

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

RENATA FERNANDES PEREIRA

ANÁLISE GLOBAL DE SISTEMAS DIFERENCIAIS POLINOMIAIS

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022**

RENATA FERNANDES PEREIRA

ANÁLISE GLOBAL DE SISTEMAS DIFERENCIAIS POLINOMIAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Oscar Alexander R. Céspedes

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

P436a
2022
Pereira, Renata Fernandes, 1995-
Análise global de sistemas diferenciais polinomiais / Renata
Fernandes Pereira. – Viçosa, MG, 2022.
1 dissertação eletrônica (96 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Oscar Alexander Ramírez Cespedes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2022.

Referências bibliográficas: f. 95-96.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2022.580>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Topologia diferencial. 2. Polinômios. 3. Sistemas
dinâmicos diferenciais. 4. Poincaré, Compactificação de.
5. Higgins-Selkov, Modelo de. 6. Selkov, Modelo de.
7. Singularidades (Matemática). I. Ramírez Cespedes, Oscar
Alexander, 1988-. II. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 514.72

Bibliotecário(a) responsável: Alice Regina Pinto Pires CRB-6/2523

RENATA FERNANDES PEREIRA

ANÁLISE GLOBAL DE SISTEMAS DIFERENCIAIS POLINOMIAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 10 de março de 2022.

Assentimento:



Renata Fernandes Pereira
Autora



Oscar Alexander Ramírez Cespedes
Orientador

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Maria Helena e Francisco.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me mantido na trilha certa durante esta trajetória com saúde e forças para que, mesmo com todas as dificuldades, fosse possível dar mais este passo.

Agradeço aos meus familiares que estiveram comigo durante essa jornada, especialmente à minha irmã Karine e aos meus pais, Maria Helena e Francisco, que sempre foram exemplo de esforço, dedicação, honestidade e simplicidade, e por terem sido o meu apoio durante toda a vida.

Agradeço a amizade de Amanda Ornelas, Angie Yurani, Brendo Faria, Cintia Coelho e Daiane Beatriz, pessoas muito especiais que conheci durante este curso e com as quais compartilhei momentos de estudos, conversas e surtos, e que por inúmeras vezes me auxiliaram neste período, profissional e pessoalmente. Certamente, sem eles tudo teria sido muito mais difícil.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte desta caminhada, por todos os ensinamentos e, de maneira muito especial, ao meu orientador Oscar Alexander, por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa e por toda paciência, esforço, conversas e conselhos.

Agradeço ao meu companheiro de curso e de vida Carlos Lúcio, por sempre estar ao meu lado durante todo esse percurso acadêmico e fora dele, me apoiando, incentivando e me fortalecendo.

Agradeço ao professor Dalton pelo incentivo, e por ter instigado em mim o gosto pela matemática e à minha amiga Dri, por sempre acreditar em mim, me incentivar e por me cativar com o seu entusiasmo pela busca do conhecimento.

A todas as pessoas que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho, deixo aqui os meus sinceros agradecimentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

*"A matemática é o alfabeto com o qual
Deus escreveu o universo."*

Galileu Galilei

Resumo

PEREIRA, Renata Fernandes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2022. **Análise global de sistemas diferenciais polinomiais**. Orientador: Oscar Alexander Ramírez Cespedes.

Em [1] os autores usaram dois sistemas de equações diferenciais para estudar as oscilações do processo glicolítico da levedura, conhecidos na literatura como oscilador de Higgins-Selkov e modelo de Selkov. Neste trabalho, classificamos todos os retratos de fase possíveis destes modelos no Disco de Poincaré. Para atingir este objetivo, usamos algumas ferramentas clássicas da teoria qualitativa de sistemas de EDOs, tais como, o Teorema de Hartman-Grobman, Teoremas das Variedades Central e Estável, Teorema de Poincaré-Bendixson, além de alguns resultados da teoria local de sistemas não-lineares (veja [5]). Também apresentamos a Compactificação de Poincaré, ferramenta que nos permite analisar o comportamento das órbitas quando estas se aproximam do infinito, e o blow-up direcional, que é utilizado para estudar singularidades degeneradas.

Palavras-chave: Sistemas diferenciais polinomiais. Compactificação de Poincaré. Modelo Higgins-Selkov. Modelo Selkov. Classificação topológica de singularidades.

Abstract

PEREIRA, Renata Fernandes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2022. **Global analysis of polynomial differential systems**. Adviser: Oscar Alexander Ramírez Cespedes.

In [1] the authors use two systems of differential equations to study the oscillations of the yeast glycolytic process, known in the literature as the Higgins-Selkov oscillator and the Selkov model. In this work, we classify all possible phase portraits of these models on the Poincaré Disk. In order to do this, we use some classical tools of the qualitative theory of ODE systems, such as Hartman-Grobman Theorem, Central and Stable Manifold Theorems, Poincaré-Bendixson Theorem, in addition to some results from local theory of nonlinear systems (see [5]). Moreover, we present the Poincaré Compactification, which is a tool that allows us to analyze the behavior of the orbits when they approach infinity, and the directional blow-up, which is a technique used for studying of degenerate singularities.

Keywords: Polynomial differential systems. Poincaré Compactification. Higgins-Selkov model. Selkov model. Topological classification of singularities.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Campo Vetorial e Fluxo	12
1.2 Equivalência e Conjugação Topológica	14
1.3 Conjuntos α e ω -limite	16
1.4 Separatrizes, órbitas periódicas e ciclos limite	17
1.5 Pontos regulares	20
1.6 Sistemas Lineares	22
1.7 Teorema de Hartman-Grobman	27
1.8 Singularidades semi-hiperbólicas	29
1.9 Decomposição setorial	32
1.10 Número de Lyapunov	35
1.11 Teoremas de variedades invariantes	37
1.12 Compactificação de Poincaré	38
1.13 Blow-Up homogêneo	44
2 Modelo de Higgins-Selkov	52
2.1 Pontos singulares finitos	52
2.2 Sobre singularidades degeneradas	54
2.3 Pontos singulares infinitos	59
2.4 Soluções periódicas e ciclos limites	63
2.5 Retratos de fase no Disco de Poincaré	66
3 Modelo de Selkov	74
3.1 Pontos singulares finitos	74

3.2	Pontos singulares infinitos	76
3.3	Soluções periódicas e ciclos limite	88
3.4	Retratos de fase no Disco de Poincaré	89
Referências Bibliográficas		94

Introdução

Nos últimos anos, o estudo de equações diferenciais tem ganhado espaço em muitas áreas da ciência, uma vez que inúmeros problemas da física, química, biologia, engenharia e de diversas outras áreas podem ser representados por meio de modelos matemáticos. Mas, do que se trata este objeto, afinal? Uma equação diferencial (ED) é uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida com uma ou mais variáveis. No caso em que a função desconhecida depende somente de uma única variável, a equação denomina-se equação diferencial ordinária (EDO). O surgimento das equações diferenciais dá-se então da tentativa de formular ou descrever sistemas físicos por meio de modelos matemáticos [16].

No entanto, um problema matemático comum que as equações diferenciais apresentam é o de resolvê-las explicitamente, e muitas vezes, isto nem é possível. Neste sentido, a teoria qualitativa de equações diferenciais originada por Henri Poincaré no final do século XIX se mostra primordial para a análise do comportamento destas soluções, sem necessariamente conhecer as expressões que venham a assumir. Além disso, é possível ter uma noção geométrica do problema esboçando um retrato de fase em que as características qualitativas relevantes são representadas. Nesta perspectiva, nosso objetivo com este trabalho é investigar a dinâmica das soluções dos modelos Selkov e Higgins-Selkov estudados em [1] próximo a pontos singulares, bem como determinar o retrato fase destes sistemas no Disco de Poincaré, sem nos preocuparmos tanto com os aspectos biológicos relacionados a estes modelos.

Para tal, primeiro introduzimos no Capítulo 1 alguns conceitos e resultados clássicos da Teoria Local para sistemas de equações diferenciais ordinárias, tais como o Teorema do Fluxo Tubular, que caracteriza a dinâmica das soluções de um sistema de EDOs próximo a pontos regulares, o Teorema de Hartman-Grobman, que nos permite aproximar sistemas não-lineares por sistemas lineares, em torno de singularidades hiperbólicas e o Teorema de Poincaré-Bendixson, que caracteriza os conjuntos limite de uma solução. Além disso, neste capítulo são discutidos os possíveis retratos de fase para um sistema linear planar.

Ainda no Capítulo 1, será apresentada uma técnica de compactificação introduzida por Poincaré em 1881, que nos permite obter informações a respeito de soluções que tendem para o infinito, por meio de um novo sistema dinâmico topologicamente equivalente ao original, definido em um subconjunto compacto do espaço euclidiano (veja [8]), possibilitando assim a análise global deste sistema. Também é abordada a técnica de Blow-up, amplamente utilizada na dessingularização de pontos singulares degenerados de campos vetoriais planares.

Sobre a aplicabilidade dos modelos aqui estudados, sabemos que todo organismo precisa de energia para a realização de processos celulares e metabólicos. A glicólise é um dos processos químicos fundamentais para a geração desta energia, e em células de levedura intactas, bem como em extratos de levedura ou de músculos, a glicólise pode ocorrer de forma oscilatória, devido à ação de enzimas (consulte [14]). Neste sentido, Sel'kov e Higgins propuseram modelos de EDOs para descrever estas oscilações, cujos sistemas de equações diferenciais associados são estudados em [1], artigo no qual essa dissertação é baseada. Estes modelos são conhecidos na literatura por modelo de Selkov e oscilador de Higgins-Selkov. Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos a análise detalhada destes modelos, os principais resultados a eles relacionados e os possíveis tipos topológicos dos retratos de fase no Disco de Poincaré a eles associados.

Para desenhar os retratos de fase e realizar parcialmente alguns cálculos foram utilizados os *softwares* Inkscape [9] e o Mathematica [15].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados clássicos da teoria qualitativa de sistemas diferenciais planares, necessários para a compreensão do conteúdo desta dissertação. Vale ressaltar que, por fugir do escopo deste trabalho, estes resultados terão sua prova omitida. No entanto, as demonstrações bem como mais detalhes podem encontrados em [5], [13] e [14], referências nas quais este capítulo é majoritariamente baseado. De modo geral, por se tratarem de resultados clássicos, há um amplo acervo bibliográfico disponível além do que foi aqui citado.

1.1 Campo Vetorial e Fluxo

Seja Δ um aberto em \mathbb{R}^2 . Um **campo vetorial** de classe C^r em Δ é uma aplicação $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , com $1 \leq r \leq +\infty$. Se $r = \omega$, dizemos que X é **analítico**, isto é, pode ser expandido localmente em uma Série de Taylor convergente.

A representação gráfica de um campo vetorial no plano consiste em desenhar um número de vetores $(x, X(x))$ escolhidos de maneira conveniente. Para cada campo vetorial X podemos associar um sistema de EDO's

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \tag{1.1}$$

com $x \in \Delta$. Fixaremos a notação \dot{x} para indicar dx/dt . Uma vez que $X = X(x)$ não depende (explicitamente) de t , dizemos que a equação diferencial (1.1) é **autônoma**. Usualmente, a variável t é chamada de tempo.

Por definição, uma solução de (1.1) é uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2$, tal que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

para todo $t \in I$, em que I é um intervalo aberto no qual a solução está definida.

Dado $x \in \Delta$, se $X(x) = 0$ dizemos que x é um **ponto singular** (ou **ponto crítico**, **ponto de equilíbrio**), caso contrário, i.e., $X(x) \neq 0$, então x é dito ser um **ponto regular**. Em teoria, campos que não possuem singularidades são mais simples de estudar, já que podem ser vistos localmente como um **fluxo de linhas**. Trataremos deste assunto com mais detalhes posteriormente.

Agora, sejam $x_0 \in \Delta$ e $\varphi : I \rightarrow \Delta$ uma solução do sistema (1.1) com condição inicial $\varphi(0) = x_0$. A função φ é chamada de **solução maximal** se para toda solução $\psi : J \rightarrow \Delta$ com $\psi(0) = x_0$ de (1.1) tal que $I \subset J$ e $\varphi = \psi|_I$ temos $I = J$. Neste caso, $I = I_{x_0}$ é chamado de **intervalo maximal**. Se $\varphi : I_{x_0} \rightarrow \Delta$ é uma solução maximal, ou esta é regular ou é constante. Caso φ seja regular, o conjunto imagem $\gamma_\varphi = \{\varphi(t) : t \in I_{x_0}\} \subset \Delta$ dotado da orientação de φ , é chamado de **trajetória**, **órbita** ou **curva integral (maximal)** associada à solução maximal φ .

