para qualquer topologia, temos que:

$$\mathfrak{T}_{ind} \subset \mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_{dis}$$

3.4 Bases

Sejam $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico e $\mathfrak{B}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$.

Definição 3.5: $\mathfrak{B}$ é uma *base* para $\mathfrak{T}$ se para todo $A \in \mathfrak{T}$ e $A \neq \emptyset$, temos que:

$$A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B.$$

Dizemos que $\mathfrak{B}$ gera a topologia $\mathfrak{T}$.

Definição 3.6: Os conjuntos $B \in \mathfrak{B}$ tais que $x \in B$ são chamados vizinhanças do ponto x.

Observações:

- Uma topologia é base de si própria.
- Bases diferentes podem gerar a mesma topologia
- **Fundamental:** Seja $X = \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, então:

  $$\mathfrak{B} = (a,b), \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b$$

  é uma base que gera a topologia euclidiana de $\mathbb{R}$

  Neste caso podemos ver que $\mathbb{R} = \bigcup_{a<b} (a,b)$. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um aberto em $\mathfrak{B}$ tal que x pertence a ele, como por exemplo $(x-1,x+1)$. Por fim, esse elemento x também pertence a interceção de dois abertos em $\mathfrak{B}$.

3.5 Sub-bases

Vamos considerar $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico e $\mathfrak{G}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{T}$.

Definição 3.7: $\mathfrak{G}$ é uma sub-base de $\mathfrak{T}$ se a coleção de interseções finitas de elementos de $\mathfrak{G}$ é uma base de $\mathfrak{T}$.

Proposição 3.8: Sejam X um conjunto não vazio e $\mathfrak{G}$ uma família de elementos de X tais que para todo $x \in X$ existe $A \in \mathfrak{G}$ tal que $x \in A$. Seja $\mathfrak{B}$ a coleção de interseções finitas de elementos de $\mathfrak{G}$. Então, a família $\mathfrak{T}$ formada por $\emptyset, X$ e as uniões arbitrárias de elementos de $\mathfrak{B}$ é uma topologia para X e é a menor topologia que contém $\mathfrak{G}$.

Demonstração. É fácil ver que $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$ e que toda união de elementos de $\mathfrak{T}$ percente a $\mathfrak{T}$. Vamos provar que qualquer interseção finita de $\mathfrak{T}$ pertence a $\mathfrak{T}$ também, ou seja, sejam $A, B \in \mathfrak{T}$, então $A \cap B \in \mathfrak{T}$:

O caso em que A ou B são vazios é trivial, então vamos considerá-los não vazios.

Sejam $A_\alpha, B_\beta \in \mathfrak{B}$, tais que:

$$A = \bigcup_\alpha A_\alpha, \quad B = \bigcup_\beta B_\beta,$$

logo:

$$A \cap B = \bigcup_{\alpha,\beta} (A_\alpha \cap B_\beta).$$

Podemos ver que A_α e B_β são interseções finitas de elementos de $\mathfrak{G}$, logo a interseção desses conjuntos também é finita, assim, $A \cap B \in \mathfrak{T}$.

Sabemos também que $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{T}$ e se $\mathfrak{T}'$ é outra topologia em X que contém $\mathfrak{G}$, então $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}'$. Assim, $\mathfrak{T}'$ deve conter as uniões arbitrárias de $\mathfrak{B}$, ou seja, $\mathfrak{T}$ é a menor topologia sobre X que contém $\mathfrak{G}$. □

3.6 Pontos de Conjuntos Notáveis

Definição 3.9: Sejam $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$.

1. Um ponto $x \in X$ é um **ponto interior** a A se existe U vizinhança de x tal que:

   $$x \in U \subset A$$

   Denotamos o conjunto de todos os pontos interiores de A de $Int(A)$.

2. Um ponto $x \in X$ é um **ponto exterior** a A se é interior a A^c.

   Denotamos o conjunto de todos os pontos exteriores a A de $Ext(A)$.

3. Um ponto $x \in X$ é um **ponto aderente** a A se para toda vizinhança U de x temos:

$$A \cap U \neq \emptyset$$

   O conjunto de todos os pontos aderentes de A é denotado por $\overline{A}$. Esse conjunto é dito **fecho de** A.

4. Um ponto $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de A se para toda vizinhança U de x temos:

$$(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$$

   O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado A'.

5. Um ponto $x \in X$ é um **ponto de fronteira** de A se ele é aderente a A e a A^c.
   O conjunto de todos os pontos de fronteira de A é denotado ∂A.

6. Um ponto $x \in X$ é um **ponto isolado** de A se $\{x\}$ é vizinhança de x.

7. Um conjunto onde todos os pontos são isolados é dito **discreto**.

8. Um conjunto $A \subset X$ é dito **denso** em X se:

$$\overline{A} = X$$

Exemplo 3.6.1: Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual e $A = (1,3) \cup \{7\}$, então:

- $Int(A) = (1,3)$
- $Ext(A) = (-\infty,1] \cup [3,7) \cup (7,+\infty)$
- $\overline{A} = [1,3] \cup \{7\}$
- $A' = [1,3]$
- $\partial A = \{1\} \cup \{3\}$

Proposição 3.10: Sejam $(X,\mathfrak{T})$ e $A \subset X$:

1. A é fechado se, e somente se $\overline{A} = A$.
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Demonstração. 1.
$\Rightarrow$
Seja A fechado, então A^c é aberto. Se $x \notin A$, então $x \in A^c$, assim existe um U vizinhança de x tal que $x \in U \subset A^c$, podemos perceber que $U \cap A = \emptyset$, então $x \notin \overline{A}$. Concluimos que $\overline{A} \subset A$ e $A \subset \overline{A}$, ou seja: $\overline{A} = A$.
$\Leftarrow$
Temos que $\overline{A} = A$, logo se $x \notin A$ existe uma vizinhança U de x tal que $U \cap A = \emptyset$, e $U \subset A^c$, portanto A^c é aberto e A é fechado.
2. De 1. se $\overline{A} = A$, então $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ □

Teorema 3.11: Sejam $(X,\mathfrak{T})$ e $A \subset X$, então $Int(A)$ é o maior conjunto aberto contido em A, isto é:

$$Int(A) = \bigcup U, \text{ tais que } U \text{ é aberto e } U \subset A$$

Demonstração. ($\subset$) $Int(A)$ é aberto e $Int(A) \subset A$, então $Int(A) \subset \bigcup U$.
($\supset$) Seja $x \in \bigcup U$, então existe pelo menos um U tal que $x \in U \subset A$, portanto $x \in Int(A)$. □

3.7 Topologia Métrica

Definição 3.12: Uma distância ou métrica sobre um conjunto M, sendo $M \neq \emptyset$, é uma função:

$$d : M \times M \to \mathbb{R},$$

tal que, para todo $x, y, z \in M$, temos:

1. $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se, e somente se $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. Desigualdade triangular: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Chamamos o par (M,d) de **espaço métrico**.

Definição 3.13: Sejam (M_1,d_1) e (M_2,d_2) espaços métricos. $f : M_1 \to M_2$ é uma isometria se é bijetiva e:

$$d_2(f(x),f(y)) = d_1(x,y),$$

para todo $x, y \in M_1$.

Definição 3.14: Uma bola aberta em M de centro x_0 e raio r é denotada e definida por:

$$B(x_0, r) = \{x \in M | d(x,x_0) < r\}.$$

Definimos $B(x,0) = \emptyset$. Temos também, que se $r \leq s$, então $B(x_0,r) \subset B(x_0,s)$.

Definição 3.15: Seja uma bola aberta $B(x_0,r)$, a topologia gerada pela coleção de bolas abertas **Topologia Métrica** gerada pela distância d, e denotada por $\mathfrak{T}_d$.

3.8 Funções em Espaçoes Topológicos

Nessa seção vamos ver a definição de funções contínuas em espaços topológicos e algumas definições

3.8.1 Funções contínuas

Sejam $(X, \mathfrak{T}_1)$ e $(Y,\mathfrak{T}_2)$ espaços topológicos.

Definição 3.16: A função $f : X \to Y$ é contínua se para todo $V \in \mathfrak{T}_2$ temos que:

$$f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_1,$$

ou seja, f é contínua se a imagem inversa de abertos de Y é aberto em X.

Exemplo 3.8.1: Sejam $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico e $Id : X \to X$ a função identidade $Id(x) = x$ é sempre contínua.

Exemplo 3.8.2: Sejam $(R,\mathfrak{T})$ um espaço topológico e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax+b$, com a,b números reais e a não nulo. Essa função é contínua.

Seja $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ um aberto básico da topologia usual de $\mathbb{R}$ (intervalo aberto). Precisamos verificar que $f^{-1}(\alpha,\beta)$ é uma aberto do domínio $\mathbb{R}$.

Com efeito, suponha $a > 0$. Então temos

$$\left(\frac{\alpha - b}{a},\frac{\beta - b}{a}\right) = f^{-1}(\alpha,\beta).$$

pois

$$\frac{\alpha - b}{a} < x < \frac{\beta - b}{a} \Leftrightarrow \alpha < ax + b < \beta.$$

Caso $a < 0$, então temos

$$\left(\frac{\beta - b}{a},\frac{\alpha - b}{a}\right) = f^{-1}(\alpha,\beta).$$

pois

$$\frac{\beta - b}{a} < x < \frac{\alpha - b}{a} \Leftrightarrow \alpha < ax + b < \beta.$$

Portanto essa função é contínua

Proposição 3.17: Sejam $(X,\mathfrak{T}_1)$, $(Y,\mathfrak{T}_2)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se um conjunto $D \subset X$ é denso em X, então $f(D)$ é denso em Y.

