

ELISABETH REGINA DE TOLEDO

**ESTRUTURAS DE COVARIÂNCIAS NO AJUSTE DE CURVAS DE
CRESCIMENTO DE BOVINOS DA RAÇA GUZERÁ**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

T649e
2018

Toledo, Elisabeth Regina de, 1977-

Estruturas de covariâncias no ajuste de curvas de
crescimento de bovinos da raça Guzerá / Elisabeth Regina de
Toledo. – Viçosa, MG, 2018.

xii, 99 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui anexo.

Inclui apêndice.

Orientador: Antônio Policarpo Souza Carneiro.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa.

Inclui bibliografia.

1. Análise de variância. 2. Guzerá (Bovino) - Crescimento -
Modelos matemáticos. 3. Bertalanffy, Modelo de.

4. Brasil, Nordeste. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Estatística. Programa de Pós-Graduação em
Estatística Aplicada e Biometria. II. Título.

CDD 22. ed. 519.53

ELISABETH REGINA DE TOLEDO

**ESTRUTURAS DE COVARIÂNCIAS NO AJUSTE DE CURVAS DE CRESCIMENTO
DE BOVINOS DA RAÇA GUZERÁ**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2018.

 _____ Paulo Luiz Souza Carneiro	 _____ Gustavo Henrique de Souza
 _____ Nelson Terra Santos	 _____ Paulo César Emídio (Coorientador)
 _____ Antônio Policarpo Souza Carneiro (Orientador)	

*I know the peace speaker,
I know Him by name!
He controls the wind and waves.
When He says: "peace be still",
They have to obey!
I'm glad I know the peace speaker,
Yes, I know Him by name!*
(Heritage Singers)

BIOGRAFIA

Professora Adjunta da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), possui graduação em Estatística (Bacharelado) pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) e mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica pela Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" (ESALQ/USP).

Durante o mestrado desenvolveu atividades didáticas para cursos de graduação e pós-graduação junto às disciplinas de Estatística Experimental, Cálculo para o curso de Economia Agroindustrial, Cálculo Diferencial e Integral para os cursos de Engenharia Agronômica e Florestal. Foi membro do Conselho do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agronômica na categoria de representante discente e bolsista pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES. Em sua dissertação trabalhou o tema: “*Mapeamento de QTLs utilizando as abordagens Clássica e Bayesiana*”.

Como Professora na UFMS, é responsável pelas disciplinas de Estatística, Métodos Quantitativos, Inferência Estatística e Modelagem Estatística para os cursos de Administração, Ciências Biológicas, C. Contábeis, Geografia, Matemática, Sistemas de Informação e Psicologia. Foi membro da comissão local responsável pela implementação e estruturação do curso de Sistemas de Informação no Campus do Pantanal da UFMS. Participou de diversas atividades administrativas, como Colegiados dos cursos de Graduação em Ciências Contábeis e Sistemas de Informação. Coordena o Laboratório de Estatística Aplicada/LEA, onde desenvolve atividades de ensino, pesquisa e extensão, que promoveu o evento “*Workshop sobre Estatística Computacional Aplicada à Investigação Científica: Diálogos Interdisciplinares*” que contou com a participação de pesquisadores de diversas áreas do conhecimento.

Atuou em 2011 como parecerista dos resumos de trabalhos apresentados na 9ª Jornada Científica e Tecnológica da UFSCar. Avaliou trabalhos apresentados na sessão de pôsteres em eventos promovidos pela Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS). Atualmente é revisora da Revista Brasileira de Biometria.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, doador da vida, da inteligência e de todos os recursos para a realização deste trabalho. Gratidão pela esperança, felicidade e paz.

Aos meus queridos pais: José de Oliveira (*in memorian*) e Elvira Bressiani de Oliveira (*in memorian*) pelo amor incondicional.

Ao Professor Dr. Antônio Policarpo Souza Carneiro pelo agradável convívio, pela orientação com sinceridade, ética, paciência e incentivo nos momentos críticos. Sou grata pela confiança depositada e pela oportunidade de realizar este trabalho, pois seus ensinamentos foram muito além dos “modelos não lineares mistos”. Obrigada pelo exemplo de liderança e de compromisso com a pesquisa.

Aos coorientadores: Dr. Carlos Henrique Mendes Malhado, Dr. Fabyano Fonseca e Silva e Dr. Paulo César Emiliano pelas preciosíssimas sugestões que enriqueceram significativamente a qualidade deste trabalho.

Ao Dr. Leonardo Siqueira Glória (Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro/UENF) pelas sugestões sobre a análise estatística utilizando o pacote *nlme* do software R e também pelas contribuições apresentadas durante o exame de qualificação.

Aos membros da banca examinadora Dr. Paulo César Emiliano, Dr. Nerilson Terra Santos, Dr. Gustavo Henrique de Souza e Dr. Paulo Luiz Souza Carneiro pelas sugestões que melhoraram a qualidade deste trabalho.

Aos membros suplentes de banca examinadora Dr. Sebastião Martins Filho e Dr. Leonardo Siqueira Glória.

À Prof.^a Carla Santana Arruda (Carlinha) pelo auxílio na configuração e edição deste trabalho e ao aluno Alexandre Urey Zenteno, por salvar a configuração de minha internet em pleno feriado de carnaval. A todos os meus queridos alunos, pela torcida.

À Universidade Federal de Viçosa, UFV, pela infraestrutura, especialmente ao Departamento de Estatística e ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria.

Ao assistente administrativo Junior José Pires pelas providências necessárias para que a defesa da tese fosse realizada.

À Márcia Ribeiro Irala e Daiana Salles Pontes, pela ajuda nos trâmites de entrega da versão final da tese junto à Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UFV.

À querida Dr.^a Salete Dias Gatti pelo acompanhamento profissional e espiritual durante os momentos críticos de execução deste trabalho. Obrigada por me ajudar a creditar que era possível a conclusão desta tese de doutorado.

Aos sempre amigos: Dr. Marcelo de Paula, Rosangela Cavalcante Cardoso, Nelma Tochetto, Pr. Olmir Tochetto, D. Marta Schincariol, Edna Soares, Luiz Franco pelas orações. Vocês são especiais!

À Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, pela concessão de meu afastamento por três anos para cursar o doutorado em Viçosa/MG e ao colega de trabalho Dr. Rogers Barros de Paula pela amizade e incentivo.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa de Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro concedido.

À Associação Brasileira de Criadores de Zebu (ABCZ) por disponibilizar os dados analisados neste trabalho

SUMÁRIO

RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. OBJETIVOS.....	3
3. REFERENCIAL TEÓRICO.....	4
3.1. Região Nordeste brasileira	4
3.2. Modelo linear misto (MLM).....	6
3.2.1. Especificação do modelo	7
3.2.2. Escolha da matriz de covariâncias	9
3.2.3. Estruturas da matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios, D	10
3.2.4. Estruturas da matriz de covariâncias residuais, R	12
3.3. Modelo não linear (MNL)	18
3.4. Características de dados de curvas de crescimento	19
3.5. Modelos não lineares mistos (MNLM).....	22
3.6. Aplicação dos MNLM para análise de curvas de crescimento	24
3.7. Avaliadores de qualidade de ajuste	25
3.7.1 Critério de informação de Akaike - AIC	25
3.7.2 Critério de informação de Akaike corrigido – AICc.....	26
3.7.3 Critério de informação Bayesiano - BIC	26
3.7.4 Coeficiente de determinação - R^2	27
3.7.5 Coeficiente de determinação ajustado - R^2_{aj}	27
3.7.6 Erro quadrático médio - EQM	27
3.7.7 Desvio médio absoluto – DMA	28
3.8. O software R e a biblioteca <i>nlme</i> (Nonlinear Mixed-Effects Models).....	29
3.8.1. Facilidades de programação	29
3.8.2. Métodos de estimação e inferência sobre os parâmetros.....	30
3.8.2.1 Máxima Verossimilhança (MV) e Máxima Verossimilhança Restrita (REML)	30
3.8.2.2. Algoritmos de maximização.....	31
3.8.3 Modelagem da matriz de covariâncias D para os efeitos aleatórios	31

3.8.4. Funções de variâncias para a modelagem da heterocedasticidade	32
3.8.5. Estruturas de correlação para modelagem de dependência	34
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	38
CAPÍTULO 1	47
Introdução.....	50
Materiais e métodos.....	51
Resultados e discussão	55
Conclusões.....	62
Agradecimentos	63
Referências bibliográficas	63
ANEXO	67
CAPÍTULO 2	70
Introdução.....	73
Materiais e métodos.....	74
Resultados e discussão	77
Conclusões.....	85
Agradecimentos	86
Referências bibliográficas	86
Apêndice A – Rotina no software R para a obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo não linear misto Von Bertalanffy, avaliadores da qualidade do ajuste e intervalos de confiança implementados no Capítulo 1	90
Apêndice B – Rotina no software R para a obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo não linear misto Von Bertalanffy, avaliadores da qualidade do ajuste e intervalos de confiança implementados no Capítulo 2	95

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –Regiões de Produção (RP) de bovinos de corte; (a) Mapa do Brasil; (b) RP's do Nordeste.....	5
Figura 2 –Evolução do efetivo de bovinos, segundo as Grandes Regiões, de 1985 a 2016. 6	
CAPÍTULO 1	47
Figura 1 - Descrição dos pesos de bovinos da raça Guzerá por classes de idade.	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Localização e número de regiões de produção homogêneas (MRH) que compõem as regiões de produção da pecuária bovina no Norte, Nordeste e Sudeste.....	4
Tabela 2 - Principais modelos não lineares mistos utilizados para descrever curvas de crescimento de bovinos	21
Tabela 3 - Classes <i>pdMat</i> de parametrizações de matrizes de covariâncias dos efeitos aleatórios da biblioteca <i>nlme</i> do R.....	32
Tabela 4 - Classes de funções de variâncias <i>varFunc</i> da biblioteca <i>nlme</i> do R	33
CAPÍTULO 1	47
Tabela 1 - Descrição dos dados por região de produção (RP): número de animais (N), Número médio de pesagens por animal (MPA), peso mínimo (Pmín), peso máximo (Pmáx), em kg, e idade máxima (Imáx), em dias.	52
Tabela 2 - Descrição dos pesos de bovinos da raça Guzerá por classes de idade, em dias (Idade): número de animais (n), Peso médio (PM), desvio-padrão dos pesos (DP), coeficiente de variação dos pesos (CV), peso mínimo (Pmín), peso máximo (Pmáx) e idade máxima (Imáx).	52
Tabela 4 - Componentes de variâncias do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade estruturas de correlação para modelagem de dependência dos erros.	58
Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros do modelo e erros padrões das estimativas Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando o modelo com variâncias homogêneas e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1).	60
Tabela 6 - Intervalos de 95% de confiança (IC) para os parâmetros estimados do modelo Von Bertalanffy com efeito fixo para região e sexo, efeito aleatório em β_1 , homogeneidade de variâncias e dependência de erros de primeira ordem para bovinos da raça Guzerá.	61
Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá por sexo e por regiões de produção, considerando	

diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade e estruturas de correlação para modelagem de dependência.	67
CAPÍTULO 2	70
Tabela 1 - Código e nomes das regiões de produção avaliadas neste trabalho.	75
Tabela 2 - Descrição dos dados por região de produção (RP): número de animais (n), Número médio de pesagens por animal (MPA), peso mínimo (Pmín), peso máximo (Pmáx) e idade máxima (Imáx).	75
Tabela 3 - Avaliadores da qualidade de ajuste do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando diferentes estruturas da matriz D para os efeitos aleatórios, funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade estruturas de correlação para modelagem de dependência.	79
Tabela 4 - Componentes de variâncias do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando diferentes estruturas da matriz D para os efeitos aleatórios, homogeneidade de variâncias para a matriz de covariâncias residuais, R e estrutura de correlação autorregressiva de primeira ordem, AR(1), para modelagem de dependência.	79
Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros do modelo e erros padrões das estimativas Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando homogeneidade de variâncias, estrutura de correlação AR(1) para modelagem de dependência dos erros e diferentes estruturas da matriz D para os efeitos aleatórios.....	82
Tabela 6 - Intervalos de 95% de confiança (IC) para os parâmetros estimados do modelo Von Bertalanffy com efeito fixo para região e sexo, efeito aleatório para o peso assintótico (β_1) e taxa de maturidade (β_3) para bovinos da raça Guzerá.....	84

RESUMO

TOLEDO, Elisabeth Regina de, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **Estruturas de covariâncias no ajuste de curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá.** Orientador: Antônio Policarpo Souza Carneiro. Coorientadores: Carlos Henrique Mendes Malhado, Fabyano Fonseca e Silva e Paulo César Emiliano.

Este trabalho teve como objetivo avaliar a qualidade de ajuste do modelo Von Bertalanffy, para curvas de crescimento, com diferentes funções de variâncias e matrizes de covariâncias residuais nas regiões do Nordeste brasileiro: Gado-Algodão, Mata, Agreste, Sertão, Serra Geral da Bahia e Itapetinga-Valadares e depois incorporar ao modelo ajustado diferentes estruturas da matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade. A comparação dos modelos foi através dos avaliadores de qualidade de ajuste: critérios de informação de Akaike, Akaike corrigido e Bayesiano, desvio médio absoluto, erro quadrático médio, coeficientes de determinação simples e ajustado. A estrutura da matriz de covariâncias residuais com variâncias homogêneas e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1) foi a mais adequada. Pela análise dos intervalos de confiança dos parâmetros de curvas de crescimento de cada região de produção identificou-se que machos das regiões Sertão e Serra Geral da Bahia possuem peso assintótico comum e taxa de maturidade comum nas regiões Serra Geral da Bahia, Itapetinga-Valadares e Sertão. Para fêmeas, as regiões de produção Gado-Algodão e Mata-Agreste apresentam menor peso assintótico; Serra Geral da Bahia, Sertão e Itapetinga-Valadares o maior peso. A menor taxa de maturidade é comum para fêmeas das regiões Mata-Agreste, Sertão e Serra Geral da Bahia enquanto as maiores taxas são para as regiões Itapetinga-Valadares e Gado-Algodão. Ao incorporar ao modelo diferentes estruturas da matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios, a estrutura de covariâncias positiva definida geral ajustou-se melhor aos dados. Através da análise dos intervalos de confiança dos parâmetros de curvas de crescimento de cada região verificou-se que machos das regiões Mata-Agreste e Gado-Algodão possuem peso assintótico comum e taxa de maturidade comum para os animais das regiões Itapetinga-Valadares e Sertão. As fêmeas apresentam pesos assintóticos diferentes em todas as regiões e taxa de maturidade comum nas regiões de produção Itapetinga-Valadares e Serra Geral da Bahia.

ABSTRACT

TOLEDO, Elisabeth Regina de, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018.
Covariance structures in the adjustment of growth curves of the cattle breed. Advisor: Antônio Policarpo Souza Carneiro. Co-Advisors: Carlos Henrique Mendes Malhado, Fabyano Fonseca e Silva and Paulo César Emiliano.

The objective of this study was to evaluate the quality of fit of the Von Bertalanffy model for growth curves for Guzerá cattle with different variance functions and residual covariance matrices from the Northeast Brazil regions: Gado-Algodão, Mata Agreste, Sertão, Serra Geral da Bahia and Itapetinga-Valadares, and then incorporate different covariance matrix structures for the random effects, asymptotic weight and maturity rate into the adjusted model. The comparison of the models through adjustment quality: Akaike information criteria, corrected Akaike and Bayesian, absolute mean deviation, mean square error, simple and adjusted determination coefficients. The structure with the most adequate residual matrix with homogeneous variances and first order autoregressive errors, AR(1). By analyzing the confidence intervals of the growth curve parameters of each production region, it was found that males from the Sertão and Serra Geral da Bahia have common asymptotic weight; maturity rate in Serra Geral da Bahia, Itapetinga-Valadares and Sertão. For females, the regions of production Gado-Algodão and Mata-Agrete show lower asymptotic weight; Serra Geral da Bahia, Sertão and Itapetinga-Valadares the largest weight. The maturity rate is common for females from the Mata-Agrete, Sertão and Serra Geral da Bahia (smaller) regions and larger for Itapetinga-Valadares and Gado-Algodão. By incorporating different covariance matrix structures into the model for random effects, the overall defined positive covariance structure fit the data better. Through the analysis of the confidence intervals of the parameters of growth curves of each region, it was verified that males from the Mata Agreste and Cattle-Cotton regions have common asymptotic weight and maturity rate for the animals of the Itapetinga-Valadares and Sertão regions . Females presented different asymptotic weights in all regions and a common maturity rate in Itapetinga-Valadares and Serra Geral da Bahia regions.

1. INTRODUÇÃO

Importada da Índia na década de 1870 a raça zebuína *Kankrej*, conhecida como Guzerá, foi a primeira a chegar ao Brasil. Possui aspecto geral de um animal vigoroso, ativo, de bom porte, com musculatura compacta, além de ossos fortes e finos. Essa raça pode ser considerada de aptidão mista, tanto para corte quanto para leite. Como gado leiteiro, criadores de rebanhos leiteiros de elite estão desenvolvendo esforços no sentido de otimizar a produção dos rebanhos. As fêmeas adultas podem ultrapassar uma produção de 5000kg de leite por lactação (BEEFPOINT, 2013). Já como gado de corte, apresenta bom desenvolvimento, alcançando excelentes pesos em diversos âmbitos, sendo assim muito apreciada. Pela alta rusticidade, animais dessa raça são de grande importância para a pecuária da região Nordeste.

O crescimento dos animais influencia diretamente na quantidade e qualidade da carne produzida. Estudos relacionados a curvas de crescimento têm aplicações estratégicas em programas de melhoramento genético na definição de critérios de seleção para precocidade e ganho de peso. Além disso, podem auxiliar na definição de sistemas de produção adequados para cada raça e região quanto ao manejo, programas alimentares, bem como na definição de cruzamentos (SOUZA *et al.*, 2010; SILVA *et al.*, 2001; PEREIRA, 2013).

As medidas de peso de bovinos distribuem-se ao longo do tempo de forma semelhante a curvas sigmóides e podem ser descritas por modelos que consideram a associação entre peso e idade (CARNEIRO *et al.*, 2014; SANTORO *et al.*, 2005). Dessa forma, há uma busca pelo modelo que se ajuste melhor aos dados. Para isso são utilizados avaliadores de qualidade de ajuste, os quais indicam estatisticamente qual o modelo mais adequado como, por exemplo os não lineares que geralmente fornecem um bom ajuste com menos parâmetros do que modelos lineares, além de apresentar parâmetros ou funções de parâmetros com interpretação biológica, facilitando o estudo acerca do peso adulto, velocidade de crescimento, pontos críticos de mudanças na velocidade de crescimento, etc.

Dentre as técnicas estatísticas utilizadas para o ajuste de curvas de crescimento, os modelos não lineares mistos, têm tido aplicação prática para identificação de animais mais eficientes (CRAIG & SCHINCKEL, 2001; AGGREY, 2009; MILANI *et al.*, 2013), sendo que, além de permitirem a utilização de funções não lineares para melhor explicação dos fenômenos, consideram também a variabilidade entre e dentro dos indivíduos, permitindo

com isso, estimativa eficiente com menor viés. Os modelos não lineares mistos também possibilitam descrever trajetórias de interesse por meio de modelos não lineares e simultaneamente efetuar correções da variação intra-indivíduo por meio da adoção de estruturas de covariâncias específicas, optando-se por aquela que melhor representa a estrutura de correlação dos dados, e também permite descrever o comportamento médio dos perfis através de curvas (GLÓRIA, 2014; PEREIRA *et al.*, 2014).

A suposição de que as medidas de uma característica distribuem-se ao longo do tempo poderia ser compreendida como estando sob mudança contínua e isso poderia ser interpretado como um comportamento de dimensão infinita, cuja representação seria feita por um modelo infinitesimal e, conseqüentemente, haveria a necessidade de uma matriz de covariâncias de dimensão infinita (KIRKPATRICK *et al.*, 1990). Uma alternativa é incorporar ao modelo uma função de variâncias, que descreve o comportamento dos parâmetros da matriz de covariâncias em qualquer ponto desejado, inclusive os não observados (LONGFORD, 1993). Tais funções reduzem o número de parâmetros a serem estimados e, conseqüentemente, diminuem o esforço computacional, além de facilitar para o pesquisador a compreensão dos resultados obtidos (LONGFORD, 1993; SANTORO & BARBOSA, 2010).

2. OBJETIVOS

O objetivo geral deste estudo foi avaliar a aplicabilidade de modelos não lineares mistos para descrever curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá de diferentes regiões de produção do Nordeste brasileiro.

Os objetivos específicos ao estudo são:

- Comparar diferentes estruturas da matriz de covariâncias residuais para o ajuste dos modelos Von Bertalanffy no crescimento de bovinos machos e fêmeas da raça Guzerá de cinco regiões de produção do Nordeste brasileiro, utilizando estruturas de correlação para modelagem de dependência dos erros e funções de variância para modelagem de heterogeneidade de variâncias, para então comparar as curvas de crescimento entre as regiões de produção através dos intervalos de confiança dos parâmetros.
- Comparar diferentes estruturas da matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, no ajuste do modelo Von Bertalanffy para bovinos machos e fêmeas da raça Guzerá de cinco regiões de produção do Nordeste brasileiro e comparar as curvas de crescimento entre as regiões de produção através dos intervalos de confiança.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. Região Nordeste brasileira

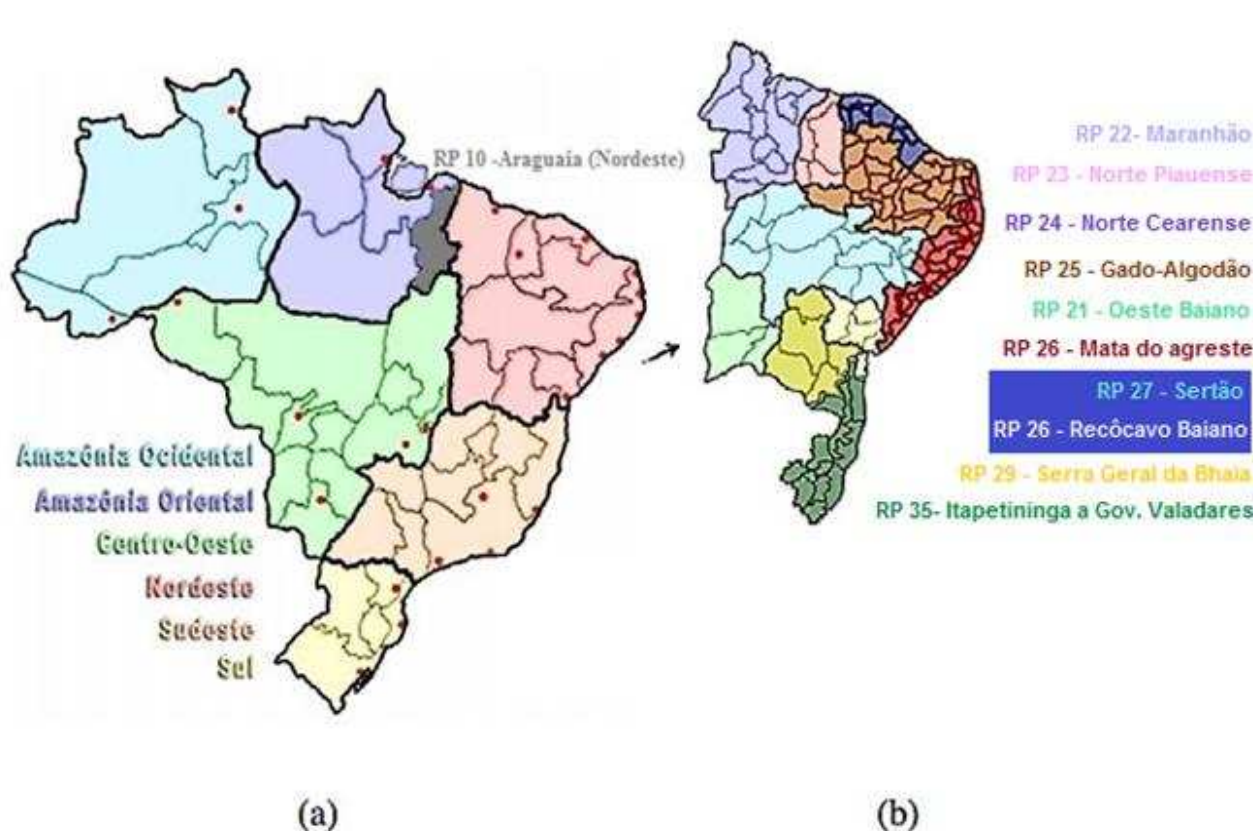
Arruda & Sugai (1994) efetuaram a regionalização da pecuária bovina no Brasil, identificando e caracterizando 44 regiões de produção com características homogêneas quanto ao sistema de produção e ambiente geral de criação. No Nordeste foram identificadas 11 regiões de produção (RP), sendo que duas abrangem parte de Estados vizinhos como Goiás, Minas Gerais e Espírito Santo. A subdivisão do país em regiões de produção da pecuária bovina, utilizou componentes dos sistemas de produção e dados de regiões de produção homogêneas. Essas regiões, em número de 361 para todo o Brasil, são definidas pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), como sendo “áreas que agrupam dentro de um mesmo Estado ou território, municípios com características físicas, sociais e econômicas de certa homogeneidade”. As regiões de produção foram formadas pela agregação de regiões de produção homogêneas semelhantes quanto ao processo produtivo da pecuária bovina (Tabela 1 e Figura 1).

Tabela 1 – Localização e número de regiões de produção homogêneas (MRH) que compõem as regiões de produção da pecuária bovina no Norte, Nordeste e Sudeste.

Regiões de produção (RP)	N. de MRH	Estados
RP 21 – Oeste Baiano	3	BA
RP 22 - Maranhão	13	MA
RP 23 – Norte Piauiense	5	PI
RP 24 – Norte Cearense	9	CE
RP 25 – Gado-Algodão	33	CE, RN, PB, PE e PI
RP 26 – Mata e Agreste	32	RN, PB, PE, AL, SE e BA
RP 27 – Sertão	15	PI, BA e PE
RP 28 – Recôncavo Baiano	5	BA
RP 29 – Serra Geral da Bahia	5	BA
¹ RP 19 - Tocantins	6	MA e GO
¹ RP 35– Itapetinga-Valadares	13	MG, ES e BA

¹As regiões de produção RP 19 e RP 35 abrangem Estados vizinhos da região Nordeste.

Neste trabalho foram avaliados os dados referentes ao peso corporal de bovinos da raça Guzerá, criados nas regiões de produção da região Nordeste brasileira com maiores densidades desses bovinos: Gado-Algodão (GA), Mata-Agrete (AG), Sertão (SE), Serra Geral da Bahia (SB) e Itapetinga-Valadares (IV).