Seja $\varphi_{x_0}(t)$ uma solução maximal do sistema (1.1) com condição inicial $x(0) = x_0$. Dizemos que $\varphi_{x_0}(t)$ é uma **solução periódica** se existem $s, t \in I_{x_0}$ com $s \neq t$ tais que $\varphi_{x_0}(s) = \varphi_{x_0}(t)$.

A seguir, veremos os principais resultados da teoria qualitativa das soluções de equações diferenciais. Mais detalhes podem ser consultados em [5].

Teorema 1.1. *Seja X um campo vetorial de classe C^r com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$. Então, valem as seguintes afirmações:*

- (i) *(Existência e Unicidade de soluções maximais.) Para cada $x_0 \in \Delta$, existe um intervalo aberto I_{x_0} sobre o qual o sistema (1.1) tem uma única solução maximal que satisfaça $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.*
- (ii) *(Propriedade do fluxo.) Se $y = \varphi_{x_0}(t)$ e $t \in I_{x_0}$, então $I_y = I_{x_0} - t = \{r - t : r \in I_{x_0}\}$ e $\varphi_y(s) = \varphi_{x_0}(t + s)$ para todo $s \in I_y$.*
- (iii) *(Continuidade em relação à condição inicial.) Seja $\Omega = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$. Então Ω é um conjunto aberto em \mathbb{R}^3 e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é uma aplicação de classe C^r . Além do mais, φ satisfaz*

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x),$$

para cada $(t, x) \in \Omega$, em que D_1 indica a derivada em relação ao tempo, D_2 indica a derivada em relação a x , e DX é a parte linear do campo vetorial X .

A função $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em (iii) é nomeada **fluxo** gerado pelo campo vetorial X .

Teorema 1.2. *Considere X um campo vetorial de classe C^r com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$, e $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Seja $x \in \Delta$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ tal que $\omega_+(x) < +\infty$ (respectivamente, $\omega_-(x) > -\infty$). Então $\varphi_x(t)$ tende para $\partial\Delta$ (fronteira de Δ) quando $t \rightarrow \omega_+(x)$, ou seja, para cada compacto $K \subset \Delta$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que, se $t \in [\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x)]$, então $\varphi_x(t) \notin K$. De modo análogo, este resultado é válido para $\omega_-(x)$.*

Seja $\varphi_x(t)$ uma curva integral de X . Dizemos que φ_x é **periódica** se existe um número real $c > 0$ tal que $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.3. *Seja $\varphi_x(t)$ uma solução de X definida no intervalo maximal I_x . Se $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$ com $t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \in I_x$ então $I_x = \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ com $c = t_2 - t_1$. Logo, φ_x é uma solução periódica de período c .*

1.2 Equivalência e Conjugação Topológica

Ao estudar uma estrutura em matemática, é natural tentar compará-la a outras estruturas de análise menos complexa ou já conhecidas. Nesta perspectiva, veremos nesta seção os conceitos de conjugação e equivalência topológica, ferramentas que nos permitem de certo modo, relacionar soluções de sistemas de equações diferenciais distintos.

Definição 1.4. *Sejam X_1 e X_2 dois campos de vetores definidos em Δ_1 e Δ_2 , respectivamente. Dizemos que X_1 é **topologicamente equivalente** (respectivamente, C^r -equivalente) a X_2 se existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\gamma_p^1) = \gamma_{h(p)}^2$, isto é, h envia órbitas de X_1 em órbitas de X_2 e preserva orientação. Mais precisamente, seja $p \in \Delta_1$ e γ_p^1 a órbita orientada de X_1 passando por p . Então, $h(\gamma_p^1)$ é a órbita orientada de X_2 passando por $h(p)$. O homeomorfismo h é chamado de **equivalência topológica** (respectivamente, C^r -**equivalência**) entre X_1 e X_2 .*

O conceito apresentado a seguir é muito parecido com o de equivalência topológica, exceto pela exigência de preservação do tempo.

Definição 1.5. Sejam $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados respectivamente pelos campos vetoriais $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dizemos que X_1 e X_2 são **topologicamente conjugados** (respectivamente, **C^r -conjugados**) quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$, para cada $(t, x) \in \Omega_1$. Neste caso, é necessário que os intervalos maximais I_x para φ_1 e $I_{h(x)}$ para φ_2 sejam iguais. O homeomorfismo (ou difeomorfismo) h é chamado de **conjugação topológica** (respectivamente **C^r -conjugação topológica**) entre X_1 e X_2 .

Observação 1.6. Segue direto da definição que toda conjugação topológica é uma equivalência topológica. No entanto, a recíproca não é verdadeira, como pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 1.7. Sejam X_1 e X_2 campos vetoriais definidos por

$$X_1(x, y) = (-y, x) \text{ e } X_2(x, y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right).$$

Os fluxos destes campos são dados, respectivamente por

$$\varphi_1(t, (x, y)) = (x \cos(t) - y \sin(t), x \sin(t) + y \cos(t))$$

$$\text{e } \varphi_2(t, (x, y)) = \left(x \cos\left(\frac{t}{2}\right) - y \sin\left(\frac{t}{2}\right), x \sin\left(\frac{t}{2}\right) + y \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Considere o homeomorfismo identidade $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Temos que $h(S_r) = S_r$, onde $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\}$, ou seja, a função h envia círculos (órbitas de X_1) em círculos (órbitas de X_2), e preserva a orientação. Portanto, X_1 e X_2 são topologicamente equivalentes.

No entanto, estes campos não são topologicamente conjugados. De fato, suponha que exista $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, (x, y))) = \varphi_2(t, h(x, y)), \quad \forall t \in I_{(x, y)}. \quad (1.2)$$

Seja $(x, y) = (1, 0)$. Note que

$$\varphi_1(0, (1, 0)) = (1, 0) = \varphi_1(2\pi, (1, 0)) \quad (1.3)$$

Logo, o período de φ_1 é $t = 2\pi$. Além disso, temos

$$\varphi_2(2\pi, h(1, 0)) \stackrel{(1.2)}{=} h(\varphi_1(2\pi, (1, 0))) \stackrel{(1.3)}{=} h(1, 0) = (x_0, y_0),$$

Mas, por outro lado

$$\varphi_2(2\pi, (x_0, y_0)) = (-x_0, -y_0) \neq h(1, 0),$$

o que gera uma contradição. Portanto, não é possível obter h que satisfaça (1.2).

A proposição a seguir é uma ferramenta que permite caracterizar uma C^r -conjugação, com $r \geq 1$.

Proposição 1.8. *Sejam X_1 e X_2 campos vetoriais de classe C^k definidos conforme visto anteriormente, e $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ um difeomorfismo de classe C^r com $r \geq 1$. Então, h é uma conjugação topológica entre X_1 e X_2 se, e somente se,*

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)) \text{ para cada } p \in \Delta_1.$$

Observação 1.9. Os conceitos de equivalência e conjugação topológica aqui apresentados para campos vetoriais se estendem aos sistemas de equações diferenciais associados a estes campos, isto é, dois sistemas diferenciais são topologicamente equivalentes (conjugados) quando seus respectivos campos associados são equivalentes (conjugados).

1.3 Conjuntos α e ω -limite

Sejam Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^r com $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, e $\varphi(t) = \varphi(t, p) = \varphi_p(t)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , definida no intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = +\infty$, definimos o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta : \text{existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ com } n \rightarrow +\infty\}$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$ definimos o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta : \text{existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ com } n \rightarrow +\infty\}$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados de conjuntos ω -limite e α -limite de p , respectivamente.

O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson, é uma importante ferramenta para a caracterização dos conjuntos definidos anteriormente considerando o caso de campos vetoriais associados a sistemas planares. Sua demonstração pode ser vista em [5].

Teorema 1.10 (Poincaré-Bendixson). *Seja γ_p^+ uma semi-órbita positiva passando pelo ponto p e seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contida em um conjunto compacto $K \subset \Delta$. Assuma que o campo vetorial X tenha no máximo um número finito de singularidades em K . Então, vale uma das seguintes afirmações:*

- (i) *Se $\omega(p)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (ii) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ é formado por um conjunto de órbitas e de singularidades, de modo que cada uma das órbitas tende a um dos pontos singulares em $\omega(p)$, quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (iii) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ tem um único ponto singular.*

1.4 Separatrizes, órbitas periódicas e ciclos limite

Nesta seção, serão apresentadas as definições de órbitas periódicas, ciclos limite e separatrizes de um sistema dinâmico definido por

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.4}$$

Definição 1.11. Um **ciclo** ou **órbita periódica** de (1.4) é qualquer curva solução fechada de (1.4) que não é ponto singular deste sistema. Os ciclos do sistema (1.4) correspondem às soluções periódicas de (1.4) uma vez que $\varphi(\cdot, x_0)$ define uma curva solução fechada de (1.4) se, e somente se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t + c, x_0) = \varphi(t, x_0)$ para algum $c > 0$. O menor c que satisfaz a equação anterior é chamado de **período** da órbita periódica $\varphi(\cdot, x_0)$.

Um ciclo limite, cuja definição é apresentada posteriormente, trata-se de uma órbita periódica que atende a algumas propriedades específicas.

Definição 1.12. Um **ciclo limite** γ de um sistema planar é um ciclo de (1.4) que é o conjunto α ou ω -limite de alguma trajetória de (1.4) diferente de γ . Se um ciclo γ é o conjunto ω -limite de toda trajetória em alguma vizinhança de γ , então γ é chamado de *ciclo ω -limite* ou *ciclo limite estável*; se γ é o conjunto α -limite de cada trajetória em alguma vizinhança de γ , então γ é chamado de *ciclo α -limite* ou *ciclo limite instável*; e se γ é o conjunto ω -limite de uma trajetória diferente de γ e o conjunto α -limite de outra trajetória diferente de γ , então γ é chamado de *ciclo limite semi-estável*.

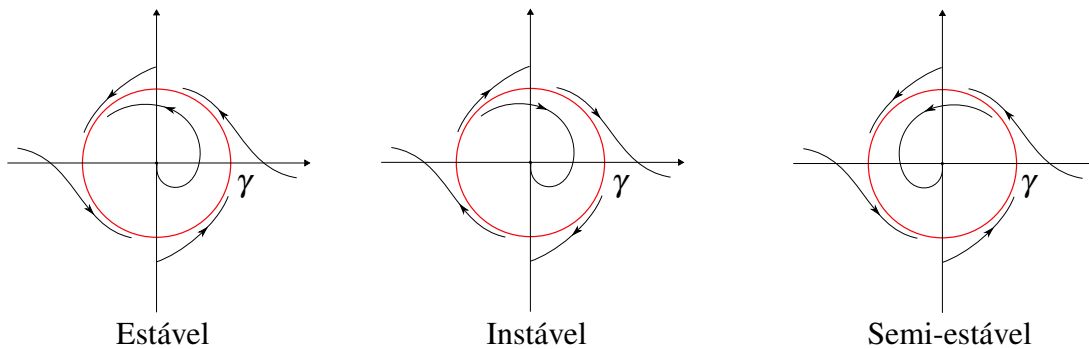


Figura 1.1: Possíveis tipos topológicos de ciclos limite.

O Teorema a seguir estabelece condições para a não existência de soluções periódicas em regiões fechadas simples, a partir da análise do sinal do divergente de um sistema de EDOs. Sua prova pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.13 (Teorema de Bendixson). *Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \quad (1.5)$$

em que P e Q são funções pelo menos de classe C^1 . Suponha que o divergente do sistema (1.5) dado por

$$\text{div} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

tenha sinal constante em uma região simplesmente conexa R , e não seja identicamente nulo em nenhuma sub-região de R . Então, o sistema (1.5) não tem uma órbita periódica inteiramente contida em R .

Considere agora uma equação diferencial

$$\dot{x} = X(x) \quad (1.6)$$

em que X é uma função de Lipschitz em \mathbb{R}^2 , e seja $\varphi(t, x)$ o fluxo definido por (1.6). Seguindo a notação das obras de Markus [11] e Neumann [4], vamos denotar por (\mathbb{R}^2, φ) o fluxo definido pela equação diferencial (1.6).

Definição 1.14. Dizemos que um fluxo (\mathbb{R}^2, φ) é um **fluxo paralelo** se for topologicamente equivalente a um dos seguintes fluxos:

- (i) O fluxo definido em \mathbb{R}^2 pelo sistema diferencial $\dot{x} = 1, \dot{y} = 0$, que é chamado de *fluxo de faixa*.
- (ii) O fluxo definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pelo sistema diferencial dado em coordenadas polares $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1$, que é chamado de *fluxo anular*.
- (iii) O fluxo definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pelo sistema diferencial dado em coordenadas polares $\dot{r} = r, \dot{\theta} = 0$, que recebe o nome de *fluxo espiral* ou *nodal*.