Demonstração. Seja $A \subset Y$ um aberto não vazio, então $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e aberto em X. Podemos conlcuir também, que existe um $x \in D \cap f^{-1}(A)$, logo:

$$\begin{aligned} x &\in D \cap f^{-1}(A) \\ f(x) &\in f(D) \cap f(f^{-1}(A)) \\ f(x) &\in f(D) \cap A \end{aligned}$$

Assim $f(D)$ é denso em Y. □

Teorema 3.18: Sejam $(X, \mathfrak{T}_1)$ e $(Y, \mathfrak{T}_2)$. As seguintes condições são equivalentes:

1. f é contínua.
2. Para todo $F \subset Y$ fechado, $f^{-1}(F)$ é fechado em X.
3. A imagem inversa que qualquer elemento da base de Y é aberto em X.
4. Para todo $x \in X$ e para toda vizinhança W de $f(x) \subset Y$, existe U vizinhança de x em X tal que:
$$f(U) \subset W.$$
5. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset X$.
6. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$, para todo $B \subset Y$.

Demonstração. $1 \Leftrightarrow 2$: Se f é contínua e F^c é aberto então $f^{-1}(F^c)$ é aberto e assim $f^{-1}(F)$ é fechado em X. A volta é similar neste caso.

$1 \Leftrightarrow 3$: Seja uma base $\mathfrak{B}$ da topologia de Y e um elemento $B \in \mathfrak{B}$. Se f é contínua, então $f^{-1}(B)$ é aberto em X. Para a volta temos que todo aberto de $\mathfrak{T}_2$ pode ser escrito como $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$ e assim:

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f^{-1}(B_\alpha).$$

Como todo B_α é aberto, união de abertos é aberta, então essa imagem inversa é aberta e f é contínua.

$1 \Rightarrow 4$: Sejam f uma função contínua e seja um vizinhança W de $f(x)$, vamos considerar $U = f^{-1}(W)$ que é vizinhança de x e assim $f(U) \subset W$.

$4 \Rightarrow 5$: Vamos considerar $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$; queremos provar que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Se W é uma vizinhança de $f(x)$, então existe uma vizinhança U de x, tal que:

$$f(U) \subset W.$$

Como $x \in \overline{A}$, então $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$, sendo assim:

$$\emptyset \neq f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A) \subset W \cap f(A).$$

Então $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$5 \Rightarrow 6$: Se $A = f^{-1}(B)$, temos que:

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B \cap f(X)} \subset \overline{B}.$$

Portanto se $\overline{f(A)} \subset \overline{B}$, também podemos concluir que $f(\overline{A}) \subset f^{-1}(\overline{B})$.

$6 \Rightarrow 2$: Seja $F \subset Y$ fechado, então:

$$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F).$$

Como $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$, então $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ e assim $f^{-1}(F)$ é fechado. □

Corolário 3.19: Seja $(X,\mathfrak{T})$ tal que $X = A \cup B$, sendo A e B conjuntos abertos em X. Se $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ são funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então a função $h : X \to Y$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Seja $C \subset Y$ um conjunto aberto, então:

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cap B) \\ &= (f^{-1}(C) \cap A) \cup (g^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Como $f^{-1}(C)$ e $g^{-1}(C)$ são abertos, então $h^{-1}(C)$ é aberto e h é contínua.

□

3.9 Homeomorfismos

Definição 3.20: Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se f é bijetiva, contínua e f^{-1} é contínua.

Caso dois espaços X e Y sejam homeomorfos, dizemos que:

$$X \cong Y.$$

Algumas observações importantes:

- A composta de homeomorfismos é homeomorfismo.

- Homeomorfismo é uma relação de equivalência na família de espaços topológicos.
- Espaços topológicos homeomorfos são essencialmente iguais em topologia.

Vamos ver alguns exemplos de homeomorfismos:

Exemplo 3.9.1: Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Vamos mostrar que todo aberto (a,b), com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$, é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
Primeiramente, seja $f(a,b) \to (-1,1)$ defindida por:

$$f(t) = \frac{2t-(b+a)}{b-a}.$$

f é bijetiva, contínua pelo **Exemplo 3.8.2** e sua inversa é:

$$f^{-1}(y) = \frac{(b-a)y+(a+b)}{2},$$

que também é contínua pelo mesmo caso. Portanto, $(a,b) \cong (-1,1)$.

Agora seja $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ definida por:

$$f(t) = \frac{t}{1+|t|}.$$

Sabemos que f é contínua e sua inversa é dada por:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|},$$

também contínua. Sendo assim, $\mathbb{R} \cong (-1,1)$. Portanto, como ser homeomorfo é uma relação de equivalência, podemos afirmar que $(a,b) \cong \mathbb{R}$.

3.10 Exemplos de Homeomorfismos

Definição 3.21: Sejam $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico e $Y \subset X$.

O conjunto:

$$\mathfrak{T}_Y = \{Y \cap V | V \in \mathfrak{T}\},$$

é uma topologia em Y chamada topologia induzida de X em Y. Neste caso, dizemos que V é um subespaço topológico de X.

Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual. O conjunto S^1 será:

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Considere $\mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia usual. O conjunto:

$$S^n = \{(x_1,...,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$

com a topologia induzida, é chamado esfera unitária.

Os homeomorfismos são ferramentas que explicitam como a topologia é bem diferente da geometria em geral, vamos ver alguns exemplos e como figuras completamente distintas na geometria euclidiana são equivalentes na topologia.

Exemplo 3.10.1: Vamos ver que S^1 e um quadrado $Q = \{(x,y)/\max\{|x|,|y|\} = 1\}$ são homeomorfos em $\mathbb{R}^2$ com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$:

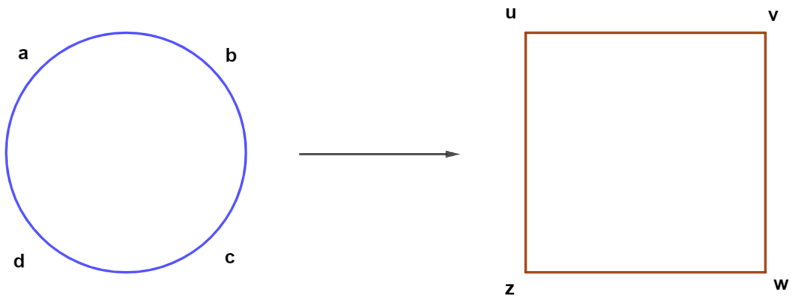


Figura 3.1: Homeomorfismo S^1 e quadrado Q

Vamos considerar a função $f : S^1 \to Q$ tal que f leve o arco ab no segmento uv, o arco bc no segmento vw, o arco cd no segmento wz e o arco da no segmento zu. Ou seja:

$$f(x,y) = (\frac{x}{m},\frac{y}{m}) \text{ e } f^{-1}(x,y) = (\frac{x}{r},\frac{y}{r}),$$

sendo $m = \max\{|x|,|y|\}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Podemos ver que tanto f e f^{-1} são bijetivas e contínuas, logo f é um homeomorfimos.

Podemos generalizar esse caso para $S^2 \subset R^3$ e $C = \{(x,y,z)/\max\{|x|,|y|,|z|\} = 1\}$, sendo C o cubo unitário. A demonstração é análoga ao caso anterior. De fato basta escolher um m e um r adequado em uma função $f = f(x,y,z)$.

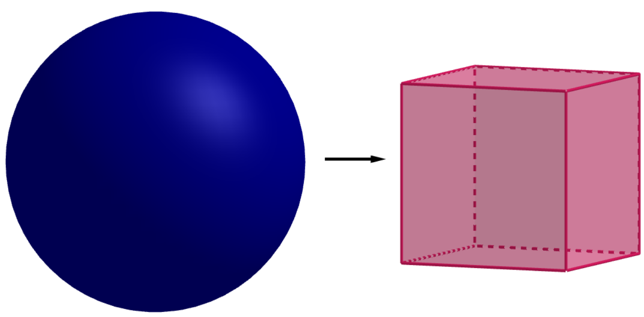


Figura 3.2: Homeomorfismo S^2 e cubo unitário C

Podemos ver o processo do cubo para a esfera pelo software Geogebra pela sequência de imagens das figuras **3.3** e **3.4**. Esse processo mostra como C pode ser transformado continuamente em uma esfera. Nitidamente o processo contrário pode ser feito e temos da esfera ao cubo.

De fato podemos expandir, através de um homeomorfismo qualquer poliedro convexo em uma esfera pelo mesmo raciocínio ultilizado pelo exemplo, sendo essa uma grande diferença da geometria e da topologia.