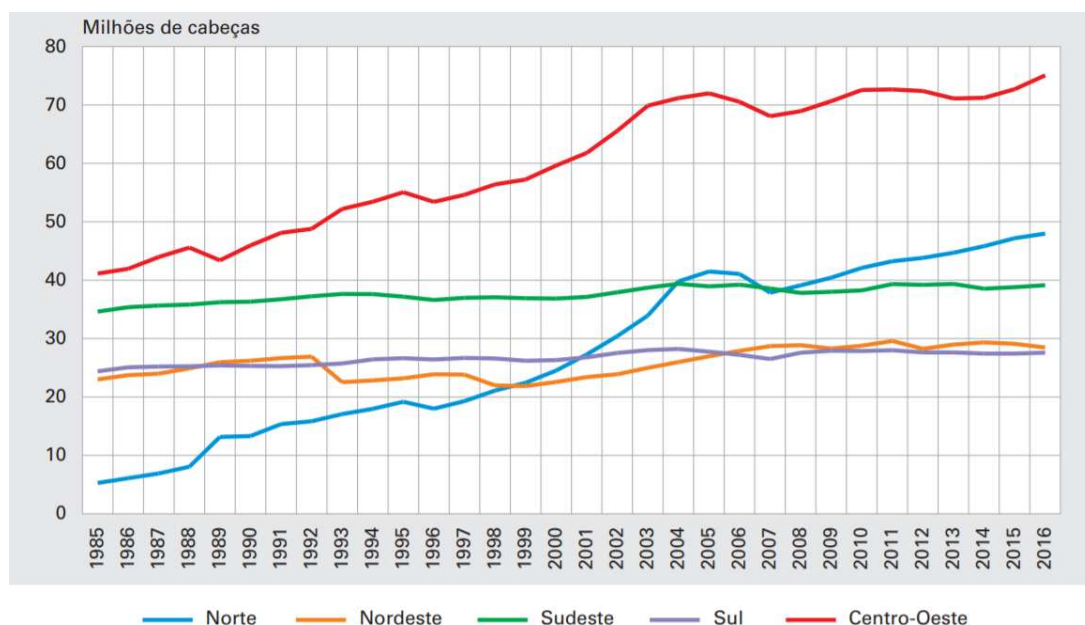


Fonte: ARRUDA & SUGAI (1994) apud RODRIGUES, 2012. Modificado pela autora.

Figura 1—Regiões de Produção (RP) de bovinos de corte; (a) Mapa do Brasil; (b) RP do Nordeste.

A região Nordeste abrange grande área do território nacional, apresentando uma grande diversidade de ambientes. Essa diversidade tem reflexos diretos e importantes nas características da pecuária de corte desenvolvida na região, de modo que a avaliação do crescimento dos animais torna-se cada vez mais importante para aumentar a eficiência da atividade. É pioneira na criação de bovinos no Brasil e apresenta áreas de alta e baixa densidade desses animais. Os maiores rebanhos bovinos estão na Bahia, Maranhão e Pernambuco. Porém, frequentemente os produtores do sertão têm prejuízo devidos às

constantes intempéries climáticas. A Figura 2 apresenta a evolução do efetivo de bovinos por grandes regiões brasileiras, de 1985 a 2016.



Fonte: IBGE, Diretoria de pesquisas, coordenação de agropecuária, Pesquisa da pecuária municipal

Figura 2 – Evolução do efetivo de bovinos, segundo as Grandes Regiões, de 1985 a 2016.

Através da Figura 2 pode ser verificado que o rebanho de bovinos teve a maior expansão da série histórica. O efetivo nacional de bovinos atingiu a marca de 218,2 milhões de cabeças, a maior desde 1974, quando começou a série histórica. O Centro-Oeste continuou a liderar o plantel de bovinos entre as Grandes Regiões, com 34,4% do total nacional e crescimento de 3,3% em relação ao ano anterior, enquanto a Região Nordeste foi a única que sofreu redução (-2,1%).

3.2. Modelo linear misto (MLM)

Um modelo linear que apresenta somente fatores de efeitos fixos, além do erro experimental, que é sempre aleatório, é denominado modelo fixo. Os modelos que apresentam apenas fatores de efeitos aleatórios, exceto de uma constante inerente a todas observações (como a média populacional, por exemplo), que é sempre fixa, é denominado aleatório.

O modelo linear misto é aquele que apresenta tanto fatores de efeitos fixos e aleatórios, além do erro experimental e do fator referente ao parâmetro da constante

inerente a todas observações. São aplicáveis em situações em que a variável resposta refere-se, por exemplo, ao peso de pessoas com idades de 30, 40, 50 e 60 anos, cujas medidas são tomadas na mesma pessoa em diferentes tempos. Essas medidas tomadas na mesma pessoa em diferentes tempos, podem ser mais parecidas entre si do que medidas tomadas em diferentes pessoas, fazendo com que, possivelmente, elas sejam correlacionadas (DOBSON, 2002). Se a variável resposta do modelo tem ambos efeitos, fixo e aleatório, a correlação entre as observações é ocasionada devido aos efeitos aleatórios (UEDA, 2003).

Um modelo linear misto (MLM), portanto, é um modelo linear paramétrico utilizado para descrever a relação entre uma variável contínua dependente e uma ou mais variáveis preditoras em dados agrupados, longitudinais, ou medidas repetidas. Podem ser incorporados parâmetros de efeito fixo associados a uma ou mais covariáveis contínuas ou categóricas e parâmetros de efeito aleatório associados a um ou mais fatores aleatórios, que são diretamente utilizados na modelagem da variação aleatória na variável dependente em diferentes níveis de dados. (WEST *et al.*, 2007).

Esses modelos podem ser encarados como uma extensão dos modelos lineares através da introdução de efeitos aleatórios, os quais permitirão a incorporação de mais um tipo de erro, que levam em consideração a correlação entre observações dentro de um mesmo grupo. Quando os dados experimentais são estruturados hierarquicamente em diversos níveis de efeitos aleatórios, tais modelos são denominados de efeitos mistos multiníveis.

3.2.1. Especificação do modelo

A seguir, apresenta-se uma introdução aos modelos lineares e não lineares que serão ajustados no estudo das curvas de crescimento

Notação geral

Considere um modelo linear de efeitos mistos para dados longitudinais. Nessa especificação, y_{ti} representa a medida de uma variável aleatória contínua y , dada no t -ésimo tempo para o i -ésimo indivíduo (1):

$$y_{ti} = \underbrace{\beta_1 \times X_{ti}^{(1)} + \beta_2 \times X_{ti}^{(2)} + \dots + \beta_p \times X_{ti}^{(p)}}_{FIXO} + \underbrace{b_{1i} \times Z_{ti}^{(1)} + \dots + b_{qi} \times Z_{ti}^{(q)}}_{ALEATÓRIO} + e_i \quad (1)$$

sendo y_{ti} o valor observado de t índices das n_i observações de um determinado indivíduo, ($t = 1, \dots, n_i$); i ($i = 1, \dots, m$) indica o i -ésimo indivíduo (unidade de análise). Supondo que o modelo envolva dois conjuntos de covariáveis, X e Z , o primeiro conjunto contém p covariáveis, $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$, associados aos efeitos fixos $\beta_1, \dots, \beta_p$. O segundo conjunto contém q covariáveis $Z^{(1)}, \dots, Z^{(q)}$, associados aos efeitos aleatórios $b_{1i}, \dots, b_{qi}$, especificados no indivíduo i . Para cada covariável X , $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$, os termos $X_{ti}^{(1)}, \dots, X_{ti}^{(p)}$ representam o nível da t -ésima covariável correspondente para o i -ésimo indivíduo. Essas p covariáveis podem ser características invariantes no tempo (por exemplo, sexo) de um indivíduo, ou variáveis no tempo para cada medição (por exemplo, peso em cada tempo); e_i é o erro aleatório.

Notação matricial

Matricialmente, o modelo linear misto geral descrito em Harville (1977) e em Laird & Ware (1982) será descrito a seguir. Seja y , o vetor de observações de dimensão ($n \times 1$) da variável resposta para o i -ésimo grupo. O modelo linear misto (1) é denotado matricialmente por (2):

$$y = \underbrace{X\beta}_{FIXO} + \underbrace{Zb + e}_{ALEATÓRIO} \quad (2)$$

sendo X a matriz (conhecida) de delineamentos ($n \times p$), β é o vetor de parâmetros ($p \times 1$) associado aos efeitos fixos desconhecidos; Z é a matriz conhecida de incidências ($n \times q$) de covariáveis dos efeitos aleatórios; b é o vetor de parâmetros ($q \times 1$) associado aos efeitos aleatórios desconhecidos; e é o vetor de variáveis aleatórias não observáveis ($n \times 1$), ou seja, é o vetor de erros aleatórios não observáveis *intra-indivíduos* ou dentro de indivíduos, considerando-se n o número de observações, p o número de parâmetros e q o número de efeitos aleatórios.

É suposto que os efeitos aleatórios (b) e os erros (e) têm distribuição normal com média zero e não correlacionados, com matrizes de covariâncias D e R , respectivamente,

dadas por:

$$Var(\mathbf{b}) = E[\mathbf{b}\mathbf{b}'] = \mathbf{D} \text{ e } Var(\mathbf{e}) = E[\mathbf{e}\mathbf{e}'] = \mathbf{R}$$

ou ainda

$$Var \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a variância V do vetor $\mathbf{y}$ de observações é dada por:

$$\begin{aligned} V = Var(\mathbf{y}) &= Var(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{e}) \\ &= Var(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + Var(\mathbf{Z}\mathbf{b}) + Var(\mathbf{e}) \\ &= 0 + \mathbf{Z}Var(\mathbf{b})\mathbf{Z}' + Var(\mathbf{e}) \\ &= \mathbf{Z}\mathbf{D}\mathbf{Z}' + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Supondo que $V = \mathbf{Z}\mathbf{D}\mathbf{Z}' + \mathbf{R}$ é matriz não-singular e também

$$E[\mathbf{y}] = E[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{e}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (3)$$

Temos que $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}; \mathbf{Z}\mathbf{D}\mathbf{Z}' + \mathbf{R})$.

A combinação das matrizes $\mathbf{R}$ e $\mathbf{D}$ permite a construção de outras estruturas mais complexas, contribuindo significativamente para melhorias da explicação da variabilidade dos dados (DAVIDIAN; GILTIAN, 1995; WYZYKOWSKI *et al.*, 2015).

3.2.2. Escolha da matriz de covariâncias

Uma vantagem do uso dos modelos lineares e não lineares mistos é a possibilidade de escolha que se tem com relação às estruturas a serem usadas para a matriz de covariâncias $\mathbf{R}$ atribuídas à variabilidade intra-indivíduos (WOLFINGER, 1993, apud WYZYKOWSKI, 2015), cuja utilização é útil na interpretação da variação aleatória nos dados para fazer inferência. No modelo misto clássico tem-se $\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{I}$, sendo $\mathbf{I}$ com dimensão $(n \times n)$ e $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal contendo os componentes de variâncias. Contudo, o modelo linear misto clássico é apenas um caso especial do modelo linear misto geral, que permite a escolha das estruturas de covariâncias em $\mathbf{D}$ e em $\mathbf{R}$ (CAMARINHA FILHO, 2003), que serão descritas a seguir. Essa escolha depende da forma em que os dados foram coletados. Quando tais estruturas são parcimoniosas, sua escolha torna-se mais vantajosa se comparada com uma estrutura geral, pois possibilita a utilização de estruturas mais adequadas ao fenômeno, além de aliviar os aspectos computacionais com

os modelos mais parcimoniosos. Uma superparametrização da estrutura de covariância e do modelo leva a estimativas ineficientes dos efeitos fixos, enquanto uma especificação demasiado restritiva invalida inferências sobre esses efeitos (OGLIARI e ANDRADE, 2001; UEDA, 2003; UEDA, *et al.* 2010). Tal escolha é, portanto, um dos aspectos mais importantes relativos ao uso de qualquer classe de modelos mistos adequada. Existem diversas estruturas para $\mathbf{D}$ propostas na literatura e a escolha deve considerar os seguintes aspectos:

1. a variabilidade devida aos efeitos aleatórios, quando as unidades amostrais compõem uma amostra aleatória de uma população;
2. a variabilidade que pode ser explicada pela correlação serial, no sentido de se esperar que quanto maior a distância entre as medições tomadas, menor será correlação entre elas;
3. a variabilidade devida aos erros de medida (BOECK, 2001, *apud* DIGGLE *et al.*, 2002).

3.2.3. Estruturas da matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios, $\mathbf{D}$

A matriz de covariâncias $\mathbf{D}$ para o vetor $\mathbf{b}$ de efeitos aleatórios é quadrada de ordem q , ou seja, $(q \times q)$, simétrica e positiva definida. É composta por variâncias em sua diagonal principal, associadas a cada efeito aleatório em $\mathbf{b}$. Os demais elementos representam as covariâncias entre dois efeitos aleatórios correspondentes $\mathbf{D}$ (WEST *et al.*, 2007).

$$\mathbf{D} = Var(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} Var(b_{11}) & Cov(b_{12}, b_{21}) & \dots & Cov(b_{1q}, b_{q1}) \\ Cov(b_{12}, b_{21}) & Var(b_{22}) & \dots & Cov(b_{2q}, b_{q2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(b_{1q}, b_{q1}) & Cov(b_{2q}, b_{q2}) & \dots & Var(b_{qq}) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Uma matriz $\mathbf{D}$ sem restrições adicionais nos valores de seus elementos (além de ser simétrica e positiva definida) é dita ser uma matriz $\mathbf{D}$ não estruturada. Os elementos de $\mathbf{D}$ são definidos como funções de um conjunto com parâmetros de covariâncias armazenado em um vetor denotado por $\boldsymbol{\theta}_D$. Através desse vetor $\boldsymbol{\theta}_D$ é possível impor diferentes estruturas ou restrições acerca dos elementos da matriz $\mathbf{D}$. Um exemplo pode ser dado:

$$\mathbf{D} = \text{Var}(\mathbf{b}) = [\sigma_{b_i}^2] = \begin{bmatrix} \sigma_{b_1}^2 & \sigma_{b_1, b_2} \\ \sigma_{b_1, b_2} & \sigma_{b_2}^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Neste caso, o vetor $\boldsymbol{\theta}_D$ contém três parâmetros de covariância:

$$\boldsymbol{\theta}_D = \begin{bmatrix} \sigma_{b_1}^2 \\ \sigma_{b_1, b_2} \\ \sigma_{b_2}^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Podemos definir outras estruturas mais parcimoniosas para a matriz $\mathbf{D}$ impondo restrições sobre ela. Por exemplo, há situações nas quais os componentes de variância de $\mathbf{D}$ são estruturados de tal forma que cada efeito aleatório em $\mathbf{b}$ tem sua própria variância e todas as covariâncias em $\mathbf{D}$ são iguais a zero, portanto, $\mathbf{D}$ será uma matriz diagonal. O vetor $\boldsymbol{\theta}_D$ será composto por dois parâmetros: $\sigma_{b_1}^2$ e $\sigma_{b_2}^2$. Neste caso, os efeitos aleatórios b_1 e b_2 são considerados independentes entre si, a matriz $\mathbf{D}$ será diagonal. Este modelo é particularmente útil, principalmente na análise de blocos casualizados com parcelas subdivididas, cuja estrutura evita problemas de convergência (PINHEIRO; BATES, 2000).

A estrutura de modelos de efeitos aleatórios é útil por apresentar flexibilidade para a modelagem de dados não balanceados, incompletos e irregulares, como é o caso de pesagens de bovinos.

A forma geral do modelo é dada pela expressão (2), para o qual temos que:

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{ZDZ}' + \mathbf{R},$$

de modo que

$$\text{Var}(\mathbf{y}_i) = \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{D} \mathbf{Z}_i' + \sigma_b^2 \mathbf{I}_{t_i}.$$

Neste caso, o número de parâmetros a serem estimados é igual ao número de parâmetros distintos de $\mathbf{D}$ mais um, em geral, menos do que $t(t+1)/2$ para a estrutura geral.

Um caso particular dos modelos de efeitos aleatórios é quando se toma $\mathbf{Z}_i = \mathbf{1}_j$, vetor $t_i \times 1$ e $\mathbf{D} = \sigma_e^2$, ou seja, $\boldsymbol{\Sigma}_i = \sigma_e^2 \mathbf{1}\mathbf{1}' + \sigma_b^2 \mathbf{I}_{t_i}$. Essa estrutura de covariância é conhecida como estrutura de simetria composta para modelo com efeito aleatório (UEDA, 2003):

$$\mathbf{\Sigma} = [\sigma^2] = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $\sigma^2 = \sigma_b^2 + \sigma_e^2$ em que σ_b^2 são as variâncias dos coeficientes de efeito aleatório e σ_e^2 a variância dos erros e $\rho = \sigma_e^2 / (\sigma_e^2 + \sigma_a^2)$ o parâmetro de autorregressivo, ou seja, o coeficiente de correlação entre quaisquer duas observações realizadas em uma unidade amostral, satisfazendo $|\rho| < 1$. Neste caso, a suposição válida é que as variâncias e as correlações da variável resposta são constantes nas ocasiões de observação. A partir dessa representação é possível construir outras estruturas de covariâncias, especificando-se as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{Z}_i$.

Utilizando a biblioteca *nlme* do software R, diferentes modelos poderão ser ajustados, à medida em que utilizadas especificações referentes a estruturas da matriz de covariâncias $\mathbf{D}$ para os efeitos aleatórios (WYZYKOWSKI *et al.*, 2015):

Diagonal (D, argumento `pdDiag`); Identidade múltipla (Id, argumento `pdIdent`); Positiva definida geral (PD, argumento `pdSymm`). Segundo Barbosa (2009), a classe `pdSymm`, pode ser utilizada pelo argumento *random* na biblioteca *nlme* do R para representar a matriz $\mathbf{D}$ não estruturada associada aos efeitos aleatórios e Simetria composta (SC, argumento `pdCompSymm`).

3.2.4. Estruturas da matriz de covariâncias residuais, $\mathbf{R}$

Nesta seção serão apresentadas algumas estruturas alternativas da matriz de covariâncias $\mathbf{R}$ para o vetor aleatório dos erros *intra-indivíduos* (dentro) , $\mathbf{e}$:

1. Estrutura diagonal com homogeneidade de variâncias (CV): Também denotada por estrutura de componentes de variâncias (CV), é uma estrutura em que se tem variâncias iguais na diagonal principal e covariâncias iguais a zero, pois supõe que os dados são independentes, ou seja, que as observações são não correlacionadas, e homogeneidade de variâncias entre os componentes, para cada ponto t_i no tempo. Neste caso, o parâmetro θ_R de interesse é dado por $\theta_R = [\sigma^2]$, no qual $\sigma^2 = \sigma_{erro}^2 = \sigma_e^2$.

$$\mathbf{R} = Var(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

sendo que σ^2 representa a variância comum a todas as observações, dada por $\sigma^2 = \sigma_{erro}^2 = \sigma_e^2$ e $\mathbf{I}$ a matriz identidade.

Considerando análise de dados com medidas repetidas, supondo $t = 4$ medidas tomadas de um mesmo indivíduo, a estrutura de covariâncias será

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ & \sigma^2 & 0 & 0 \\ & & \sigma^2 & 0 \\ & & & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

2. Estrutura diagonal com heterogeneidade de variâncias, (CSH): conserva a suposição de independência, porém admite que as variâncias sejam heterogêneas.

$$\mathbf{R} = Var(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_t^2 \end{bmatrix}.$$

Para $t = 4$, temos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ & \sigma_2^2 & 0 \\ & & \sigma_3^2 & 0 \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}.$$

3. Simetria composta (SC): Frequentemente usada para a matriz $\mathbf{R}$, é uma estrutura homogênea, com igualdade de variâncias nas t ocasiões e mesma covariância entre as medidas feitas em ocasiões distintas, ou seja, as covariâncias são constantes entre quaisquer observações de uma mesma unidade devido aos erros independentes. A forma geral desta estrutura é dada por:

$$\mathbf{R} = Var(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \dots & \sigma_1^2 \\ \sigma_1 & \sigma^2 + \sigma_1^2 & \dots & \sigma_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 & \sigma_1 & \dots & \sigma^2 + \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Para $t = 4$, temos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ & \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ & & \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ & & & \sigma^2 + \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

sendo $\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2 + \sigma_1^2}$ o coeficiente de correlação entre quaisquer duas observações realizadas em uma unidade amostral.

Na estrutura de covariâncias da Simetria Composta, o vetor $\boldsymbol{\theta}_R$ contém dois parâmetros que definem a variância e a covariância da matriz $\mathbf{R}$:

$$\boldsymbol{\theta}_R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Note que na estrutura de simetria composta os n resíduos associados aos valores da resposta observados para o i -ésimo sujeito apresentam, supostamente, covariância σ_1 constante e uma variância $\sigma^2 + \sigma_1^2$. Tal estrutura é frequentemente utilizada quando é plausível a suposição de que as correlações residuais são iguais. Por exemplo, ensaios repetidos em um experimento sob mesmas condições (WEST *et al.*; 2007), como o delineamento em blocos casualizados, para os quais o efeito de blocos é aleatório.

4. Simetria composta heterogênea (SCH): É uma estrutura que impõe parâmetros de variâncias diferentes para cada elemento da diagonal principal e raiz quadrada desses parâmetros nos elementos fora da diagonal principal, sendo σ_i^2 o i -ésimo parâmetro da variância e ρ representa a correlação entre as medições, satisfazendo $|\rho| < 1$. Envolve $t + 1$ parâmetros. Para $t = 4$, a forma desta estrutura é dada por:

$$\mathbf{R} = Var(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_1\sigma_3\rho & \sigma_1\sigma_4\rho \\ & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\rho & \sigma_2\sigma_4\rho \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4\rho \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}.$$

Na estrutura de covariâncias da Simetria Composta Heterogênea, o vetor $\boldsymbol{\theta}_R'$. Para $t = 4$ contém $t + 1 = 5$ parâmetros que definem a variância e a covariância da matriz $\mathbf{R}$:

$$\boldsymbol{\theta}_R^T = [\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \sigma_3^2 \ \sigma_4^2 \ \rho].$$

5. Autorregressiva de primeira ordem, AR(1), representa homogeneidade de variâncias nas diversas ocasiões e correlação decrescente com o aumento do número de intervalo entre as ocasiões, de modo que quanto mais distantes as observações estão entre si, menor será a correlação entre elas. Deve ser utilizada somente quando as observações forem igualmente espaçadas, no tempo ou no espaço. Sua forma geral é dada por:

$$\mathbf{R} = Var(\mathbf{e}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{t-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{t-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{t-1} & \rho^{t-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $t = 4$, temos

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ & 1 & \rho & \rho^2 \\ & & 1 & \rho \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

A estrutura AR(1) tem apenas dois parâmetros no vetor $\boldsymbol{\theta}_R$ que definem a variância e a covariância da matriz $\mathbf{R}$:

$$\boldsymbol{\theta}_R = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \rho \end{bmatrix}.$$

6. Autorregressiva heterogênea de primeira ordem, ARH(1), é uma generalização da estrutura AR(1), considerando heterogeneidade de variâncias nas diversas ocasiões. Sua forma para $t = 4$ é dada por:

$$\mathbf{R} = \text{Var}(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_1\sigma_3\rho^2 & \sigma_1\sigma_4\rho^3 \\ & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\rho & \sigma_2\sigma_4\rho^2 \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4\rho \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

A estrutura ARH(1) tem $t + 1 = 5$ parâmetros no vetor $\boldsymbol{\theta}_R$ que definem a variância e a covariância da matriz $\mathbf{R}$:

$$\boldsymbol{\theta}_R^T = [\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \sigma_3^2 \ \sigma_4^2 \ \rho].$$

7. Estrutura geral ou não estruturada (UN): estrutura de covariância mais complexa e mais geral em que todas as variâncias e covariâncias podem ser diferentes entre si.

$$\mathbf{R} = \text{Var}(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1t} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1t} & \sigma_{2t} & \dots & \sigma_t^2 \end{bmatrix}.$$

Para $t = 4$, temos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}.$$

no qual σ_k^2 representa a variância dos componentes aleatórios, ou seja, a variância das observações realizadas no k -ésimo instante para $k = 1, \dots, t$, (sendo t é o número máximo de medidas tomadas em um mesmo indivíduo), σ_{ki} : covariância entre as observações realizadas nos instantes k e i , para $k = 1, \dots, t$ e $i = 1, \dots, t$. Essa estrutura envolve $t(t+1)/2$ parâmetros. Para $t = 4$, temos 10 parâmetros a serem estimados, contidos no vetor $\boldsymbol{\theta}_R^T = [\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \sigma_3^2 \ \sigma_4^2 \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{14} \ \sigma_{23} \ \sigma_{24} \ \sigma_{34}]$.

8. Toeplitz (TOEP): estrutura frequentemente utilizada, pois permite maior flexibilidade entre as correlações, à custa da utilização de um maior número de parâmetros de covariâncias sobre o vetor $\boldsymbol{\theta}_R$. Para $t = 4$, temos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ & \sigma_1^2 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ & & \sigma_1^2 & \sigma_2 \\ & & & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

A estrutura de Toeplitz pode ser vista como uma estrutura de médias móveis de ordem $q = t - 1 = 3$. Envolve t parâmetros a serem estimados, contidos no vetor $\boldsymbol{\theta}_R^T = [\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$. A estrutura de Toeplitz também pode ser vista como uma estrutura de médias móveis com ordem igual ao tamanho da matriz. (CAMARINHA FILHO, 2002).

9. Toeplitz Heterogênea (TOEPH): estrutura associada a dados de séries temporais igualmente espaçados, com parâmetros de variâncias diferentes para cada elemento da diagonal, sendo os elementos fora da diagonal principais funções de variâncias e do k -ésimo parâmetro de autocorrelação parâmetros a serem estimados, contidos no vetor $\boldsymbol{\theta}_R^T = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \rho_1, \rho_2, \rho_3]$, satisfazendo $|\rho_k| < 1$. Para $t = 4$, temos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_1 & \sigma_1\sigma_3\rho_2 & \sigma_1\sigma_4\rho_3 \\ & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\rho_1 & \sigma_2\sigma_4\rho_2 \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4\rho_1 \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}.$$

10. Autorregressiva de primeira ordem com média móvel, ARMA(1,1): estrutura associada a dados de séries temporais com parâmetro autorregressivo ρ , componente de médias móveis γ , sendo σ^2 a variância residual. Envolve três parâmetros a serem estimados, contidos no vetor $\boldsymbol{\theta}_R^T = [\rho, \gamma, \sigma^2]$. Para $t = 4$, temos:

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma\rho & \gamma\rho^2 \\ & 1 & \gamma & \gamma\rho \\ & & 1 & \gamma \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Antedependência de ordem 1, ANTE1: Essa estrutura permite que as variâncias sejam diferentes e é aplicável em estudos de dados longitudinais em que as condições de avaliação não são igualmente espaçadas, apresentam heterogeneidade de variâncias e correlação serial. Impõe parâmetros de variâncias diferentes para cada elemento da

diagonal, sendo os elementos fora da diagonal principal funções de variâncias e do k -ésimo parâmetro de autocorrelação. Envolve $2t - 1$ parâmetros a serem estimados, contidos no vetor $\theta_R^T = [\sigma_1^2, \sigma_1^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \rho_1, \rho_2, \rho_3]$, satisfazendo $|\rho_k| < 1$. Para $t = 4$, temos:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_1 & \sigma_1\sigma_3\rho_1\rho_2 & \sigma_1\sigma_4\rho_1\rho_2\rho_3 \\ & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\rho_2 & \sigma_2\sigma_4\rho_2\rho_3 \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4\rho_3 \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}.$$

12. Huynh-Feldt (HF) é uma estrutura similar a Simetria Composta Heterogênea, que tem o mesmo número de parâmetros e heterogeneidade ao longo da diagonal principal porém, a construção dos elementos fora da diagonal principal (covariâncias) é feita tomando-se a média aritmética entre as variâncias e subtraindo λ , sendo λ a diferença entre a média das variâncias e a média das covariâncias. Envolve $t + 1$ parâmetros a serem estimados, contidos no vetor $\theta_R^T = [\sigma_1^2, \sigma_1^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \lambda]$. Para $t = 4$, temos:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \lambda & \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2} - \lambda & \frac{\sigma_1^2 + \sigma_4^2}{2} - \lambda \\ & \sigma_2^2 & \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} - \lambda & \frac{\sigma_2^2 + \sigma_4^2}{2} - \lambda \\ & & \sigma_3^2 & \frac{\sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2} - \lambda \\ & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix}.$$

3.3. Modelo não linear (MNL)

Na regressão não linear os dados são explicados por uma função que é uma combinação não linear de parâmetros, em que se tem a relação entre uma variável dependente e uma, ou mais, variáveis independentes.