Dada uma região aberta maximal em \mathbb{R}^2 na qual o fluxo é paralelo, deseja-se conhecer a estrutura das órbitas no limite desta região. Os possíveis tipos de órbitas que podem aparecer recebem o nome de separatrizes, cuja definição dada por [11] e [4] é enunciada a seguir:

Definição 1.15. Uma **separatriz** de um sistema diferencial é uma trajetória deste sistema cujo tipo satisfaz algum dos seguintes itens:

- (i) um ponto singular;
- (ii) uma órbita periódica para a qual não existe uma vizinhança que consiste inteiramente de órbitas periódicas;
- (iii) uma órbita $\gamma(p)$, homeomorfa a \mathbb{R} para a qual não existe uma vizinhança N de $\gamma(p)$ tal que:
 - (a) Para todo $q \in N$, $\alpha(q) = \alpha(p)$ e $\omega(q) = \omega(p)$,
 - (b) A fronteira de N é formada por $\alpha(p)$, $\omega(p)$ e duas órbitas $\gamma(q_1)$ e $\gamma(q_2)$ tais que $\alpha(p) = \alpha(q_1) = \alpha(q_2)$ e $\omega(p) = \omega(q_1) = \omega(q_2)$.

Observação 1.16. Alguns livros não consideram todos os itens da definição 1.15. Por exemplo, em [5], uma separatriz é dita ser uma órbita que satisfaz o item (iii) da definição. Adotaremos esta convenção. Além disso, o conjunto de todas as órbitas que satisfazem (i) ou (iii) é chamado de **esqueleto de separatrizes**.

O resultado a seguir nos permite determinar a classe de equivalência topológica de um sistema diferencial a partir da descrição do esqueleto de separatrizes a ele associado.

Teorema 1.17 (Teorema de Markus–Neumann–Peixoto). *Suponha que $(\mathbb{R}^2, \varphi_1)$ e $(\mathbb{R}^2, \varphi_2)$ sejam dois fluxos contínuos que possuem apenas singularidades isoladas. Então, esses fluxos são topologicamente equivalentes se, e somente se, seus esqueletos de separatrizes completos possuem a mesma estrutura.*

1.5 Pontos regulares

Muitas vezes, se tratando de sistemas de equações diferenciais, há maior interesse em conhecer o comportamento das soluções do que necessariamente apresentá-la de forma explícita. A esta representação geométrica de um conjunto considerável de órbitas (que possuem orientação no caso de órbitas regulares, indicada por setas) de um campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ dá-se o nome de **retrato de fase** do campo X .

Cada curva representada no retrato de fase está associada a uma condição inicial, e a configuração destas curvas permite obter informações sobre o campo vetorial, como a existência (ou não) de singularidades e a dinâmica próximo à estes pontos. Neste sentido, o conceito de equivalência topológica se revela uma importante ferramenta para a classificação de sistemas dinâmicos ao comparar dois sistemas que, embora distintos, apresentam o mesmo comportamento qualitativo.

O Teorema apresentado a seguir aponta as possibilidades para a dinâmica de soluções maximais de um campo vetorial C^r .

Teorema 1.18. *Se φ é uma solução maximal do sistema associado ao campo vetorial X de classe C^r , então uma das seguintes afirmações é válida:*

- (i) φ é uma bijeção em sua imagem.
- (ii) $I = \mathbb{R}$, φ é uma função constante, e γ_φ é um ponto.
- (iii) $I = \mathbb{R}$, φ é uma função periódica de período mínimo τ , isto é, existe um valor $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, e $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < \tau$.

A prova do Teorema 1.18 pode ser encontrada em [5]. Vamos agora discorrer sobre a dinâmica local de pontos regulares, isto é, $x \in \Delta$ tal que $X(x) \neq 0$.

Definição 1.19. Seja $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^r , com $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ e $A \subset \mathbb{R}$ conjuntos abertos. Uma aplicação $F : A \rightarrow \Delta$ de classe C^r é chamada **seção transversal local** de X se para todo $a \in A$, o conjunto $\{F'(a), X(F(a))\}$ for linearmente independente. Tome $\Sigma = F(A)$ com a topologia induzida. Se $F : A \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma **seção transversal** de X .

O Teorema do Fluxo Tubular enunciado na sequência, caracteriza o comportamento de soluções próximo a pontos regulares. O retrato de fase neste caso pode ser visto localmente como um fluxo de linhas paralelas.

Teorema 1.20 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja p um ponto regular de um campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , com $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, e seja $F : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal de X de classe C^r com $F(0) = p$. Então, existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r , com $\varepsilon > 0$ e B um intervalo aberto, com centro na origem tal que*

(i) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

(ii) h é uma C^r -conjugação entre $X|_V$ e o campo vetorial constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ em que $Y = (1, 0)$. Veja a figura 1.2.

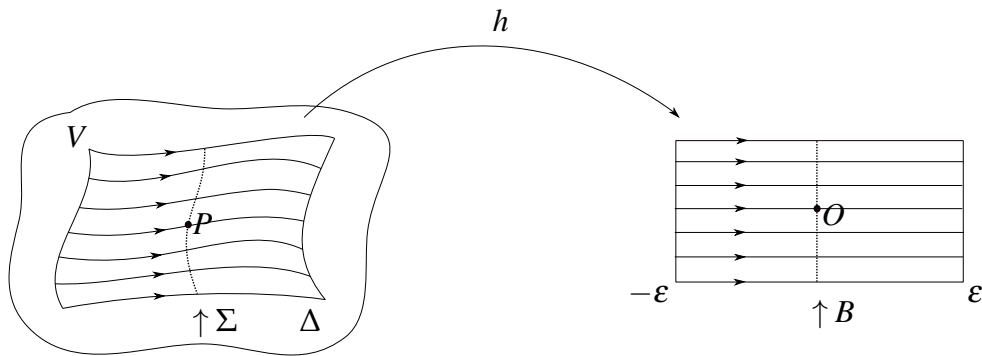


Figura 1.2: Teorema do Fluxo Tubular

Corolário 1.20.1. *Se γ é uma solução maximal de um sistema diferencial associado ao campo vetorial X de classe C^r , e γ não é um ponto singular, então γ é difeomorfo a \mathbb{R} ou S^1 .*

Este corolário basicamente caracteriza os tipos de órbitas que podemos ter: ou é difeomorfa a um ponto, ou a uma linha (curva) ou a uma curva fechada.

1.6 Sistemas Lineares

Como foi mencionado anteriormente, em geral não é possível resolver sistemas não-lineares da forma $\dot{x} = f(x)$, em que $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ e Δ é um aberto em \mathbb{R}^n . Contudo, é possível obter muitas informações qualitativas sobre o comportamento local da solução deste tipo de sistema.

Nesta seção, serão estudados os possíveis retratos de fase associados a sistemas lineares planares homogêneos da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.7)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Podemos ainda escrever o sistema (1.7) como $\dot{x} = Ax$, em que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz associada ao sistema (1.7).

Nosso objetivo agora é verificar a relação existente entre a estrutura da matriz associada ao sistema linear (1.7) e as informações que podem ser obtidas a partir dela sobre o comportamento próximo às singularidades deste sistema. Para isso, partiremos dos autovalores obtidos através do cálculo do **polinômio característico** da matriz A denotado por $p(\lambda)$ (mais detalhes sobre esse procedimento podem ser vistos em [2]).

Seja I a matriz identidade de ordem dois, então

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb). \quad (1.8)$$

Note que $a + d$ corresponde ao *traço* da matriz A , que aqui denotaremos por τ . Por outro lado, $(ad - cb)$ corresponde ao *determinante* de A , que será denotado por δ . Suponha $\delta \neq 0$, neste caso, nenhum dos autovalores de A será nulo. Reescrevendo o polinômio característico fixando esta notação temos

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta. \quad (1.9)$$

Para encontrar os autovalores de A , basta resolver a equação do segundo grau obtida quando $p(\lambda) = 0$. Assim, temos:

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

Antes de prosseguirmos para a análise dos autovalores, faremos algumas considerações importantes. Dada a matriz A associada ao sistema (1.7), se $\det(A) \neq 0$ então é possível encontrar uma matriz invertível P formada pelos autovetores associados aos autovalores de A de modo que, em uma nova base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 , A possa ser reescrita como

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP.$$

Além disso, $[A]_{\mathcal{B}}$ vai corresponder a uma das seguintes matrizes

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } J_3 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

conhecidas na literatura como **Formas Canônicas de Jordan** (consulte [13]). Vamos denotar por $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o fluxo de cada um dos sistemas associados às matrizes (1.10).

Prosseguindo, temos as seguintes possibilidades para o conjunto solução de $p(\lambda) = 0$:

- (i) Duas raízes reais de sinais opostos λ_1 e λ_2 . A matriz A na nova base \mathcal{B} é equivalente à J_1 . Neste caso, o fluxo do sistema associado à matriz $[A]_{\mathcal{B}} = J_1$ é $\varphi(t, (x, y)) = (xe^{\lambda_1 t}, ye^{\lambda_2 t})$, e os possíveis retratos de fase são dados pela figura 1.3.

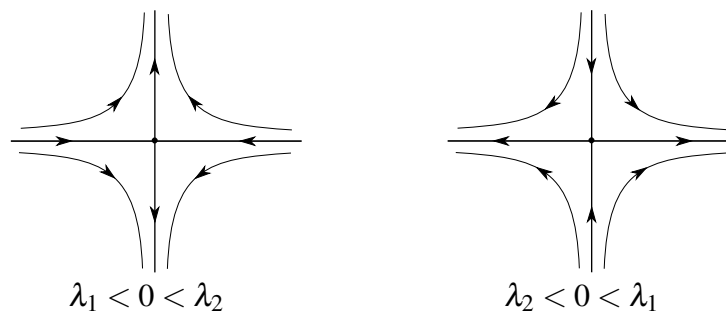


Figura 1.3: Possíveis retratos de fase para o caso (i). Temos uma singularidade do tipo *sela*.

- (ii) Duas raízes reais de mesmo sinal.

(ii.a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos $[A]_{\mathcal{B}} = J_1$. A expressão do fluxo do sistema associado à matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ será a mesma do item (i).

Agora, se $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, podemos dividir em dois casos:

(ii.b) Se λ tem multiplicidade 2, então $[A]_{\mathcal{B}} = J_1$ sob a hipótese de que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, e o fluxo do sistema associado à matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ é $\varphi(t, (x, y)) = (xe^{\lambda t}, ye^{\lambda t})$;

(ii.c) Por outro lado, se λ tem multiplicidade 1, então $[A]_{\mathcal{B}} = J_2$ e o fluxo do sistema associado a esta matriz é dado por $\varphi(t, (x, y)) = ((x + yt)e^{\lambda t}, ye^{\lambda t})$;

Os possíveis retratos de fase do sistema linear relacionado à matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ considerando as situações apresentadas no item (ii), são dados pela figura 1.4.

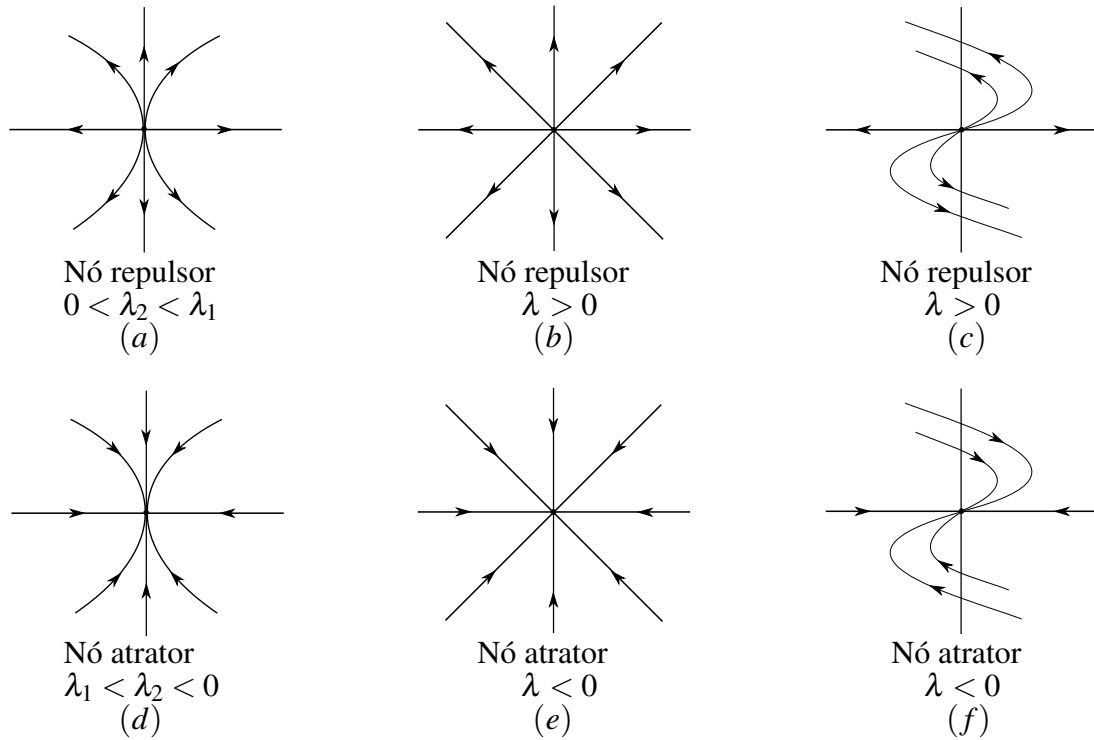


Figura 1.4: Os retratos de fase (a) e (d) são referentes ao caso (ii.a), os retratos de fase (b) e (e) referentes ao caso (ii.b) e (c) e (f), ao caso (ii.c).