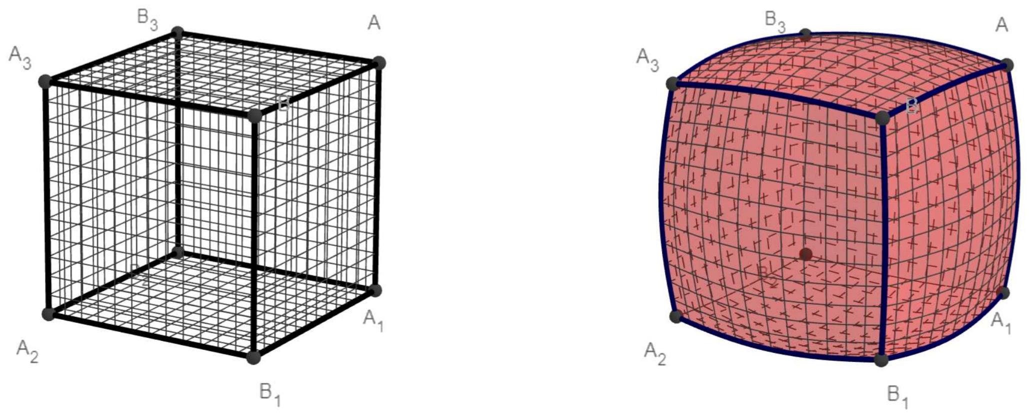


Figura 3.3: Passos 1 e 2

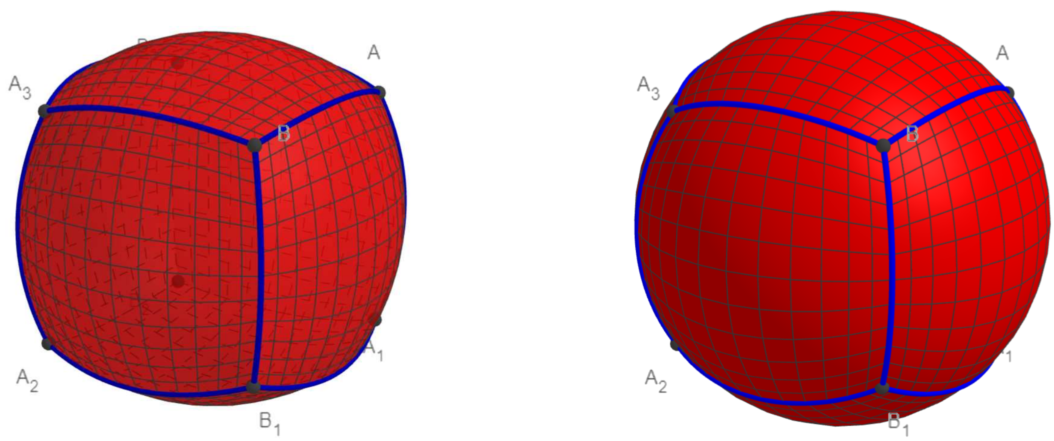


Figura 3.4: Passos 3 e 4

3.11 Topologia Quociente

Nesta seção vamos estudar brevemente a topologia quociente e alguns espaços topológicos importantes como a faixa de Moebius.

Definição 3.22: Sejam o espaço topológico $(X, \mathfrak{T})$, um conjunto Y e uma função $f : X \to Y$ sobrejetiva. Definimos a seguinte topologia em Y:

$$\mathfrak{T}_f = \{V \subset Y / f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}\}$$

Vamos chamar $\mathfrak{T}_f$ de **topologia quociente** em Y induzida por f.

Um exemplo simples e interessante sobre topologia quociente é:

Exemplo 3.11.1: Seja $f : X \to Y$ constante. Vamos determinar $\mathfrak{T}_f$.

Vamos supor que $f(x) = y_0$, com $y_0 \in Y$, para todo $x \in X$. Seja um conjunto $U \in \mathfrak{T}_f$. Temos duas possibilidades:

1. Se $y_0 \in U$, então $f^{-1}(U) = X$.
2. Se $y_0 \notin U$, então $f^{-1}(U) = \emptyset$.

Portanto qualquer subconjunto de Y é aberto e $\mathfrak{T}_f$ é a topologia discreta sobre Y.

3.11.1 Espaços Quocientes

Seja $\sim$ uma relação de equivalência sobre X e o conjunto das classes de equivalência em X dado por $X/\sim$. Seja:

$$\begin{aligned} \Pi : X &\to X/\sim \\ x &\to [x] \end{aligned} \tag{3.1}$$

no qual Π é a projeção canônica e $[x]$ é a classe de equivalência que contém x.

Definição 3.23: Seja $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico. O par $(X/\sim, \mathfrak{T}_\Pi)$ é dito espaço quociente de X.

Agora vamos ver alguns espaços topológicos conhecidos como espaços quocientes.

O Círculo como Espaço Quociente

Considere $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$. Em I, seja a relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow \{x,y\} = \{0,1\}, \text{ ou } x = y.$$

Temos três possibilidades para analisar sobre x, ou $x = 0$, ou $x \in (0,1)$, ou $x = 1$.

1. Se $x \in (0,1)$, então $[x] = \{x\}$.
2. Se $x = 1$, então $[1] = \{0,1\}$.
3. Se $x = 0$, então $[0] = \{0,1\}$.

De (2) e (3), podemos afirmar que $[0] = [1]$.

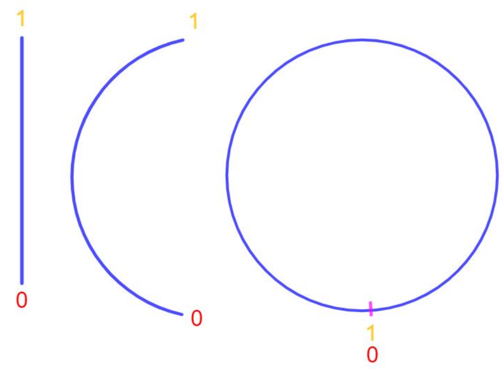


Figura 3.5: Círculo como Espaço Quociente

Faixa de Moebius como Espaço Quociente

Considere $I \subset \mathbb{R}^2$ com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$. Em I^2 vamos considerar a equivalência:

$$(x,y) \sim (x_1,y_1) \Leftrightarrow (x,y) = (x_1,y_1) \text{ ou } (0,y) \sim (1,1-y),$$

para todo (x,y), $(x_1,y_1) \in I^2$.

Se $x \neq 0$ e $x \neq 1$, então $[(x,y)] = \{(x,y)\}$ e $[(0,y)] = [(1,1-y)]$.

Pela definição, $[(0,0)] = [(1,1)]$ e $[(0,1)] = [(1,0)]$. Então, $\Pi : I^2 \to (I^2/\sim)$ é uma identificação.

Podemos falar que:

$$(I^2/\sim) \cong M,$$

no qual M é a faixa de Moebius.

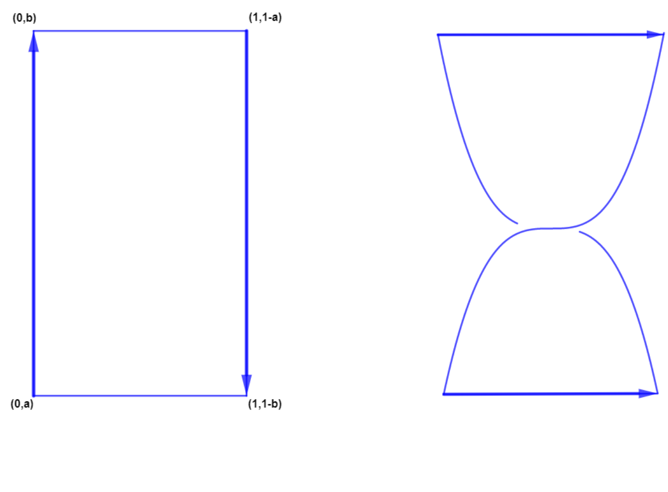


Figura 3.6: Formação da faixa de Moebius

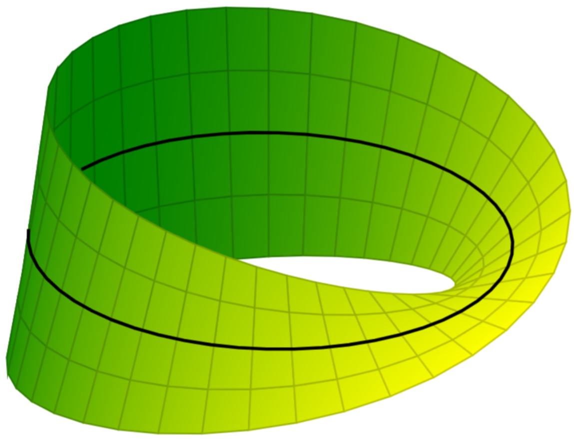


Figura 3.7: Faixa de Moebius

3.11.2 O Toro como espaço quociente

Seja $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ com a topologia induzida pela usual de $\mathbb{R}^2$. Vamos considerar a relação de equivalência:

$$(x,y) \sim (x_1,y_1) \Leftrightarrow (x,y) = (x_1,y_1) \text{ ou } (0,y) \sim (1,y) \text{ e } (x,0) \sim (x,1),$$

para todo $(x,y),(x_1,y_1) \in I^2$.

Podemos ver que se de x e y são diferentes de 0 e 1, então $[(x,y)] = \{(x,y)\}$, caso contrário $[(0,y)] = [(1,y])$ e $[(x,0) = (x,1)]$.

Ou seja, $[0,0] = [1,0] = [0,1] = [1,1]$. Então, $\Pi : I^2 \to (I^2/\sim)$ é uma identificação.

Chamamos $(I^2/\sim)$ de Toro.