Um modelo é classificado como não linear se, pelo menos uma das derivadas parciais da função esperança em relação aos parâmetros é função de parâmetros desconhecidos (PRUDENTE, 2009).

Os modelos não lineares nos parâmetros são da forma:

$$Y = f(X, \beta) + e \quad (7)$$

em que $f(X, \beta)$ é uma função não linear, com constantes conhecidas (X_i) e parâmetros desconhecidos (β); e são os erros associados ao modelo que são supostamente independentes e apresentam distribuição normal com média zero e variância constante.

Os modelos não lineares são aplicados nas mais diversas áreas tais como farmacologia, biologia, agronomia e zootecnia. Uma das vantagens na utilização desses modelos é a obtenção de parâmetros que são em geral facilmente interpretáveis. Por terem uma base teórica, os parâmetros dos modelos fornecem um maior conhecimento acerca do fenômeno em estudo.

Modelos não lineares, geralmente fornecem um bom ajuste, com menos parâmetros do que os modelos lineares pois, se por um lado a transformação de um modelo não linear em um modelo linear nos parâmetros facilita o processo de ajuste, em alguns casos perde-se informação sobre o erro padrão dos parâmetros originais. Além disso, existem modelos que são intrinsecamente não lineares, isto é, não podem ser linearizados por transformação (AMARAL, 2008).

Vonesh & Chinchili (1997) afirmam que, a maioria dos experimentos nas áreas agrárias e biológicas exige um modelo não linear, destacando-se os modelos de curvas sigmóides e as curvas de crescimento assintóticas. Eles são muito utilizados, por exemplo, para descrever curvas de crescimento de animais, considerando a existência de relações não lineares entre peso e idade. Dentre os modelos não lineares usuais para descrição do crescimento de animais estão: Brody, Gompertz, Logístico, Richards e von Bertalanffy.

Nos modelos não lineares não é possível encontrar formas analíticas para a estimação dos parâmetros. A estimação dos parâmetros é aplicada por meios de métodos numéricos iterativos, o que requer cálculos computacionais intensivos.

3.4. Características de dados de curvas de crescimento

O termo curva de crescimento usualmente evoca a imagem de uma curva sigmoide, descrevendo o tempo de vida em uma sequência de medidas de tamanho, frequentemente peso corporal. O conhecimento dos animais tem uma forte relação com a quantidade e a qualidade da carne (FITZHUGH JR., 1976). Assim, torna-se de fundamental importância o crescimento do processo de ganho de massa corporal do animal, pois esse conhecimento possibilita que se faça um controle da produção de carne, otimizando os lucros dessa atividade. Este ganho pode ser influenciado pela alimentação, por condições climáticas,

pelo estado sanitário e pelas características genéticas associadas aos animais (GOTTSCHALL, 1999).

As medidas obtidas para avaliação de curvas de crescimento de animais podem ser caracterizadas como de estudos com medidas repetidas de peso-idade de vários indivíduos que descrevem o crescimento animal ao longo do tempo. (SANTORO *et al.*, 2005).

O ajuste de curvas de crescimento através de modelos não lineares mistos possibilita o uso de diferentes tipos de estrutura para as matrizes de covariâncias, permitindo considerar de maneira mais adequada a variação entre indivíduos e entre medidas do mesmo indivíduo. Em análises com modelos não lineares mistos, os efeitos fixos e aleatórios podem ser incorporados no modelo. Assim, têm-se estimativas mais precisas para os efeitos fixos e maior controle sobre fatores aleatórios.

Características avaliadas repetidas vezes no decorrer da vida dos organismos (plantas e animais) são denominados infinitamente dimensionais, no sentido de que, em cada unidade de tempo ou idade, o caráter pode ser avaliado, gerando um conjunto multidimensional de dados. O interesse na análise desse tipo de dados geralmente reside na predição de valores dos indivíduos para determinado ponto do tempo ou através de todos os pontos e também na identificação de uma parcimoniosa estrutura de variâncias ao longo do tempo. Quando as medições são realizadas sequencialmente ao longo de medições no decorrer do tempo ou do espaço (distância de um certo ponto), os dados são ditos longitudinais. Quando essas ocasiões envolvem o espaço, o planejamento é conhecido como geoestatístico. Para as medidas repetidas longitudinais há também interesse na modelagem das características da distribuição conjunta das variáveis respostas em função do tempo ou espaço (RESENDE *et al.*, 2014). Para a representação de dados longitudinais é comum o uso de gráficos dos perfis individuais, que consistem em um gráfico de dispersão em que os pontos associados a uma mesma unidade amostral são unidos por segmentos de reta.

Em relação ao tempo, os dados longitudinais são classificados como regulares (se o intervalo entre medidas consecutivas quaisquer for constante ao longo do estudo) ou irregulares. Quando o esquema de coleta de dados determina que todos os sujeitos ou unidades experimentais sejam observados nos mesmos instantes (igualmente espaçados ou não), o planejamento é considerado balanceado em relação ao tempo. Se forem observados

em conjuntos de instantes distintos, ele é considerado desbalanceado em relação ao tempo. Se a estrutura de dados não apresentar observações perdidas, ela é considerada completa; caso contrário a estrutura é dita incompleta (SARTORIO, 2013).

A análise de curvas de crescimento visa descrever o comportamento dos perfis médios de resposta por meio de funções lineares (por exemplo, polinômios) e não lineares. Possibilita a comparação entre os tratamentos (dietas, por exemplo) por meio de comparações entre os parâmetros das curvas ajustadas.

Em vários estudos, curvas de crescimento de bovinos de raças zebuínas foram ajustadas com utilização de modelos não lineares (LÔBO *et al.*, 2002; SAKAGUTI *et al.*, 2003; SANTORO *et al.*, 2005; DIAS *et al.*, 2006; FORNI, 2007; SOUSA JÚNIOR *et al.*, 2010; LOPES *et al.*, 2011). Dentre os modelos não lineares para descrever curvas de crescimento de bovinos, os principais são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Principais modelos não lineares mistos utilizados para descrever curvas de crescimento de bovinos

Modelo	Componente sistemático	Referência
Brody	$\beta_1(1 - \beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})$	Brody (1945)
Gompertz	$\beta_1 \exp(-\beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})$	Gompertz (1825)
Logístico	$\beta_1(1 + \beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})$	Ratkowski (1983)
MMM	$\frac{\beta_2 + \beta_3^{\beta_4} + \beta_1 x_{ij}^{\beta_4}}{\beta_3^{\beta_4} + x_{ij}^{\beta_4}}$	Lopez <i>et al.</i> (2000)
Richards	$\beta_1(1 \pm \beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})$	Richards (1959)
von Bertalanffy	$\beta_1(1 - \beta_2 e^{-\beta_3 x_{ij}})^3$	von Bertalanffy (1957)

MMM: Michaelis-Menten Modificado

Nos modelos apresentados na Tabela 2, x_{ij} é a idade do animal i no tempo j , o parâmetro β_1 representa o valor assintótico, interpretado como peso adulto do animal ou peso à maturidade. O peso assintótico, ou peso adulto, que representa a estimativa de peso

à maturidade, independentemente de flutuações de pesos em razão de efeitos genéticos e ambientais; β_2 é um parâmetro de escala, sendo uma constante de integração, geralmente sem interpretação biológica; β_3 é o parâmetro mais importante, pois é interpretado como índice de maturidade ou de precocidade, e é um indicativo da velocidade de crescimento do animal, quanto maior o valor de β_3 maior a velocidade de crescimento do animal. A taxa ou índice de maturidade corresponde a uma estimativa de precocidade, determinando assim a eficiência do crescimento. No crescimento de bovinos, por exemplo, as curvas de crescimento são importantes para a obtenção de animais com maior produção, menores custos e menor tempo para atingir determinado peso (LAIRD & HOWARD, 1967 apud EMILIANO, 2013).

No modelo Michaelis-Menten Modificado (MMM) o parâmetro β_2 representa o peso ao nascer. Os modelos Gompertz e Logístico possuem ponto de inflexão, enquanto o modelo Brody não apresenta ponto de inflexão. O modelo MMM é flexível, enquanto o Von Bertalanffy apresenta dificuldades para ser ajustado.

3.5. Modelos não lineares mistos (MNLMM)

Modelos não lineares mistos são compostos por efeitos fixos e aleatórios. Podem ser ajustados a dados desbalanceados em relação ao tempo e, por conter efeitos aleatórios, possibilitam o ajuste de curvas médias, adicionalmente permitem o ajuste de curvas individuais para cada animal. Consequentemente, facilitam o critério de seleção dos melhores indivíduos por considerar que, para cada animal, é gerado um efeito aleatório.

O estudo de curvas de crescimentos utilizando modelos não lineares, é atraente, pois esses modelos são flexíveis o bastante para serem utilizados com dados de peso e de idade, pelo fato de desenvolverem características inerentes aos dados de pesagens, tais como: a) as pesagens podem ser irregulares no tempo, isto é, o intervalo entre duas medidas consecutivas quaisquer não é necessariamente equidistante; b) possuem estrutura incompleta; c) as avaliações adjacentes são mais estreitamente correlacionadas do que as demais; e d) a resposta dos indivíduos em função do tempo tem variância crescente (GLÓRIA, 2014). São uma forma prática e eficiente de se analisar o crescimento do animal.

Os modelos não lineares mistos são definidos como modelos não lineares de efeitos fixos e aleatórios. Tais modelos são de efetivo interesse, sendo apropriados para análise de

medidas repetidas ao longo do tempo se adequando bem a dados desbalanceados e incompletos.

De acordo com Lindstrom & Bates (1990), os modelos não lineares mistos para dados com repetição tornaram-se bastante conhecidos devido a sua flexibilidade na escolha de estruturas de covariância, que levam em consideração a correlação e a heterogeneidade de variâncias na mesma unidade experimental, e também pela flexibilidade de tratamento de dados desbalanceados e/ou incompletos.

Nos modelos mistos, o ajuste é feito em duas etapas, para a parte aleatória tem-se a predição dos efeitos aleatórios e a estimação dos componentes de variância, enquanto que, para a parte fixa tem-se a estimação dos efeitos fixos bem como a realização de testes de hipóteses sobre funções estimáveis dos efeitos fixos. Em geral, tanto a predição dos efeitos aleatórios como a estimação dos efeitos fixos dependem da estimação dos componentes de variância (PEREIRA & FERREIRA, 2008).

No modelo não linear misto considera-se a estrutura não linear para a média, a variabilidade entre indivíduos, além da correlação e heterogeneidade de variâncias entre medidas do mesmo indivíduo. Como as medidas são repetidas de modo sistemático, nas mesmas unidades experimentais, espera-se que exista uma correlação não nula entre as medidas e uma heterocedasticidade das variâncias nas diversas ocasiões (ALCARDE, 2012).

A mais comum aplicação dos modelos não lineares mistos ocorre para dados com medidas repetidas, em particular, dados longitudinais (PINHEIRO & BATES, 2000).

O modelo não linear misto tem a seguinte forma geral:

$$y_{ij} = f(X, \beta, Z, b, x_{ij}) + e_{ij}, \quad b_i \sim N(0, D) \quad (8)$$

sendo

y_{ij} : j-ésima observação do i-ésimo indivíduo ou unidade experimental;

β é o vetor de parâmetros de efeitos fixos;

b é o vetor de parâmetros dos efeitos aleatórios;

X : matriz de incidência para efeitos fixos;

Z : matriz de incidência para efeitos aleatórios,

D é a matriz de variâncias e covariâncias para os efeitos aleatórios e,

e_{ij}

: são erros independentes e identicamente distribuídos com média dada por um vetor zeros e matriz de variâncias $\sigma^2 I$, em que I é a matriz identidade.

3.6. Aplicação dos MNLM para análise de curvas de crescimento

Os modelos não lineares mistos têm tido vasta aplicação, sendo uma delas a análise de curvas de crescimento. Como citado anteriormente, o modelo de efeitos aleatórios considera tanto a variabilidade entre indivíduos quanto a correlação e heterogeneidade dentro de cada indivíduo.

Os modelos com efeitos fixos e aleatórios podem ser utilizados quando se deseja ajustar uma curva média para a população e curvas individuais, que consideram o desvio em relação à curva média, podendo ser utilizadas para a identificação dos melhores indivíduos ou unidades experimentais.

Dentre os modelos da Tabela 2, para exemplificação, é apresentado na expressão (5) a seguir o modelo logístico com efeitos fixos e aleatórios. Os efeitos aleatórios incluídos no modelo não linear misto podem ser definidos de acordo com o interesse do pesquisador verificando a eficiência de estimação e facilidade na convergência.

Modelo logístico com efeitos fixos e aleatórios:

$$y_{ij} = (-\beta_1 + b_1)(1 + \beta_2 e^{x_{ij}(\beta_3 + b_{2i})})^{-1} + e_{ij}, \quad (9)$$

sendo

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{21} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{21} & \cdots & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{bmatrix} \sim N(0, D). \quad (10)$$

Este modelo para ajuste de curvas de crescimento possui três parâmetros de efeitos fixos a serem estimados (β_1 , β_2 e β_3) e dois parâmetros de efeito aleatório (b_{1i} e b_{2i}), em que cada parâmetro de efeito aleatório segue distribuição normal com média dada por um vetor de zeros e estrutura de covariâncias dada pela matriz D , em que σ_1^2 e σ_2^2 são as variâncias e σ_{21} a covariância entre os efeitos aleatórios b_1 e b_2 .

Alguns trabalhos utilizaram o ajuste de curvas de crescimento com modelos não lineares mistos: Karaman *et al.* (2013) utilizaram uma abordagem de modelagem mista para estudos de crescimento de codornas japonesas e com a incorporação de efeitos

aleatórios aos modelos, houve uma redução na variância residual e uma melhor qualidade de ajuste. Carvalho (2010) apresentou modelos não lineares mistos como uma nova metodologia, para descrever crescimento de produção de *Eucalyptus*, comparando o ajuste dos modelos não lineares mistos, com os obtidos pelos modelos de efeito fixo.

3.7. Avaliadores de qualidade de ajuste

Quando diferentes modelos de regressão são ajustados para um mesmo conjunto de dados a avaliação desses modelos é necessária a fim de selecionar aquele que melhor se ajusta aos dados. Na literatura existem critérios que fornecem estatísticas que auxiliam na decisão de qual modelo escolher.

Ao selecionarmos modelos, é preciso ter em mente que não existem modelos verdadeiros. Há apenas modelos aproximados da realidade que, causam perda de informações. Deste modo, é necessário fazer a seleção do “melhor” modelo, dentre aqueles que foram ajustados, para explicar o fenômeno sob estudo (EMILIANO, 2010).

Existem vários critérios utilizados para seleção do melhor modelo, Os mais utilizados são: critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação de Akaike corrigido (AIC_c), o critério de informação bayesiano (BIC), coeficiente de determinação (R^2), coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), o erro quadrático médio (EQM) e o desvio médio absoluto (DMA). Estes serão descritos resumidamente a seguir.

3.7.1 Critério de informação de Akaike - AIC

O AIC (*Akaike Information Criterion*) foi proposto por Akaike (1974). Permite utilizar o princípio da parcimônia na escolha do melhor modelo, ou seja, de acordo com este critério nem sempre o modelo com mais parâmetros é o melhor (BURNHAM e ANDERSON, 2004). Menores valores de AIC refletem um melhor ajuste (AKAIKE, 1974). Sua expressão é dada por:

$$AIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2(p) \quad (11)$$

em que: p é o número de parâmetros e $\log L(\hat{\theta})$ é o valor do logaritmo da função de verossimilhança avaliado nas estimativas dos parâmetros.

O critério de informação de Akaike pode ser definido como um critério que dá uma pontuação para o modelo, baseado em sua adequação aos dados e na ordem do modelo. O AIC não se destina para comparação de resultados com diferentes conjuntos de observações (AKAIKE, 1974).

3.7.2 Critério de informação de Akaike corrigido – AICc

Sugiura (1978), derivou uma variante de segunda ordem do AIC corrigindo-o para o número de observações, chamando-o de critério de informação de Akaike corrigido (AICc), dado por :

$$AICc = -2\log L(\hat{\theta}) + 2p\left(\frac{n}{n-p-1}\right), \quad (12)$$

no qual n representa o número de observações, $\log L(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança (máxima verossimilhança ou máxima verossimilhança restrita) e p representa o número total de parâmetros (de efeitos fixo e aleatório) estimados no modelo.

3.7.3 Critério de informação Bayesiano - BIC

O BIC (*Bayesian Information Criterion*) foi proposto por Schwarz (1978) como uma alternativa quando se trabalha com pequenas amostras. Assim como o AIC, também leva em conta o grau de parametrização do modelo e, da mesma forma, quanto menor for o valor do BIC, melhor será o ajuste do modelo (SCHWARZ, 1978). Sua expressão é dada por:

$$BIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + p \log(n) \quad (13)$$

em que: n é o número de observações utilizadas para ajustar a curva e p o número de parâmetros.

De acordo com Seghouane & Bekara, *apud* Sobral & Barreto (2011), o BIC é definido como o critério que escolhe o modelo de ordem correta com probabilidade um, à medida que o número de amostras tende ao infinito, desde que o modelo mais adequado esteja no conjunto de modelos a ser verificado.

3.7.4 Coeficiente de determinação - R^2

O coeficiente de determinação foi calculado como o quadrado do coeficiente de correlação de Pearson que é uma medida do grau de associação entre duas variáveis. De acordo com Gujarati (2006) o R^2 é mais utilizado para medir a qualidade do ajustamento de uma linha de regressão aos dados. Verbalmente, o R^2 mede a proporção ou percentual da variação total de Y , explicada pelo modelo de regressão:

$$R^2 = (r_{y,\hat{y}})^2 \quad (14)$$

sendo $r_{y,\hat{y}}$ o coeficiente de correlação linear simples entre o valor observado e o valor estimado.

3.7.5 Coeficiente de determinação ajustado - R^2_{aj}

É usado para comparar a qualidade do ajuste de modelos com diferentes números de parâmetros (p), ponderando o coeficiente de determinação (R^2) pelo número de variáveis explicativas (p) e pelo número de observações (n) da amostra. Sua fórmula é dada por (SEBER, 2003):

$$R^2_{aj} = 1 - \left[\frac{(n-1)}{n-(p-1)} \right] (1 - R^2) \quad (15)$$

sendo R^2 o coeficiente de determinação, n o número de observações da amostra e p o número de variáveis explicativas usadas no modelo (ou número de parâmetros, sem o intercepto).

3.7.6 Erro quadrático médio - EQM

O erro quadrático médio (EQM) é uma forma de avaliar a diferença entre um valor estimado e o valor observado. É a média dos quadrados dos erros (MORETTIN & BUSSAB, 2010). Sua expressão é dada por:

$$EQM = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (16)$$

sendo: y_i os valores observados e $\hat{y}_i$ os valores estimados e n número de observações da amostra.

Os valores de EQM podem ser utilizados para fins comparativos. Dois ou mais modelos estatísticos podem ser comparados usando seus EQM's para medir quão bem eles explicam um determinado conjunto de observações, isto é, se determinado modelo é apropriado para os dados.

3.7.7 Desvio médio absoluto – DMA

O desvio médio absoluto (DMA) é a soma dos desvios absolutos em relação ao valor estimado, dividido pelo número de observações da amostra. Sua expressão é dada por (SARMENTO *et al.*, 2006):

$$DMA = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad (17)$$

sendo: y_i os valores observados e $\hat{y}_i$ os valores estimados e n o número de observações da amostra. O desvio médio absoluto é uma importante medida de dispersão ou variabilidade pouco afetada por observações extremas.

O valor do DMA indica não somente o valor mais provável como também a incerteza com a qual a medida é afetada.

A ideia de se explorar vários avaliadores com o intuito de selecionar os melhores modelos de regressão vem perpetuando no decorrer da última década (SILVEIRA, 2010). Silveira *et al.* (2011), trabalhando com modelos não lineares para análise de curvas de crescimento de ovinos cruzados, utilizaram o AIC e BIC como critérios para escolha do melhor modelo.

Em um estudo para seleção de modelos não lineares que descrevem o acúmulo de matéria seca em plantas de alho, Puiatti *et al.* (2013) utilizaram os seguintes avaliadores de qualidade de ajuste: AIC, BIC, DMA e R^2 (coeficiente de determinação)

Além dos trabalhos citados existem diversos trabalhos que utilizaram os avaliadores de qualidade de ajuste AIC, BIC, EQM, DMA e R^2 , para a seleção do melhor modelo (MAIA *et al.*, 2009; SOBRAL & BARRETO, 2011; SOUSA, 2012), tendo em vista, que os mesmos tem se mostrado eficientes como critério de seleção.

Emiliano *et al.* (2014) por meio de simulação Monte Carlo verificaram a eficiência dos critérios AIC e BIC para diferentes situações, dentre elas, o ajuste de curvas de crescimento utilizando modelos não lineares. E, sendo que, para o ajuste de curvas de

crescimento com um pequeno tamanho da amostra ($n = 13$) o AIC apresentou melhor desempenho em comparação com o BIC.

3.8. O software R e a biblioteca *nlme* (Nonlinear Mixed-Effects Models)

O sucesso da aplicação de qualquer técnica estatística está diretamente relacionado à disponibilidade de equipamentos computacionais eficientes e o uso de softwares simples e confiáveis (R, 2018).

O aplicativo R é um software estatístico livre em código aberto, ou seja, uma linguagem e ambiente de desenvolvimento integrado, podendo ser considerado como uma implementação da linguagem S. É uma importante ferramenta na análise e manipulação de dados, modelagem e outras inferências.

Seus usuários contribuíram com a implementação de diversos pacotes para complementação das capacidades do sistema de base. Um desses pacotes é a biblioteca *nlme*, desenvolvida por José Pinheiro e Douglas Bates em 2007. Nessa biblioteca, várias funções são disponibilizadas, dentre as quais a função *nlme* que ajusta o modelo não linear misto geral usando a formulação apresentada por Lindstrom & Bates (1990), mas permitindo efeitos aleatórios aninhados. Os erros intra-grupo podem ser correlacionados e/ou ter variâncias desiguais. Algumas considerações importantes desta biblioteca são: facilidades de programação, métodos de estimação e técnicas de maximização.

3.8.1 Facilidades de programação

- i. Valores iniciais: é obrigatória a declaração de valores iniciais apenas para os efeitos fixos. O valor padrão para os efeitos aleatórios é zero e as estimativas iniciais para os parâmetros de covariância incluídos no vetor θ e σ^2 são geradas automaticamente usando a fórmula dada por Laird *et al.* (1987), se elas não são fornecidas (PINHEIRO *et al.*, 1993).

Para obter os valores iniciais dos efeitos fixos, é comum também utilizar a função *nlslist*, que ajusta o modelo não linear para todos os subgrupos de indivíduos definidos pelos níveis do fator de agrupamento, que aparece no modelo. As médias das estimativas dos parâmetros, que são obtidas pelo comando *fixed* (*nlslist*), servem como valores iniciais para cada tratamento. É evidente que, dependendo do

- comportamento dos tratamentos esse procedimento pode não gerar um bom conjunto de valores iniciais para o processo iterativo, mas funciona em geral.
- ii. Flexibilidade na especificação de diversas estruturas de matrizes de covariâncias (D e R).
 - iii. Inclusão de mais de um efeito aleatório no modelo.
 - iv. Facilidades na especificação e no cálculo de testes de razão de verossimilhanças.

3.8.2. Métodos de estimação e inferência sobre os parâmetros

3.8.2.1 Máxima Verossimilhança (MV) e Máxima Verossimilhança Restrita (REML)

Segundo Camarinha Filho (2003), o método de máxima verossimilhança (MV) foi originado por Fisher em 1925 e foi o primeiro a ser aplicado em modelos mistos, em geral, por Hartley & Rao (1967). Consiste em maximizar a função densidade de probabilidade das observações, em relação aos efeitos fixos e aos componentes de variância. É um método iterativo que fornece estimativas não negativas para os componentes de variância, porém essas estimativas são viesadas, pois essa metodologia não considera a perda de graus de liberdade resultante da estimação dos efeitos fixos do modelo.

O método de verossimilhança restrita (REML, do Inglês Restricted Maximum Likelihood), é uma variante da metodologia de estimação de máxima verossimilhança para modelos mistos cujos estimadores tendem a ser menos viesados do que os estimadores de máxima verossimilhança para pequenas amostras, pois levam em consideração a perda dos graus de liberdade envolvidos na estimação dos parâmetros fixos do modelo (HARVILLE, 1977). Através do método REML obtêm-se os estimadores através da maximização da função de verossimilhança, que é invariante ao parâmetro de locação (ou seja, invariantes para a matriz X de delineamento no modelo misto). Os estimadores REML poderão ainda ser obtidos maximizando a função de verossimilhança de um vetor de combinações lineares das observações, que também são invariantes para X . Cada observação é dividida em duas partes independentes: uma, referente aos efeitos fixos e outra aos efeitos aleatórios - de modo que a função densidade de probabilidades das observações é dada pela soma das funções densidades de probabilidade de cada parte (SEARLE, 1987; PATTERSON & THOMPSON, 1971). A maximização da função densidade de probabilidade da parte

referente aos efeitos aleatórios, relacionadas aos componentes de variância, elimina o viés resultante da perda de graus de liberdade na estimação dos efeitos fixos do modelo.

Embora o método de máxima verossimilhança restrita seja útil para inferências sobre componentes de variâncias em modelo linear misto e a sua extensão para modelo não linear misto, tais inferências são muitas vezes dificultadas devido a existência de integrais analiticamente intratáveis (NOH & LEE, 2008). O método de máxima verossimilhança é o método de estimação padrão da função *nlme* do software R e não precisa ser especificado. Para escolher o método de máxima verossimilhança restrita, basta utilizar o argumento `method = 'REML'`.

Santoro & Barbosa (2010) recomendam que a verificação da adequação da matriz de covariâncias pelo uso da metodologia para modelos mistos seja através do método de máxima verossimilhança restrita, porque geralmente apresenta resultados mais confiáveis e, conseqüentemente, inferências mais seguras a partir dos mesmos.