(iii) Duas raízes complexas conjugadas com parte real não-nula $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Temos $[A]_{\mathcal{B}} = J_3$. Além disso, o fluxo do sistema associado a esta matriz é dado por $\varphi(t, (x, y)) = e^{\alpha t}(x \cos \beta t - y \sin \beta t, x \sin \beta t + y \cos \beta t)$. Os possíveis retratos de fase do sistema linear associado à matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ são mostrados na figura 1.5.

(iv) Duas raízes complexas puramente imaginárias $\lambda_1 = \beta i$ e $\lambda_2 = -\beta i$. A matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ corresponde a um caso particular da forma de Jordan J_3 . Temos

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o fluxo do sistema associado à matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ é $\varphi(t, (x, y)) = (x \cos \beta t - y \sin \beta t, x \sin \beta t + y \cos \beta t)$, e os possíveis retratos de fase para este item são dados pela

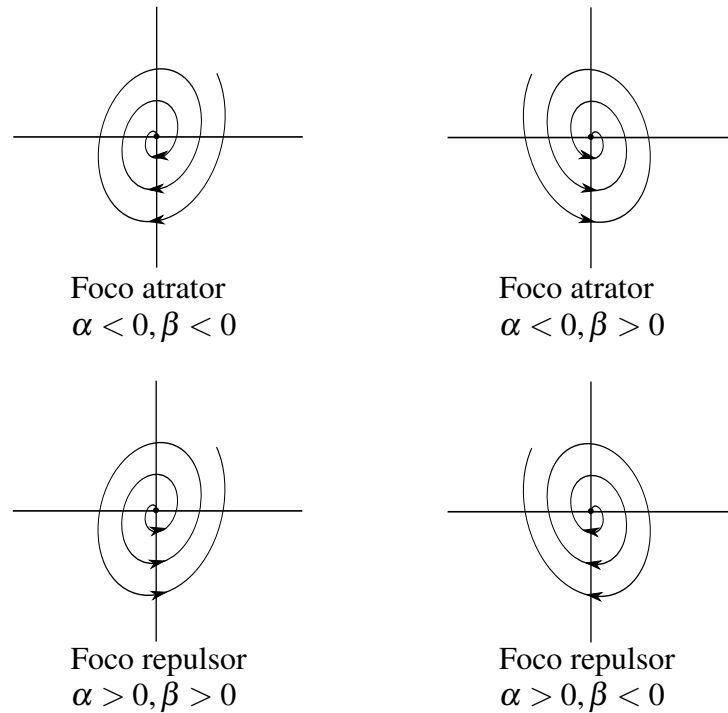


Figura 1.5: Possíveis retratos de fase para o caso (iii).

figura 1.6.

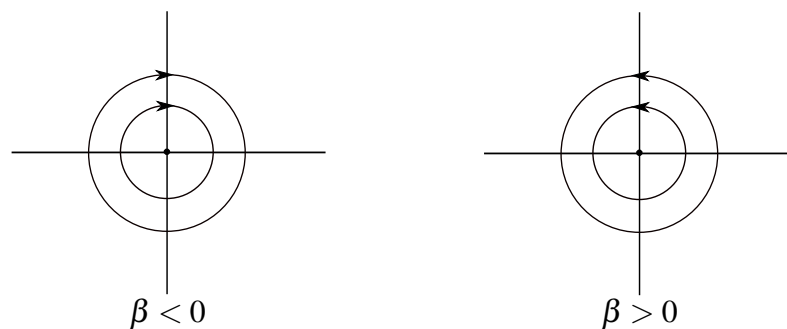


Figura 1.6: Possíveis retratos de fase para o caso (iv). Temos uma singularidade do tipo *centro linear*.

Definição 1.21. Sejam $x \mapsto Ax$ e $x \mapsto Bx$ campos vetoriais lineares em \mathbb{R}^2 . Tais campos, bem como seus respectivos fluxos φ e ψ ou seus sistemas de equações lineares associados são ditos **conjugados** se existe uma bijeção $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ chamada de *conjugação* tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Se h é um isomorfismo linear, ou um C^r -difeomorfismo, ou um homeomorfismo, dizemos que os sistemas são linearmente conjugados, C^r -conjugados ou topologicamente conjugados, respectivamente.

Proposição 1.22. *A transformação linear $h : x \mapsto Cx$ é uma conjugação linear entre $x \mapsto Ax$ e $x \mapsto Bx$ se, e somente se, a matriz C satisfaz $CA = BC$.*

A proposição apresentada anteriormente nos garante que uma matriz qualquer é linearmente equivalente à sua forma canônica de Jordan. Desta forma, nesta seção foi realizada a caracterização completa para fluxos e retratos de fase de sistemas lineares com coeficientes constantes, considerando todas as possíveis formas de Jordan para matrizes quadradas de ordem dois.

Podemos ainda determinar o tipo de singularidade de um sistema linear a partir da análise do traço e do determinante da matriz associada a este sistema, sob a hipótese de que o determinante é não-nulo, como é mostrado no teorema a seguir.

Teorema 1.23. *Sejam δ e τ respectivamente, o determinante e o traço da matriz A associada ao sistema linear:*

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.11)$$

- (a) *Se $\delta < 0$, então (1.11) tem uma sela na origem.*
- (b) *Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, então (1.11) tem um nó na origem; estável se $\tau < 0$ e instável se $\tau > 0$.*
- (c) *Se $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$, e $\tau \neq 0$ então (1.11) tem um foco na origem; estável se $\tau < 0$ e instável se $\tau > 0$.*
- (d) *Se $\delta > 0$ e $\tau = 0$, então (1.11) tem um centro na origem.*

Observe que, no caso (b), $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0$, isto é, $\tau \neq 0$. A expressão $\tau^2 - 4\delta$ é chamada de **discriminante**.

Exemplo 1.24. Considere o sistema linear dado na forma matricial por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

cuja única singularidade é o ponto $(0,0)$. Temos que o traço e o determinante da matriz associada a (1.12) são dados, respectivamente, por $\tau = 4$ e $\delta = -7$. Logo, pelo Teorema 1.23, segue que a origem é uma singularidade tipo sela (veja figura 1.7). Temos ainda que os

autovalores da matriz do sistema (1.12) são $\lambda_1 = 2 + \sqrt{11}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{11}$, assim, (1.12) é linearmente equivalente ao sistema cuja matriz associada é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

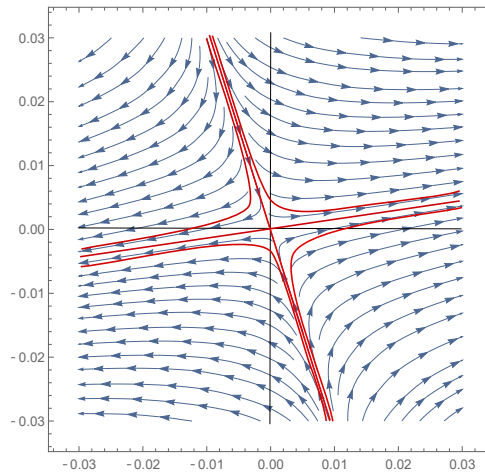


Figura 1.7: Retrato de fase do sistema (1.12) em torno da origem.

1.7 Teorema de Hartman-Grobman

Seja p um ponto singular de um campo vetorial planar $X(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ de classe C^r , e seja

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

a **parte linear** do campo vetorial X no ponto singular p . Temos os seguintes casos:

- (i) Se $DX(p)$ não possui autovalor nulo, então p é uma singularidade **não-degenerada**.
- (ii) Se os autovalores de $DX(p)$ têm parte real não nula, então p é uma singularidade **hiperbólica**, também chamada de **elementar**.
- (iii) Se exatamente um autovalor de $DX(p)$ é nulo, então p é uma singularidade **semi-hiperbólica**, também chamada de **semi-elementar**.

(iv) Se ambos os autovalores de $DX(p)$ são iguais a 0, mas $DX(p) \neq 0$, então p é uma singularidade **nilpotente**.

(v) Se $DX(p) \equiv 0$, então p é uma singularidade **degenerada**.

Observação 1.25. Denomina-se **foco forte** o ponto singular p para o qual $DX(p)$ possui autovalores complexos com parte real não nula. Já para o caso em que $DX(p)$ tem um par de autovalores puramente imaginários, dizemos que a singularidade é um **foco fraco**.

O teorema a seguir nos permite determinar a estrutura local de singularidades semi-hiperbólicas, a partir da análise da parte linear do campo vetorial associado ao sistema não-linear a ser estudado.

Teorema 1.26 (Hartman-Grobman). *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^r e p uma singularidade hiperbólica. Então, existem vizinhanças W de p e V de 0 em \mathbb{R}^2 tais que $X|_W$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_V$.*

A seguir, veremos um exemplo de aplicação deste teorema.

Exemplo 1.27. Considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + y^3 \\ \dot{y} = -x - 3y + x^3 \end{cases} \quad (1.13)$$

Note que, a origem é uma singularidade para este sistema. Além disso, a parte linear do campo X associado a (1.13) em $(0,0)$ é dada por

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{10}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{10}$. Considerando o estudo realizado na seção anterior para sistemas lineares, podemos concluir que $(0,0)$ é uma singularidade do tipo sela hiperbólica para o sistema associado à matriz $DX(0,0)$. E como os autovalores de $DX(0,0)$ têm parte real não nula, segue que a origem é uma singularidade hiperbólica, logo, vale o Teorema de Hartman-Grobman, i.e., as soluções do sistema (1.13) são topologicamente conjugadas (localmente) às soluções do sistema $\dot{x} = DX(0)x$. Portanto, $(0,0)$ é uma singularidade do tipo sela para (1.13).

1.8 Singularidades semi-hiperbólicas

No sentido de investigar o comportamento qualitativo de soluções próximo à singularidades, o teorema a seguir se mostra um importante instrumento para caracterizar o retrato de fase local em torno de um ponto singular semi-hiperbólico. Para mais detalhes, veja [5].

Teorema 1.28 (Singularidades Semi-hiperbólicas). *Seja $(0,0)$ uma singularidade isolada do campo de vetores X dado por:*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x,y) \\ \dot{y} = \lambda y + B(x,y) \end{cases}, \quad (1.14)$$

em que A e B são funções analíticas em torno da origem verificando as seguintes condições:

- $A(0,0) = 0 = B(0,0)$
- $DA(0,0) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}(0,0), \frac{\partial A}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0)$
- $DB(0,0) = \left(\frac{\partial B}{\partial x}(0,0), \frac{\partial B}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0)$

e $\lambda > 0$. *Seja $y = f(x)$ solução da equação $\lambda y + B(x,y) = 0$ em uma vizinhança do ponto $(0,0)$, e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ seja da forma $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, onde $o(x^m)$ indica os termos de ordem superior a m , com $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então, sempre existe uma curva analítica invariante, chamada variedade instável forte, tangente em 0 ao eixo y , no qual X é analiticamente conjugado a*

$$\dot{y} = \lambda y,$$

que tem um comportamento repulsor, já que $\lambda > 0$. Além disso, vale uma das seguintes afirmações:

- (i) *Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0,0)$ é uma **sela topológica** (veja figura 1.8(a)) tangente ao eixo x existe uma única curva invariante C^∞ , chamada variedade central, na qual X é C^∞ -conjugado a*

$$\dot{x} = -x^m (1 + ax^{m-1}) \quad (1.15)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. *Se esta curva invariante é analítica, então o campo X é C^ω -conjugado a (1.15). O sistema associado ao campo X é C^∞ -conjugado a*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^m (1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases},$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}.$$

(ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0,0)$ é um **nó topológico instável** (veja figura 1.8 (b)). Cada ponto não pertencente à variedade instável forte pertence a uma curva invariante C^∞ , chamada variedade central, tangente ao eixo x na origem, e na qual X é C^∞ -conjugado a

$$\dot{x} = x^m (1 + ax^{m-1}), \quad (1.16)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedades centrais são mutuamente infinitamente tangentes entre si, e conseqüentemente no máximo uma delas pode ser analítica, no caso em que X é C^ω -conjugado a (1.16). O sistema associado ao campo X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m (1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases},$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}.$$