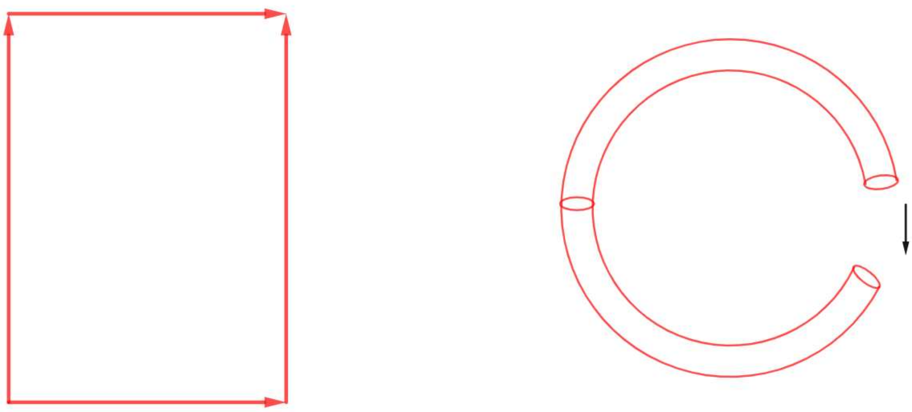


Figura 3.8: Formação do Toro

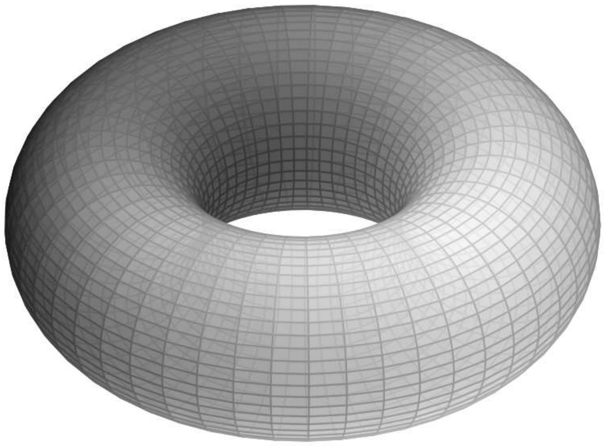


Figura 3.9: Toro

3.11.3 A garrafa de Klein como espaço quociente

Seja $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ com a topologia induzida pela usual de $\mathbb{R}^2$. Vamos considerar a relação de equivalência:

$$(x,y) \sim (x_1,y_1) \Leftrightarrow (x,y) = (x_1,y_1), \text{ ou } (0,y) \sim (1,y) \text{ e } (x,0) \sim (1-x,1),$$

para todo $(x,y), (x_1,y_1) \in I^2$.

Podemos ver que se de x e y são diferentes de 0 e 1, então $[(x,y)] = \{(x,y)\}$. Caso contrário teríamos $[0,y] = [1,y]$ e $[(x,0)] = [(1-x,1)]$.

Ou seja, $[0,0] = [1,0] = [0,1] = [1,1]$. Então, $\Pi : I^2 \to (I^2/\sim)$ é uma identificação e chamamos $(I^2/\sim)$ de garrafa de Klein.

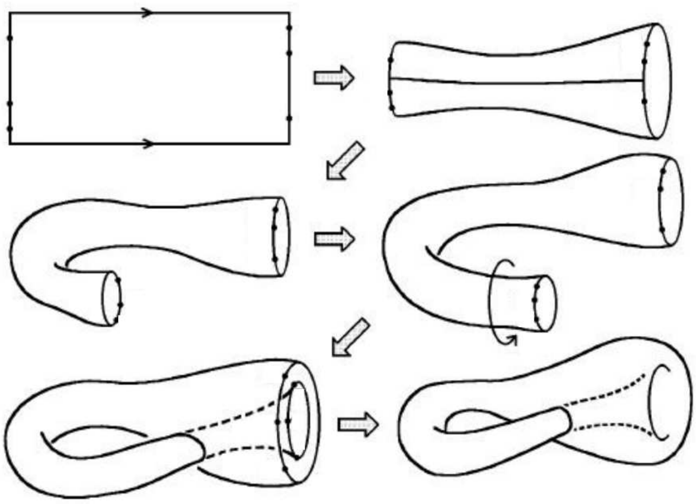


Figura 3.10: Garrafa de Klein

4

Jogos como atividades didáticas

Topologia não é um assunto simples para ser tratado na Educação Básica, principalmente porque a teoria de conjuntos não é mais abordada a fundo pela Base Nacional Curricular (BNCC). Sendo assim, como trabalhar o tema, sendo que este pode ser muito interessante para várias áreas, sem conhecimentos estruturados em conjuntos?

Jogos matemáticos são usados em diferentes épocas e tempos. Segundo O'CONNOR e ROBERTSON [8] "O papiro de Rhind mostra que a matemática egípcia era largamente baseada em desafios matemáticos". Um exemplo contido neste papiro:

> Sete casas e em cada casa tem sete gatos. Cada gato comeu sete ratos. Se não tivesse morrido, cada rato teria comido sete espigas de trigo. Cada espiga de trigo produziria 7 arroba de grãos. Quantas arrobas se salvaram?(Papiro de Rhind)

Ainda sengundo O'CONNOR e ROBERTSON, várias civilizações utilizavam a matemática de maneira lúdica, seja por desafios, quebra-cabeça e outros métodos. Sendo assim, mesmo em tempos antigos, podemos ver que a matemática era utilizada de forma recreativa e intuitiva.

Segundo a BNCC, a matemática não é só números, fórmulas, formas geométricas: é, também, uma linguagem, um jogo, formas diferentes de ver realidades, de modelar pensamentos, é um campo da criatividade e desenvolvimento de múltiplas habilidades. Tabalhar a matemática apenas de forma expositiva não deve ser a única opção. Outras áreas do nosso conhecimento podem e devem ser exploradas, além do mais, aulas apenas expositivas podem ser maçantes e não atrativas.

Nesse contexto o que seria um jogo matemático? Para AGRANIONIH e SMANIOTTO (2002) o jogo matemático é:

> [...] uma atividade lúdica e educativa, intencionalmente planejada, com objetivos claros, sujeita a regras construídas coletivamente, que oportuniza a interação com os conhecimentos e os conceitos matemáticos, social e culturalmente produzidos, o estabelecimento de relações lógicas e numéricas e a habilidade de construir estratégias para a resolução de problemas.(AGRANIONIH, AMANIOTTO, 2002)

Durante a pandemia de COVID-19 os professores tiveram que se reinventar para aplicar suas aulas de maneira remota e posteriormente híbrida. Durante este período prender a atenção dos alunos durante as aulas é um dos principais desafios. Sendo assim, criar atividades lúdicas é um ótimo recurso, seja por jogos, desafios ou resolução de problemas.

Considerando estes aspectos, uma excelente forma de apresentar o tema deste trabalho é por atividades lúdicas. Claro que por ser um tema complexo, as atividades devem ser bem preparadas e organizadas, caso contrário podem virar algo muito difícil e desmotivante. Neste trabalhos serão apresentadas várias atividades lúdicas que podem ser trabalhadas com alunos de toda Educação Básica, entretanto é aconselhável trabalhá-los com alunos do Ensino Médio.

Outro questionamento comum é sobre o motivo de aplicar algo envolvendo a topologia na educação básica. Para o Novo Ensino Médio os alunos terão a carga horária obrigatória de matemática e suas tecnologias e a carga horária itinerante, sendo a última de escolha individual, ou seja, cada aluno pode escolher uma área do conhecimento para ser estudada. Para a matemática na carga itinerante a proposta é que ela seja tratada de maneira contextualizada com situações do cotidiano em diversas áreas como, resolução de problemas, análises de dados estatísticos e probabilidade, geometria e **topologia**, robótica, automação, dentre outras. É importante perceber que nesta carga horária o aluno deseja ser instigado, desafiado, deseja ver algo inovador, algo que ele não viu na carga horária tradicional, e é neste ponto que trabalhar jogos topológicos é uma excelente opção neste contexto.

Até a presente data existem oito trabalhos envolvendo a Topologia no PROFMAT, destes apenas um envolve a aplicação de atividades lúdicas como forma de apresentar o tema. Por mais que algumas atividades que serão propostas neste trablho serão semelhantes, a sequência didática proposta é um grande diferencial, visto que durante a realização desta dissertação estávamos no periodo da pandemia de Covid-19 e era necessário atividades que fossem possíveis de serem aplicadas tanto de forma remota quanto de forma híbrida ou presencial. Neste apecto este trabalho tem muito a acrescentar como um produto didático.

A BNCC não restringe a forma que devem ser aplicados os temas citados, sendo assim, fica a critério da instituição escolher a melhor forma de aplicá-los. Sendo permitida a aplicação de minicursos e nestes podemos realizar várias atividades diversificadas como as lúdicas propostas nos próximos capítulos.

5

Jogos envolvendo Topologia

O intuito aqui é deixar atividades lúdicas como sugestões para trabalhar vários conceitos topológicos em sala de aula. Estes jogos são simples e atrativos para os alunos, sendo de fácil aplicação e abrem muitas discussões positivas.

Algumas atividades são jogos e desafios, outras são apenas atividades investigativas que servem como apoio para introduzir conceitos geométricos diferentes, saindo da geometria euclidiana que os alunos estão acostumados a estudar.

Neste capítulo serão sugeridas atividades diversas e no próximo uma sequência didática com atividades diferentes. Devido a pandemia de Covid-19, vamos sugerir atividades aplicáveis neste contexto.

Será apresentado o jogo, como aplicar e seu segredo.

5.1 Quebra-cabeça do anel:

Para este jogo vamos precisar de:

- 1 pedaço de papelão.
- 1 corda ou barbante
- 2 anéis de metal ou semelhante.