3.8.2.2. Algoritmos de maximização

Como os efeitos aleatórios são quantidades não observáveis, a estimação de máxima verossimilhança em modelos de efeitos mistos é baseada na densidade marginal da resposta y . Em geral, essa integral não tem a expressão em uma forma fechada quando a função f do modelo é não linear em b_i , sendo necessário o uso de algum método numérico, tanto para os métodos de estimação de verossimilhança, quanto para o método de estimação de máxima verossimilhança restrita. A biblioteca *nlme* do software R alterna entre os dois métodos de maximização: o algoritmo EM (Expected-Maximization) e o método Newton-Raphson (PINHEIRO *et al.*, 2009).

A matriz de covariâncias é estimada pelo inverso da matriz Hessiana. O erro padrão e intervalos de confiança e os testes de hipóteses são construídos a partir da distribuição aproximada para os estimadores de máxima verossimilhança (CARDOSO, 2012).

3.8.3 Modelagem da matriz de covariâncias D para os efeitos aleatórios

Em muitas situações práticas pode-se desejar restringir a matriz de covariâncias D dos efeitos aleatórios de alguma forma especial com menor número de parâmetros no modelo. A estrutura de modelos aleatórios representa uma classe importante de estruturas de covariâncias por apresentar grande flexibilidade para a modelagem de dados não

balanceados, incompletos e irregulares, como ocorre em situações de pesagens de bovinos (UEDA, *et al.* 2010). Se a correlação entre os efeitos aleatórios for suficientemente pequena, ou se o zero (0) pertencer à estimativa do intervalo de confiança para a covariância entre eles, pode-se assumir que os efeitos aleatórios são independentes. Nesse caso, a estrutura da matriz mais indicada seria a diagonal.

Dentre as várias estruturas disponíveis, a biblioteca *nlme* do *software* R permite definir diferentes estruturas para a matriz **D** através das classes *pdMat* (Tabela 2.1). Deste modo, é possível obter vários modelos com diferentes estruturas para a matriz de covariância dos efeitos aleatórios.

Tabela 3 - Classes *pdMat* de parametrizações de matrizes de covariâncias dos efeitos aleatórios da biblioteca *nlme* do R.

Construtor	Estrutura	Descrição
pdBlocked	Bloco diagonal	Matriz bloco diagonal
pdComp-Symm	Simetria composta	Variância constante com observações correlacionadas e valor de correlação fixo
pdDiag	Diagonal	Efeitos aleatórios independentes
pdIdent	Identidade múltipla	Efeitos aleatórios independentes, com a mesma variância
pdSymm	Positiva definida geral	Matriz geral simétrica e positiva definida

A classe *pdSymm*, por exemplo, é utilizada pelo argumento *random* para representar a matriz **D** não estruturada associada aos efeitos aleatórios (BARBOSA, 2009).

3.8.4. Funções de variâncias para a modelagem da heterocedasticidade

O modelo linear de efeitos mistos permite a utilização de diferentes funções de variâncias para modelar a estrutura de variância dos erros dentro do grupo (*ex. intra-indivíduos*), acomodando a heterocedasticidade dos erros aleatórios dando menor peso às observações com grande variância, além de reduzirem o número de parâmetros a serem estimados e, conseqüentemente, diminuindo o esforço computacional.

Uma função variância pode ser definida por (PINHEIRO & BATES, 2000):

$$Var(e_{ij} | \mathbf{b}_i) = \sigma^2 g^2(\boldsymbol{\mu}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, \boldsymbol{\delta}), \text{ com } i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, n_i \quad (18)$$

sendo: $\boldsymbol{\mu}_{ij} = E[y_{ij} | \mathbf{b}_i]$; $\mathbf{v}_{ij}$ o vetor de covariáveis da variância; $\boldsymbol{\delta}$ é o vetor dos parâmetros de variância; $g(\cdot)$ e a função variância, contínua em $\boldsymbol{\delta}$.

Essa formulação da função de variância é muito flexível e intuitiva, porque permite que a variância dentro do grupo dependa dos efeitos fixos $\boldsymbol{\beta}$ e dos efeitos aleatórios $\mathbf{b}_i$, através dos valores esperados $\boldsymbol{\mu}_{ij}$, embora possam surgir algumas dificuldades teóricas e computacionais (Pinheiro & Bates, 2000). O modelo aproximado para a variância em que os valores esperados $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ são substituídos pelos melhores preditores lineares não viesados, BLUPs (do Inglês, Best Linear Unbiased Predictions), $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ij}$, é dado por Pinheiro e Bates (2000):

$$Var(e_{ij}) \approx \sigma^2 g^2(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ij}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{v}_{ij}), \quad (19)$$

em que $\boldsymbol{\delta}$ é o vetor de parâmetros e $\mathbf{v}_{ij}$ os vetores de covariáveis associados à função de variância.

As várias funções disponíveis no pacote *nlme* do R são dadas na Tabela 4.

Tabela 4 - Classes de funções de variâncias *varFunc* da biblioteca *nlme* do R

Construtor	Descrição	Variância
varFixed	Variância fixa (VF)	$Var(e_{ij}) = \sigma^2 \times \mathbf{v}_{ij}$
varIdent	Variância constante (por grupo), VI	$Var(e_{ij}) = \sigma^2 \delta_{S_{ij}}^2$
varPower	Potência de uma covariável (VP)	$Var(e_{ij}) = \sigma^2 \mathbf{v}_{ij} ^{2\delta}$
varExp	Exponencial de uma covariável (VE)	$Var(e_{ij}) = \sigma^2 \exp(2\boldsymbol{\delta} \mathbf{v}_{ij})$
varConstPower	Constante + Potência de uma covariável (VCP)	$Var(e_{ij}) = \sigma^2 (\delta_1 + \mathbf{v}_{ij} ^{2\delta_2})^2$
varComb	Combinações de funções variância (VC)	$Var(e_{ij}) = \sigma^2 \delta_{1.S_{ij}}^2 \exp(2\delta_2 \mathbf{v}_{ij})$

$\mathbf{v}_{ij}$ – covariável; S - variável de estratificação (níveis); * - $\delta_l > 0$.

A função variância constante (por grupo), VI, por exemplo, é um construtor para a classe *varIdent*, representando uma estrutura de função de variância constante. Se nenhum

fator de agrupamento estiver especificado em *form*, a função de variância é constante e igual a um, e nenhum coeficiente é requerido para representá-la. Quando *form* inclui um fator de agrupamento com níveis $S > 1$, a função de variância permite s variâncias diferentes, uma para cada nível do fator. Os coeficientes da função de variância representam as proporções entre as variâncias e uma variância de referência (correspondente a um nível de grupo de referência). Portanto, apenas $S - 1$ coeficientes são necessários para representar a função de variância. Se os elementos *value* não forem nomeados, o primeiro nível de grupo é tomado como o nível de referência.

Para a seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados o teste de razão de verossimilhanças é usado para comparar o modelo que assume a homocedasticidade com quaisquer um dos modelos encaixados que incorporam a heterocedasticidade. A hipótese nula (H_0) considerada no teste são as de que os dois modelos são equivalentes (os parâmetros extras não diferem de zero) $H_0: \delta = 0$ vs a hipótese alternativa de que os dois modelos diferem entre si, ou seja, $H_1: \delta \neq 0$ (SILVA *et al.*, 2015). O mesmo acontece se duas estruturas de heterocedasticidade aninhadas são comparadas, como por exemplo: $H_0: \text{var Power versus } H_1: \text{varConstPower}$.

3.8.5. Estruturas de correlação para modelagem de dependência

A biblioteca *nlme* (PINHEIRO & BATES, 2000) fornece uma variedade de estruturas de correlação para a modelagem da dependência entre as observações, ou dos erros intra-grupo (dentro do grupo), utilizando covariáveis (PINHEIRO *et al.*, 2007) para avaliar as diferentes estruturas da matriz de covariâncias residuais R com o objetivo de considerar na análise a heterogeneidade de variâncias e a dependência residual, características comumente encontradas em dados de pesagens de animais em diferentes períodos.

As estruturas de correlação fornecidas pela biblioteca *nlme* são denominadas classes *corStruct* e são utilizadas para especificar os modelos de correlação dentro de cada grupo de observações (Tabela 5).

Tabela 5 - Funções de correlação da classe *corStrut* implantadas na biblioteca *nlme* do R

Construtor	Descrição
corCompSymm	Simetria composta
corSymm	geral
corAR1	autoregressiva de ordem 1
corARMA	autoregressiva de médias móveis
corExp	exponencial
corGaus	Gaussiana
corLin	linear
corSpher	esférica

Para estabelecer uma estrutura geral de correlação, assume-se que os erros (e_{ij}) dentro do grupo estão associados aos vetores posição p_{ij} e as estruturas de correlação entre dois erros e_{ij} e e'_{ij} dentro do grupo dependem do vetor de posição $p_{ij}p'_{ij}$ somente através da sua distância $d(p_{ij}p'_{ij})$ e não sobre os valores que eles assumem (PINHEIRO & BATES, 2000). Assim, a estrutura geral para a correlação dentro do grupo para um único nível de agrupamento, expressa para $i = 1, \dots, S$ e $j, j' = 1, \dots, n_i$ pode se expressa por

$$\text{cor}(e_{ij}, e'_{ij}) = h[d(p_{ij}, p'), \rho], \quad (20)$$

em que ρ é o vetor de parâmetros de correlação e $h(\cdot)$ é a função de correlação que assume valores entre -1 e 1, contínua em ρ e tal que $h(0, \rho) = 1$, isto é, se duas observações têm a mesma posição no vetor elas são a mesma observação e, portanto, a correlação é 1.

Dentre as estruturas mais comuns está a de simetria composta, a qual assume igual correlação ao longo dos erros dentro do mesmo grupo, o que pode ser representado por

$$\text{cor}(e_{ij}, e_{ij}) = \rho, \quad \forall j \neq j', \quad h(k, \rho) = \rho, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

no qual o único parâmetro de correlação ρ é dito ser o coeficiente de correlação intra-classe.

A matriz de covariâncias para o i – ésimo vetor resposta em um modelo linear misto em um único nível com os erros intra-grupo independentes, identicamente distribuídos com variância σ^2 e com um efeito aleatório com variância σ_b^2 , é $\sigma^2 \mathbf{I} + \sigma_b^2 \mathbf{11}^T$, correspondendo a matriz de correlação $\sigma^2 / (\sigma_b^2 + \sigma^2) \mathbf{I} + \sigma_b^2 / (\sigma^2 + \sigma^2) \mathbf{11}^T$ que é equivalente à estrutura de simetria composta com correlação intra-classe $\rho = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma^2}$ (PINHEIRO & BATES, 2000).

Outras estruturas bastante utilizadas são:

- i) A estrutura geral em que cada correlação nos dados é representada por um parâmetro diferente, de acordo com a função

$$h(k, \rho) = \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

- ii) A estrutura de correlação autorregressiva de ordem 1, AR(1), cuja função de correlação é dada por

$$h(k, \rho) = \rho^k; |\rho| < 1; k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Considerando que as pesagens em bovinos Guzerá não foram efetuadas entre idades igualmente espaçadas, uma estrutura de correlação apropriada para os resíduos entre os bovinos avaliados, estaria associada ao processo autorregressivo de primeira ordem, CAR(1), adaptado ao tempo contínuo, que apresenta propriedades para lidar com observações espaçadas desigualmente. O processo CAR(1) é uma generalização de um processo autorregressivo de primeira ordem, AR(1), com a incorporação de uma covariável de tempo contínuo e tem a seguinte função de correlação (LITTELL *et al.*, 2006, apud STRATHE, 2009):

$$h(\tau, \rho) = \rho^\tau = \rho^{|idade_k - idade_{k'}|}; \rho \geq 0; s \geq 0. \quad (24)$$

sendo $\rho \geq 0$ o parâmetro de correlação simples; τ expressa a diferença absoluta entre duas observações do mesmo indivíduo ($\tau = |idade_k - idade_{k'}|$ = distância entre as duas pesagens).

- iii) O modelo de correlação autorregressivo de medidas móveis assume que os dados são coletados em tempos iguais. Considerando-se ε_t a observação no tempo t , a distância entre duas observações denotadas por ε_t e ε_s é dada por

$|t - s|$. Então $lag - 1$ se refere a observações separadas por uma unidade de tempo e assim por diante.

Os modelos autorregressivos expressam a observação corrente como uma função linear da observação anterior mais o termo a_t centrado em zero ($E[a_t] = 0$), independente da observação anterior, o que pode ser expresso por

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + a_t, \quad (25)$$

em que p é chamado de ordem do modelo autorregressivo denotada por $AR(p)$, ou seja, existem p parâmetros de correlação em um modelo $AR(p)$ dados por $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_p)$. Detalhes mais sobre estas e outras estruturas podem ser vistos em Pinheiro e Bates (2000).

Uma descrição mais detalhada das várias funções, classes e métodos disponíveis para o uso dos pacotes do *software* R pode ser encontrada no seu arquivo *help*. Existe também no site do projeto R (<https://cran.r-project.org/bin/windows/base/>), um sistema de busca com uma grande base de informações sobre a linguagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGGREY, S.E. Logistic nonlinear mixed effects model for estimating growth parameters. **Poultry Science**, v. 88, n. 2, p. 276-280, 2009.
- AKAIKE, H.A. new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Notre Dame, v.19, n. 6, p. 717-723, 1974.
- ALCARDE, R. **Comparação de duas abordagens utilizando modelos mistos para um experimento de cana-de-açúcar**. 19º SINAPE. Nais, São Pedro/SP, 2010.
- ALCARDE, R. **Modelos lineares mistos em dados longitudinais com o uso do pacote ASReml-R**. 156p. Tese (Doutorado em Ciências), Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2012.
- AMARAL, M.T.R. **Abordagem bayesiana para curva de crescimento com restrições nos parâmetros**. 109p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.
- ARRUDA, Z.J. de; SAUGAI, Y. **Regionalização da pecuária bovina no Brasil**. Campo Grande: Embrapa-CNPGC; Brasília: Embrapa-SPI, 1994. 144p. (Embrapa-CNPGC. Documentos, 58).
- BARBOSA, M. **Uma abordagem para análise de dados com medidas repetidas utilizando modelos lineares mistos**. 118p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agrônômica), Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2009.
- BEEFPOINT. **Guzerá: rusticidade, adaptabilidade e habilidade materna** [Projeto Raças], 2013. Disponível em <<https://www.beefpoint.com.br/guzera-rusticidade-adaptabilidade-e-habilidade-materna-projeto-racas/>>. Acesso em 15/11/2017.
- BOZDOGAN, H. Model selection and akaike’s information criterion (AIC): the general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, v. 52, n. 3, p. 345-370, 1987.
- BRODY, S. **Bioenergetics and Growth**. Rheinhold Publishing, New York. 1945.
- BROWN, J.E.; FITZHUGH JUNIOR, H.A.; CARTWRIGHT, T.C.A. Comparison of nonlinear models for describing weight-age relationships in cattle. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.42, n. 4, p. 810-818, 1976.
- BURNHAM, K.P.; ANDERSON, D.R. Multimodel inference: understanding aic and bic in model selection. **Sociological Methods and Research**, Beverly Hills, v.33, n.2, p. 261-304, 2004.
- CAMARINHA FILHO, J.A. Utilização de Modelos Lineares Mistos em Agronomia. **Revista de Matemática e Estatística**, Brasília, v. 21, p. 34-43, 2003.

CARDOSO, A.S.C. **Modelos não lineares de efeitos mistos na farmacocinética da Ciclosporina em doentes transplantados renais.** 87p. Dissertação (Mestrado em Bioestatística), Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências – Departamento de Estatística e Investigação Operacional, 2012.

CARNEIRO, A.P.S.; MUNIZ, J.A; CARNEIRO, P.L.S. ; MALHADO, C.H.M.; FILHO, R.M.; SILVA, F.F. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 49, n. 01, p. 57-62, 2014.

CARVALHO, S.P.C. **Uma nova metodologia de avaliação de crescimento e da produção de Eucalyptus sp clonal para fins energéticos** 195 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal), Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

CRAIG, B.A; SCHINKEL, A.P. Nonlinear mixed effects model for swine growth. **The Professional Animal Scientist**, v.17, n.4, p. 256-260, 2001.

DAVIDIAN, M.; GILTIAN, D.M. **Nonlinear models for repeated measurement data** 2^a ed. London: Chapman & Hall, 359 p. 1995.

DIAS, L.T; ALBUQUERQUE, L.G. TONHATI, H. TEIXEIRA, R.A. Estimação de parâmetros genéticos para peso do nascimento aos 550 dias de idade para animais da raça Tabapuã utilizando-se modelos de regressão aleatória. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v.35, n.5, p.1915-1925, 2006.

DIGGLE, P.; HEAGERTY, P; LIANG, K.; ZEGER, S. **Analysis of longitudinal data.** 2nd ed., Oxford University Press, New York, 306p, 2002.

DOBSON, A.J. **An introduction to Generalized Linear Model** 2^a ed. London: Chapman & Hall, 2002.

EMILIANO, P.C.; VEIGA, E.P.; VIVANCO, M.J.; MENEZES, F.S. Critérios de informação de Akaike versus Bayesiano: Análise comparativa. 19^o SINAPE. Anais, São Pedro/SP, 2010.

EMILIANO, P.C. **Critérios de informação: como eles se comportam em diferentes modelos?** 195p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Universidade Federal de Lavras – Departamento de Ciências Exatas, Lavras, 2013.

EMILIANO, P.C.; VIVANCO, M.J.; MENEZES, F.S. Information criteria: How they behave in different models? **Computational Statistics & Data Analysis**, v.69, p. 141-153, 2014.

FITZHUGH JUNIOR, H.A. Analysis of growth curves and strategies for altering their shape. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.42, n.4, p. 1036-1051, 1976.

FORNI, S.; PILES, M; BLASCO, A.; VARONA, L. OLIVEIRA, H.N.; LÔBO, R.B. ALBUQUERQUE, L.G. Analysis of beef cattle longitudinal data applying a nonlinear model. **Journal of Animal Science**, v.85, p.3189-3197, 2007.

GLÓRIA, L.S. **Estimação de parâmetros não-lineares no R e no SAS: aplicações para cinética digestiva e crescimento em ruminantes**. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciência Animal), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – Departamento de Ciência Animal, 2014.

GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new method of determining the value of life contingencies. **Philos. Trans. R. Soc. London, London**, v. 115, n. 1825, p. 513-585, 1825.

GOTTSCHALL, C.S. Impacto nutricional na produção de carne – curva de crescimento. In: LOBATO, J.F.P., BARCELLOS, J. O. J; KESSLER, A. M. (Ed.). **Produção de Bovinos de Corte**, Porto Alegre: EDIPUCRS. p. 169-192, 1999.

GUJARATI, D.N. tradução por MONTEIRO, M.J.C. **Econometria Básica** 3ª reimpressão. Rio de Janeiro: Elsevier, 575p. 2006.

HARVILLE, D.A. Maximum likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v. 72, n. 358, p. 320-340, 1977.

HARTLEY, H.O.; RAO, J.N.K. Maximum likelihood estimation for the mixed analysis of variance model. **Biometrika**, v.54, n. 358, p. 93-108, 1967.

IBGE - Pesquisa Trimestral do Abate de Animais. Disponível em:

<<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/agropecuaria/producaoagropecuaria/default.shtm#animal>>. Acesso em: 07/06/2017

IBGE – Produção da Pecuária Municipal 2016. Vol 44, Brasil. ISSN 0101-4234. Disponível em:<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/84/ppm_2016_v44_br.pdf>. Acesso em 08/01/2018

KARAMAN, E.; NARINC, D.; FIRAT, M.Z.; AKSOY, T. Nonlinear mixed effects modeling of growth in Japanese quail. **Poultry Science**, v.92, n.7, p. 1942-1948, 2013.

KIRKPATRICK, M., LOFSVOLD, D.; BULMER, M. Analysis of inheritance, selection and evolution of growth trajectories. **Genetics**, v. 124, p. 979-993, 1990.

LAIRD, N.M.; LANGE, N.; STRAM, D. Maximum likelihood computation with repeated measures: Application of the EM algorithm. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v.82, n.397, p. 97-105, 1987.

LAIRD, N.M.; WARE, J.H. Random-effects models for longitudinal data. **Biometrics**, v. 38, n. 4, p. 963-74, 1982.

LINDSTROM, M.J.; BATES, D.M. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. **Biometrics**, n.46, p.673-687, 1990.

LÔBO, R.N.B; MARTINS FILHO, R. Avaliação de curvas de crescimento de bovinos da raça Nelore. In: Reunião Annual da Sociedade Brasileira de Zootecnia, Recife. Anais. 2002.

LONGFORD, N.T. **Random coefficients models**. Clarendon Press, Oxford, 1993.

LOPES, F.B.; SILVA, M.C.; MARQUES, E.G.; FERREIRA, J.L. Ajustes de curvas de crescimento em bovinos Nelore da região Norte do Brasil. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v.12, p. 607-617, 2011.

LOPEZ, S.; FRANCE, J.; GERRITS, W.J.; DHANOA, M.S.; HUMPHRIES, D.J.; DIJKSTRA, J.A. generalized Michaelis-Menten equation for the analysis of growth. **Journal of Animal Science**, v.78, p.1816-1828, 2000.

MAIA, E.; SIQUEIRA, D.L.; SILVA, F.F.; PETERNELLI, L.A.; SALOMÃO, L.C.C. Método de comparação de modelos de regressão não-lineares em bananeiras. **Ciência Rural**, v.39, n.5, p.1380-1386, 2009.

MILANI, E.J.; SCHNEIDER, P.R.; CUNHA T.A. Crescimento em diâmetro de árvores de *Podocarpus lambertii* em duas regiões fitogeográficas no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. **Revista Ciência Florestal**, Santa Maria. v. 23, n. 2, p. 443-448, 2013.

MORETTIN, P.A.; BUSSAB, W.O. **Estatística Básica**. Saraiva, São Paulo 6ed., 2010, 540p.

NASCIMENTO, M.S.; MUNIZ, J.A.; PAMPLONA, A.K.A.; Comparação entre os modelos Logístico e Gompertz no crescimento de frangos de corte. **Matemática e Estatística em Foco**. v. 1, n. 2, 2013.

NOH, M.; LEE, Y. Hierarchical-likelihood approach for nonlinear mixed-effects models. **Computational Statistics & Data Analysis**, Amsterdam, v. 52, p. 3517-3527, 2008.

NUNES, A.M.R. **O modelo linear misto multinível na análise do efeito do desbaste de pinheiros na recuperação ecológica de uma pedreira calcária.** 105p. Dissertação (Mestrado em Bioestatística), Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências – Departamento de Estatística e Investigação Operacional, 2010.

OGLIARI, P.J.; ANDRADE, D.F. Analysing longitudinal data via nonlinear models in randomized block designs. **Computacional Statistics & Data Analysis.** V.36, p.319-332, 2001.

PATTERSON, H.D.; THOMPSON, R. Recovery of inter-block information when block sizes are unequal. **Biometrika**, v. 58, n. 3, p. 545-554, 1971.

PEREIRA, N.N. **Modelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã.** 38p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria), Universidade Federal de Viçosa – Departamento de Estatística, Viçosa, 2013.

PEREIRA, N.N.; CARNEIRO, A.P.S.; TOLEDO, E.R.; EMILIANO, P.C.; SILVA, F.F.E.; CARNEIRO, P.L.S.; CARNEIRO, J.C.S. Curvas de Crescimento de Bovinos com Coeficientes Aleatórios para Peso à Maturidade. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 3, p. 309-313, 2014.

PEREIRA, L.; FERREIRA, L. Estimação de modelos lineares gerais mistos utilizando o SAS. **Revista dos Algarves**, v. 17, p. 44-51, 2008.

PINHEIRO, J.; BATES, D.M.; LINDSTROM, M. Nonlinear mixed effects classes and methods for S. Technical Report n.906, University of Wisconsin-Madison, Dept of Statistics, 1993.

PINHEIRO, J.; BATES, D.M. **Mixed effects models in S and S-PLUS.** Statistical and computing. New York: Springer-Verlag, 528p. 2000.

PINHEIRO, J.; BATES, D.M.; DEBROY, S.; SARKAR, D.; R Core team. (2007). **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models.** R package version 3.1-83, 2007.

PINHEIRO, J.; BATES, D. M.; DEBROY, S.; SARKAR, D.; R Core team. (2009). **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models.** R package version 3.1-93, 2009.

PINHEIRO, J.; BATES, D. M.; DEBROY, S.; SARKAR, D.; R Core team. (2013). **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models.** R package version 3.1-93, 2013.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. DEBROY S.; SARKAR, D.; R Core team. (2018). **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models.** R package version 3, p.1-93, 2018.

PRUDENTE, A.A. **Modelos não lineares de regressão: alguns aspectos da teoria assintótica.** 108p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada), Universidade Federal Rural de Pernambuco – Departamento de Estatística e Informática, Recife, 2009.

PUIATTI, G.A.; CECOM, P.R.; NASCIMENTO, M. PUIATTI, M.; FINGER, F.L.; SILVA, A.R.; NASCIMENTO, A.C.C. Análise de agrupamento em seleção de modelos de regressão não lineares para descrever o acúmulo de matéria seca em plantas de alho. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 31, n.3, p. 337-351, 2013.

RATKOWSKI, D. A. Nonlinear regression **modeling: a unified practical approach.** Marcel Dekker, New York. 1983.

R DEVELOPMENT CORE TEAM (2018). **R: a language and environment for statistical computing.** R Foundation for Statistical Computing. Vienna: R Foundation for Statistical, 2018. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 10 de janeiro de 2018.

RESENDE, M.D.V.; SILVA, F.F.; AZEVEDO, C.F. **Estatística Matemática, Biométrica e Computacional: Modelos mistos, multivariados, categóricos, e generalizados (REM/BLUP), inferência bayesiana, regressão aleatória, seleção genômica, QTL-GWAS, estatística especial e temporal, competição e sobrevivência.** Suprema Gráfica Editora, Viçosa, MG. 2014. 881p.

RICHARDS, F.J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v.10, p.290-300, 1959.

RODRIGUES, D.T.; **Interação genótipos ambientes em animais via modelos de normas de reação.** 70p. Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade Federal de Viçosa – Departamento de Estatística, Viçosa, 2012.

SAKAGUTI, E.S; SILVA, M.A; QUAAS, R.L. MARTINS, E.N.; LOPES, P.S.; SILVA, L.O.C. Avaliação do crescimento de bovinos jovens da raça Tabapuã, por meio de análises de funções de covariâncias. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 32, n. 04, p. 864-874, 2003.

SANTORO, K.R.; BARBOSA, S.B.P.; BRASIL, L.H. de A.; SANTOS, E. de S. Estimativas de parâmetros de curvas de crescimento de bovinos Zebu, criados no estado de Pernambuco. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 34, n. 06, p. 2262-2279, 2005.

SANTORO, K.R.; BARBOSA, S.B.P. Influência da estrutura da matriz de covariâncias na classificação de reprodutores caprinos. **Archivos de Zootecnia**, v.59, n.227, p.345-355, 2010.

SARTORIO, S.D. **Modelos não lineares mistos em estudos de degradabilidade ruminal *in situ***. 197p. Tese (Doutorado em Ciências), Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” – Departamento de Ciências Exatas, Piracicaba, 2013.

SARMENTO, J.L.R.; REGAZZI, A.J.; SOUZA, W.H.; TORRES, R.A.; BREDAS, F.C.; MENEZES, G.R.O. Estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 35, n. 2, p. 435-442, 2006.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a models. **Annals of**, Hayward, v. 6, n. 2, p. 461- 464, 1978.