(iii) Se m é par, então $(0,0)$ é uma **sela-nó**, ou seja, um ponto singular cuja qualquer vizinhança é a união de um setor parabólico e dois hiperbólicos (veja figura 1.8(c)). Mudando x para $-x$, supomos que $a_m > 0$. Cada ponto da direita da variedade instável forte (lado $x > 0$) está sobre uma curva invariante C^∞ , chamada de variedade central, tangente ao eixo x na origem, e na qual X é C^∞ -conjugado a

$$\dot{x} = x^m (1 + ax^{m-1}) \quad (1.17)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedades centrais coincidem no lado $x \leq 0$ e são conseqüentemente infinitamente tangentes na origem. No máximo, uma dessas variedades centrais pode ser analítica, e neste caso X é C^ω -conjugado a (1.17). O

sistema associado ao campo X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m (1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases},$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}.$$

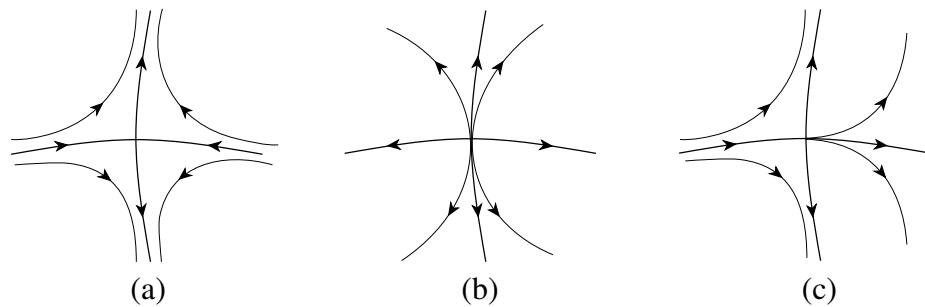


Figura 1.8: Retrato de fase local de singularidades semi-hiperbólicas.

Observação 1.29. Para $\lambda < 0$, o resultado é semelhante ao apresentado anteriormente, bastando mudar o campo X para $-X$. Além disso, para aplicar o Teorema 1.28, é necessário que a singularidade esteja localizada na origem. Então, suponha que $p = (x_0, y_0)$ seja um ponto singular do sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.18)$$

com $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$. Aplicando a mudança de coordenadas dada por $x = u + x_0$ e $y = v + y_0$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v) \\ \dot{v} = Q(u, v) \end{cases} \quad (1.19)$$

para o qual $(0, 0)$ é um ponto singular. Como esta mudança é linear, segue que o sistema (1.19) é topologicamente equivalente ao (1.18). Portanto, sempre é possível mover um ponto singular para a origem dos eixos coordenados.

Exemplo 1.30. Considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + xy + 1 \\ \dot{y} = 3x - x^2 + 2y - xy - 3 \end{cases} \quad (1.20)$$

cujo campo associado será denotado por X . O único ponto singular para (1.20) é $(1,1)$ e os autovalores de $DX(1,1)$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Logo, $(1,1)$ é uma singularidade semi-hiperbólica. A fim de aplicar o Teorema 1.28, realizamos a mudança de coordenadas dada por $x = u + 1$ e $y = v + 1$. Assim, o sistema (1.20) é topologicamente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{u} = uv \\ \dot{v} = -u^2 + v - uv \end{cases} \quad (1.21)$$

Na notação do Teorema 1.28, temos $v = f(u) = u^2/(1-u)$ e $g(u) = u^3/(1-u)$. Note que, não temos uma expressão polinomial para $g(u)$. Vamos então determinar sua série de potências em torno da origem. Temos,

$$g(u) = u^3 \frac{1}{1-u} = u^3 \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} u^{n+3}$$

$$\therefore g(u) = u^3 + o(u^4)$$

que está bem definida. Como $a = 1$ e $m = 3$, pelo Teorema 1.28 segue que $(0,0)$ é um *nó topológico instável* para (1.21), o que implica que o ponto singular $(1,1)$ também o é para (1.20).

1.9 Decomposição setorial

Seja p um ponto singular. Dá-se o nome de **órbita característica** $\gamma(t)$ em p a uma órbita tendendo a p em tempo positivo (respectivamente, em tempo negativo) com uma inclinação bem definida, ou seja, $\gamma(t) \rightarrow p$ para $t \rightarrow +\infty$ (respectivamente, $t \rightarrow -\infty$) e o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\gamma(t) - p) / \|\gamma(t) - p\|$ (respectivamente, $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\gamma(t) - p) / \|\gamma(t) - p\|$) existe.

Definição 1.31. Dizemos que ρ definida por

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ e^{2\pi it} &\mapsto \rho(e^{2\pi it}) \end{aligned}$$

é uma **parametrização permissível do círculo** se ρ é injetiva de classe C^1 e $\rho' \neq 0$ para todo ponto.

Seja X um campo vetorial C^1 definido em uma vizinhança compacta V de ρ , para o qual ∂V

(a fronteira de V) é a imagem de uma parametrização permissível do círculo $\rho : S^1 \rightarrow \partial V$ de classe C^2 , e suponha que $X(p) = 0$ e $X(q) \neq 0$, para todo $q \in V \setminus \{p\}$. Dizemos que:

- (i) $X|_V$ é um **centro** se ∂V é uma órbita periódica e todas as órbitas em $V \setminus \{p\}$ são periódicas;
- (ii) $X|_V$ é um **foco/nó atrator** se em todos os pontos de ∂V , o campo vetorial aponta para dentro e, para todo $q \in V \setminus \{p\}$ temos $\omega(q) = \{p\}$, $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.
- (iii) $X|_V$ é um **foco/nó repulsor** se em todos os pontos de ∂V , o campo vetorial aponta para fora e, para todo $q \in V \setminus \{p\}$ temos $\alpha(q) = \{p\}$ e $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.
- (iv) $X|_V$ tem uma decomposição setorial finita não trivial se nenhum dos casos (i), (ii) e (iii) ocorre, e se existe um número finito de órbitas características c_0, \dots, c_{n-1} , cada uma cortando ∂V transversalmente em um ponto p_i , de modo que ∂V seja uma seção transversal próximo a p_i , e com a propriedade que entre c_i e c_{i+1} (com $c_n = c_0$ e ordenada de tal modo que p_0, \dots, p_{n-1} siga a ordem cíclica de ρ), temos uma das seguintes situações em relação aos setores S_i , definidos como a região compacta limitada por $\{p\}$, c_i , c_{i+1} e a parte da fronteira de V entre p_i e p_{i+1} :
 - (iv.1) **Setor parabólico atrator**. Em todos os pontos de $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$, o campo vetorial aponta para dentro, e para todo $q \in S_i \setminus \{p\}$ temos $\omega(q) = \{p\}$, $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.
 - (iv.2) **Setor parabólico repulsor**. Em todos os pontos de $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$, o campo vetorial aponta para fora, e para todo $q \in S_i \setminus \{p\}$ temos $\alpha(q) = \{p\}$, $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.
 - (iv.3) **Setor hiperbólico** (ou **setor de sela**). Existe um ponto $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$ com a propriedade de que para todos os pontos de $[p_i, q_i)$ o campo vetorial aponta para dentro (respectivamente, para fora) enquanto que para todos os pontos de $(q_i, p_{i+1}]$, o campo vetorial aponta para para fora (respectivamente, para dentro); no ponto q_i , o campo vetorial é tangente a ∂V e a tangência é externa, isto significa que a órbita passando por q_i fica fora de V ; e para todo $q \in S_i \setminus \overline{c_i \cup c_{i+1} \cup q_i}$ temos $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ e $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$.
 - (iv.4) **Setor elíptico**. Existe um ponto $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$ com a propriedade de que $\gamma(q_i) \subset V$ com $\omega(q_i) = \alpha(q_i) = \{p\}$; em todos os pontos $q \in [p_i, q_i)$ o campo vetorial aponta para dentro, $\gamma^+(q) \subset V$ e $\omega(q) = p$. Denotamos por $S_{[p_i, q_i]} =$

$\bigcup_{q \in [p_i, q_i]} \gamma^+(q)$; em todos os pontos de $q \in (q_i, p_{i+1}]$ o campo vetorial aponta para fora, $\gamma^-(q) \subset V$ e $\alpha(q) = p$. Denotamos por $S_{[q_i, p_{i+1}]} = \bigcup_{q \in [q_i, p_{i+1}]} \gamma^-(q)$; em todos os pontos $q \in S_i \setminus (S_{[p_i, q_i]} \cup S_{[q_i, p_{i+1}]} \cup \{p\})$ temos $\gamma(q) \subset V$ com $\omega(q) = \alpha(q) = p$. O mesmo ocorre se trocarmos $[p_i, q_i]$ por $[q_i, p_{i+1}]$.

Veja na figura 1.9 a representação dos diferentes setores citados no item (iv).

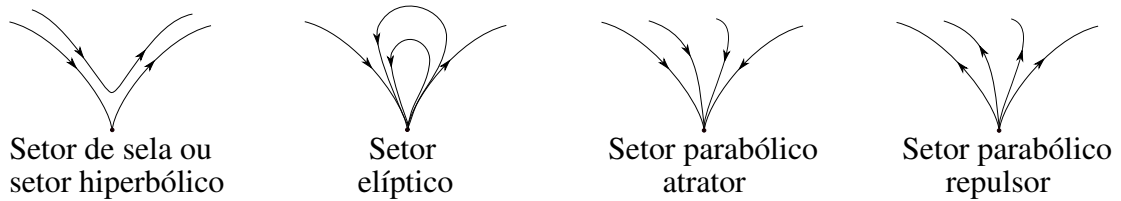


Figura 1.9: Setores na vizinhança de um ponto singular.

Observação 1.32. Note que, do ponto de vista topológico, não há distinção entre um foco e um nó. Esta distinção só ocorre do ponto de vista diferenciável.

Seja X um campo vetorial de classe C^1 definido em uma vizinhança W de alguma singularidade p . Dizemos que X tem a **propriedade de decomposição setorial finita** em p se existir alguma vizinhança $V \subset W$ de p tal que $X|_V$ satisfaz uma das condições (i), (ii), (iii) ou (iv). Nos primeiros três casos, dizemos que a decomposição setorial é trivial.

O teorema a seguir relaciona o número de setores elípticos ao de setores hiperbólicos, levando em conta o grau mínimo de uma singularidade.

Teorema 1.33. *Suponha que (e, h) seja um par de inteiros não negativos tais que $e + h > 0$. Então, existe um ponto singular de grau mínimo m cujo retrato de fase local tem e setores elípticos e h setores hiperbólicos se, e somente se*

- (i) $e + h \equiv 0 \pmod{2}$;
- (ii) $e \leq 2m - 1$ e $e + h \leq 2m + 2$;
- (iii) se $e \neq 0$, então $e + h \leq 2m$.

O **grau mínimo** m de uma singularidade é o menor grau dos termos não-nulos na expansão de Taylor do campo vetorial avaliado no ponto singular.

1.10 Número de Lyapunov

Nesta seção, será apresentada uma fórmula para o cálculo do **número de Lyapunov**, como é chamado na literatura. Este valor nos fornece informações quanto à estabilidade ou instabilidade de um foco fraco. Os resultados a seguir podem ser encontrados em [13].

Considere o sistema diferencial

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.22)$$

Suponha que o sistema analítico planar (1.22) tenha um foco na origem e que $\det Df(0) \neq 0$. Então (1.22) é linearmente equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by + p(x, y) \\ \dot{y} = bx + ay + q(x, y) \end{cases}. \quad (1.23)$$

com $b \neq 0$, onde as expansões em série de potências de p e q têm grau no mínimo dois. Em coordenadas polares, este sistema tem a forma

$$\begin{cases} \dot{r} = ar + o(r^2) \\ \dot{\theta} = b + o(r) \end{cases}.$$

Seja $r(t, r_0, \theta_0)$, $\theta(t, r_0, \theta_0)$ a solução deste sistema satisfazendo $r(0, r_0, \theta_0) = r_0$ e $\theta(0, r_0, \theta_0) = \theta_0$. Então, para $r_0 > 0$ suficientemente pequeno e $b > 0$, $\theta(t, r_0, \theta_0)$ é uma função estritamente crescente de t . Seja $t(\theta, r_0, \theta_0)$ a inversa desta função estritamente crescente e para um θ_0 fixo, defina a função

$$P(r_0) = r(t(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0).$$

Então, para todo $r_0 > 0$ suficientemente pequeno, $P(r_0)$ é uma função analítica de r_0 que é chamada de **mapa de Poincaré para o foco** na origem de (1.23). De modo similar, para $b < 0$, $\theta(t, r_0, \theta_0)$ é uma função estritamente decrescente de t e a fórmula

$$P(r_0) = r(t(\theta_0 - 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0)$$

é usada para definir, neste caso, o mapa de Poincaré para o foco na origem, como pode ser visto na figura 1.10.