Objetivo: O objetivo do jogo é colocar os dois anéis do mesmo lado da corda, sem desamarrar ou cortar a corda:

Com o pedaço de papelão faremos três furos, dois pequenos nas extremidades e um no meio um pouco maior. Prendemos as pontas das cordas nas extremidades com um laço pelo meio e um anel de cada lado como na figura **5.1**

É interessante deixar um tamanho bom de barbante para que a resolução fique mais fácil de ser realizada.

Figura 5.1: Quebra-cabeça do anel

Solução: Primeiramente puxamos o laço pelo centro, agora passamos um anel pelo laço, depois puxamos o laço pelo outro lado do buraco e passamos o anel novamente por ele. Agora, puxamos o laço de volta pelo buraco e passamos o anel por ele.

Figura 5.2: Quebra-cabeça do anel - Solução Parte 1

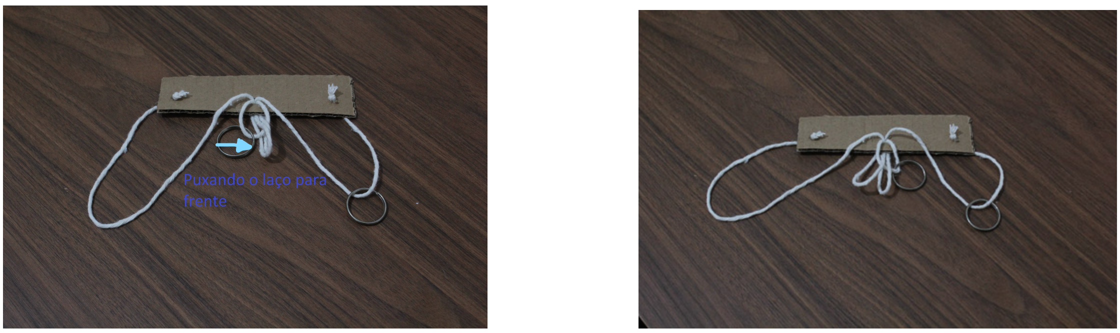


Figura 5.3: Quebra-cabeça do anel - Solução Parte 2

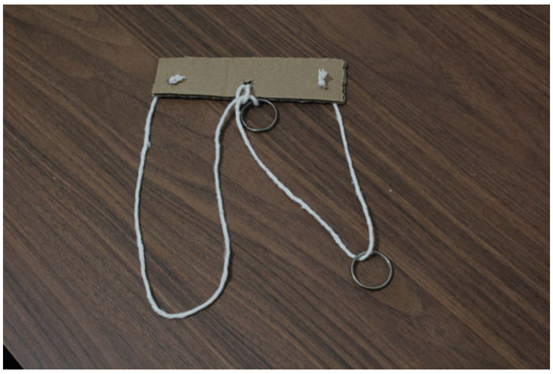


Figura 5.4: Quebra-cabeça do anel - Solução Parte 3

Neste jogo trabalhamos o conceito de transformações contínuas e interior e exterior de uma curva fechada, nele é interessante o fato que o nó pode atrapalhar essas percepções.

5.2 O disco pelo buraco:

Para este jogo vamos precisar de:

- 1 Folha de papel A4.
- 1 Tesoura.
- 1 disco de papelão ou algo semelhante.

No centro da folha de papel vamos fazer recorte de um quadrado com a sua diagonal um pouco menor do que o diâmetro do disco escolhido.

Objetivo: Passar o disco pelo quadrado sem rasgar a folha para aumentar o tamando do buraco. A folha pode ser dobrada, mas no fim deve voltar a posição original.

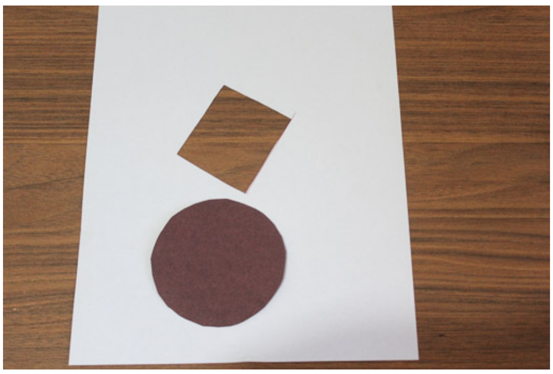


Figura 5.5: O disco pelo buraco

Solução: Com a folha de papel, vamos dobrá-la ao meio verticalmente e horizontalmente. Agora com um leve movimento conseguimos expandir o tamanho do buraco sem rasgar a folha e assim, passar o disco.

Figura 5.6: O disco pelo buraco - Solução parte 1

Figura 5.7: O disco pelo buraco - Solução parte 2

Nesta atividade trabalhamos as tranformações contínuas e como estamos acostumados a ver apenas a geometria euclidiana na escola os alunos pensam que é impossível realizar a tarefa no ínicio, após a aplicação tudo fica mais claro para eles.

5.3 Entrelaçados:

Para este jogo vamos precisar de:

- 2 pedaços de barbante.

Neste jogo vamos prender o barbante no punho de duas pessoas, cruzando os barbantes entre eles.

Objetivo: Separar as duas pessoas sem desamarrar ou cortar os barbantes.

Neste caso foi usado um ponto fixo para a segunda pessoa.

Solução: Faça um laço com a sua corda, passe dentro da amarra de uma das mãos da outra pessoa, passe o laço pela mão e por fim, retire o laço da amarra, agora

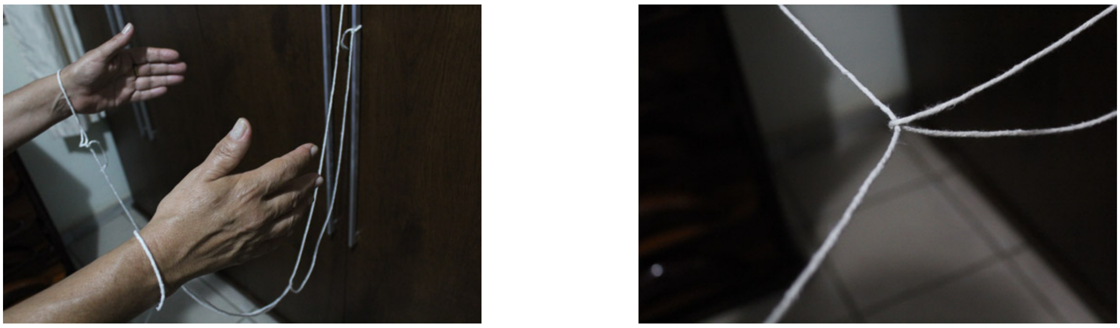


Figura 5.8: Entrelaçados

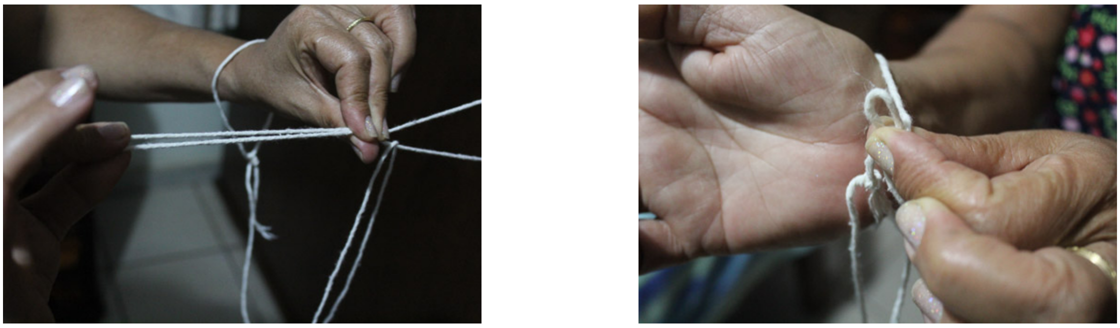


Figura 5.9: Entrelaçados - Solução parte 1

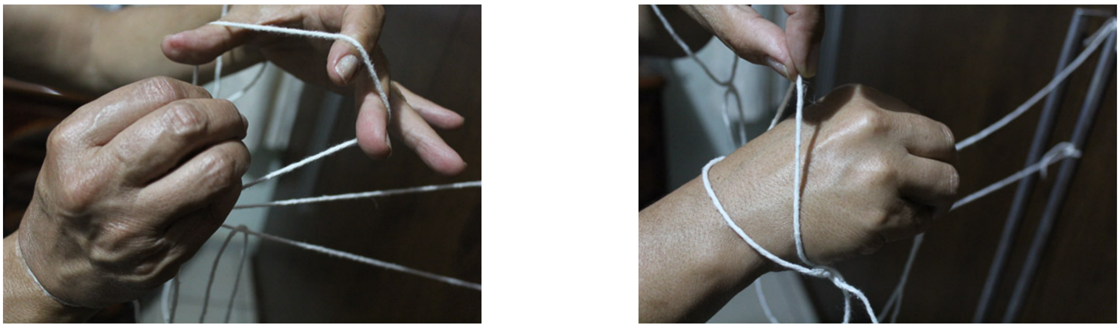


Figura 5.10: Entrelaçados - Solução parte 2

Figura 5.11: Entrelaçados - Solução parte 3

basta puxar as mãos e as cordas estão separadas.

Esta atividade irá parecer uma mágica para os alunos e novamente podemos trabalhar as transformações contínuas na solução do problema.

5.4 Explorando a faixa de Moebius:

Para este jogo vamos precisar de:

- 1 folha de papel A4
- 1 rolo de fita durex
- 1 canetão de qualquer cor

Vamos dividir a folha ao meio duas vezes verticalmente e cortar 4 faixas iguais. Agora pegamos uma das faixas e nela vamos fazer uma rotação no sentido anti-horário ou horário de 180°.