SEARLE, S.R. **Linear models for unbalanced data**. New York. John Wiley. 1987. 536p.

SEBER, G.A.F. **Linear Regression Analysis**. John Wiley, New York, 2003, 2ed., 557p.

SILVA, F.F.; AQUINO, L.H. e OLIVEIRA, A.I.G. Estimativas de parâmetros genéticos de curva de crescimento de gado Neolore (*Bos indicus*). **Ciência Agrotécnica**, edição especial, p.1562 -1567, 2002.

SILVA, F.L.; ALENCAR, M.M.; FREITAS, A.R.; PACKER, I.U; MOURÃO, G.B. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.46, p.262-271, 2011.

SILVA, N.S.; DUARTE, J.B.; REIS, A.J.S. Seleção de matriz de variância-covariância residual na análise de ensaios varietais com medidas repetidas em cana-de-açúcar. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 45, n. 6, p. 993-999, 2015.

SILVA, N.A.M. Curvas de crescimento e influência de fatores não genéticos sobre as taxas de crescimento de bovinos da raça Nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 28, n. 3, p. 647-654, 2010.

SILVEIRA, F.G. **Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte**. Tese de Doutorado, Universidade de Viçosa, 2010.

SILVEIRA, F.G.; SILVA, F.F.; CARNEIRO, P.L.S.; MALHADO, C.H.M; JOEL AUGUSTO MUNIZ, J.A. Análise de agrupamento na seleção de modelos de regressão não-lineares para curvas de crescimento de ovinos cruzados. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 41, n.4, p. 692-698, 2011.

SOBRAL, T.E.L.; BARRETO, G. **Análise dos critérios de informação para a seleção de ordem em modelos auto-regressivos**. 10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2011.

SOUSA JÚNIOR, S.C.S.; OVIVEIRA S.M.P.; ALBUQUERQUE, L.G.; BOLIGON, A.A.; MARTINS FILHO, R. Estimação de funções de covariância para características de crescimento da raça Tabapuã utilizando modelos de regressão aleatória. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 39, n. 05, p.1037-1045, 2010.

SOUSA, I.F. **Ajuste de modelos não lineares mistos na descrição de germinação de sementes de café (coffea arábica L.) cv. Catuaí**. 72p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária), Universidade Federal de Lavras – Departamento de Estatística, 2012.

SOUZA, L.A.; CAIRES, D.N.; CARNEIRO, P.L.S.; MALHADO, C.H.M.; MARTINS FILHO, R. Curvas de crescimento em bovinos da raça Indubrasil criados no estado de Sergipe. **Revista Ciência Agronômica**, v.41, n. 4, p.671-676, 2010.

STRATHE, A.B.; DANFAER, A.; SORENSEN, H.; KEBREAB, E. A multilevel nonlinear mixed-effects approach to model growth in pigs. **Journal of Animal Science**, v. 88, p.638-649, 2010.

SUGIURA, N. Further analysis of the data by akaike's information criterion and the finite corrections. **Communications in Statistics – Theory and Methods**. Ontario, v. 7, n. 1, p. 13-26, 1978.

UEDA, C.M. **Modelos não lineares com diferentes estruturas de covariâncias em curvas de crescimento: Uma aplicação no estudo da severidade da doença *Late blight*** 110p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

UEDA, C.M.; YAMAMOTO, A.Y.; NUNES, W.M.C.; SCAPIM, C.A.; GUEDES, T.A. Nonlinear models for describing the Citrus Variegated Chlorosis in groves of two counties at northwestern Paraná state, Brazil. **Acta Scientiarum. Agronomy**, Maringá, v. 32, n. 4, p. 603-611, 2010.

VON BERTALANFFY, L. Quantitative laws for metabolism and growth. **Q. Rev. Biol.** n. 32, p.217-231, 1957.

VONESH, E.F.; CHINCHILLI, V.M. **Linear and nonlinear models for the analysis of repeated measurements**. Marcel Dekker, New York, 412p. 1997.

YAMANAKA, S.E. **Modelos não lineares mistos em estudos de crescimentos de frango de corte**. 183p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos, Campus de Sorocaba, Sorocaba, 2018.

WEST, B.T.; WELCH, K.B.; GALECKI, A.T. **Linear Mixed Models: A practical guide using statistical software**. Chapman & Hall/CRC, London, New York. 2007.

WYZYKOWSK, J; CUSTODIO, A.A.P.; CUSTODIO A.A.P.; GOMES, N.M.; MORAIS, A.R.M. Análise do diâmetro de copa do cafeeiro recepado utilizando um modelo não linear misto. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 33, n. 3, p. 243-256, 2015.

CAPÍTULO 1

O capítulo a seguir corresponde a um manuscrito integrante desta tese, o qual será submetido a um periódico com Qualis/CAPES na área de Ciências Agrárias I. Portanto, sua redação e edição seguirão as normas da revista Pesquisa e Agropecuária Brasileira (PAB), cujas normas podem ser acessadas na rede mundial de computadores conforme o endereço a seguir:

<https://seer.sct.embrapa.br/index.php/pab/about/submissions>

Estruturas de covariâncias e funções de variâncias residuais no ajuste de curvas de crescimento de bovinos

Resumo – O objetivo deste estudo foi avaliar a qualidade de ajuste do modelo Von Bertalanffy, para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá, com diferentes funções de variância e matrizes de covariâncias residuais para 34.300 fêmeas e 24.832 machos da raça criados nas regiões do Nordeste brasileiro: Gado-Algodão, Mata, Agreste, Sertão, Serra Geral da Bahia e Itapetinga-Valadares. Os modelos foram comparados via avaliadores de qualidade de ajuste: critérios de informação de Akaike, Akaike corrigido e Bayesiano, desvio médio absoluto, erro quadrático médio, coeficientes de determinação simples e ajustado. A estrutura da matriz de covariâncias residuais mais adequada é a de variâncias homogêneas e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1). A análise dos intervalos de confiança dos parâmetros de curvas de crescimento de cada região de produção permitiu identificar que machos da raça Guzerá das regiões Sertão, Serra Geral da Bahia e Mata-Agrete possuem peso assintótico comum, enquanto a taxa de maturidade é comum para animais das regiões Itapetinga-Valadares e Sertão. A região de produção Gado-Algodão apresentou maior peso assintótico, tanto para machos quanto para fêmeas.

Termos para indexação: *Bos indicus*; Nordeste brasileiro; Curvas de crescimento; Erros dependentes; Modelo Von Bertalanffy.

Covariance structures and residual variances functions in the adjustment of growth curves of cattle breed

Abstract - The objective of this study was to evaluate the goodness of fit of the Von Bertalanffy model for growth curves of Guzerat cattle with different variance functions and residual covariance matrices of 34,300 females and 24,832 males reared in regions with higher densities of these cattle: Mata Agreste, Sertão, Serra Gral da Bahia and Itapetinga-Valadares. The models were compared by the fit quality evaluators: Akaike, Corrected Akaike and Bayesian information criteria, absolute mean deviation, mean square error, simple and adjusted determination coefficients. The most adequate residual covariance matrix structure is that of homogeneous variances and first order autoregressive errors, AR (1). The analysis of the confidence intervals of the growth curve parameters of each production region allowed us to identify that Guzerá males from the Sertão, Serra Geral da Bahia and Mata Agreste regions have common asymptotic weight, while the maturity rate is common for animals of the Itapetinga-Valadares and Sertão regions. The Cattle-Cotton production region presented higher asymptotic weight for both males and females.

Index terms: northeastern Brazil, growth curves, goodness of fit, least squares, producing regions, mixed-effects model.

Introdução

O crescimento dos animais influencia diretamente na quantidade e qualidade da carne produzida. Estudos relacionados a curvas de crescimento auxiliam na definição de critérios de seleção para precocidade e ganho de peso em programas de melhoramento, podem auxiliar na definição de sistemas de produção mais adequados para cada raça e região quanto ao manejo, alimentação e também para, definir cruzamentos (SOUZA *et al.*, 2010; SILVA *et al.*, 2001; SILVA *et al.*, 2011; SILVA *et al.*, 2015; PEREIRA, 2013).

Dentre as técnicas estatísticas utilizadas para o ajuste de curvas de crescimento, os modelos não lineares mistos, tem tido aplicação prática para identificação de animais mais eficientes (CRAIG & SCHINCKEL, 2001; AGGREY, 2009; MILANI *et al.*, 2013), sendo que, além de permitirem a utilização de funções não lineares para melhor explicação dos fenômenos, consideram também a variabilidade entre e dentro dos indivíduos, permitindo com isso, estimativas mais confiáveis e mais precisas.

Uma vantagem do uso dos modelos não lineares mistos é a possibilidade de escolha que se tem com relação às estruturas a serem usadas para a matriz de covariâncias R atribuídas à variabilidade intra-indivíduos (WOLFINGER, 1993, apud WYZYKOWSKI, 2015), cuja utilização é útil na interpretação da variação aleatória nos dados para fazer inferência. Essa escolha depende da forma em que os dados foram coletados. Quando tais estruturas são parcimoniosas, sua escolha torna-se mais vantajosa se comparada com uma estrutura geral, pois possibilita a utilização de estruturas mais adequadas ao fenômeno, além de aliviar os aspectos computacionais com os modelos mais parcimoniosos. Uma superparametrização da estrutura de covariância e do modelo leva a estimativas ineficientes dos efeitos fixos, enquanto uma especificação demasiado restritiva invalida inferências sobre esses efeitos (OGLIARI & ANDRADE, 2001; UEDA, 2003; UEDA, *et al.* 2010). Os modelos não lineares mistos possibilitam descrever trajetórias de interesse por meio de modelos não lineares e simultaneamente efetuar correções entre medidas do mesmo indivíduo (intra-indivíduos) por meio da adoção de estruturas de covariâncias específicas, optando-se por aquela que melhor representa a estrutura de correlação dos dados, e também permite descrever o comportamento dos perfis médios através de curvas. (GLÓRIA, 2014; PEREIRA, 2014; SANTORO *et al.*, 2005).

A suposição de que as medidas de uma característica ao longo do tempo podem ser compreendidas como estando sob mudança contínua poderia ser interpretado como um

comportamento de dimensão infinita, cuja representação seria feita por um modelo infinitesimal e, conseqüentemente, haveria a necessidade de uma matriz de covariâncias de dimensão infinita (KIRKPATRICK *et al.*, 1990). Uma alternativa é incorporar ao modelo uma função de variância, capaz de descrever o comportamento dos parâmetros da matriz de covariâncias em qualquer ponto desejado, inclusive os não observados (LONGFORD, 1993). Tais funções reduzem o número de parâmetros a serem estimados e, conseqüentemente, diminuem o esforço computacional, além de facilitar para o pesquisador a compreensão dos resultados obtidos (LONGFORD, 1993; SANTORO, K. R; BARBOSA, S.B.P, 2010; WYZYKOWSK, J. *et al.*, 2015).

Assim, objetivou-se comparar diferentes estruturas da matriz de covariâncias residuais para o ajuste dos modelos Von Bertalanffy para curva de crescimento de bovinos machos e fêmeas da raça Guzerá de cinco regiões de produção do Nordeste brasileiro, utilizando estruturas de correlação para a modelagem de dependência dos erros e funções de variâncias para a modelagem de heterogeneidade de variâncias e comparar as curvas de crescimento entre as regiões de produção através dos intervalos de confiança dos parâmetros.

Materiais e métodos

Os dados utilizados neste trabalho são provenientes da Associação Brasileira de Criadores de Zebu (ABCZ), e contêm observações de peso corporal e idade de 34.300 fêmeas e 24.832 machos da raça Guzerá (Tabela 1). Cada animal possui de 6 a 9 pesagens ao longo do tempo, totalizando 59.132 observações. Os bovinos foram criados nas regiões de produção de Gado-Algodão (GA), Mata-Agrete (AG), Sertão (SE), Serra Geral da Bahia (SB) e Itapetinga-Valadares (IV), as quais possuem as maiores densidades de bovinos Guzerá (ARRUDA & SUGAI, 1994).

Tabela 1 - Descrição dos dados por região de produção (RP): número de animais (N), Número médio de pesagens por animal (MPA), peso mínimo (Pmín), peso máximo (Pmáx), em kg, e idade máxima (Imáx), em dias.

Sexo	RP	N	MPA	Pmín	Pmáx	Imáx
Fêmeas	GA	985	6,4	24	560	749
	AG	2030	6,6	22	669	993
	SE	337	6,3	22	422	744
	SB	448	6,6	30	520	727
	IV	399	6,6	28	530	747
Machos	GA	712	6,3	20	665	993
	AG	1427	6,5	25	695	792
	SE	388	6,4	22	535	722
	SB	329	6,5	31	530	746
	IV	431	6,5	31	530	734

GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares.

Pode-se verificar a heterogeneidade dos dados referentes aos pesos dos bovinos em função das idades (coeficiente de variação acima de 27%), principalmente nas classes iniciais de idade, ocorrendo valores discrepantes e os pesos aumentam em função do tempo (Tabela 2 e Figura 1).

Tabela 2 - Descrição dos pesos de bovinos da raça Guzerá por classes de idade, em dias (Idade): número de animais (n), Peso médio (PM), desvio-padrão dos pesos (DP), coeficiente de variação dos pesos (CV), peso mínimo (Pmín) e peso máximo (Pmáx).

Idade (dias)	Classificação	PM (kg)	DP	CV (%)	N	Pmín (kg)	Pmáx (kg)
[0; 205]	Desmama	99,2	41,9	42,3	19.724	20,0	340,0
(205; 365]	Ano	184,4	49,7	27,0	16.447	75,0	372,0
(365; 550]	Sobreano (1,5 anos)	244,4	65,8	26,9	17.347	150,0	472,0
(550; 730]	2 anos	332,2	68,4	20,6	5.555	250,0	538,0
> 730	Acima de 2 anos	513,9	132,5	25,8	59	350,0	882,0

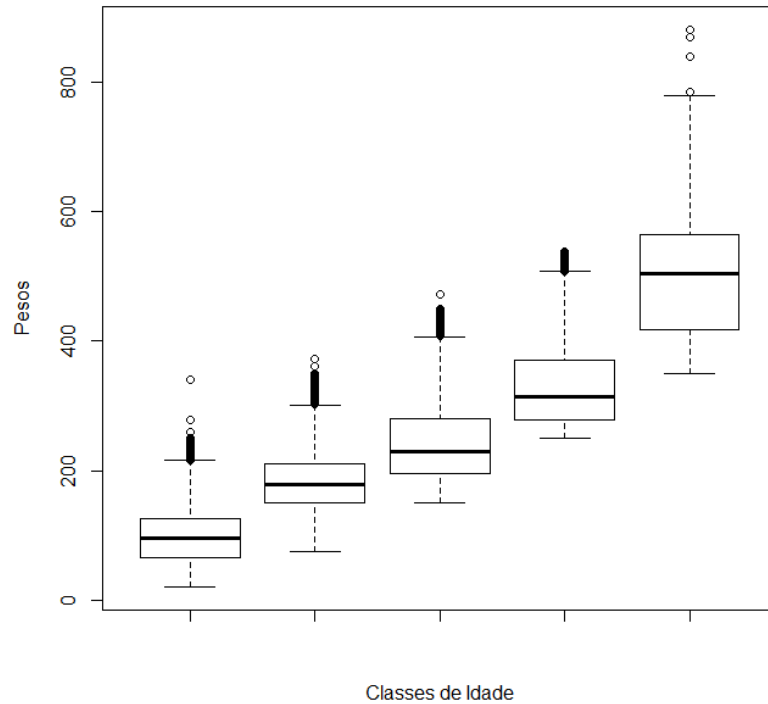


Figura 1 - Descrição dos pesos de bovinos da raça Guzerá por classes de idade.

Para ajustar as curvas de crescimento dos bovinos foram estimados os parâmetros do modelo Von Bertalanffy, ajustados para as curvas de crescimento de machos e fêmeas, dado por:

$$(\beta_1 + b_{1i})(1 - \beta_2 \exp(-(\beta_3 + b_{3i})x))^3,$$

em que β_1 é o peso assintótico, que é interpretado como o peso do animal adulto, β_2 é uma constante de integração sem interpretação biológica e β_3 é a taxa de maturidade. O modelo Von Bertalanffy foi ajustado considerando os efeitos fixos de sexo e região, e efeito aleatório de animal no parâmetro β_1 (peso assintótico), considerando ou não heterogeneidade de variâncias e a dependência dos resíduos. Diferentes estruturas de covariâncias residuais foram adotadas à medida em que foram incorporadas especificações referentes a estruturas de correlação para modelagem de dependência:

Autorregressiva de ordem 1, AR(1), cuja função de correlação é dada por

$$h(k, \varphi) = \varphi^k; |\varphi| < 1; k = 0, 1, \dots$$

Autorregressiva de ordem 1 para tempo contínuo, CAR(1), com função de correlação

$$h(s, \varphi) = \varphi^s = \varphi^{|idade_k - idade_{k'}|}; \varphi \geq 0; s \geq 0,$$

sendo $\varphi \geq 0$ o parâmetro de correlação; s expressa a distância absoluta entre duas observações.

Funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade:

As funções de variâncias são úteis para modelar a estrutura dos erros aleatórios dando menos peso às observações com grande variância, além de reduzirem o número de parâmetros a serem estimados, diminuindo o esforço computacional. Neste trabalho foram utilizadas as seguintes funções de variâncias:

Variância fixa (VF, argumento varFixed): é a classe de funções de variâncias da biblioteca *nlme* do software R utilizada em análises de regressão convencionais ou clássicas, cujas pressuposições são homogeneidade de variâncias e independência entre as observações. Sua expressão é dada por: $\emptyset = Var(e_{ij}) = \sigma^2 \times \mathbf{v}_{ij}$, $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, n_i$,

Constante por grupo (VI, argumento varIdent): pressupõe variância constante por grupo, permitindo diferentes variâncias entre as observações. $\emptyset = Var(e_{ij}) = \sigma^2 \delta_{s_{ij}}$, $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, n_i$.

Potência de uma covariável, (VP, varPower): são estruturas comuns em parcelas subdivididas sob as pressuposições de variâncias e correlações constantes entre as observações. $\emptyset = Var(e_{ij}) = \sigma^2 |\mathbf{v}_{ij}|^{2\delta}$, $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, n_i$.

Exponencial de uma covariável, (EP, varExp): $\emptyset = Var(e_{ij}) = \sigma^2 \exp(2\delta \mathbf{v}_{ij})$, $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, n_i$.

Constante + potência de uma covariável, (VCP, varConstPower): $\emptyset = Var(e_{ij}) = \sigma^2 (\delta_1 + |\mathbf{v}_{ij}|^{\delta_2})^2$, $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, n_i$.

sendo e_{ij} o erro aleatório, $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, n_i$; σ^2 a variância; $\emptyset$ coeficiente associado à função de variância; M o número de níveis ou grupos com variâncias

diferentes; $\mathbf{v}_{ij}$.vetor de covariáveis associadas à função de variância; $\boldsymbol{\delta}$ vetor de coeficientes da função de variância; S_{ij} , variável de estratificação (níveis).

Os modelos não lineares foram ajustados por meio da biblioteca *nlme* do software R (R, 2008). Os parâmetros dos modelos foram estimados pelo método de máxima verossimilhança, cujo algoritmo foi proposto por Lindstrom & Bates (1990).

Para avaliar e comparar os modelos ajustados foram utilizados os avaliadores da qualidade de ajuste, que podem ser encontrados em: Akaike (1974), Sugiura (1978), Schwarz (1978), Gujarati (2006). São eles: critério de informação de Akaike, $AIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2p$, critério de informação de Akaike Corrigido, $AICc = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2p \left(\frac{n}{n-p-1} \right)$, critério de informação Bayesiano $BIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + p \log(n)$, coeficiente de determinação, $R^2 = (r_{y,\hat{y}})^2$, coeficiente de determinação ajustado, $R^2_{aj} = R^2 - \left(\frac{p-1}{n-p} \right) (1 - R^2)$, desvio médio absoluto, $DMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$, erro quadrático médio, $EQM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$, em que $L(\hat{\theta})$ é o valor da função de verossimilhança maximizada, p é o número de parâmetros do modelo, n é o tamanho da amostra, y_i é a resposta do i -ésimo indivíduo e $\hat{y}_i$ é a resposta estimada do i -ésimo indivíduo.

Através do comando *intervals* da biblioteca *nlme* do software R, foram construídos intervalos com 95% de confiança para os parâmetros do modelo Von Bertalanffy com variância homogênea e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1), separadamente para machos e fêmeas e também considerando cada região de produção. Tais intervalos foram utilizados para comparar os parâmetros de interesse (peso assintótico ou taxa de maturidade) entre duas regiões de produção. Assim, dois intervalos de confiança com sobreposição indicam que as duas regiões de produção apresentam parâmetro comum.

Resultados e discussão

Neste trabalho foram incorporadas diferentes funções de variâncias para modelar a estrutura dos erros aleatórios que, combinadas com estruturas de dependência nos erros, AR(1) e CAR(1), geraram diferentes modelos (Tabelas 3, 4, 7). Considerando o modelo Von Bertalanffy para os bovinos Guzerá das cinco regiões de produção com maior densidade de animais do Nordeste brasileiro, combinações entre diferentes funções de

variâncias e estruturas de correlação ajustaram doze possíveis modelos para os quais os critérios de convergência foram atingidos. A escolha da função de variância e a incorporação das estruturas de correlação alteram as estimativas dos parâmetros dos modelos, embora não houvesse diferença entre os avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos com estruturas autorregressivas de primeira ordem, AR(1) e autoregressiva de primeira ordem para tempo contínuo, CAR(1) (Tabela 3), bem como não houve alterações nas estimativas dos parâmetros obtidas entre os modelos ajustados com essas estruturas (Tabelas 3 e 4). Os modelos em que foram utilizadas as funções de variâncias exponencial de uma covariável (VE, classe VarExp) ou Constante + Potência de uma covariável (VCP, classe VarConsPower) apresentaram problemas computacionais não atingindo os critérios de convergência e, portanto, impossibilitando a obtenção das estimativas de seus respectivos parâmetros (Tabelas 3 e 4). Dos doze modelos ajustados, apenas seis apresentaram resultados diferentes (Tabelas 3, 5) e para as estimativas dos parâmetros (Tabelas 4 e 7). As previsões e os avaliadores de qualidade de ajuste foram alterados à medida que foram incorporadas ao modelo diferentes funções de variâncias e as estruturas de correlação.

Como as estimativas dos parâmetros associados ao peso assintótico (β_1) e taxa de maturidade (β_3) variaram entre as cinco regiões de produção (especialmente para fêmeas), há uma indicação de que o ajuste de apenas uma curva de crescimento não é adequado para descrever o crescimento dos bovinos da raça Guzerá para todas as regiões do Nordeste brasileiro.

O modelo usual refere-se ao modelo misto com efeito aleatório no parâmetro β_1 (peso assintótico) e com pressuposição de homogeneidade de variâncias e independência dos resíduos.

Ao comparar os modelos não lineares mistos usuais com os modelos mistos com homogeneidade de variâncias e efeito aleatório para o peso assintótico (β_1) e erros com estruturas de dependência de primeira ordem, AR(1), nota-se uma melhora nos critérios de qualidade de ajuste (Tabela 3). Houve uma redução nos valores obtidos dos critérios AIC, AIC_C, DMA e EQM, enquanto os coeficientes de determinação, R^2 , R_{aj}^2 pouco variaram. Pelos critérios de avaliação da qualidade de ajuste, os modelos mistos com variâncias homogêneas apresentaram resultados semelhantes ou superiores aos modelos com variâncias heterogêneas, inclusive na estimação dos parâmetros de interesse.

Tabela 3 - Avaliadores da qualidade de ajuste do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade estruturas de correlação para modelagem, AR(1), para modelagem de dependência.

Modelo	<i>p</i>	AIC	AIC _c	BIC	DMA	EQM	<i>R</i> ²	<i>R</i> _{aj} ²
Usual	32	572.322,3	572.256,3	572.609,9	16,394	464,02	0,946	0,946
Homog + AR(1)	33	564.313,3	564.245,3	564.609,9	17,008	494,02	0,943	0,943
homog+ CAR(1)	33	564.313,3	564.245,3	564.609,9	17,008	494,02	0,943	0,943
VF	32	571.975,3	571.909,3	572.262,9	18,102	626,61	0,929	0,929
VF + AR(1)	33	557.558,9	557.491,0	557.855,5	25,075	1231,61	0,863	0,863
VF + CAR(1)	33	557.558,9	557.491,0	557.855,5	25,075	1231,56	0,863	0,863
VI	32	572.322,3	572.256,3	572.609,9	16,394	464,016	0,946	0,946
VI + AR(1)	33	564.313,3	564.245,3	564.609,9	17,009	494,02	0,943	0,943
VI + CAR(1)	33	564.313,3	564.245,3	564.609,9	17,009	494,02	0,943	0,943
VP	33	566.653,4	566.585,4	566.950,0	17,354	562,046	0,937	0,937
VP + AR(1)	34	558.607,3	558.537,3	558.912,8	36,374	2565,03	0,703	0,703
VP + CAR(1)	34	558.607,3	558.537,3	558.912,8	36,374	2565,01	0,703	0,703
VE	-	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
VCP	-	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC

Funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade: VarFixed(VF); VarIdent(VI); VarPower (VP); VarExp(VE); VarConstPower (VCP). Estruturas de correlação para modelagem de dependência: Autorregressivo de ordem 1, AR(1); Autorregressivo para tempo contínuo, CAR(1). *p*: nº de parâmetros do modelo. AIC: critério de informação de Akaike, AIC_c: critério de informação de Akaike corrigido, BIC: critério de informação Bayesiano, DMA: desvio médio absoluto, *R*²: coeficiente de determinação, *R*_{aj}²: coeficiente de determinação ajustado, EQM: erro quadrático médio,

Não houve distinção entre o modelo misto com variâncias homogêneas e erros com dependência de primeira ordem, AR(1), o modelo misto com variâncias homogêneas e erros com estrutura de dependência contínua de primeira ordem, CAR(1), modelo misto com função de variância fixa (VF) e erros com dependência de primeira ordem, AR(1), o modelo misto com função de variância fixa (VF) e erros com estrutura de dependência contínua de primeira ordem, CAR(1) apresentaram estimativas similares para os parâmetros de interesse (Tabelas 3, 4, 7) e, portanto, podem tratar de um mesmo modelo. Tal modelo não obteve os melhores resultados pelos avaliadores da qualidade de ajuste

AIC (564.313,3), AIC_c (564.245,3), BIC (564.609,3), DMA (17,008) e EQM (494,015) e coeficientes de determinação, R^2 (0,9427) e R^2_{aj} (0,9427).

Os modelos com menores valores de AIC, AIC_c e BIC não foram satisfatórios em relação aos valores de EQM, DMA e R^2 . Assim, identificou-se a melhor estrutura de covariâncias residuais com base nos modelos com coeficientes de determinação maiores, R^2 e R^2_{aj} (superiores a 90%) e valores baixos para os demais avaliadores de qualidade de ajuste. O decréscimo nos valores de qualidade dos ajustes EQM e DMA, bem como o aumento nos coeficientes de determinação, pode-se concluir que houve melhora na precisão das estimativas dos parâmetros do modelo selecionado com relação aos demais, em termos de EQM, DMA e R^2 (Tabela 3). Seguindo este critério a estrutura mais adequada foi a de variâncias homogêneas e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1).