Teorema 1.34. *Seja $P(s)$ o mapa de Poincaré para um foco na origem do sistema analítico*

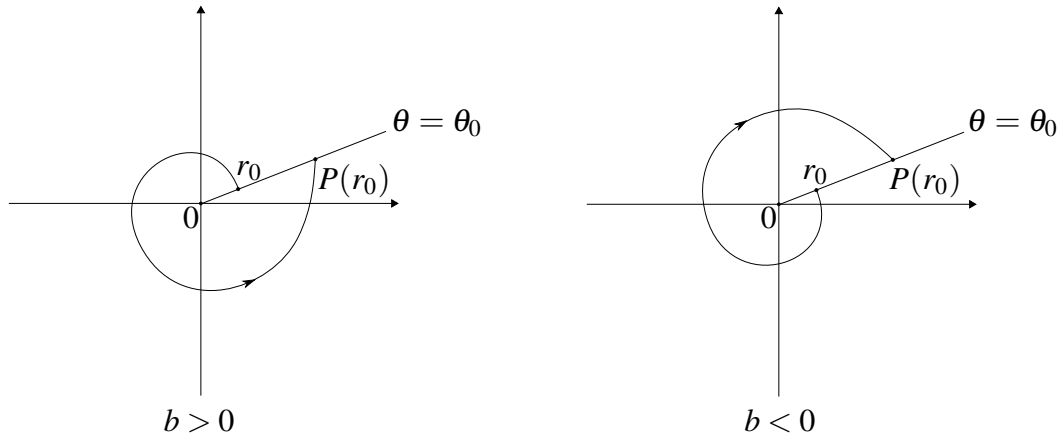


Figura 1.10: Mapa de Poincaré para um foco na origem.

planar (1.23) com $b \neq 0$ e suponha que $P(s)$ está definida para $0 < s < \delta_0$. Então, existe um $\delta > 0$ tal que $P(s)$ pode ser estendida para uma função analítica definida para $|s| < \delta$. Além disso, $P(0) = 0$, $P'(0) = \exp(2\pi a/|b|)$, e se a função deslocamento é dada por $d(s) = P(s) - s$ então $d(s)d(-s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$.

O fato de $d(s)d(-s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$ pode ser usado para mostrar que, se

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ e } d^{(k)}(0) \neq 0$$

então k é ímpar; ou seja, $k = 2m + 1$. O inteiro $m = (k - 1)/2$ é chamado de **multiplicidade do foco**. Se $m = 0$, o foco é chamado de **foco simples** e segue do teorema acima que o sistema (1.23), com $b \neq 0$, tem um foco simples na origem se, e só se, $a \neq 0$. O sinal de $d'(0)$, ou seja, o sinal de a determina a estabilidade da origem neste caso. Assim, se $a < 0$, a origem é um foco atrator e se $a > 0$, a origem é um foco repulsor. Se $d'(0) = 0$, ou seja, se $a = 0$, então (1.23) tem um foco múltiplo ou um centro na origem. Se $d'(0) = 0$, então a primeira derivada não nula $\sigma \equiv d^{(k)}(0) \neq 0$ é chamada de **número de Lyapunov** para o foco. Se $\sigma < 0$ então o foco é estável e se $\sigma > 0$, é instável. Se $d'(0) = d''(0) = 0$ e $d'''(0) \neq 0$ então o número de Lyapunov para o foco na origem de (1.23) é dado pela fórmula

$$\begin{aligned} \sigma \equiv d'''(0) &= \frac{3\pi}{2b} \{ [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21})] \\ &\quad - \frac{1}{b} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})] \} \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j \quad \text{e} \quad q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j$$

em (1.23). Desta forma, o algoritmo acima nos permite determinar o número de Lyapunov a partir dos coeficientes dos polinômios $p(x,y)$ e $q(x,y)$.

De modo geral, dado um sistema analítico planar da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + p(x,y) \\ \dot{y} = cx + dy + q(x,y) \end{cases} \quad (1.25)$$

com $\Delta = ad - bc > 0$, $a + d = 0$ e $p(x,y)$, $q(x,y)$ dados como anteriormente, a matriz

$$Df(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

terá um par de autovalores imaginários e a origem será um foco fraco; o número de Lyapunov σ é então dado pela fórmula

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{-3\pi}{2b\Delta^{3/2}} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \\ & + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ & - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] \\ & - (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \}. \end{aligned}$$

Há outros métodos para se realizar este cálculo, no entanto, adotaremos as fórmulas apresentadas anteriormente para este trabalho.

1.11 Teoremas de variedades invariantes

Nesta seção, serão apresentados dois teoremas sobre variedades invariantes que são de grande importância na teoria local das equações diferenciais. O teorema da variedade estável, enunciado a seguir, mostra que próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 de um sistema não-linear

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.26)$$

existe uma variedade estável S (respectivamente, instável U) que tangencia x_0 e que faz correspondência com subespaço estável E^s (respectivamente, instável E^u) do sistema linearizado

$$\dot{x} = Ax \quad (1.27)$$

em que $A = Df(x_0)$, e E^s (respectivamente, E^u) é o subespaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores de A que tem parte real negativa (respectivamente, positiva).

Estes resultados podem ser vistos com mais detalhes em [13].

Teorema 1.35 (Teorema da Variedade Estável). *Sejam E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem, $f \in C^1(E)$ e φ_t o fluxo do sistema não-linear (1.26). Suponha que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ tenha k autovalores com parte real negativa e $n - k$ autovalores com parte real positiva. Então, existe uma variedade diferenciável k -dimensional S , tangente ao subespaço estável E^s do sistema linear (1.27) em 0 tal que, para todo $t \geq 0$, $\varphi_t(S) \subset S$ e para todo $x_0 \in S$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_0) = 0;$$

e existe uma variedade diferenciável $n - k$ dimensional U tangente ao subespaço instável E^u de (1.27) em 0 tal que, para todo $t \leq 0$, $\varphi_t(U) \subset U$ e para todo $x_0 \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

O próximo resultado a ser apresentado, estabelece a existência de uma variedade central invariante denotada por $W^c(0)$ tangente à variedade central E^c , sendo a última definida como o subespaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores de A em (1.27) cuja parte real é nula.

Teorema 1.36 (Teorema da Variedade Central). *Sejam E um aberto em \mathbb{R}^n contendo a origem e $f \in C^r(E)$, com $r \geq 1$. Suponha que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ tenha k autovalores com parte real negativa, j autovalores com parte real positiva e $m = n - k - j$ autovalores com parte real nula. Então, existe uma variedade central m -dimensional $W^c(0)$ de classe C^r tangente ao subespaço central E^c de (1.27) em 0 , existe uma variedade estável k -dimensional denotada por $W^s(0)$ de classe C^r tangente ao subespaço estável E^s de (1.27) em 0 e existe uma variedade instável j -dimensional denotada por $W^u(0)$ de classe C^r tangente ao subespaço instável E^u de (1.27) em 0 ; além disso, $W^c(0)$, $W^s(0)$ e $W^u(0)$ são invariantes sob o fluxo φ_t de (1.26).*

1.12 Compactificação de Poincaré

Ao analisar o comportamento das órbitas de um campo vetorial, deseja-se estudar também esta dinâmica próximo ao infinito. Mas, sabemos que o \mathbb{R}^2 não é compacto, sendo um dos

fatores que podem tornar esta análise bem complicada. Com o intuito de contornar este problema, será apresentada nesta seção uma técnica de compactificação do plano na esfera, conhecida na literatura como **compactificação de Poincaré**, cuja ideia é induzir um campo vetorial por meio de projeções centrais do plano \mathbb{R}^2 sobre a esfera \mathbb{S}^2 (chamada de **esfera de Poincaré**), de modo que os campos induzidos em cada um dos hemisférios de \mathbb{S}^2 sejam analiticamente conjugados ao campo original (veja [8]). Nesta técnica, os pontos do infinito estão em correspondência biunívoca com o **equador da esfera de Poincaré** \mathbb{S}^1 .

A construção da compactificação apresentada a seguir é para o caso planar, interesse deste trabalho, no entanto, a ideia pode ser estendida para o caso n -dimensional, com $n > 2$, como pode ser visto em [6].

No decorrer deste trabalho, usamos a notação (x, y) para representar coordenadas do plano, porém, nesta seção vamos substituí-las pelas coordenadas (x_1, x_2) .

Considere o sistema de equações diferenciais dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.28)$$

cujo campo vetorial associado é $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$, com P e Q polinômios. Seja d o máximo dos graus de P e Q . Diremos que d é o **grau** do campo X e do sistema (1.28).

Considere o espaço \mathbb{R}^2 identificado como um plano em \mathbb{R}^3 definido por $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$. Seja $\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, a qual recebe o nome de **esfera de Poincaré** e tangencia o plano \mathbb{R}^2 no ponto $(0, 0, 1)$. A esfera pode ser dividida em três partes: **hemisfério norte**, denotado por $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$, **hemisfério sul**, denotado por $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$ e **equador**, denotado por $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$.

Considere agora a projeção do campo vetorial X na esfera \mathbb{S}^2 dada pelas projeções centrais $f^+, f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, obtidas pela interseção da reta que passa pelo ponto $y \in \mathbb{S}^2$ e a origem, com os hemisférios norte e sul de \mathbb{S}^2 , respectivamente:

$$f^+(x) = \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, 1) \quad \text{e} \quad f^-(x) = -\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, 1),$$

com $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$. Por meio dessas projeções é que vamos obter os campos vetoriais induzidos em cada um dos hemisférios de \mathbb{S}^2 , analiticamente conjugados a X .

O campo vetorial induzido em H_+ é dado por $\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x)$, em que $y = f^+(x)$. Já em H_- , temos o campo $\bar{X}(y) = Df^-(x)X(x)$, com $y = f^-(x)$. Pela Proposição 1.8, segue

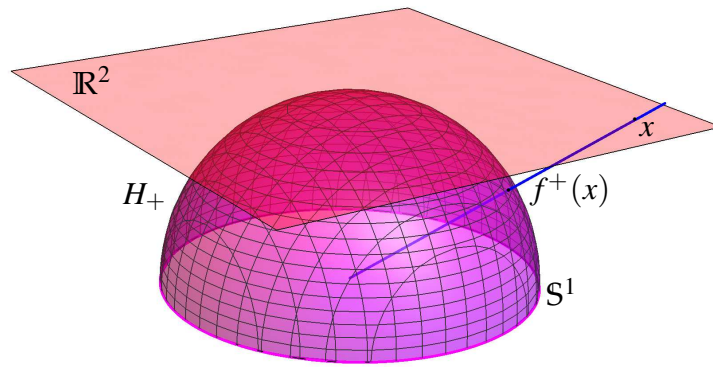


Figura 1.11: Projeção do plano \mathbb{R}^2 no hemisfério norte de S^2 .

que o campo \bar{X} induzido em cada um dos hemisférios H_+ e H_- é analiticamente conjugado a X , e tangencia todos os pontos de S^2 . Além disso, os pontos do infinito de \mathbb{R}^2 estão em correspondência bijetiva com os pontos do equador de S^2 .

Precisamos agora estender o campo vetorial \bar{X} para toda esfera, uma vez que \bar{X} está definido em $S^2 \setminus S^1$. Para que isso seja possível, basta multiplicarmos o campo \bar{X} pelo fator $\rho(y) = y_3^{d-1} = 1/\Delta(x)^{d-1}$, como será verificado mais à frente. Ao campo vetorial $\rho(y)\bar{X}$ estendido a S^2 dá-se o nome de **Compactificação de Poincaré** do campo vetorial X , e denota-se por $p(X)$. O campo induzido em cada um dos hemisférios H_+ e H_- é C^ω -equivalente a X .

Agora, será apresentada a construção da compactificação. Considere as seis cartas locais (U_k, ϕ_k) , (V_k, ψ_k) , com $k = 1, 2, 3$, que parametrizam S^2 , dadas pelos abertos

$$U_k = \{y \in S^2 : y_k > 0\} \quad \text{e} \quad V_k = \{y \in S^2 : y_k < 0\}$$

e as aplicações locais $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right)$$

para $m < n$ e $m, n \neq k$. Denotaremos por $z = (u, v)$ o valor de $\phi_k(y)$ ou $\psi_k(y)$ para algum $k \in \{1, 2, 3\}$, levando em conta que (u, v) pode assumir diferentes valores a depender da carta local que está sendo considerada. Note que, os pontos de S^1 em qualquer carta local, são da forma $(u, 0)$.