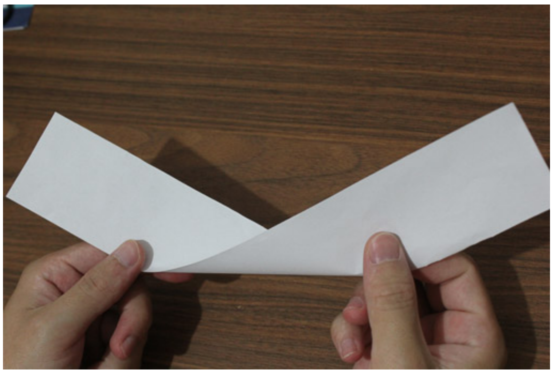


Figura 5.12: Faixa de Moebius - Construção

Agora colocamos as duas pontas e temos uma faixa de Moebius.

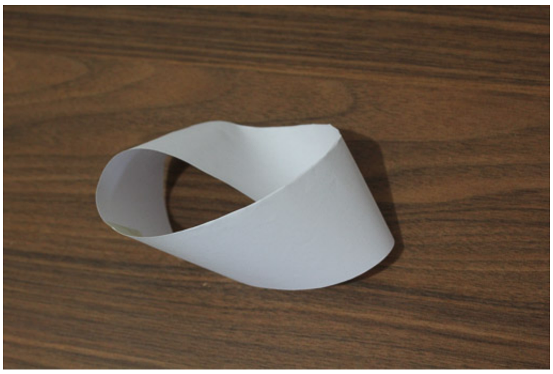


Figura 5.13: Faixa de Moebius

Esta faixa pode ser explorada de várias maneiras, uma forma interessante é mostrar que ela tem apenas um lado. Para isto, vamos pegar o canetão e sem retirar ele do papel contornar toda sua superficíe pelo centro até que o ínicio e fim se encontrem.

Como não passamos por nenhuma extremidade podemos concluir que a faixa tem apenas um lado.

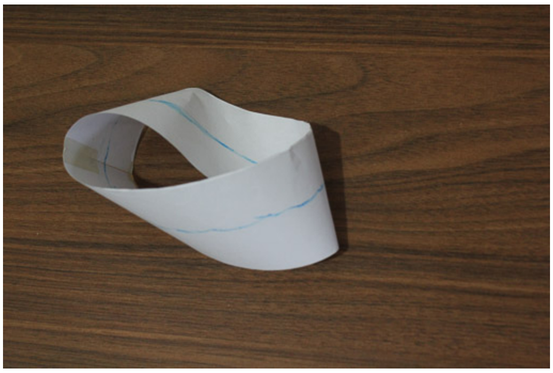


Figura 5.14: Faixa de Moebius riscada

Aqui a intenção é apenas trabalhar com um tipo de superfície que não é estudado na educação básica, é interessante que os próprios alunos façam a faixa de Moebius, pois assim terão melhor compreensão da situação.

5.5 A curva de Jordan

Para este jogo vamos precisar de:

- 1 folha de papel A4

Na folha de papel faça um grande labirinto com curvas e marque dois pontos nesse labirinto. O problema se consiste em falar se cada um dos pontos se encontram dentro ou fora dessa curva.

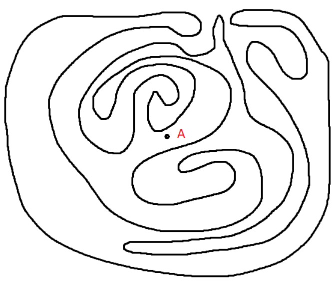


Figura 5.15: Curva de Jordan

Solução: Trace uma linha reta do lado de fora até o ponto mais interior da curva, agora basta analisar se a reta tocou a curva um número par ou ímpar de vezes ate cada ponto. Se tocou par ele é exterior e se tocou ímpar ele é interior.

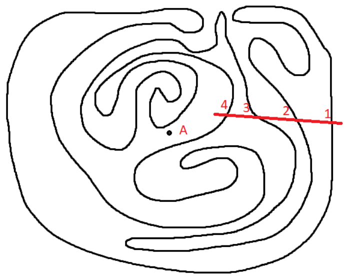


Figura 5.16: Curva de Jordan - Solução

Aqui estamos trabalhando o conceito de dentro e fora de superfícies mais estranhas para os estudantes, caso eles fiquem muito interessados um caso mais complexo pode ser estudado, como o da figura **5.17**.

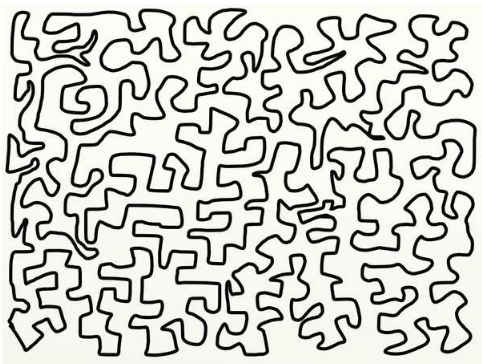


Figura 5.17: Curva de Jordan - Exemplo 2

5.6 A topologia em um balão:

Para este jogo vamos precisar de:

- 1 balão branco
- 1 canetão de qualquer cor

No balão vazio vamos desenhar um quadrado de lado fixo e marcar um ponto em seu centro.

Agora vamos inflar o balão e analisar algumas coisas:

- O formato da figura mudou?
- Os seus ângulos mudaram?
- O ponto continua interno a figura?

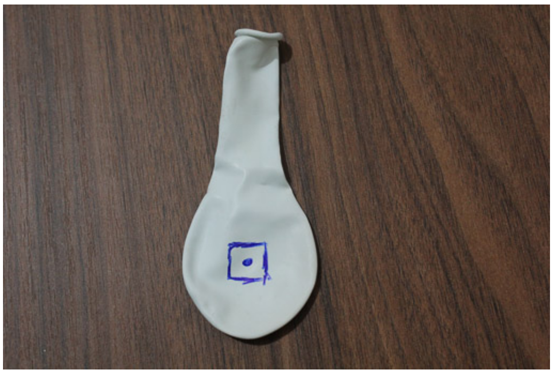


Figura 5.18: Topologia no balão - Normal

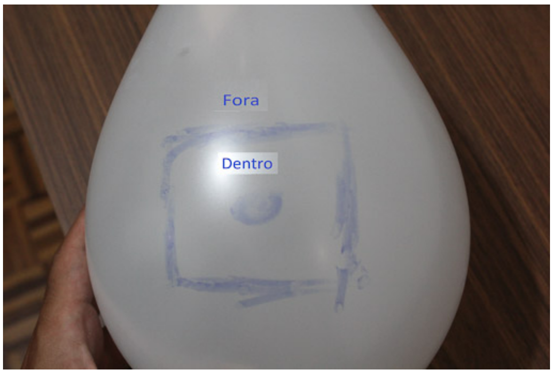


Figura 5.19: Topologia no balão - Inflado

- Podemos falar que o que era interno ao quadrado e o que era externo a ele continua na mesma situação?

Várias outras perguntas podem ser feitas, sendo esta, uma excelente atividade para explorar o conceito de dentro, fora, fronteiras e transformações contínuas na topologia. Outros formatos podem ser desenhados e explorados no balão ficando a critério do professor decidir quais são interessantes de serem trabalhados com os alunos.

5.7 O quebra-cabeça de papel

Para este jogo vamos precisar de:

- 1 folha de papel A4
- 1 tesoura

Esta atividade se consiste em pedir para que os alunos formem a figura **5.20** usando apenas uma folha de papel e uma tesoura.

Solução: Primeiramente vamos pegar uma folha de papel A4 e dividi-la ao meio, logo após vamos marcar a metade da folha de um lado e dois terços do outro lado. Por fim, levantamos a parte central e giramos as superfícies **1** e **2** em 180° no eixo,

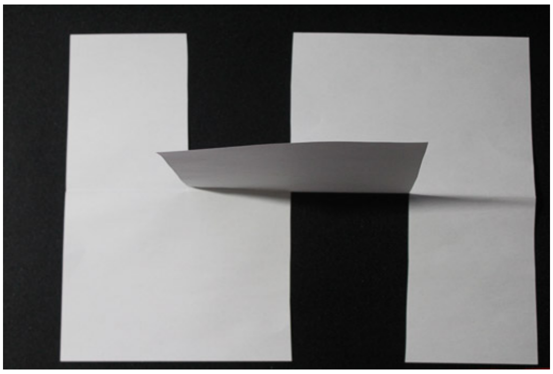


Figura 5.20: Quebra-cabeça de papel

formando a figura desejada.