Tabela 4 - Componentes de variâncias do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando estrutura diagonal da matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios com diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade estruturas de correlação para modelagem de dependência dos erros.

Modelo	$\hat{\sigma}$	$\widehat{\sigma_{b_1}}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$
Usual (homogênea)	23,481	82,130		
(homog) AR(1)	26,506	81,060	0,4810	
(homog)CAR(1)	26,506	81,060	0,4810	
VF	1,589	66,631		
VF + AR(1)	2,301	48,659	0,7399	
VF + CAR(1)	2,301	48,659	0,7399	
VI	23,480	82,131		
VI + AR(1)	26,506	81,060	0,4810	
VI + CAR(1)	26,506	81,060	0,4810	
VP	0,859	69,081		0,6446
VP + AR(1)	0,588	0,070	0,8143	0,8359
VP + CAR(1)	0,588	0,108	0,8143	0,8359
VE	NC	NC	NC	NC
VCP	NC	NC	NC	NC

D: Estrutura diagonal da matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios (argumento pdDiag). Funções de Variâncias para modelagem de heterocedasticidade: VarFixed(VF); VarIdent(VI); VarPower (VP); VarExp(VE); VarConstPower (VCP). Estruturas de correlação para modelagem de dependência: Autorregressivo de ordem 1, AR(1); Autorregressivo para tempo contínuo, CAR(1). $\hat{\rho}$: parâmetro de autocorrelação residual de primeira ordem. σ : desvio padrão residual. $\hat{\phi}$: coeficiente associado à função de variância.

A comparação das curvas de crescimento entre regiões pelo intervalo com 95% de confiança (Tabela 6), percebe-se para machos algumas características nas estimativas dos parâmetros do modelo Von Bertalanffy selecionado com 33 parâmetros entre as regiões de produção, para peso assintótico (β_1) e taxa de maturidade (β_3) (Tabela 6). O intervalo de confiança para a taxa de maturidade de machos da região de produção Mata-Agrete (0,00260; 0,00291) não tem sobreposição com os demais, enquanto todos os demais intervalos têm alguma sobreposição indicando alguma igualdade no parâmetro β_3 , que apresentou as menores estimativas. Significa que os machos Guzerá dessa região atingem o peso adulto mais tardiamente do que os demais. As regiões Sertão e Serra Geral da Bahia possuem peso assintótico comum, enquanto todas as regiões possuem estimativas diferentes para β_2 .

Considerando a região Gado-Algodão, a taxa de maturidade estimada foi superior: para machos (0,00364) e para fêmeas (0,00411), indicando que os animais criados nessa região apresentam maior precocidade, ou seja, atingem o peso adulto mais rapidamente que os criados nas demais regiões. Para fêmeas, houve distinções entre as estimativas para peso assintótico em dois grupos de regiões: (1) Gado-Algodão e Mata-Agrete, que apresentam estimativas semelhantes entre si e (2) Sertão, Itapetinga-Valadares e Serra Geral da Bahia, que apresentaram as maiores estimativas do peso assintótico (β_1) 351,881kg. Houve similaridade entre as estimativas para a taxa de maturidade entre três regiões de produção para fêmeas que apresentaram estimativas similares: Sertão, Serra Geral da Bahia e Mata-Agrete, e apresentaram maiores taxas (Tabela 6).

Como era de se esperar, as fêmeas apresentaram menores pesos assintóticos estimados com relação aos machos: 274,288kg (Gado-Algodão) a 351,881kg (Serra Geral da Bahia) e as maiores estimativas para a taxa de maturidade: 0,00340 (Serra Geral da Bahia) a 0,00411 (Gado-Algodão). Significa que as fêmeas em geral têm peso adulto inferior aos machos e requerem maior tempo para atingirem-no.

Para fêmeas, os modelos ajustados para peso assintótico apresentam dois grupos: as regiões com as fêmeas com maior peso assintótico: Sertão, Serra Geral da Bahia e Itapetinga-Valadares (Tabela 6) e as regiões Gado-Algodão e Mata-Agrete com os menores pesos de fêmeas. As regiões Sertão, Serra Geral da Bahia e Mata-Agrete possuem estimativas próximas para β_2 .

Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros do modelo e erros padrões das estimativas Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando o modelo com variâncias homogêneas e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1).

Macho						
Região	$\widehat{\beta}_1$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_3$
GA	332,470	3,791	0,531	0,00348	0,00380	0,00006
IV	417,617	3,346	0,542	0,00214	0,00330	0,00004
AG	356,991	7,451	0,520	0,00432	0,00300	0,00009
SE	386,593	6,489	0,503	0,00485	0,00350	0,00009
SB	395,511	6,768	0,486	0,00399	0,00320	0,00009
Fêmea						
Região	$\widehat{b}_1$	Erro padrão de $\widehat{b}_1$	$\widehat{\beta}_2$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_3$
GA	270,805	2,677	0,502	0,00316	0,00430	0,00006
IV	346,892	2,334	0,515	0,00204	0,00370	0,00004
AG	280,525	5,862	0,485	0,00511	0,00350	0,00011
SE	346,263	5,521	0,484	0,00428	0,00350	0,00009
SB	350,775	5,752	0,484	0,00473	0,00350	0,00009

GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares.

Oliveira *et al.* (2000) aplicaram o modelo Von Bertalanffy no ajuste de curvas de crescimento de fêmeas da raça Guzerá. Os autores estimaram uma curva para cada animal e apresentaram uma curva média com peso assintótico igual a 453,2, valor um pouco superior ao encontrado pelo modelo selecionado, e taxa de maturidade de 0,065, cuja estimativa é muito superior que a encontrada.

Santoro & Barbosa (2010) analisaram o peso em função da idade de caprinos da raça Moxotó, ajustando diferentes estruturas da matriz de covariâncias residuais, $\mathbf{R}$, tais como simetria composta, simetria composta heterogênea, dentre outras. Verificaram que a alteração do tipo de matriz de covariâncias residuais entre pesos desses animais alterou a predição dos efeitos aleatórios e fixos no modelo ajustado.

Tabela 6 - Intervalos de 95% de confiança (IC) para os parâmetros estimados do modelo Von Bertalanffy com efeito fixo para região e sexo, efeito aleatório em β_1 , homogeneidade de variâncias e dependência de erros de primeira ordem para bovinos da raça Guzerá.

Macho					
Parâmetro	Região	Estimativa	Limite Inferior	Limite Superior	Amplitude
β_1	GA	339,338	331,908	346,768	14,860
	AG	369,225	353,867	384,583	30,716
	SE	386,307	373,929	398,684	24,754
	SB	391,274	378,571	403,977	25,407
	IV	419,021	412,708	425,335	12,628
β_2	SB	0,4716	0,4658	0,4773	0,0115
	SE	0,4955	0,4883	0,5027	0,0144
	AG	0,5126	0,5067	0,5185	0,0117
	GA	0,5274	0,5223	0,5326	0,0103
	IV	0,5391	0,5360	0,5422	0,0062
β_3	AG	0,00275	0,00260	0,00291	0,00032
	SB	0,00308	0,00292	0,00324	0,00031
	IV	0,00329	0,00322	0,00336	0,00014
	SE	0,00340	0,00324	0,00357	0,00033
	GA	0,00364	0,00353	0,00375	0,00022
Fêmea					
Parâmetro	Região	Estimativa	Limite Inferior	Limite Superior	Amplitude
β_1	GA	274,288	269,103	279,474	10,371
	AG	279,616	268,410	290,822	22,412
	SE	345,969	335,494	356,443	20,948
	IV	350,174	345,720	354,629	8,910
	SB	351,881	340,822	362,940	22,119
β_2	AG	0,47349	0,46599	0,48100	0,0150
	SE	0,47507	0,46884	0,48129	0,0125
	SB	0,48135	0,47451	0,48819	0,0137
	GA	0,49699	0,49215	0,50183	0,0097
	IV	0,51069	0,50767	0,51371	0,0060
β_3	SB	0,00340	0,00324	0,00356	0,00033
	AG	0,00343	0,00322	0,00364	0,00042
	SE	0,00344	0,00328	0,00359	0,00032
	IV	0,00363	0,00356	0,00369	0,00013
	GA	0,00411	0,00399	0,00422	0,00022

GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra Geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares.

Santoro *et al.* (2005) encontraram estimativas do peso assintótico de fêmeas (352,2 kg) e machos (463,2 kg) da raça Guzerá criados no Estado de Pernambuco usando, respectivamente, os modelos Von Bertalanffy e Gompertz. O Estado de Pernambuco corresponde a partes das regiões Gado-Algodão, Mata-Agrete e Sertão, portanto sua diversidade é grande. Porém, vale ressaltar que fatores relacionados ao tipo de fazendeiro

e ao tipo de manejo também podem interferir no efeito da região de produção sobre o crescimento, além do local em que os animais são criados.

Alves (2016) avaliou a qualidade de ajuste de modelos não lineares mistos no estudo de crescimento de bovinos da raça Guzerá em diferentes regiões de produção do Nordeste brasileiro, cujos modelos mais adequados aos dados foram, para machos e fêmeas, respectivamente, Gompertz e Von Bertalanffy. Pelo modelo Gompertz, as estimativas do peso assintótico para fêmeas estavam entre 332,4kg e 431,0kg e taxa de maturidade entre 0,0031 e 0,0043. As estimativas para fêmeas pelo modelo Von Bertalanffy variaram entre 345,6kg e 443,1kg para o peso assintótico e taxa de maturidade entre 0,0024 e 0,0041. Considerando machos pelo modelo Gompertz, as estimativas para o peso assintótico foram entre 381,0kg e 506,2kg e taxa de maturidade de 0,0031 a 0,0039. Em contrapartida, pelo modelo Von Bertalanffy, os pesos assintóticos variaram entre 399,8kg e 495,5kg, com taxas de maturidade entre 0,0023 e 0,0032.

Carneiro *et al.* (2014) utilizaram dados de bovinos da raça Tabapuã ajustados ao modelo Brody para estimar as curvas de crescimento para as regiões Maranhão, Gado-Algodão, Mata-Agrete, Sertão e Itapetinga-Valadares e usaram o teste da razão de verossimilhança sobre a taxa de maturidade para agrupá-las. Para machos, as regiões foram divididas em três grupos, o primeiro com as regiões Gado-Algodão e Mata-Agrete, o segundo com Maranhão e Itapetinga-Valadares e o terceiro com o Sertão. Para fêmeas, as curvas de crescimento das regiões Mata-Agrete e Sertão apresentaram taxa de maturidade em comum, da mesma forma que Maranhão e Itapetinga-Valadares, enquanto Gado-Algodão obteve uma taxa de maturidade diferente das outras regiões. Neste trabalho, as estimativas referentes ao peso assintótico para ambos os sexos foram inferiores às estimativas obtidas por esses autores.

Conclusões

1. A estrutura da matriz de covariâncias residuais mais adequada é a de variâncias homogêneas e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1);
2. A análise dos intervalos de confiança dos parâmetros de curvas de crescimento de cada região de produção permitiu identificar que machos da raça Guzerá das regiões Sertão, Serra Geral da Bahia e Mata-Agrete possuem peso assintótico comum, enquanto a taxa de maturidade é comum para animais das regiões

Itapetinga-Valadares e Sertão;

3. Através da análise dos intervalos de confiança foram identificados dois grupos distintos de peso assintótico para fêmeas da raça Guzerá: as regiões de produção que apresentaram maior peso foram Gado-Algodão e Mata-Agrete e, as com o menor peso assintótico: Serra Geral da Bahia, Sertão e Itapetinga-Valadares. A taxa de maturidade é comum para fêmeas das regiões Mata-Agrete, Sertão e Serra Geral da Bahia (menores), enquanto as regiões Itapetinga-Valadares e Gado-Algodão apresentaram taxas maiores.

Agradecimentos

À Associação Brasileira de Criadores de Zebu (ABCZ) pela disponibilização dos dados e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro concedido.

Referências bibliográficas

AGGREY, S.E. Logistic nonlinear mixed effects model for estimating growth parameters. **Poultry Science**, v. 88, n. 2, p. 276-280, 2009.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Notre Dame, v.19, n. 6, p. 717-723, 1974.

ALVES, R.F.S. **Estudo do crescimento de bovinos da raça Guzerá utilizando modelos não lineares mistos**. 56 p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria), Universidade Federal de Viçosa – Departamento de Estatística, 2016.

Associação dos Criadores Gaúchos de Zebu (ACGZ); Guzerá. Esteio. Disponível em http://www.achz.com.br/secao_raças.php?pagina=4>2012. Acesso em 20/02/2018.

ARRUDA, Z.J. de; SUGAI, Y. **Regionalização da pecuária bovina no Brasil**. Campo Grande: Embrapa-CNPGC; Brasília: Embrapa-SPI, 1994. 144p. (Embrapa-CNPGC. Documentos, 58).

CARNEIRO, A. P. S.; MUNIZ, J. A.; CARNEIRO, P. L. S.; MALHADO, C. H. M.; MARTINS FILHO, R.; SILVA, F. F. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, 49, n.1, p.57-62, jan. 2014

CRAIG, B.A.; SCHINCKEL, A.P. Nonlinear mixed effects model for swine growth. **Prof. Animal Science**, vol. 17, p. 256-260, 2001.

GLÓRIA, L.S. **Estimação de parâmetros não-lineares no R e no SAS: aplicações para cinética digestiva e crescimento em ruminantes**. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciência Animal), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – Departamento de Ciência Animal, 2014.

GONÇALVES, T.M.; DIAS, M.A.D.; AZEVEDO JUNIOR, J.; RODRIGUEZ, M.A.P.; TIMPANI, V.D.; OLIVEIRA, A.I.G. Curva de crescimento de fêmeas da raça Nelore e seus cruzamentos. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 35, n. 3, p. 582-590, 2011.

GUJARATI, D.N. tradução por MONTEIRO, M.J.C. **Econometria Básica** 3ª reimpressão. Rio de Janeiro: Elsevier, 575p. 2006.

KIRKPATRICK, M., LOFSVOLD, D.; BULMER, M. Analysis of inheritance, selection and evolution of growth trajectories. **Genetics**, v. 124, p. 979-993, 1990.

LINDSTROM, M.J.; BATES, D.M. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. **Biometrics**, n.46, p.673-687, 1990.

LONGFORD, N.T. **Random coefficients models**. Clarendon Press, Oxford, 1993.

MILANI, E. J.; SCHNEIDER, P.R. CUNHA, T. A. Crescimento em diâmetro de árvores de *Podocarpus lambertii* em duas regiões fitogeográficas no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. **Ciência Florestal**, v.23, n.2, p.443-448, 2013.

OGLIARI, P.J.; ANDRADE, D.F. Analysing longitudinal data via nonlinear models in randomized block designs. **Computacional Statistics & Data Analysis**. V.36, p.319-332, 2001.

OLIVEIRA, H.N. de; LOBO, R.B.; PEREIRA, C.S. Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.35, n.9, p.1843-1851, set. 2000.

PEIXOTO, M.G.C.D.; SANTOS, D.J.A.; BORQUIS, R.R.A.; BRUNELI, F. A. T.; PANETTO, J.C.C.; TONHATI, H. Random regression models to estimate genetic parameters for milk production of Guzerat cows using orthogonal Legendre polynomials. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**. Brasília, v. 49, n. 5, 2014.

R DEVELOPMENT CORE TEAM (2018). **R: a language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing. Vienna: R Foundation for Statistical, 2018. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 10 de janeiro de 2018.

SANTORO, K.R.; BARBOSA, S.B.P.; BRASIL, L.H.A.; SANTOS, E.S. Estimativas de parâmetros de curvas de crescimento de bovinos Zebu, criados no Estado de Pernambuco. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v.34, n.6, p.2262-2279, 2005.

SANTORO, K.R.; BARBOSA, S.B.P. Influência da estrutura da matriz de covariâncias na classificação de reprodutores caprinos. **Archivos de Zootecnia**, v.59, n.227, p.345-355, 2010.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a models. **Annals of**, Hayward, v. 6, n. 2, p. 461- 464, 1978.

SILVA, F.F.; AQUINO, L.H.; OLIVEIRA, A.I.G. Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento em gado Nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 25, p. 1195-1205, 2001.

SILVA, N.S.; DUARTE, J.B.; REIS, A.J.S. Seleção de matriz de variância-covariância residual na análise de ensaios varietais com medidas repetidas em cana-de-açúcar. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 45, n. 6, p. 993-999, 2015.

SILVA, F.L.; ALENCAR, M.M.; FREITAS, A.R.; PACKER, I.U; MOURÃO, G.B. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.46, p.262-271, 2011.

SOUZA, L.A.; CAIRES, D.N.; CARNEIRO, P.L.S.; MALHADO, C.H.M.; MARTINS FILHO, R. Curvas de crescimento em bovinos da raça Indubrasil criados no estado de Sergipe. **Revista Ciência Agronômica**, v.41, n. 4, p.671-676, 2010.

SUGIURA, N. Further analysis of the data by akaike's information criterion and the finite corrections. **Communications in Statistics – Theory and Methods**. Ontario, v. 7, n. 1, p. 13-26, 1978.

PEREIRA, N.N. **Modelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã**. 38p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria), Universidade Federal de Viçosa – Departamento de Estatística, Viçosa, 2013.

PEREIRA, N.N.; CARNEIRO, A.P.S.; TOLEDO, E.R.; EMILIANO, P.C.; SILVA, F.F.E.; CARNEIRO, P. L.S.; CARNEIRO, J.C.S. Curvas de Crescimento de Bovinos com Coeficientes Aleatórios para Peso à Maturidade. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 3, p. 309-313, 2014.

PINHEIRO, J.C.; BATES, D.M. DEBROY S.; SARKAR,D.; R Core team. (2018). **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models**. R package version 3, p.1-93, 2018.

UEDA, C.M. **Modelos não lineares com diferentes estruturas de covariâncias em curvas de crescimento: Uma aplicação no estudo da severidade da doença Late blight** 110p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

UEDA, C.M.; YAMAMOTO, A.Y.; NUNES, W.M.C.; SCAPIM, C.A.; GUEDES, T.A. Nonlinear models for describing the Citrus Variegated Chlorosis in groves of two counties at northwestern Paraná state, Brazil. **Acta Scientiarum. Agronomy**, Maringá, v. 32, n. 4, p. 603-611, 2010.

YAMANAKA, S.E. **Modelos não lineares mistos em estudos de crescimentos de frango de corte**. 183p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos, Campus de Sorocaba, Sorocaba, 2018.

WYZYKOWSK, J; CUSTODIO, A.A.P.; CUSTODIO A.A.P.; GOMES, N.M.; MORAIS, A.R.M. Análise do diâmetro de copa do cafeeiro recepado utilizando um modelo não linear misto. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 33, n. 3, p. 243-256, 2015.

ANEXO

Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá por sexo e por regiões de produção, considerando diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade e estruturas de correlação para modelagem de dependência.

Macho							
Modelo	RP	$\widehat{b}_1$	Erro padrão de $\widehat{b}_1$	$\widehat{\beta}_2$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_3$
Usual (homogênea)	GA	339,338	3,792	0,527	0,00262	0,00360	0,00006
	IV	419,018	3,222	0,539	0,00159	0,00330	0,00004
	AG	369,224	7,838	0,513	0,00299	0,00280	0,00008
	SE	386,306	6,316	0,496	0,00368	0,00340	0,00008
	SB	391,274	6,483	0,472	0,00292	0,00310	0,00008
(homog) + AR(1)	GA	332,470	3,791	0,531	0,00348	0,00380	0,00006
	IV	417,617	3,346	0,542	0,00214	0,00330	0,00004
	AG	356,991	7,451	0,520	0,00432	0,00300	0,00009
	SE	386,593	6,489	0,503	0,00485	0,00350	0,00009
	SB	395,511	6,768	0,486	0,00399	0,00320	0,00009
homog + CAR(1)	GA	332,470	3,791	0,531	0,00348	0,00380	0,00006
	IV	417,617	3,346	0,542	0,00214	0,00330	0,00004
	AG	356,991	7,451	0,520	0,00432	0,00300	0,00009
	SE	386,593	6,489	0,503	0,00485	0,00350	0,00009
	SB	395,511	6,768	0,486	0,00399	0,00320	0,00009
D + VF	GA	316,766	3,228	0,524	0,00154	0,00410	0,00005
	IV	375,517	2,510	0,538	0,00095	0,00390	0,00003
	AG	302,920	4,767	0,522	0,00233	0,00390	0,00008
	SE	345,668	4,913	0,511	0,00251	0,00430	0,00008
	SB	329,613	4,233	0,493	0,00232	0,00450	0,00008
D + VF + AR(1)	GA	313,852	3,650	0,519	0,00217	0,00420	0,00007
	IV	385,162	3,135	0,538	0,00145	0,00380	0,00004
	AG	293,419	5,002	0,527	0,00332	0,00420	0,00010
	SE	343,761	5,424	0,511	0,00333	0,00440	0,00010
	SB	337,422	4,847	0,502	0,00303	0,00450	0,00010
D + VF + CAR(1)	GA	313,852	3,650	0,519	0,00217	0,00420	0,00007
	IV	385,162	3,135	0,538	0,00145	0,00380	0,00004
	AG	293,420	5,002	0,527	0,00332	0,00420	0,00010
	SE	343,761	5,424	0,511	0,00333	0,00440	0,00010
	SB	337,422	4,847	0,502	0,00303	0,00450	0,00010
D + VI	GA	339,338	3,792	0,527	0,00262	0,00360	0,00006
	IV	419,018	3,222	0,539	0,00159	0,00330	0,00004
	AG	369,224	7,838	0,513	0,00299	0,00280	0,00008
	SE	386,306	6,316	0,496	0,00368	0,00340	0,00008
	SB	391,274	6,483	0,472	0,00292	0,00310	0,00008
D + VI + AR(1)	GA	332,470	3,791	0,531	0,00348	0,00380	0,00006
	IV	417,617	3,346	0,542	0,00214	0,00330	0,00004
	AG	356,991	7,451	0,520	0,00432	0,00300	0,00009
	SE	386,593	6,489	0,503	0,00485	0,00350	0,00009
	SB	395,511	6,768	0,486	0,00399	0,00320	0,00009

(continuação da Tabela 7)

Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá por sexo e por regiões de produção, considerando diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade e estruturas de correlação para modelagem de dependência.

D + VI + CAR(1)	GA	332,470	3,791	0,531	0,00348	0,00380	0,00006
	IV	417,617	3,346	0,542	0,00214	0,00330	0,00004
	AG	356,991	7,451	0,520	0,00432	0,00300	0,00009
	SE	386,593	6,489	0,503	0,00485	0,00350	0,00009
	SB	395,511	6,768	0,486	0,00399	0,00320	0,00009
D + VP	GA	315,620	3,297	0,511	0,00175	0,00400	0,00006
	IV	381,437	2,786	0,528	0,00119	0,00370	0,00004
	AG	310,020	4,957	0,510	0,00241	0,00370	0,00008
	SE	352,572	5,237	0,502	0,00304	0,00410	0,00009
	SB	344,259	4,760	0,482	0,00276	0,00400	0,00009
D + VP + AR(1)	GA	331,079	4,068	0,524	0,00242	0,00390	0,00007
	IV	412,806	4,179	0,539	0,00185	0,00340	0,00004
	AG	303,669	4,920	0,526	0,00337	0,00410	0,00009
	SE	353,894	6,049	0,512	0,00406	0,00430	0,00011
	SB	350,284	5,526	0,504	0,00372	0,00430	0,00011
D + VP + CAR(1)	GA	331,079	4,068	0,524	0,00242	0,00390	0,00007
	IV	412,806	4,179	0,539	0,00185	0,00340	0,00004
	AG	303,669	4,920	0,526	0,00337	0,00410	0,00009
	SE	353,894	6,049	0,512	0,00406	0,00430	0,00011
	SB	350,283	5,526	0,504	0,00372	0,00430	0,00011
VE	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
VCP	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Fêmea							
Formulação	RP	$\widehat{b}_1$	Erro padrão de $\widehat{b}_1$	$\widehat{\beta}_2$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	Erro padrão de $\widehat{\beta}_3$
Usual (homogênea)	GA	274,286	2,646	0,497	0,00247	0,00410	0,00006
	IV	350,172	2,273	0,511	0,00154	0,00360	0,00003
	AG	279,612	5,719	0,474	0,00383	0,00340	0,00011
	SE	345,968	5,345	0,475	0,00318	0,00340	0,00008
	SB	351,881	5,644	0,481	0,00349	0,00340	0,00008
(homog) AR(1)	GA	270,805	2,677	0,502	0,00316	0,00430	0,00006
	IV	346,892	2,334	0,515	0,00204	0,00370	0,00004
	AG	280,525	5,862	0,485	0,00511	0,00350	0,00011
	SE	346,263	5,521	0,484	0,00428	0,00350	0,00009
	SB	350,775	5,752	0,484	0,00473	0,00350	0,00009
homog CAR(1)	GA	270,805	2,677	0,502	0,00316	0,00430	0,00006
	IV	346,892	2,334	0,515	0,00204	0,00370	0,00004
	AG	280,525	5,862	0,485	0,00511	0,00350	0,00011
	SE	346,263	5,521	0,484	0,00428	0,00350	0,00009
	SB	350,775	5,752	0,484	0,00473	0,00350	0,00009
D + VF	GA	255,79	2,173	0,508	0,00136	0,00490	0,00005
	IV	316,7	1,793	0,523	0,00088	0,00450	0,00003
	AG	239,898	3,842	0,500	0,00265	0,00490	0,00010
	SE	306,308	3,984	0,495	0,00218	0,00450	0,00008
	SB	307,408	4,029	0,510	0,00217	0,00470	0,00007

(continuação da Tabela 7)

Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá por sexo e por regiões de produção, considerando diferentes funções de variâncias para modelagem de heterocedasticidade e estruturas de correlação para modelagem de dependência.