Com efeito, se $y = (y_1, y_2, y_3) \in S^1$, então $y_3 \equiv 0$. Assim:

- para $k = 1$: $\phi_1(y_1, y_2, 0) = -\psi_1(y_1, y_2, 0) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{0}{y_1} \right) = (u, 0)$,

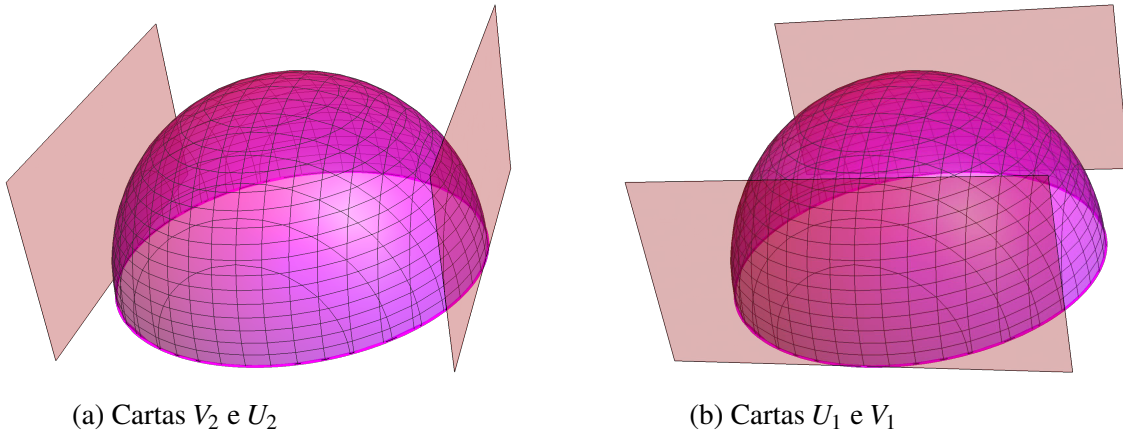


Figura 1.12: Cartas Locais

- para $k = 2$: $\phi_2(y_1, y_2, 0) = -\psi_2(y_1, y_2, 0) = \left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{0}{y_2} \right) = (u, 0)$.

A seguir, serão mostrados os cálculos para se obter a expressão de $p(X)$ para a carta local (U_1, ϕ_1) . As expressões para as outras cartas são encontradas de modo análogo.

Considere o campo vetorial $X(x) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$. O campo induzido em H_+ é dado por $\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x)$ com $y = f^+(x)$ e

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(f^+(x)) \circ Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Adote a notação $\bar{X}|_{U_1}$ para o sistema definido como $D\phi_1(y)\bar{X}(y)$ e observe que podemos escrever

$$(\phi_1 \circ f^+)(x) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

de onde se obtém $x_1 = 1/v$ e $x_2 = u/v$. Então

$$\begin{aligned} \bar{X}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\ &= v^2 \left(-\frac{u}{v} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right). \end{aligned}$$

O fator de multiplicação $\rho(y)$ é dado por

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right)^{d-1}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} + 1}\right)^{d-1}} = v^{d-1}m(z),$$

com $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{(1-d)/2}$. Daí, segue que

$$\rho(y)\bar{X}|_{U_1} = v^{d+1}m(z) \left(-\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Note que, o campo acima está bem definido ao longo de $v = 0$, uma vez que o fator de multiplicação v^{d+1} cancela qualquer fator de v que pudesse aparecer no denominador. Argumentos semelhantes podem ser aplicados às outras cartas locais.

No intuito de simplificar o campo vetorial estendido, também fazemos um reescalonamento do tempo e removemos o fator $m(z)$. Ainda assim, o campo vetorial resultante está definido em toda a esfera \mathbb{S}^2 e é C^ω -equivalente a X em qualquer um dos hemisférios H_+ e H_- .

Logo, a expressão para $p(X)$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por:

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{cases}. \quad (1.29)$$

Para a carta (U_2, ϕ_2) , temos:

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left(P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right) \\ \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \end{cases}. \quad (1.30)$$

E para (U_3, ϕ_3) , temos:

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v) \\ \dot{v} = Q(u, v) \end{cases}.$$

Nas cartas locais (V_k, ψ_k) as expressões para $p(X)$ são as mesmas obtidas para as cartas (U_k, ϕ_k) multiplicadas por um fator $(-1)^{d-1}$, em que d é o grau do campo vetorial analisado. Sendo assim, para estudar a dinâmica das soluções do sistema associado ao campo X no finito e no infinito, é suficiente sabermos o que acontece em $H_+ \cup \mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2; y^3 \geq 0\}$, denominado **disco de Poincaré**, que corresponde à região da esfera parametrizada pelas cartas (U_k, ϕ_k) , $k = 1, 2, 3$.

Definição 1.37. Seja y um ponto singular para $p(X)$. Dizemos que y é um ponto singular **finito** para o campo X ou $p(X)$ (respectivamente, **infinito**) se ele pertence a $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ (respectivamente, \mathbb{S}^1).

Vale observar que, se y é um ponto singular infinito, $-y$ também o é. Além do mais, como as expressões da compactificação nas cartas U_k e V_k , com $k \in \{1, 2, 3\}$, se diferem apenas pelo fator $(-1)^{d-1}$, segue que é possível determinar o comportamento local próximo a $-y$ a partir das informações obtidas para y , pois este fator de multiplicação para o caso infinito vai gerar uma alteração (ou não) apenas na orientação das órbitas. Por exemplo, se d é par e $y \in \mathbb{S}^1$ é um nó atrator para $p(X)$, então $-y$ será um nó repulsor; já se d for ímpar, $-y$ será um nó atrator.

A fim de desenhar o retrato de fase de X , dado que o fluxo do campo $p(X)$ em \mathbb{S}^2 é simétrico, basta considerar o fluxo do hemisfério norte da esfera incluindo \mathbb{S}^1 e depois projetar sobre o círculo unitário $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \text{ e } y_3 = 0\}$. Pela continuidade da projeção, segue que o campo obtido é topologicamente equivalente à compactificação no disco de Poincaré.

Vimos que, os pontos singulares infinitos são da forma $(u, 0)$. Nosso objetivo agora é estudar o retrato de fase local em torno desses pontos. Começamos a análise pela expressão da parte linear do campo $p(X)$. Denotaremos por P_i e Q_i os polinômios homogêneos de grau i , para $i = 0, 1, \dots, d$, tais que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_d$ e $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d$. Considerando a expressão da compactificação (1.29), vamos definir $F(u)$ por

$$F(u) = Q_d(1, u) - uP_d(1, u).$$

Temos que, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto singular infinito de $p(X)$ se, e somente se, $F(u) = 0$. De modo semelhante, mas agora considerando (1.30), definimos

$$G(u) = P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1).$$

Segue que, $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto singular de $p(X)$ se, e somente se, $G(u) = 0$. Além disso, a Jacobiana do campo vetorial $p(X)$ no ponto $(u, 0)$ é dada por

$$Jp(X)(u, 0) = \begin{pmatrix} F'(u) & Q_{d-1}(1, u) - uP_{d-1}(1, u) \\ 0 & -P_d(1, u) \end{pmatrix}$$

se $(u, 0) \in (U_1 \cup V_1)$. Por outro lado, se $(u, 0) \in (U_2 \cup V_2)$ temos

$$Jp(X)(u, 0) = \begin{pmatrix} G'(u) & P_{d-1}(u, 1) - uQ_{d-1}(u, 1) \\ 0 & -Q_d(u, 1) \end{pmatrix}.$$

É possível ocorrer de \mathbb{S}^1 ser inteiramente constituída por singularidades. No entanto, na maioria dos casos, as singularidades são isoladas. Neste trabalho, serão consideradas majoritariamente as situações em que as singularidades são pontos isolados. Observe ainda que, as singularidades finitas são estudadas na carta U_3 , já que a expressão da compactificação coincide com a do campo X . Já as singularidades infinitas são estudadas nas cartas U_1 e U_2 .

A seguir, veremos um exemplo de como a técnica da compactificação de Poincaré é aplicada.

Exemplo 1.38. Considere o sistema linear de equações diferenciais dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Note que, a origem é a única singularidade finita para (1.31). Além disso, os autovalores da matriz associada a (1.31) são $\lambda_1 = 2 + i$ e $\lambda_2 = 2 - i$. Pelo que foi visto para sistemas planares, segue que $(0, 0)$ é um foco repulsor.

Por outro lado, a expressão da compactificação na carta local U_1 é dada por

$$p(X|_{U_1})(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + u^2 \\ uv - 2v \end{pmatrix}.$$

E para U_2 , temos

$$p(X|_{U_2})(u, v) = \begin{pmatrix} -1 - u^2 \\ -uv - 2v \end{pmatrix}.$$

Veja que, em ambos os casos não temos singularidade infinitas, pois não existe $u \in \mathbb{R}$ para o qual a primeira coordenada do campo, nos dois casos, seja nula. O retrato de fase global do sistema (1.31) no disco de Poincaré é mostrado na figura 1.13.

1.13 Blow-Up homogêneo

Nesta seção, será apresentada uma ferramenta básica para estudar as singularidades degeneradas de um sistema diferencial no plano. Esta ferramenta é baseada em mudanças

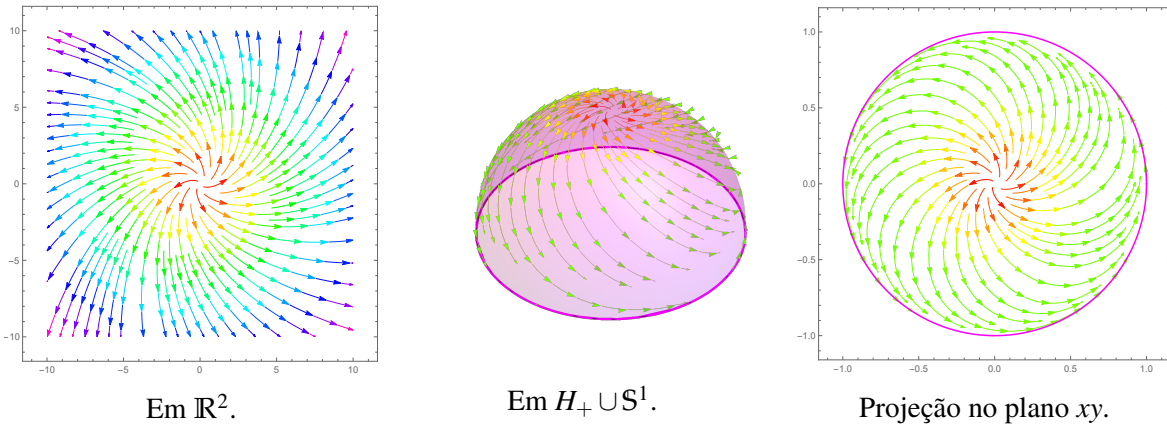


Figura 1.13: Retrato de fase associado a (1.31).

de variáveis chamadas **blow-ups**, e nos permite classificar singularidades nilpotentes, isto é, singularidades cuja parte linear é diferente da matriz nula, mas os autovalores são ambos nulos, e singularidades degeneradas, ou seja, cuja parte linear e os autovalores são identicamente nulos.

O blow-up também é usado para mostrar que singularidades isoladas de um sistema analítico tem uma decomposição setorial finita.

Inicialmente serão introduzidas as ideias básicas do blow-up homogêneo, que essencialmente é feito por meio de coordenadas polares. Mas antes, apresentamos a seguinte definição, encontrada em [3].

Definição 1.39. Seja $k \geq 1$ um inteiro. O k -**jato** de f em x_0 é o polinômio

$$j_k f(x_0) = x f'(x_0) + \frac{x^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

obtido pelo truncamento da série de Taylor no grau k e excluindo o termo constante $f(x_0)$.

Seja $(0,0)$ uma singularidade de um campo vetorial X de classe C^∞ em \mathbb{R}^2 . Caso a singularidade não seja a origem, basta aplicar uma translação conforme já foi mostrado. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Podemos definir um campo vetorial \hat{X} de classe C^∞ no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\phi_*(\hat{X}) = X$, de modo que $D\phi_v(\hat{X}(v)) = X(\phi(v))$. Este é chamado de *pull-back* de X pela ϕ . Esta mudança nada mais é que a representação do campo vetorial X escrito em coordenadas polares. A função ϕ é um difeomorfismo C^∞ , portanto, uma mudança natural de coordenadas C^∞ em $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$.

Mas ϕ não é um difeomorfismo em $\{r = 0\}$, uma vez que ϕ envia $\{r = 0\}$ em $(0,0)$, daí a função inversa do blow-up ϕ^{-1} envia a origem para um círculo.