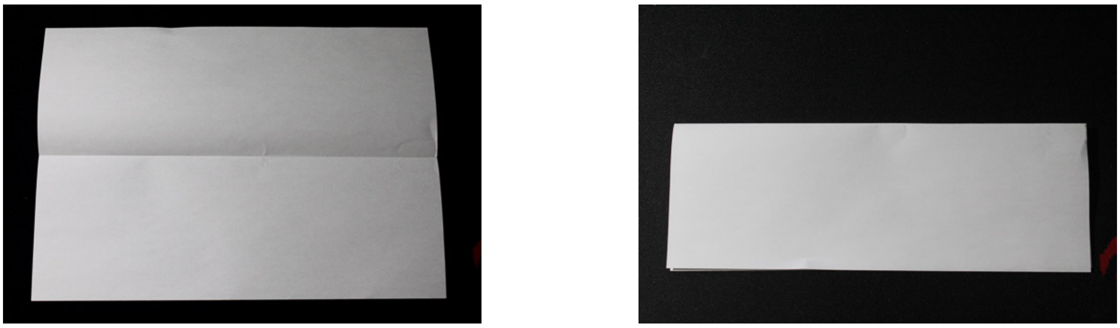


Figura 5.21: Quebra-cabeça de papel - Solução parte 1

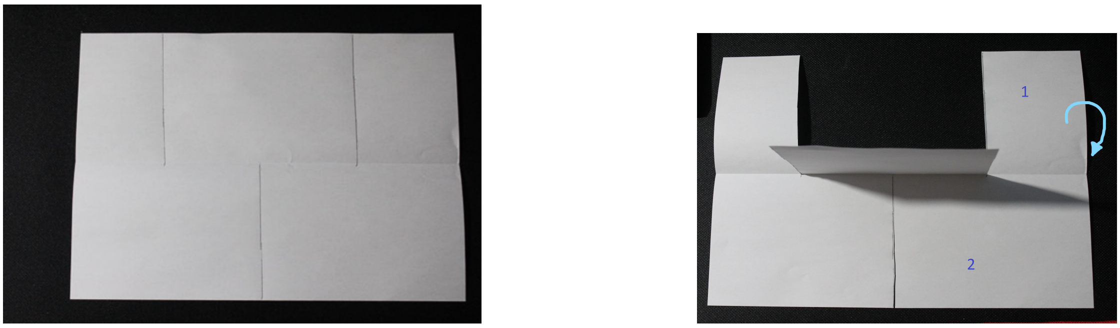


Figura 5.22: Quebra-cabeça de papel - Solução parte 2

Nesta atividades trabalhamos com superfícies topológicas diferentes e em como chegar até elas.

6 Sequência didática

Sequência didática, como o próprio nome diz, é uma sequência de ações organizadas para compor a didática de cada assunto. Neste sentido a ideia é apresentar etapas estruturadas para aplicação organizada e bem norteada. Nela é importante conter o público-alvo, objetivo, metodologia detalhada do processo.

Devido a pandemia de COVID-19 a aplicação de jogos envolvendo a Topologia foi adaptada para o modelo virtual. Os jogos do capítulo anterior são todos muito interessantes para alunos da educação básica, entretanto sua aplicação foi inviável por questões sanitárias durante a aplicação do trabalho.

Sendo assim este é um modelo de aula que pode ser aplicado, seja de maneira remota, seja de maneira presencial ou híbrida.

6.1 Público-Alvo

Alunos da Educação Básica, preferencialmente do Ensino Médio.

6.2 Objetivos

- Trabalhar diferentes pespectivas de um objeto.
- Trabalhar com superficies topológicas.
- Compreender algumas diferenças entre a geometria Euclidiana e a Topologia.
- Visualizar a interação entre faixas de Moebius.
- Compreender como soluções anteriores podem ajudar em novas situações.

6.3 Duração

1h30min.

6.4 Atividade 1

6.4.1 A faixa de Mëbius

Para essa atividade vamos precisar de:

- Duas folhas de papel A4 ou semelhante.
- Uma fita durex.
- Uma Tesoura.
- Uma cola para papel.

Primeiramente dividimos as folhas A4 ao meio verticalmente e ao meio novamente, cortando 8 partes iguais. Formando 8 faixas iguais e colamos essas faixas duas a duas de forma cruzada.

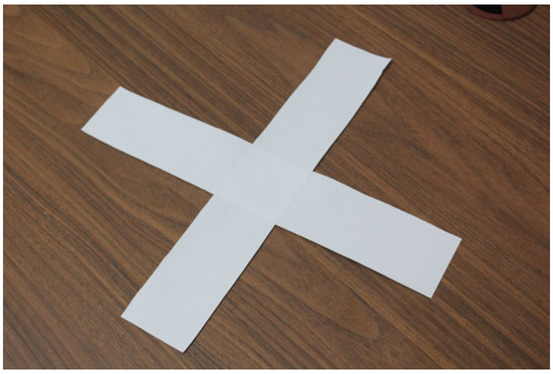


Figura 6.1: Faixas Cruzadas

Agora vamos formar a primeira figura colando com a fita durex uma faixa circular simples para cada lado.

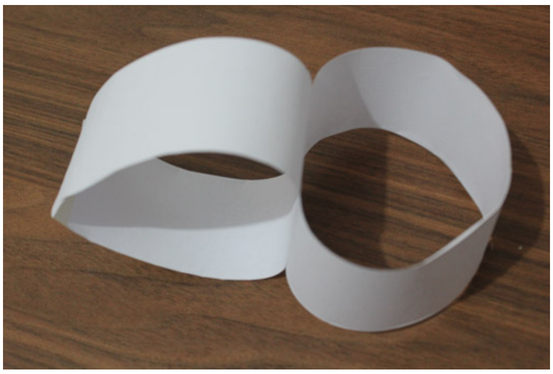


Figura 6.2: Faixas circulares

Pergunta 1: Para os alunos perguntamos: “O que acontece se cortarmos essas faixas juntas, ao meio?”, então executamos.

Neste primeiro momento podem surgir poucas respostas, pois os alunos ainda estão no processo de compreensão da atividade.

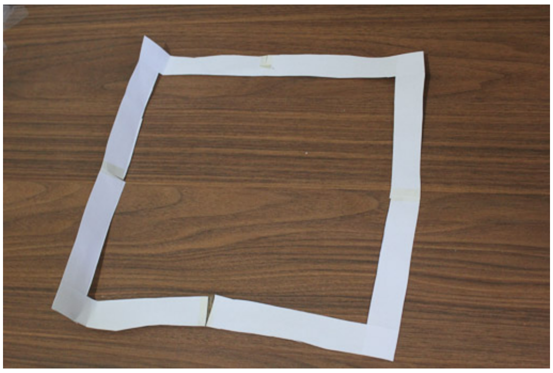


Figura 6.3: Faixas circulares cortadas ao centro

Agora vamos formar uma faixa circular e uma faixa de Moebius colando a ponta de uma faixa com a outra e na segunda famos fazer uma torção de 180° no sentido horário ou anti-horário, formando uma faixa de Moebius.

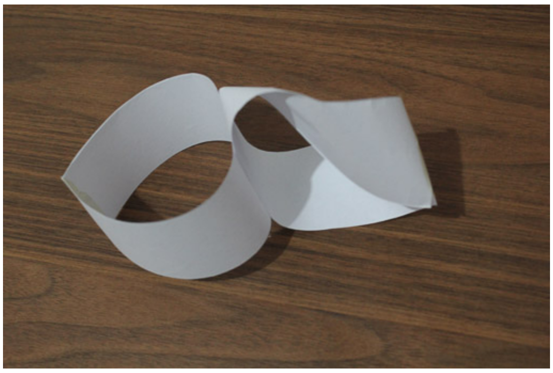


Figura 6.4: Faixa de Moebius e Faixa circular

Pergunta 2: Para os alunos perguntamos “O que acontece se cortarmos essa faixa juntas, ao meio?”, então executamos.

Nesta segunda pergunta provavelmente surgirão mais sugestões, pois agora os alunos já tem certa noção pela **Pergunta 1**.

É interessante discutir e deixar que os alunos explorem bem suas ideias. Como ainda está no ínicio da atividade podem aparecer poucas respostas e é importante tirar a inibição dos alunos com algumas intervenções, seja chamando algum aluno menos tímido para dar uma resposta, seja fazendo alguma pergunta como ”Vai formar outro quadrado?”.

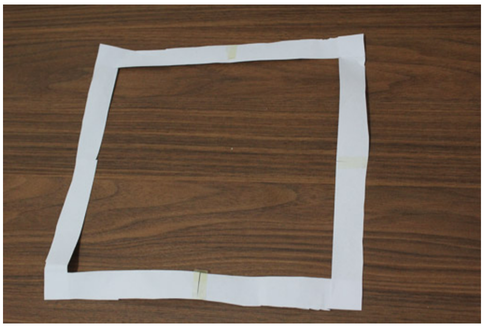
 

Figura 6.5: Faixa de Moebius e circular cortadas ao centro

Agora vamos formar duas faixas de Moebius em direções opostas colando uma faixa com uma torção de 180° no sentido horário e a outra no sentido anti-horário.

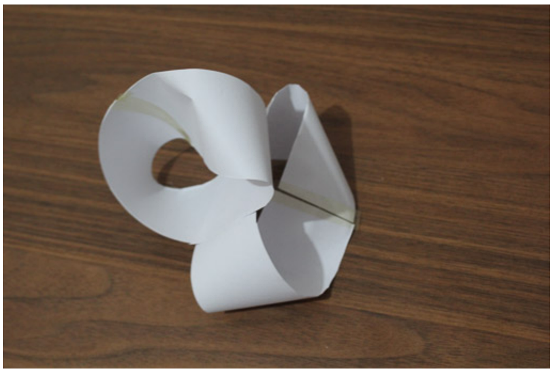


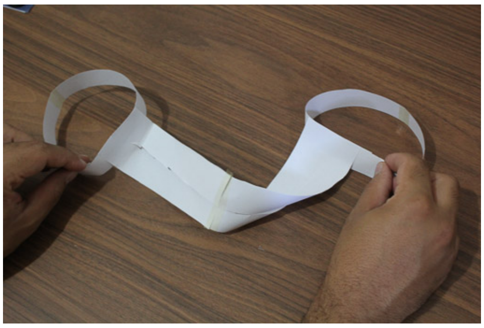
Figura 6.6: Faixas de Moebius opostas

Pergunta 3: Para os alunos perguntamos "O que acontece se cortarmos essas faixas juntas, ao meio", então executamos.