D + VF + AR(1)	GA	255,564	2,460	0,501	0,00185	0,00480	0,00006
	IV	318,18	2,093	0,518	0,00126	0,00440	0,00004
	AG	237,977	4,149	0,503	0,00350	0,00500	0,00012
	SE	308,97	4,528	0,496	0,00295	0,00450	0,00010
	SB	312,332	4,640	0,513	0,00306	0,00460	0,00010
D + VF + CAR(1)	GA	255,564	2,460	0,501	0,00185	0,00480	0,00006
	IV	318,18	2,093	0,518	0,00126	0,00440	0,00004
	AG	237,978	4,149	0,503	0,00350	0,00500	0,00012
	SE	308,971	4,528	0,496	0,00295	0,00450	0,00010
	SB	312,332	4,640	0,513	0,00306	0,00460	0,00010
D + VI	GA	274,286	2,646	0,497	0,00247	0,00410	0,00006
	IV	350,172	2,273	0,511	0,00154	0,00360	0,00003
	AG	279,612	5,719	0,474	0,00383	0,00340	0,00011
	SE	345,968	5,345	0,475	0,00318	0,00340	0,00008
	SB	351,881	5,644	0,481	0,00349	0,00340	0,00008
D + VI + AR(1)	GA	270,805	2,677	0,502	0,00315	0,00430	0,00006
	IV	346,892	2,334	0,515	0,00204	0,00370	0,00004
	AG	280,525	5,862	0,485	0,00511	0,00350	0,00011
	SE	346,263	5,521	0,484	0,00428	0,00350	0,00009
	SB	350,775	5,752	0,484	0,00473	0,00350	0,00009
D + VI + CAR(1)	GA	270,805	2,677	0,502	0,00316	0,00430	0,00006
	IV	346,892	2,334	0,515	0,00204	0,00370	0,00004
	AG	280,525	5,862	0,485	0,00511	0,00350	0,00011
	SE	346,263	5,521	0,484	0,00428	0,00350	0,00009
	SB	350,775	5,752	0,484	0,00473	0,00350	0,00009
D + VP	GA	258,957	2,237	0,491	0,00157	0,00450	0,00005
	IV	326,207	1,957	0,509	0,00109	0,00410	0,00003
	AG	249,73	4,006	0,487	0,00280	0,00440	0,00010
	SE	317,66	4,305	0,485	0,00256	0,00410	0,00008
	SB	319,757	4,458	0,491	0,00285	0,00420	0,00008
D + VP + AR(1)	GA	271,44	2,428	0,504	0,00193	0,00440	0,00006
	IV	338,768	2,419	0,519	0,00151	0,00400	0,00004
	AG	249,033	3,662	0,504	0,00343	0,00480	0,00011
	SE	323,16	4,895	0,498	0,00349	0,00430	0,00010
	SB	324,152	4,903	0,513	0,00372	0,00440	0,00010
D + VP + CAR(1)	GA	271,44	2,428	0,504	0,00193	0,00440	0,00006
	IV	338,768	2,419	0,519	0,00151	0,00400	0,00004
	AG	249,033	3,662	0,504	0,00343	0,00480	0,00011
	SE	323,16	4,895	0,498	0,00349	0,00430	0,00010
	SB	324,152	4,903	0,513	0,00372	0,00440	0,00010
VE	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
VCP	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC

RP: Região de produção. GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra Geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares. Funções de Variâncias para modelagem de heterocedasticidade: VarFixed(VF); VarIdent(VI); VarPower (VP); VarExp(VE); VarConstPower (VCP). Estruturas de correlação para modelagem de dependência: Autorregressivo de ordem 1, AR(1); Autorregressivo para tempo contínuo, CAR(1).

CAPÍTULO 2

O capítulo a seguir corresponde a um manuscrito integrante desta tese, o qual será submetido a um periódico com Qualis/CAPES na área de Ciências Agrárias I. Portanto, sua redação e edição seguirão as normas da revista Pesquisa e Agropecuária Brasileira (PAB), cujas normas podem ser acessadas na rede mundial de computadores conforme o endereço a seguir:

<https://seer.sct.embrapa.br/index.php/pab/about/submissions>

Estruturas de covariâncias para parâmetros de curvas de crescimento de bovinos do Nordeste brasileiro

Resumo – O objetivo deste estudo foi comparar diferentes estruturas da matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, no ajuste do modelo Von Bertalanffy para bovinos da raça Guzerá de cinco regiões de produção do Nordeste brasileiro e comparar as curvas de crescimento entre essas regiões via intervalos de confiança. Foram analisados o peso corporal e idade de fêmeas e machos criados nas regiões: Gado-Algodão, Mata-Agrete, Sertão, Serra Geral da Bahia e Itapetinga-Valadares, com as estruturas de covariâncias: diagonal, positiva definida geral, identidade múltipla e simetria composta. Os modelos foram comparados por avaliadores de qualidade de ajuste. Diferentes estruturas para a matriz de covariâncias dos efeitos aleatórios afeta a predição dos efeitos aleatórios e fixos do modelo, bem como a qualidade de ajuste. A estrutura de covariâncias dos efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, representada pela matriz positiva definida geral é a mais adequada aos dados. Através dos intervalos de confiança dos parâmetros de curvas de crescimento de cada região de produção verificou-se que machos da raça Guzerá das regiões Mata-Agrete e Gado-Algodão possuem peso assintótico comum e taxa de maturidade comum nas regiões Itapetinga-Valadares e Sertão. As fêmeas apresentam pesos assintóticos diferentes em todas as regiões de produção.

Termos para indexação: *Bos indicus*; Curvas de crescimento; Erros dependentes; Modelo não linear misto; Modelo Von Bertalanffy.

Covariance structures for parameters of growth curves of cattle from Northeast Brazil

Abstract - The aim of this study was to compare different covariance matrix structures for the random effects, asymptotic weight and maturity rate, in the adjustment of the Von Bertalanffy model for Guzerá cattle from five production regions of the Brazilian Northeast and to compare the growth curves between these regions via confidence intervals. The body weight and age of females and males of the regions: Gado-Algodão, Mata-Agrete, Sertão, Serra Geral da Bahia and Itapetinga-Valadares were analyzed, with covariance structures of random effects, asymptotic weight and maturity rate: diagonal, positive definite general, multiple identity and composite symmetry. The models were compared by fit quality assessors. The structure represented by the general definite positive matrix is the most suitable for the data. Different structures for the covariance matrix affect the prediction of the random and fixed effects of the model, as well as the quality of fit. Based on the confidence intervals of growth curve parameters for each production region, it was found that Guzerá males from the Mata Agreste and Gado-Algodão regions have a common asymptotic weight and a common maturity rate in the Itapetinga-Valadares and Sertão regions. Females present different asymptotic weights in all production regions.

Index terms: *Bos indicus*; Growth curves; Dependent errors; Mixed nonlinear model; Von Bertalanffy. model.

Introdução

A quantidade e qualidade da produção de carne de bovinos de corte são diretamente influenciadas pelo crescimento desses animais. Dessa forma, o ajuste de curvas de crescimento pode fornecer subsídios para a definição de estratégias para o manejo, melhoramento genético, programas alimentares e a definição de cruzamentos. Após o ajuste do modelo adequado aos dados analisados é possível, por exemplo, estimar a idade e o tempo ótimo para abater o animal, em função de sua maturidade para evitar prejuízos em consumos destinados apenas à sua manutenção com baixa conversão alimentar (SILVA *et al.*, 2011; PEREIRA *et al.*, 2014).

A análise de curvas de crescimento de animais tem sido muito utilizada para aumentar a eficiência da pecuária de corte e os modelos não lineares, desenvolvidos empiricamente para relacionar peso e idade, têm-se mostrado adequados para descrever o crescimento. (SANTORO *et al.*, 2005; SOUZA *et al.*, 2010; SILVA *et al.*, 2015; PEREIRA, 2013). Dessa forma, há uma busca pelo modelo que se ajuste melhor aos dados. Para isso são utilizados avaliadores de qualidade de ajuste, os quais indicam estatisticamente qual é o modelo mais adequado aos dados analisados.

A seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados para estimar o crescimento em função da idade está condicionada a diversos fatores como raça, idade do animal nas últimas pesagens, ambiente e do modelo propriamente dito. Dentre as técnicas estatísticas utilizadas para o ajuste de curvas de crescimento, os modelos não lineares mistos, tem tido aplicação prática para identificação de animais mais eficientes (CRAIG & SCHINCKEL, 2001; AGGREY, 2009; MILANI *et al.*, 2013), sendo que, além de permitirem a utilização de funções não lineares para melhor explicação dos fenômenos, consideram também a variabilidade entre e dentro dos indivíduos, permitindo com isso, estimativas mais confiáveis e mais precisas (KIRKPATRICK *et al.*, 1990, LONGFORD, 1993; SANTORO & BARBOSA, 2010).

À medida que aumenta a idade do animal, aumentam também o seu peso corporal, bem como a variância relacionada. Consequentemente, no estudo de curvas de crescimento é comum a ocorrência de heterogeneidade de variâncias entre as pesagens registradas. Por esse motivo, grande parte do esforço empregado na modelagem de dados com medidas repetidas concentra-se na estrutura da matriz de covariâncias (SILVA *et al.*, 2011). Para a escolha da estrutura da matriz de covariâncias **D** mais adequada aos dados, devemos ajustar os possíveis modelos considerando estruturas distintas da matriz de **D**. Em seguida, devem

ser realizados testes estatísticos ou adotados critérios de informação para se tomar decisões (SARTÓRIO, 2013; PINHEIRO & BATES, 2000; YAMANAKA, 2018).

Em muitas situações práticas pode-se desejar restringir a matriz de covariâncias para os efeitos aleatórios de alguma forma especial com menor número de parâmetros no modelo. A estrutura de modelos aleatórios representa uma classe importante de estruturas de covariâncias por apresentar grande flexibilidade para a modelagem de dados não balanceados, incompletos e irregulares, como ocorre em situações de pesagens de bovinos (UEDA, *et al.* 2010). Se a correlação entre os efeitos aleatórios for suficientemente pequena, ou se o zero (0) pertencer à estimativa do intervalo de confiança para a covariância entre eles, pode-se assumir que os efeitos aleatórios são independentes. Nesse caso, a estrutura da matriz mais indicada seria a diagonal.

O objetivo deste estudo foi comparar diferentes estruturas da matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, no ajuste do modelo Von Bertalanffy para bovinos machos e fêmeas da raça Guzerá de cinco regiões do Nordeste brasileiro e comparar as curvas de crescimento entre as regiões de produção através dos intervalos de confiança.

Materiais e métodos

Arruda & Sugai (1994) subdividiram o Brasil em regiões homogêneas baseado nas características da pecuária bovina. Consideraram informações como clima, solo, vegetação natural, relevo, posição geográfica, altitude, estrutura fundiária, densidade bovina, densidade principal do rebanho, padrão racial, fase de exploração predominante, fase de crescimento anual do rebanho e crescimento da área das pastagens, além de aptidões locais e causas de natureza histórica, política e econômica. Eles dividiram o Brasil nas seguintes regiões de produção (RP): Amazônia Ocidental, Amazônia Oriental, Centro-Oeste, Sudeste, Sul e Nordeste. Para o Nordeste brasileiro eles deliberaram onze regiões de produção. Neste trabalho foram estudadas as cinco regiões do Nordeste brasileiro mais produtivas: Gado Algodão (GA), Mata Agreste (AG), Sertão (SE), Serra Geral da Bahia (SB) e Itapetinga-Valadares (IV). A Tabela 1 apresenta as cinco regiões estudadas neste trabalho com suas respectivas abrangências.

Tabela 1 - Código e nomes das regiões de produção avaliadas neste trabalho.

Código	Região	Abrangência
25	GA: Gado Algodão	Parte dos Estados: Pará, Rio G. do Norte, Paraíba, Piauí, Pernambuco
26	AG: Mata Agreste	Parte dos Estados: Rio G. do Norte, Paraíba, Pernambuco, Bahia, Alagoas, Sergipe
27	SE: Sertão	Abrange: Piauí, Bahia, Alagoas, Pernambuco, Sergipe
29	SB: Serra Geral da Bahia	Parte do Estado da Bahia
35	IV: Itapetinga-Valadares	Sudeste da Bahia e parte dos Estados de Minas Gerais e Espírito Santo

Os dados utilizados neste trabalho são provenientes da Associação Brasileira de Criadores de Zebu (ABCZ), e contém observações de peso corporal e idade de 34.300 fêmeas e 24.832 machos da raça Guzerá (Tabela 2). Cada animal possui de 6 a 12 pesagens ao longo do tempo totalizando 59.132 observações. Os bovinos foram criados nas cinco regiões de produção da região Nordeste que possuem as maiores densidades de bovinos Guzerá.

Tabela 2 - Descrição dos dados por região de produção (RP): número de animais (n), Número médio de pesagens por animal (MPA), peso mínimo (Pmín), peso máximo (Pmáx) e idade máxima (Imáx).

Sexo	RP	n	MPA	Pmín	Pmáx	Imáx
Fêmeas	GA	9.503	6,4	24	560	749
	AG	15.630	6,6	22	669	993
	SE	3.079	6,3	22	422	744
	SB	3.229	6,6	30	520	727
	IV	2.859	6,6	28	530	747
Machos	GA	5.912	6,3	20	665	993
	AG	10.581	6,5	25	695	792
	SE	3.117	6,4	22	535	722
	SB	2.274	6,5	31	530	746
	IV	2.948	6,5	31	530	734

GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares.

Para ajustar as curvas de crescimento dos bovinos foram estimados os parâmetros do modelo Von Bertalanffy, ajustados para as curvas de crescimento de machos e fêmeas, dado por:

$$(\beta_1 + b_{1i})(1 - \beta_2 \exp(-(\beta_3 + b_{3i})x))^3,$$

sendo β_1 o peso assintótico ou peso do animal adulto, β_2 é uma constante de integração sem interpretação biológica e β_3 é a taxa de maturidade. O modelo Von Bertalanffy foi ajustado considerando os efeitos fixos de sexo e região, e efeito aleatório de animal no parâmetro β_1 (peso assintótico) e β_3 (taxa de maturidade). Para a estrutura de variâncias residuais, adotou-se a matriz com variâncias homogêneas e erros autoregressivos de primeira ordem, que foi identificada como mais adequada no Capítulo 1. Santoro & Barbosa (2010) recomendam o método de máxima verossimilhança restrita (REML) para a estimação dos parâmetros de interesse, quando se trabalha com estruturas de covariâncias no ajuste de modelos mistos por geralmente apresentar resultados mais confiáveis e, conseqüentemente, inferências mais seguras a partir dos mesmos.

Diferentes modelos foram ajustados, à medida em que foram utilizadas diferentes especificações para a estruturas da matriz de covariâncias $\mathbf{D}$ para os efeitos aleatórios peso assintótico e taxa de maturidade (WYZYKOWSKI, *et al.* 2015): matriz diagonal (D, argumento pdDiag), a qual pressupõe efeitos aleatórios independentes; matriz identidade múltipla (Id, argumento pdIdent), cuja pressuposição considera efeitos aleatórios independentes com a mesma variância; matriz positiva definida geral (PD, argumento pdSymm), que é matriz geral simétrica e positiva definida. Segundo Barbosa (2009), a classe pdSymm, pode ser utilizada pelo argumento *random* na biblioteca *nlme* do R para representar a matriz $\mathbf{D}$ não estruturada associada aos efeitos aleatórios; Simetria composta (SC, argumento pdCompSymm), que pressupõe variância constante e observações correlacionadas, com valor de correlação fixo. Para a modelagem de dependência foi considerada a estrutura de correlação autorregressiva de primeira ordem, AR(1), cuja função de correlação é dada por $h(k, \rho) = \rho^k$; $|\rho| < 1$; $k = 0, 1, \dots$

Através da biblioteca *nlme* do software R (R, 2018) os modelos não lineares Von Bertalanffy foram ajustados e seus parâmetros foram estimados pelo método de máxima verossimilhança restrita, REML.

Para avaliar e comparar os modelos ajustados foram utilizados os avaliadores da qualidade de ajuste, que podem ser encontrados em: Akaike (1974), Sugiura (1978), Schwarz (1978), Gujarati (2006). São eles: critério de informação de Akaike, $AIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2p$, critério de informação de Akaike Corrigido, $AICc = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2p \left(\frac{n}{n-p-1} \right)$, critério de informação Bayesiano $BIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + p \log(n)$, coeficiente de determinação, $R^2 = (r_{y,\hat{y}})^2$, coeficiente de determinação ajustado, $R^2_{aj} = R^2 - \left(\frac{p-1}{n-p} \right) (1 - R^2)$, desvio médio absoluto, $DMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$, erro quadrático médio, $EQM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$, sendo $L(\hat{\theta})$ o valor da função de verossimilhança restrita maximizada, p o número de parâmetros do modelo, n o tamanho da amostra, y_i a resposta do i -ésimo indivíduo e $\hat{y}_i$ a resposta estimada do i -ésimo indivíduo.

Intervalos com 95% de confiança foram construídos para os parâmetros do modelo, por sexo e por regiões de produção por meio da biblioteca *nlme* do software R (R, 2018). Esses intervalos de confiança para os parâmetros estimados em cada região de produção foram utilizados para comparar os parâmetros (peso assintótico ou taxa de maturidade) entre duas regiões de produção entre si. Assim, dois intervalos de confiança com sobreposição indicam que as duas regiões de produção apresentam parâmetro comum. Foram construídos intervalos com 95% de confiança, utilizando o modelo Von Bertalanffy para machos e fêmeas.

Resultados e discussão

Os modelos não lineares mistos mostraram-se flexíveis na utilização de diferentes estruturas da matriz **D** de covariâncias para os efeitos aleatórios que possibilitam explicar características como heterogeneidade dos dados no estudo de curvas de crescimento de bovinos da raça Guzará.

Neste trabalho, foram considerados o modelo Von Bertalanffy e as seguintes estruturas da matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade: diagonal (D), identidade múltipla (Id), positiva definida geral (PD) e simetria composta (SC). Tais estruturas estão implementadas no pacote *nlme* do software R com os seguintes argumentos: *pdDiag*, *pdIdent*, *pdSymm* e *pdCompSymm* e possibilitou o ajuste de diferentes modelos.

O ajuste do modelo Von Bertalanffy para os bovinos da raça Guzerá das cinco regiões de produção do Nordeste brasileiro com maior densidade desses animais e as quatro combinações entre as matrizes de covariâncias associadas aos efeitos aleatórios para o peso assintótico e para a taxa de maturidade foram incorporadas a estrutura de correlação de primeira ordem, AR(1) para a dependência dos erros. Tais combinações geraram quatro possíveis modelos distintos, dos quais três foram ajustados. O modelo no qual foi utilizada a estrutura simetria composta para a matriz de covariâncias **D** apresentou problemas computacionais e não pôde ser ajustado, possivelmente em virtude das altas correlações, geralmente verificadas entre medidas repetidas, e do número elevado de parâmetros a serem estimados. Consequentemente, pela falta de convergência, não foi possível obter as estimativas de seus parâmetros.

Em conformidade com Malheiros (2001) e Santoro & Barbosa (2010) foi verificado que a alteração na escolha dentre as estruturas diagonal (D) ou positiva definida geral (PD) e identidade múltipla (Id) da matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, houve diferenças nos valores calculados dos avaliadores de qualidade de ajuste e também na predição dos efeitos aleatórios e fixos do modelo (Tabelas 3 e 4).

Através dos avaliadores da qualidade do ajuste, a estrutura de covariâncias para os efeitos aleatórios mais adequada foi a matriz de covariâncias **D** positiva definida geral (PD, pdSymm), pois apresentou os menores valores para o DMA (13,44) e EQM (311,38) e coeficientes de determinação (R^2 e R_{aj}^2 superiores a 96%) para o modelo ajustado Von Bertalanffy com variâncias homogêneas, e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1). Para a estrutura de variâncias homogêneas com erros de dependência AR(1) e matriz de covariâncias **D** diagonal (D, pdDiag), os critérios AIC, AIC_c e BIC foram menores, porém, o DMA e, principalmente, o EQM tiveram um aumento significativo, além de um decréscimo nos valores dos coeficientes de determinação, R^2 e R_{aj}^2 (de 0,9639 para 0,94627).

Tabela 3 - Avaliadores da qualidade de ajuste do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando diferentes estruturas da matriz **D** para os efeitos aleatórios, considerando diferentes estruturas da matriz **D** para os efeitos aleatórios, homogeneidade de variâncias para a matriz de covariâncias residuais, **R** e estrutura de correlação autorregressiva de primeira ordem, AR(1), para modelagem de dependência dos erros.

Modelo	p	AIC	AIC _c	BIC	DMA	EQM	R^2	R^2_{aj}
Homo+D	34	564.540,8	564.470,9	564846,4	17,01	493,97	0,943	0,943
Homo+Id	33	576.577,2	576.509,2	576873,7	36,07	2.496,97	0,711	0,710
Homo+PD	35	572.915,1	572.843,2	573229,7	13,44	311,38	0,964	0,964
Homo+ SC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Hetero+PD	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC

Estruturas ou estruturas da matriz **D** para os efeitos aleatórios: Diagonal (D, pdDiag); Positiva definida geral (PD, pdSymm); Identidade múltipla (Id, pdIdent); Estrutura de simetria composta (SC, pdCompSymm). Estruturas de correlação para modelagem de dependência: Autorregressivo de ordem 1, AR(1); p : n° de parâmetros do modelo. AIC: critério de informação de Akaike, AIC_c: critério de informação de Akaike corrigido, BIC: critério de informação Bayesiano, DMA: desvio médio absoluto, R^2 : coeficiente de determinação, R^2_{aj} : coeficiente de determinação ajustado, EQM: erro quadrático médio. NC: não convergiu.

Os valores menores dos avaliadores de qualidade do ajuste para EQM e DMA, bem como o decréscimo nos coeficientes de determinação para o modelo Von Bertalanffy com estrutura de covariâncias positiva definida geral para os efeitos aleatórios, homogeneidade de variâncias e erros autorregressivos de primeira ordem, AR(1), é possível identificar melhora na precisão nas estimativas dos parâmetros desse modelo com relação aos demais.

Tabela 4 - Componentes de variâncias do modelo Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando diferentes estruturas da matriz **D** para os efeitos aleatórios, homogeneidade de variâncias para a matriz de covariâncias residuais, **R** e estrutura de correlação autorregressiva de primeira ordem, AR(1), para modelagem de dependência dos erros.

Modelo	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}_{b_1}$	$\hat{\sigma}_{b_3}$	$\hat{r}(b_1, b_3)$	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$
Homog+D	26,519	81,079	0,00000083	-	0,4903	-
Homog+Id	52,118	$7,18 \times 10^{-56}$	$7,18 \times 10^{-56}$	-	0,8355	-
Homog+PD	20,106	144,015	0,00183183	-0,843	0,00000011	-
Homog+ SC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Heterog+PD	NC	NC	NC	NC	NC	NC

Diagonal (D); Positiva definida geral (PD); Simetria composta (SC). Autorregressivo de ordem 1, AR(1). $\hat{\rho}$: parâmetro de autocorrelação residual de primeira ordem σ : desvio padrão residual; $\hat{r}(b_1, b_3)$: coeficiente de correlação estimado entre o peso adulto e a taxa de maturidade do animal.

Analisando-se a Tabela 5, verifica-se que o tipo de estrutura adotado para a matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, altera tanto as estimativas dos parâmetros de curva de crescimento quanto do erro padrão das estimativas. Considerando, por exemplo, o peso assintótico para machos da região Gado-Algodão, de acordo com a estrutura utilizada tem-se 332,514kg com erro padrão 3,792kg (estrutura diagonal, D), 371,268kg com erro padrão 5,643kg (estrutura identidade múltipla, Id) e 325,770kg e erro padrão 4,829kg (estrutura positiva definida geral, PD). As estimativas para fêmeas da mesma região foram: 270,835kg e erro padrão 2,678kg (diagonal, D), 301,049kg e erro padrão 3,530kg (identidade múltipla, Id) e 296,527kg e erro padrão 3,725kg (positiva definida geral, PD). Destacando assim a importância de identificação da estrutura da matriz de covariâncias mais adequada para os efeitos aleatórios (Tabela 5).

Analisando os intervalos com 95% de confiança para as estimativas dos parâmetros de efeito aleatório, para machos temos que a região de produção Mata-Agrete apresentou a menor estimativa para peso assintótico (324,839kg), porém não diferiu estatisticamente da região Gado-Algodão. A região Itapetinga-Valadares apresentou a maior estimativa para o peso assintótico (441,868kg), diferente das estimativas para as demais regiões. Com relação às estimativas para taxa de maturidade de bovinos machos da raça Guzerá, a região de produção Serra Geral da Bahia apresentou a menor estimativa (0,003540) e Gado-Algodão a maior estimativa (0,005296). Ambas diferentes das demais regiões. Considerando fêmeas da raça Guzerá, todas as regiões de produção apresentaram estimativas diferentes. Como ocorrido com os machos, as regiões que apresentaram menor e maior peso assintótico foram Mata-Agrete (275,233kg) e Itapetinga-Valadares (497,844kg). As taxas de maturidade foram 0,002746 para Itapetinga-Valadares, que foi similar à estimativa obtida pela região Serra Geral da Bahia. A região de produção Gado-Algodão apresentou a maior taxa de maturidade (0,005296) e, de modo semelhante ao ocorrido com os machos, sua estimativa difere das demais regiões de produção.

Na comparação das curvas de crescimentos entre regiões de produção pelos intervalos de confiança, temos que, para machos, as regiões Mata-Agrete e Gado-Algodão possuem pesos assintóticos comuns (Tabela 6). O intervalo de confiança para taxa de maturidade da região Serra Geral da Bahia não tem sobreposição com os outros, logo a estimativa difere estatisticamente com as demais regiões de produção. Em relação a taxa de maturidade de machos, podemos interpretar através dos intervalos de confiança que as

regiões Serra Geral da Bahia e Gado-Algodão apresentam, respectivamente, a menor e a maior estimativas diferindo estatisticamente das demais regiões. A taxa de maturidade para machos, as regiões Itapetinga-Valadares (0,004125) e Sertão (0,004143) apresentaram estimativas semelhantes, em conformidade com o Capítulo 1.

Ao observar as estimativas dos parâmetros do modelo Von Bertalanffy com estrutura de covariâncias positiva definida geral para os efeitos aleatórios com variâncias residuais homogêneas e erros autorrepressivos de primeira ordem, ajustado com 35 parâmetros, as regiões de produção com taxas de maturidade próximas para machos (Tabela 6) foram: Itapetinga-Valadares (0,004125) e Sertão (0,004143). Para a região Gado-Algodão, a taxa de maturidade estimada foi superior às demais (0,005296). Significa que os machos dessa região atingem o peso adulto mais precocemente que os demais. Percebe-se uma diferença nas estimativas do peso assintótico entre as regiões, para ambos os sexos. A região de produção Itapetinga-Valadares apresentou a maior estimativa do peso assintótico para machos, 441,868kg com estimativa para a taxa de maturidade 0,004125 (a segunda menor – indicativo de segundo maior tempo para os animais atingirem o peso adulto). Por outro lado, a região Mata-Agrete indicou a menor estimativa para o peso adulto (324,839 kg).

As regiões de produção que apresentaram pesos assintóticos estatisticamente semelhantes entre si, respectivamente: Mata-Agrete e Gado-Algodão (324,839kg e 325,770kg), Sertão e Serra Geral da Bahia (388,527kg e 404,542kg). Os machos com maior peso assintótico pertencem à região Itapetinga-Valadares (441,542kg).

Para fêmeas, as regiões que apresentaram estimativas da taxa de maturidade próximas e inferiores às demais foram Itapetinga-Valadares (0,002746) e Serra Geral da Bahia (0,002986). Significa que as fêmeas dessas regiões atingem o peso adulto mais tardiamente que as demais. De modo análogo aos machos, as fêmeas de Gado-Algodão também são mais precoces, pois apresentaram maiores estimativas nas taxas de maturidade (0,004765).

A região de produção Itapetinga-Valadares apresentou a maior estimativa para o peso assintótico de fêmeas com a menor taxa de maturidade, pode-se concluir que as fêmeas da raça Guzerá avaliadas neste estudo apresentaram melhor peso adulto, porém o atingiram mais tardiamente do que as fêmeas das demais regiões.

Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros do modelo e erros padrões das estimativas Von Bertalanffy para curvas de crescimento de bovinos da raça Guzerá nas cinco regiões de produção mais produtivas, considerando ou não homogeneidade de variâncias, estrutura de correlação AR(1) para modelagem de dependência dos erros e diferentes estruturas da matriz **D** para os efeitos aleatórios em .

Macho				
Modelo	Região	$\widehat{b}_1$ (erro $\widehat{b}_1$)	$\widehat{\beta}_2$ (erro $\widehat{\beta}_2$)	$\widehat{b}_3$ (erro $\widehat{b}_3$)
Homog+D	GA	332,514 (3,792)	0,5311 (0,00348)	0,0038 (0,00006)
	IV	417,577 (3,345)	0,5417 (0,00214)	0,0033 (0,00004)
	AG	357,058 (7,455)	0,5200 (0,00432)	0,0030 (0,00009)
	SE	386,627 (6,490)	0,5026 (0,00485)	0,0035 (0,00009)
	SB	395,548 (6,771)	0,4859 (0,00399)	0,0032 (0,00009)
Homog+Id	GA	371,268 (5,643)	0,5069 (0,00536)	0,0031 (0,00008)
	IV	495,475 (6,361)	0,5345 (0,00341)	0,0025 (0,00005)
	AG	413,891 (13,681)	0,5128 (0,00730)	0,0024 (0,00011)
	SE	403,911 (7,604)	0,4904 (0,00803)	0,0032 (0,00011)
	SB	429,525 (9,709)	0,4845 (0,00674)	0,0028 (0,00011)
Homog+PD	GA	325,770 (4,829)	0,5789 (0,00252)	0,0053 (0,00007)
	IV	441,868 (4,005)	0,5769 (0,00140)	0,0041 (0,00005)
	AG	324,839 (6,920)	0,5591 (0,00328)	0,0041 (0,00011)
	SE	388,527 (8,385)	0,5229 (0,00331)	0,0046 (0,00010)
	SB	404,542 (7,865)	0,4933 (0,00265)	0,0035 (0,00010)
Homog+ SC	NC	NC	NC	NC
Heterog+PD	NC	NC	NC	NC
Fêmea				
	Região	$\widehat{b}_1$ (erro $\widehat{b}_1$)	$\widehat{\beta}_2$ (erro $\widehat{\beta}_2$)	$\widehat{b}_3$ (erro $\widehat{b}_3$)
Homog+D	GA	270,835 (2,678)	0,5024 (0,00316)	0,0042 (0,00006)
	IV	346,929 (2,335)	0,5145 (0,00204)	0,0037 (0,00004)
	AG	280,566 (5,864)	0,4845 (0,00511)	0,0035 (0,00011)
	SE	346,290 (5,522)	0,4839 (0,00428)	0,0035 (0,00009)
	SB	350,796 (5,754)	0,4936 (0,00473)	0,0035 (0,00009)
Homog+Id	GA	301,049 (3,530)	0,4878 (0,00485)	0,0035 (0,00008)
	IV	385,283 (3,306)	0,5028 (0,00326)	0,0031 (0,00005)
	AG	308,615 (8,189)	0,4815 (0,00841)	0,0030 (0,00004)
	SE	368,748 (6,825)	0,4789 (0,00720)	0,0032 (0,00011)
	SB	374,313 (7,089)	0,4889 (0,00784)	0,0032 (0,00011)
Homog+PD	GA	296,527 (3,725)	0,5258 (0,00201)	0,0048 (0,00006)
	IV	497,844 (3,661)	0,5376 (0,00106)	0,0027 (0,00004)
	AG	275,233 (6,657)	0,5010 (0,00370)	0,0043 (0,00011)
	SE	391,346 (7,319)	0,4975 (0,00265)	0,0034 (0,00010)
	SB	430,391 (8,038)	0,4977 (0,00264)	0,0030 (0,00010)
Homog+ SC	NC	NC	NC	NC
Heterog+PD	NC	NC	NC	NC

GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra Geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares.

A regiões de produção que apresentaram estimativas semelhantes para a taxa de maturidade entre as fêmeas (Tabela 6) foram Itapetinga-Valadares (0,002746) e Serra Geral da Bahia (0,00986). Com exceção da região Itapetinga-Valadares, que apresentou o

maior peso assintótico para fêmeas (máximo de 497,844kg) todas as demais regiões de produção apresentaram menores pesos assintóticos estimados com relação aos machos (máximo de 441,868kg). Porém, apresentaram as menores estimativas para a taxa de maturidade: 0,002746 (Itapetinga-Valadares) a 0,004765 (Gado-Algodão). Significa que as fêmeas apresentam menor peso adulto do que os machos e, neste caso, requerem menor tempo para atingirem seu peso máximo.

Neste trabalho as estimativas para o peso assintótico e taxa de maturidade variaram entre as cinco regiões de produção, especialmente para fêmeas, há uma indicação de que o ajuste de apenas uma curva de crescimento não é adequado para descrever o crescimento dos animais para todas as regiões de produção do Nordeste brasileiro, pois o tipo de região pode interferir no peso adulto do animal. Incorporar ao modelo informações sobre as regiões de produção permitiu ajustar uma curva de crescimento e intervalos de confiança específicos para cada região de produção. O resultado obtido para fêmeas da região Itapetinga-Valadares foi um pouco superior às estimativas obtidas por Oliveira *et al.* (2000) e por Santoro *et al.* (2005).

No estudo de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã realizado por Pereira *et al.* (2014) foi avaliada a eficiência do ajuste dos modelos Michaelis-Mentem Modificado, Brody, Logístico, Von Bertalanffy, Gompertz e Richards, incorporando efeitos aleatórios. O modelo Brody ajustou-se melhor aos dados para machos e o Michaelis-Mentem Modificado para fêmeas. Obtiveram estimativas para os pesos assintóticos de 695,99kg e 467,24kg para machos e fêmeas, respectivamente.

Silva *et al.* (2011) ajustaram modelos não lineares mistos no estudo de curvas de crescimento em vacas de corte de quatro tipos biológicos para avaliar a influência de efeitos do ambiente e de grupo genético sobre o parâmetro estimado do modelo, utilizando o inverso da variância entre pesos como fator de ponderação no ajuste dos modelos. Os modelos Brody e Von Bertalanffy foram os mais adequados.

Carneiro *et al.* (2014) ajustaram o modelo Brody no estudo de curvas de crescimento para bovinos da raça Tabapuã das regiões Maranhão, Gado-Algodão, Mata-Agrete, Sertão e Itapetinga-Valadares. Neste trabalho, as estimativas referentes ao peso assintótico para ambos os sexos foram inferiores às estimativas obtidas por esses autores.

Tabela 6 - Intervalos de 95% de confiança (IC) para os parâmetros estimados do modelo Von Bertalanffy com efeito fixo para região e sexo, efeito aleatório para peso assintótico (β_1) e taxa de maturidade (β_3) para bovinos da raça Guzerá.

Macho					
Parâmetro	Região	Limite inferior	Estimativa	Limite superior	Amplitude
β_1	AG	324,839	311,276	338,402	27,1266
	GA	325,770	316,306	335,234	18,9282
	SE	388,527	372,094	404,961	32,8676
	SB	404,542	389,127	419,958	30,8312
	IV	441,868	434,018	449,718	15,7000
β_2	SB	0,4933	0,4881	0,4985	0,0104
	SE	0,5229	0,5164	0,5294	0,0130
	AG	0,5591	0,5526	0,5655	0,0128
	IV	0,5769	0,5742	0,5796	0,0055
	GA	0,5789	0,5740	0,5838	0,0099
β_3	SB	0,003540	0,003345	0,003735	0,000390
	IV	0,004125	0,004027	0,004222	0,000196
	SE	0,004143	0,003920	0,004367	0,000447
	AG	0,004640	0,004447	0,004833	0,000386
	GA	0,005296	0,005154	0,005439	0,000285
Fêmea					
Parâmetro	Região	Limite inferior	Estimativa	Limite superior	Amplitude
β_1	AG	275,233	262,185	288,281	26,0966
	GA	296,527	289,226	303,828	14,6014
	SE	391,346	377,001	405,691	28,6899
	SB	430,391	414,636	446,146	31,5101
	IV	497,844	490,669	505,019	14,3505
β_2	SE	0,4975	0,4923	0,5027	0,0104
	SB	0,4977	0,4926	0,5029	0,0103
	AG	0,5010	0,4937	0,5082	0,0145
	GA	0,5258	0,5218	0,5297	0,0079
	IV	0,5376	0,5355	0,5396	0,0042
β_3	IV	0,002746	0,002669	0,002823	0,000154
	SB	0,002986	0,002795	0,003177	0,000382
	SE	0,003449	0,003264	0,003635	0,000371
	AG	0,004348	0,004130	0,004567	0,000437
	GA	0,004765	0,004648	0,004882	0,000235

GA: Gado-Algodão, AG: Mata-Agrete, SE: Sertão, SB: Serra Geral da Bahia, IV: Itapetinga-Valadares.

Yamanaka (2018) analisou o crescimento de frangos de corte utilizando as abordagens de modelos lineares generalizados e modelos não lineares mistos. Verificou que quando os efeitos aleatórios foram incorporados aos modelos não lineares mistos, a variabilidade oriunda de fatores associados ao delineamento experimental foi explicada pelo modelo, mesmo quando as informações sobre o tipo de delineamento não foram incluídas na análise.

Wyzykowski *et al.* (2015) aplicaram o modelo Logístico no ajuste de curvas de crescimento do diâmetro da copa do cafeeiro, utilizando diferentes estruturas da matriz de covariâncias **D** para os efeitos aleatórios. Ajustaram o modelo proposto utilizando as estruturas diagonal, positiva definida geral e identidade múltipla. Aplicaram o teste da razão de verossimilhança e concluíram que estrutura mais adequada foi a matriz diagonal adequada, ou seja, efeitos aleatórios com variâncias diferentes e covariâncias nulas, indicando independência entre os efeitos aleatórios. O resultado difere do encontrado neste trabalho. No entanto, o fato de os autores terem analisado o crescimento de café ajustando modelo logístico e não terem avaliado os critérios EQM, DMA e R^2 , pode justificar os resultados diferentes. Porém, apesar de não testarem as estruturas da matriz **D**, encontram correlação alta e negativa entre as estimativas para os efeitos aleatórios, quando ajustaram uma curva para cada indivíduo, indicando que quando é incorporado o efeito aleatório nos parâmetros de interesse não é adequado desconsiderar a dependência entre eles.

Conclusões

1. A utilização de diferentes estruturas para a matriz de covariâncias dos efeitos aleatórios afeta a predição dos efeitos aleatórios e fixos do modelo, bem como a qualidade de ajuste. A estrutura de covariâncias dos efeitos aleatórios, peso assintótico e taxa de maturidade, representada pela matriz positiva definida geral é a mais adequada para ajuste de curva de crescimentos de bovinos da raça Guzerá do Nordeste brasileiro.
2. A análise dos intervalos de confiança dos parâmetros de curvas de crescimento de cada região de produção permitiu identificar que machos da raça Guzerá das regiões Mata-Agrete e Gado-Algodão possuem peso assintótico comum. A taxa de maturidade é comum para os animais das as regiões de produção Itapetinga-Valadares e Sertão.
3. Através da análise dos intervalos de confiança verificou-se que as fêmeas da raça Guzerá apresentam pesos assintóticos diferentes em todas as regiões de produção. A taxa de maturidade é comum para os animais das as regiões de produção Itapetinga-Valadares e Serra Geral da Bahia.

Agradecimentos

À Associação Brasileira de Criadores de Zebu (ABCZ) pela disponibilização dos dados e a fundação de Amparo à Pesquisa de Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro.

Referências bibliográficas

AGGREY, S.E. Logistic nonlinear mixed effects model for estimating growth parameters. **Poultry Science**, v. 88, n. 2, p. 276-280, 2009.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Notre Dame, v.19, n. 6, p. 717-723, 1974.

ARRUDA, Z.J. de; SUGAI, Y. **Regionalização da pecuária bovina no Brasil**. Campo Grande: Embrapa-CNPGC; Brasília: Embrapa-SPI, 1994. 144p. (Embrapa-CNPGC. Documentos, 58).

BARBOSA, M. **Uma abordagem para análise de dados com medidas repetidas utilizando modelos lineares mistos**. 118p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica), Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2009.

CARNEIRO, A.P.S.; MUNIZ, J.A.; CARNEIRO, P.L.S.; MALHADO, C.H.M.; MARTINS FILHO, R.; SILVA, F.F. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, 49, n.1, p.57-62, jan. 2014

CRAIG, B.A.; SCHINCKEL, A.P. Nonlinear mixed effects model for swine growth. **Prof. Animal Science**, vol. 17, p. 256-260, 2001.

GLÓRIA, L.S. **Estimação de parâmetros não-lineares no R e no SAS: aplicações para cinética digestiva e crescimento em ruminantes**. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciência Animal), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – Departamento de Ciência Animal, 2014.

GONÇALVES, T. M.; DIAS, M. A. D.; AZEVEDO JUNIOR, J.; RODRIGUEZ, M. A. P.; TIMPANI, V. D.; OLIVEIRA, A. I. G. Curva de crescimento de fêmeas da raça Nelore e seus cruzamentos. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 35, n. 3, p. 582-590, 2011.

GUJARATI, D.N. tradução por MONTEIRO, M.J.C. **Econometria Básica** 3ª reimpressão. Rio de Janeiro: Elsevier, 575p. 2006.

KIRKPATRICK, M., LOFSVOLD, D.; BULMER, M. Analysis of inheritance, selection and evolution of growth trajectories. **Genetics**, v. 124, p. 979-993, 1990.

LONGFORD, N.T. **Random coefficients models**. Clarendon Press, Oxford, 1993.

MALHEIROS, E.B. 2001. Precisão da análise de experimentos com medidas repetidas usando procedimentos do SAS. **Revista de Matemática e Estatística**, v. 19, p. 253-272, 2001.

MILANI, E.J.; SCHNEIDER, P.R. CUNHA, T.A. Crescimento em diâmetro de árvores de *Podocarpus lambertii* em duas regiões fitogeográficas no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. **Ciência Florestal**, v. 23, n. 2, p. 443-448, 2013.

OLIVEIRA, H.N. de; LOBO, R.B.; PEREIRA, C.S. Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.35, n.9, p.1843-1851, set. 2000.

PEIXOTO, M.G.C.D.; SANTOS, D.J.A.; BORQUIS, R.R.A.; BRUNELI, F.A.T.; PANETTO, J.C.C.; TONHATI, H. Random regression models to estimate genetic parameters for milk production of Guzerat cows using orthogonal Legendre polynomials. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**. Brasília, v. 49, n. 5, 2014.

PEREIRA, N.N.; CARNEIRO, A.P.S.; TOLEDO, E.R.; EMILIANO, P.C.; SILVA, F.F.E.; CARNEIRO, P. L.S.; CARNEIRO, J.C.S. Curvas de Crescimento de Bovinos com Coeficientes Aleatórios para Peso à Maturidade. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 3, p. 309-313, 2014.

PINHEIRO, J.C.; BATES, D.M. DEBROY S.; SARKAR,D.; R Core team. (2018). **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models**. R package version 3, p.1-93, 2018.

R DEVELOPMENT CORE TEAM (2010). **R: a language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing. Vienna: R Foundation for Statistical, 2018. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 10 de janeiro de 2018.

SANTORO, K.R.; BARBOSA, S.B.P.; BRASIL, L.H.A.; SANTOS, E.S. Estimativas de parâmetros de curvas de crescimento de bovinos Zebu, criados no Estado de Pernambuco. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 34, n.6, p.2262-2279, 2005.

SANTORO, K.R.; BARBOSA, S.B.P. Influência da estrutura da matriz de covariâncias na classificação de reprodutores caprinos. **Archivos de Zootecnia**, v. 59, n.227, p. 345-355, 2010.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a models. **Annals of**, Hayward, v. 6, n. 2, p. 461- 464, 1978.

SILVA, F.F.; AQUINO, L.H.; OLIVEIRA, A.I.G. Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento em gado Nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 25, p. 1195-1205, 2001.

SILVA, N.S.; DUARTE, J.B.; REIS, A.J.S. Seleção de matriz de variância-covariância residual na análise de ensaios varietais com medidas repetidas em cana-de-açúcar. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 45, n.6, p. 993-999, 2015.

SILVA, F.L.; ALENCAR, M.M.; FREITAS, A.R.; PACKER, I.U; MOURÃO, G.B. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.46, p.262-271, 2011.

SOUZA, L.A.; CAIRES, D.N.; CARNEIRO, P.L.S.; MALHADO, C.H.M.; MARTINS FILHO, R. Curvas de crescimento em bovinos da raça Indubrasil criados no estado de Sergipe. **Revista Ciência Agronômica**, v.41, n. 4, p.671-676, 2010.

SUGIURA, N. Further analysis of the data by akaike's information criterion and the finite corrections. **Communications in Statistics – Theory and Methods**. Ontario, v. 7, n. 1, p. 13-26, 1978.

PEREIRA, N.N. **Modelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã**. 38p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria), Universidade Federal de Viçosa – Departamento de Estatística, Viçosa, 2013.

PEREIRA, N.N.; CARNEIRO, A.P.S.; TOLEDO, E.R.; EMILIANO, P.C.; SILVA, F.F.E.; CARNEIRO, P.L.S.; CARNEIRO, J.C.S. Curvas de Crescimento de Bovinos com Coeficientes Aleatórios para Peso à Maturidade. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 3, p. 309-313, 2014.

UEDA, C. M.; YAMAMOTO, A. Y.; NUNES, W.M.C.; SCAPIM, C. A.; GUEDES, T. A. Nonlinear models for describing the Citrus Variegated Chlorosis in groves of two counties at northwestern Paraná state, Brazil. **Acta Scientiarum. Agronomy**, Maringá, v. 32, n. 4, p. 603-611, 2010.

WYZYKOWSK, J; CUSTODIO, A.A.P.; CUSTODIO A.A.P.; GOMES, N.M.; MORAIS, A.R.M. Análise do diâmetro de copa do cafeeiro recepado utilizando um modelo não linear misto. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 33, n. 3, p. 243-256, 2015.

YAMANAKA, S.E. **Modelos não lineares mistos em estudos de crescimentos de frango de corte**. 183p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São Carlos, Campus de Sorocaba, Sorocaba, 2018.

Apêndice A – Rotina no software R para a obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo não linear misto Von Bertalanffy, avaliadores da qualidade do ajuste e intervalos de confiança implementados no Capítulo 1

```
#-----  
#          HOMOGENEIDADE DE VARIÂNCIAS  
#-----  
#####Von Bertalanffy#####  
# b1, b3 aleatórios. Região, sexo fixos  
# modelo: Variâncias homogêneas  
# Função de variâncias: weights = NULL (erros indep)  
# Simplesmente não colocar nada  
# Matriz D = pdDiag  
#####  
mvb1=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))**3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-  
1),random=pdDiag(a+k~1),control=nlmeControl(minScale=10**-  
100,maxIter=1000),  
  
data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,  
444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,  
  
0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.  
0036  
  
),na.action=na.omit,weights = NULL  
  
)  
  
summary(mvb1)  
#####Von Bertalanffy#####  
  
# b1, b3 aleatórios. Região, sexo fixos  
# modelo: Variâncias homogêneas  
# Função de variâncias: weights = NULL (erros indep)
```



```

# Simplesmente não colocar nada

# Matriz D = pdIdent (Identidade Múltipla)

#####

mvb2=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))**3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdIdent(a+k~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,

0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.
0036

),na.action=na.omit,weights = NULL

)

summary(mvb2)

#####Von Bertalanffy#####

# b1, b3 aleatórios. Região, sexo fixos

# modelo: Variâncias homogêneas

# Função de variâncias: weights = NULL (erros indep)

# Simplesmente não colocar nada

# Matriz D = pdSymm (Positiva Definida Geral)

#####

mvb3=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))**3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdSymm(a+k~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,

0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.
0036

```

```

        ),na.action=na.omit,weights = NULL
    )

summary(mvb3)

#-----
#           HETEROGENEIDADE DE VARIÂNCIAS
#           FUNÇÃO VARIDENT (varIdent)
#####Von Bertalanffy#####
# b1, b2 aleatórios. Região, sexo fixos
# modelo: Variâncias heterogêneas
# Função de Variâncias: varIdent
# D = PdDiag (Diagonal)
#####

mvb4=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))**3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdDiag(a+k~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
                    444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,

0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.
0036

        ),na.action=na.omit,weights =
varIdent(form=~classe))

summary(mvb4)

#-----
#####Von Bertalanffy#####
# b1, b2 aleatórios. Região, sexo fixos
# modelo: Variâncias heterogêneas
# Função de Variâncias: varIdent
# D = PdIdent (Identidade Múltipla)
#####

```

```

mvb5=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))**3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdIdent(a+k~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

#-----

#####

# AVALIADORES DA QUALIDADE DO AJUSTE DOS MODELOS

#-----

# CALCULAR p, AIC, AICc, BIC, DMA, EQM, R2 e R2_aj PARA OS
# MODELOS QUE CONVERGIRAM:

#####

require(nlme) require(qpcR) library("qpcR")

p=c(); AIC=c(); AICc=c(); BIC=c(); DMA=c(); EMQ=c(); R2=c();
R2a=c(); logLik=c()

#####

# AIC, AICc, BIC, p = nº parâmetros
(p[1]=attributes(logLik(mvb1))$df)
(AIC[1]=-2*mvb1$logLik+(2*p[1]))
(AICc[1]=-
2*mvb1$logLik+(2*p[1])+2*((p[1]*(p[1]+1))/(nrow(dadosg))-p[1]-1))
(BIC[1]=-2*mvb1$logLik+(p[1]*log((nrow(dadosg))))))

#####

# Desvio Médio Absoluto, DMA
y_hat<-predict(mvb1) # valor predito
y<-dadosg$w # Valor observado, banco de dados
erro=y-y_hat #calculo dos erros = residuals(modelo)
# Valor observado(y) - predito(y_hat)
residuals(mvb1)
(DMA[1]=sum(abs(residuals(mvb1)))/length(residuals(mvb1)))
DMA[1]

#####

```

```

#ERRO MEDIO QUADRATICO, EMQ
(EMQ[1]=sum(residuals(mvb1)^2)/length(residuals(mvb1)))
EMQ[1]

#####

# COEF. DE DETERMINAÇÃO, R2
(R2[1]=(cor(y,y_hat))^2)
R2[1]

#####

# R2 AJUSTADO, R2a
(R2a[1]=(R2[1]-((p[1]-1)/(length(residuals(mvb1))-p[1]))*(1-
R2[1])))
R2a[1]

#-----

#####

# criando a planilha ja com a tabela de AVALIADORES
lnames=c("M1","M3","M4","M6")

(quadro.AVALIADORES=data.frame(p,AIC=AIC, AICc, BIC,DMA, EMQ,
R2, R2a,row.names=lnames))

###juntando os calculos para tabela de AVALIADORES
write.table(quadro.AVALIADORES,"AVALIADORES.csv",dec=".",sep=";")

#-----

# Calcular os Intervalos de Confiança (95%)
intervals(mvb*)

```

Apêndice B – Rotina no software R para a obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo não linear misto Von Bertalanffy, avaliadores da qualidade do ajuste e intervalos de confiança implementados no Capítulo 2

```
dados <- read.table("dadoscompleto1.txt", h = T)
#require(gnls)
#library(gnls)
require(nlme)
library(nlme)
require(Metrics)
library(Metrics)
dados$sexregiao=factor(paste0(dados$sexo,dados$regiao))
dadosg=groupedData(w~age|anim,dados)
head(dadosg) # mostra as 6 primeiras observações
dim(dadosg)
attach(dadosg) # os objetos no banco de dados podem ser acessados
                # apenas dando seus nomes

# Gráfico dos perfis
new=dadosg=groupedData(w~age|anim,dados,order.groups=F)
#plot(new, key=F, outer=~nome, cex.5, pch=19, col='black')
plot(new, key=F, outer=~1, pch=19, col='black')
#-----

# Ajuste do modelo não linear
#vb<-w~w~a*(1-b*(exp(-k*age)))**3(exp(-k*age))
#-----HETEROGENEIDADE DE VARIÂNCIAS-----

# 1) FUNÇÃO VARFIXED (varFixed)
#####Von Bertalanffy#####
```

```

# b1 aleatório. Região, sexo fixos
# modelo: Variâncias heterogêneas
# Função de Variâncias: varFixed
# D = PdDiag (Diagonal)

#####

mvb5=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))*3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdDiag(a~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,

0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.
0036

),na.action=na.omit,weights =
varFixed(~age|anim))
summary(mvb5) #varFixed(~age|anim)
#-----

# Generalizando, incorporando as estruturas de correlação
# Estrutura de Correlação: AR(1)
mvb6<-update(mvb5, correlation=corAR1())
summary(mvb6)
# Estrutura de Correlação: CAR(1)
mvb7<-update(mvb5, correlation=corCAR1())
summary(mvb7)
#-----

# 2) FUNÇÃO VARIDENT (varIdent)
#####Von Bertalanffy#####
# b1 aleatório. Região, sexo fixos
# modelo: Variâncias heterogêneas
# Função de Variâncias: varIdent

```

```

# D = PdDiag (Diagonal)

#####

mvb8=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))*3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdDiag(a~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,

0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.
0036

),na.action=na.omit,weights = varIdent())

summary(mvb8)

#-----

# Generalizando, incorporando as estruturas de correlação
# Estrutura de Correlação: AR(1)
mvb9<-update(mvb8, correlation=corAR1())
summary(mvb9)
# Estrutura de Correlação: CAR(1)
mvb10<-update(mvb8, correlation=corCAR1())
summary(mvb10)

#-----

# 3) FUNÇÃO VARPOWER (varPower)
#####Von Bertalanffy#####
# b1 aleatório. Região, sexo fixos
# modelo: Variâncias heterogêneas
# Função de Variâncias: varPower
# D = PdDiag (Diagonal)
#####

```

```

mvb11=nlme(w~a*(1-b*(exp(-k*age)))*3,fixed=list(b+a+k~sexregiao-
1),random=pdDiag(a~1),control=nlmeControl(minScale=10**-
100,maxIter=1000),

data=dadosg,start=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
444,444,444,444,444,510,510,510,510,510,

0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0024,0.0036,0.0036,0.0036,0.0036,0.
0036

),na.action=na.omit,weights =
varPower(form=~fitted(.)))
summary(mvb11)
#-----
# Generalizando, incorporando as estruturas de correlação
# Estrutura de Correlação: AR(1)
mvb12<-update(mvb11, correlation=corAR1())
summary(mvb12)
# Estrutura de Correlação: CAR(1)
mvb13<-update(mvb11, correlation=corCAR1())
summary(mvb13)
#-----
# 4) FUNÇÃO VAREXP (varExp)
),na.action=na.omit,weights =
varExp(form=~fitted(.)))
summary(mvb14)
#-----
# Generalizando, incorporando as estruturas de correlação
# Estrutura de Correlação: AR(1)
mvb15<-update(mvb14, correlation=corAR1())
summary(mvb15)
# Estrutura de Correlação: CAR(1)

```



```

mvp16<-update(mvp14, correlation=corCAR1())
summary(mvp16)

#-----

# 5) FUNÇÃO VARCONSTPOWER (varConstPower)
varConstPower(form=~fitted(.))
summary(mvp17)

#-----

# Generalizando, incorporando as estruturas de correlação
# Estrutura de Correlação: AR(1)
mvp18<-update(mvp17, correlation=corAR1())
summary(mvp18)

# Estrutura de Correlação: CAR(1)
mvp19<-update(mvp17, correlation=corCAR1())
summary(mvp19)

```