É normal que agora seja dito que a figura formada será igual a das **Pergunta 1** e **Pergunta 2** e o resultado provavelmente será uma grande surpresa para os alunos.

Figura 6.7: Faixa de Moebius e Faixa circular cortadas ao centro

Discutindo os resultados com os alunos é interessante tratar sobre os casos das perguntas 1 e 2. Fazendo os cortes de modo a separar duas figuras muito parecidas, uma semelhante a uma algema e outra uma algema torcida e mostramos como que com uma transformação contínua essas duas figuras são topologicamente as mesmas.



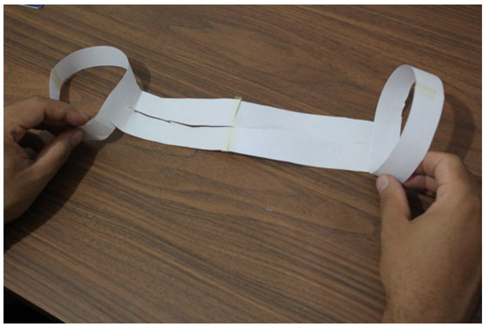


Figura 6.8: Processo corte das faixas

6.5 Atividade 2

Nesta atividade começamos a mostrar que algumas superfícies são diferentes das habituais e que os estudantes deverão pensar de maneira diferente. Outra habilidade tratada é como usar o resultado de um problema anterior pode ajudar na resolução de outro, sendo esta habilidade de suma importância em diversas áreas do conhecimento.

6.5.1 Clipes perplexos

Para esta atividade vamos precisar de:

- Uma folha de papel A4.
- Dois clipes de papel, grandes.
- Duas gominhas simples ou coloridas.
- Uma tesoura simples.

Inicialmente vamos dividir a folha de papel ao meio e corta-lá em duas partes, formando duas faixas. Vamos usar uma delas.

Essa é uma atividade investigativa, então vamos começar mostrando um caso inicial e para cada nova situação deixamos os alunos pensarem e tirarem suas conclusões.

1º Caso: Vamos fazer duas curvas com a faixa de papel e colar os clipes em cada uma das curvas como na figura **6.9**.

Agora puxamos as duas extremidades da faixa e os clipes serão conectados.

Figura 6.9: Curvas presas com clipes

Figura 6.10: Curvas presas com clipes - Rseultado

Este primeiro caso servirá como base para que os alunos respondam as próximas perguntas.

2º Caso: Agora vamos colocar uma gominha na primeira curva e repetir o processo do primeiro caso:

Figura 6.11: Curvas presas com clipes + gominha na curva caso 1

Pergunta1: “Como vão ficar os clipes e a gominha na folha de papel quando esticarmos?”

Puxando as duas extremidades temos agora a gominha, presa na faixa, com os dois clipes conectados. É possível que ainda não sejam feitas várias sugestões, pois os estudantes ainda estarão inseguros sobre o seu racíocinio. Por isto pode ser interessante direcionar a pergunta, caso não tenham muitas respostas. Pode ser sugerido como ficará a disposição: "Será clipe, clipe e gominha? Será clipe, gominha, clipe? A gominha vai ficar presa no papel?"

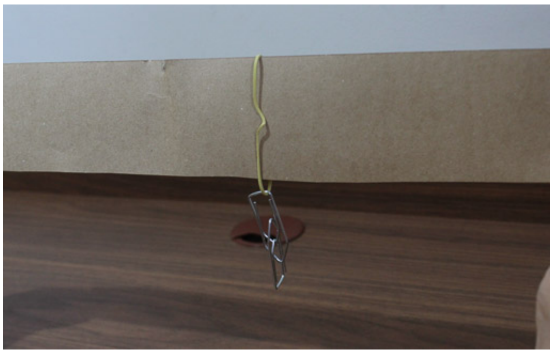


Figura 6.12: Curvas presas com clipes + gominha na curva caso 1 - Resultado

Nesta situação as respostam devem ser diversas e é interessante discutir cada uma delas.

3º Caso: Neste momento vamos colocar a gominha na segunda curva com os mesmos dois clipes.

Figura 6.13: Curvas presas com clipes + gominha na curva caso 2

Novamente, puxamos as duas extremidades ficando com a mesma disposição do caso anterior, gominha com dois clipes conectados, entretanto nesta situação a gominha não ficou presa na faixa de papel. Provavelmente surgirão mais respostas, pois os estudantes vão utilizar o caso anterior como base e essa habilidade de utilizar problemas anteriores para resolução de outras situações é muito interessante.

Figura 6.14: Curvas presas com clipes + gominha na curva caso 2 - Resultado

4º Caso: Agora, vamos colocar duas gominhas, uma como no caso 2 e uma como no caso 3, seguidas pelos mesmo dois clipes.

Figura 6.15: Curvas presas com clipes + 2 gominhas caso 1

Estendendo a faixa teremos a disposição gominha, clipes conectados e gominha. Esta conexão presa na faixa.

Figura 6.16: Curvas presas com clipes + 2 gominhas caso 1 - Resultado

5º Caso: Por fim, vamos tentar um caso parecido com o anterior, entretanto vamos ter duas gominhas na posição do caso 2, seguidas pelos dois clipes.

Figura 6.17: Curvas presas com clipes + 2 gominhas caso 2

Puxando as extremidades vamos ter a mesma sequência do caso anterior com as duas gominhas presas na faixa.

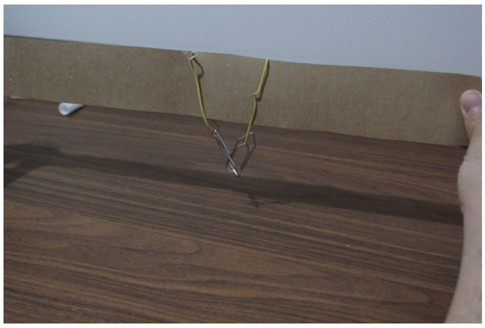


Figura 6.18: Curvas presas com clipes + 2 gominhas caso 2 - Resultado

Em cada situação os alunos irão olhar para superfície de uma maneira menos euclidiana e mais topológica, sempre usando o caso anterior para resolver o próximo. O conceito de dentro e fora é muito bem trabalhado e a atividade é estimulante e investigativa.

7

Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi estudar a Topologia e suas aplicações por meio de atividades lúdicas no Ensino Médio e, em alguns casos, no Ensino Fundamental.

Inicialmente foi feita uma introdução histórica sobre o tema relatando o problema das pontes de Königsberg apresentando a resolução do suíço Leonard Euler. Foi apresentado também a origem do termo Topologia e algumas aplicações.

Posteriormente foi feita uma breve apresentação dos conceitos matemáticos, o foco do trabalho é em como aplicar para a educação básica. Por este motivo não se fez necessário definir todos os conceitos topológicos a rigor, como por exemplo, compacidade e conexidade. Apenas foram tratados conceitos importantes para compreender as atividades propostas e superfícies topológicas estudadas.

A intenção final do projeto é trabalhar o assunto com alunos da Educação Básica e como aplicar era um desafio, foi decidido a aplicação com atividades lúdicas, sendo estas uma forma essencial no ensino da matemática segundo a BNCC. Além disso, uma das primeiras formas de relatos matemáticos da história foram de jogos e desafios.

Neste apecto de aplicação, foram feitas várias sugestões de atividades lúdicas. Foi sugerida também uma sequência didática para aplicação dinâmica de duas atividades, esta aplicação podendo ser feita de maneira presencial, híbrida ou remota, visto que, durante a realização deste trabalho estávamos no período da pandemia de Covid-19.

Por este trabalho podemos perceber que mesmo temas difíceis como a Topologia podem ser tratados com alunos da Educação Básica e isto pode ser um bom estimulante para várias áreas do conhecimento. Inclusive é da orientação nacional que áreas como a topologia sejam tratadas pelo novo Ensino Médio portanto, a intenção é que este trabalho seja uma boa consulta para aqueles que desejam fazer algo diferenciado em sala de aula.

Bibliografia

[1] BIGGS, N. L., LLOYD, E. K. e WILSON, R. J. "Graph Theory". *Oxford University Press* (1976).

[2] BRASIL. "Base Nacinonal Comum Curricular". *Ministério da Educação* (2018).

[3] CUNHA, B. R. "Study on Topology of Criminal Network". *Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFGRS* (2017).

[4] EULER, L. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* URL: http://eulerarchive.maa.org (acesso em 4 de mar. de 2021).

[5] LISTING, J. B. *Vorstudien zur Topologie.* Vandernhoeckund Ruprencht, GGottingen, 1848.

[6] LOPES, F. J. A. e TABOAS, P. Z. "Euler e as pontes de Königsberg". *REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA* (2015).

[7] NEWMAN, J. R. *The World of Mathematics.* Vol 1. Microsoft Press, 1988, pp. 564–571.

[8] O'CONNOR, J. J. e ROBERTSON, E. *Jogos e recriações matemáticas.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mathematical_games/ (acesso em 13 de mai. de 2021).

[9] VILCHES, M. *Topologia Geral.* Vol 1. IMA-UERJ.