Com o objetivo de estudar o retrato de fase de X em uma vizinhança V da origem, é suficiente estudar o retrato de fase de \hat{X} na vizinhança $\phi^{-1}(V)$ do círculo $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, e podemos nos restringir a $\{r \geq 0\}$. A priori, isso pode parecer um problema mais difícil do que o original, mas como veremos nesta seção, a construção é muito útil. Se o k -jato $j_k(X)(0)$ é zero, então $j_k(\hat{X})(u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$.

Embora o cilindro seja uma boa superfície para obter uma visão global de \hat{X} , o seu retrato de fase, muitas vezes é menos apropriado para fazer cálculos, uma vez que constantemente temos que lidar com expressões trigonométricas. Por esse motivo, muitas vezes torna-se mais viável realizar os cálculos em diferentes cartas.

Nas partes do cilindro dadas, respectivamente, por $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, usaremos uma carta dada por

$$K^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Nesta carta, a expressão da função blow-up ϕ é dada por

$$\phi^x : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}, \bar{x}\bar{y}). \quad (1.32)$$

Na verdade, vemos que

$$\begin{aligned} \phi = \phi^x \circ K^x : (\theta, r) &\xrightarrow{K^x} (r \cos \theta, \tan \theta) \\ &\xrightarrow{\phi^x} (r \cos \theta, r \cos \theta \tan \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Chamamos (1.32) de **blow-up na direção de x** ; o pull-back de X por meio de ϕ^x é denotado por \hat{X}^x , isto é, $(\phi^x)_*(\hat{X}^x) = X$.

Nas partes do cilindro dadas, respectivamente, por $\theta \in (0, \pi)$ e $\theta \in (\pi, 2\pi)$, usamos uma carta dada por

$$K^y : (\theta, r) \mapsto (\cot \theta, r \sin \theta) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Nesta carta, a expressão da função blow-up ϕ é dada por

$$\phi^y : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}\bar{y}, \bar{y}), \quad (1.33)$$

com $\phi = \phi^y \circ K^y$. Chamamos (1.33) de **blow-up na direção de y**; o pull-back de X por meio de ϕ^y é denotado por \hat{X}^y , isto é, $(\phi^y)_*(\hat{X}^y) = X$.

Ambas as aplicações ϕ^x e ϕ^y são chamadas de **blow-up direcionais**.

Se $j_k(X)(0) = 0$ e $j_{k+1}(X)(0) \neq 0$, então novamente $j_k(\hat{X}^x)(z) = 0$ e $j_k(\hat{X}^y)(z) = 0$ para, respectivamente, $z \in \{\bar{x} = 0\}$ ou $z \in \{\bar{y} = 0\}$.

No caso em que $j_k(X)(0) = 0$ e $j_{k+1}(X)(0) \neq 0$ o pull-back \hat{X} e da mesma forma \hat{X}^x e \hat{X}^y , são bastante degenerados, e para tornar a situação menos degenerada, vamos considerar \bar{X} com

$$\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X}.$$

Então \bar{X} também é um campo vetorial C^∞ em $S^1 \times \mathbb{R}$. Em $\{r > 0\}$ esta divisão não muda as órbitas de \hat{X} ou seu sentido de direção, apenas reparametriza o tempo t . A partir das fórmulas, fica claro que as singularidades de $\bar{X}|_{\{r=0\}}$ aparecem como pares de pontos opostos.

Para o blow-up direcional relacionado, usamos $(1/\bar{x}^k)\hat{X}^x$ no caso (1.32) e $(1/\bar{y}^k)$ no caso (1.33). Uma vez que $\phi = \phi^x \circ K^x$, temos $(K^x)_*(\hat{X}) = \hat{X}^x$. Assim:

$$(K^x)_*(\bar{X}) = (K^x)_*(\hat{X}/r^k) = \frac{1}{r^k}(K^x)_*(\hat{X}) = \frac{1}{r^k}\hat{X}^x = \bar{X}^x \left(\frac{\bar{x}}{r}\right)^k.$$

Visto nas coordenadas (θ, r) , temos $\bar{x}/r = \cos \theta$, que é estritamente positivo na parte do cilindro dada por $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Da mesma forma, na direção y temos $(K^y)_*(\hat{X}) = \hat{X}^y$ e $(K^y)_*(\bar{X}) = \bar{X}^y (\sin \theta)^k$, com $\sin \theta > 0$ na parte do cilindro dada por $\theta \in (0, \pi)$.

O blow-up direcional ϕ^x também pode ser usado para fazer um estudo sobre $\{(\theta, r) : \theta \in (\pi/2, 3\pi/2), r \geq 0\}$, mas nesse caso temos $\cos \theta < 0$. Para k ímpar, isso significa que nos retratos de fase que encontramos para $\bar{X}^x|_{\{\bar{x} \geq 0\}}$ temos que reverter o tempo. Uma observação semelhante deve ser feita no uso de \bar{X}^y para estudar \bar{X} em $\{(\theta, r) : \theta \in (\pi, 2\pi), r > 0\}$.

Tal reversão de tempo poderia ser evitada usando ϕ^x (respectivamente, ϕ^y) apenas para $\bar{x} \geq 0$ (respectivamente, $\bar{y} \geq 0$), e adicionando dois blow-ups direcionais extras

$$\begin{aligned} \phi^{-x} : (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto (-\bar{x}, -\bar{x}\bar{y}), \\ \phi^{-y} : (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto (-\bar{x}\bar{y}, -\bar{y}), \end{aligned}$$

que limitamos a, respectivamente, $\bar{x} \geq 0$ e $\bar{y} \geq 0$. Claro que o número de cálculos podem ser limitados usando ϕ^x e ϕ^y em uma vizinhança inteira de, respectivamente, $\{\bar{x} = 0\}$ e $\{\bar{y} = 0\}$, evitando ter que trabalhar com ϕ^{-x} e ϕ^{-y} .

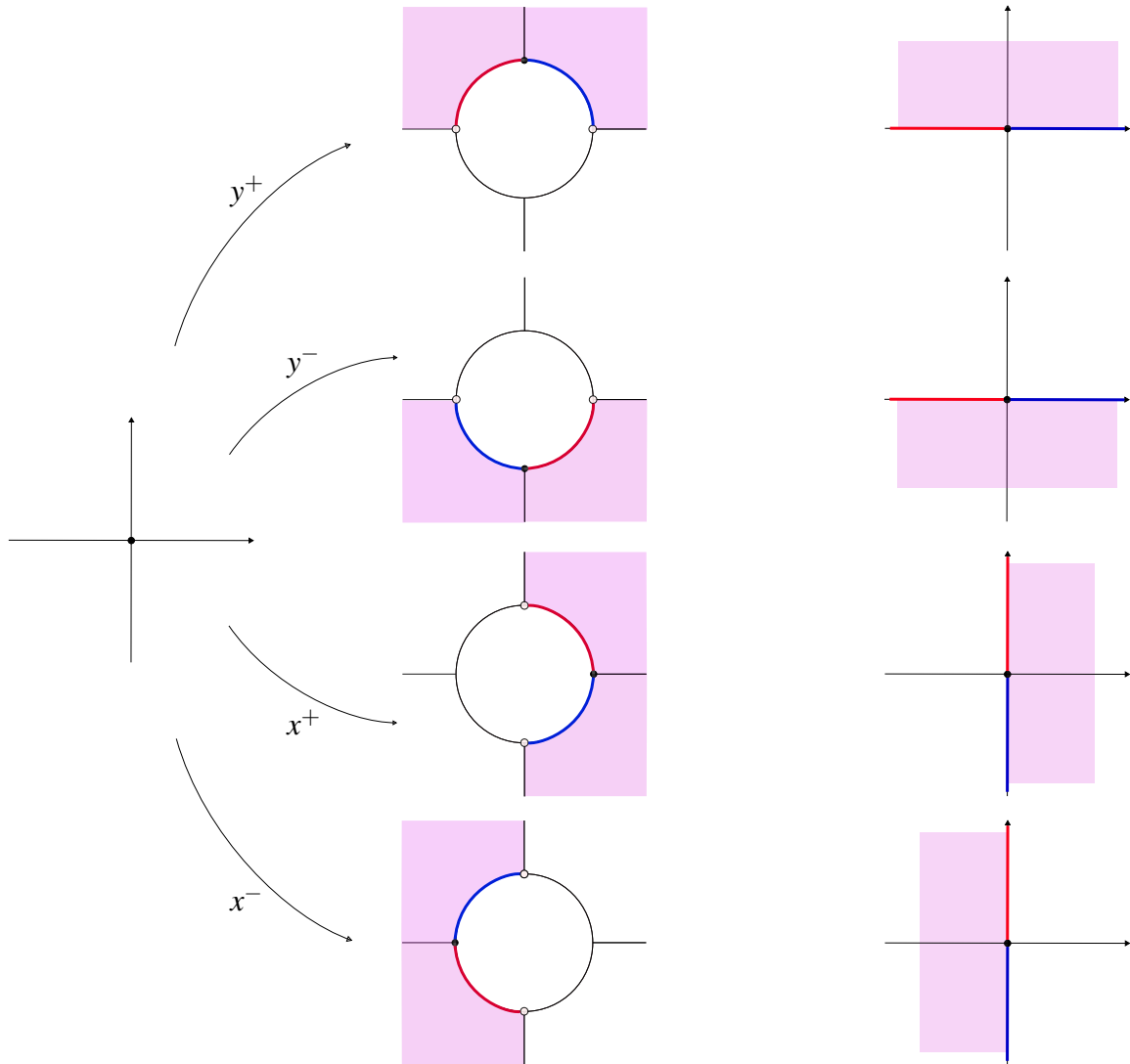


Figura 1.14: Para estudar a dinâmica das soluções em torno de uma singularidade degenerada, aplica-se o *blow-up* nas direções de y e x , e nos sentidos positivo e negativo, aqui representados respectivamente por y^+ , x^+ , y^- e x^- . Cada *blow-up* permite analisar uma região específica em torno da singularidade, região esta destacada na figura 1.14.

A seguir, faremos um exemplo para mostrar como esta técnica é aplicada. Por questões de simplificação de notação, usaremos as coordenadas (u, v) ao invés de (x, y) para nos referirmos ao sistema que desejamos estudar. Assim, o *blow-up* será aplicado nas direções de u e v no lugar de x e y , respectivamente.

Exemplo 1.40. Considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{u} = u^3 + u^2 + uv^3 - 2uv^2 - v^2 \\ \dot{v} = u^2v + v^4 - v^3 \end{cases} \quad (1.34)$$

cujo campo associado será denotado por X . Temos que $(0, 0)$ é uma singularidade de (1.34).

Além disso

$$DX(u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2 + 2u + v^3 - 2v^2 & 3uv^2 - 4uv - 2v \\ 2uv & u^2 + 4v^3 - 3v^2 \end{pmatrix} \Rightarrow DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os autovalores de $DX(0, 0)$ são identicamente nulos, e assim, temos uma singularidade degenerada. Para estudar o retrato de fase em torno de $(0, 0)$, utilizaremos o blow-up direcional.

Aplicando o blow-up horizontal na direção de u^+ (u positivo) por meio da mudança de coordenadas $(u, v) \rightarrow (u, w)$ com $w = v/u$, e fazendo um reescalonamento do tempo de t para t/u , segue que o sistema (1.34) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{u} = u^3 w^3 - 2u^2 w^2 + u^2 - uw^2 + u \\ \dot{w} = uw^3 + w^3 - w \end{cases}. \quad (1.35)$$

O sistema (1.35) possui três pontos singulares para $u = 0$, caso em que estamos interessados. São eles: $(0, 0)$, $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Calculando os autovalores da matriz Jacobiana do sistema (1.35) e avaliando nestes pontos, obtemos:

- (i) $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ para $(0, 0)$, portanto, temos uma sela hiperbólica.
- (ii) $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$ para $(0, -1)$, logo, temos uma singularidade semi-hiperbólica.
- (iii) $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$ para $(0, 1)$. Novamente, temos uma singularidade semi-hiperbólica.

Vamos aplicar o teorema das singularidades semi-hiperbólicas para o caso (ii). Para o item (iii), o procedimento é análogo.

Para levar o sistema (1.35) nas condições do Teorema 1.28, aplicamos a mudança de coordenadas $(u, w) \rightarrow (2x, x + y - 1)$. Assim, o sistema (1.35) pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(x, y) \\ 2y + B(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

onde

$$\begin{aligned} A(x, y) &= 4x^6 + 12x^5y - 12x^5 + 12x^4y^2 - 24x^4y + 8x^4 + 4x^3y^3 - 12x^3y^2 + 4x^3y + 3x^3 \\ &\quad - 4x^2y^2 + 6x^2y - xy^2 + 2xy \\ B(x, y) &= -4x^6 - 12x^5y + 12x^5 - 12x^4y^2 + 24x^4y - 6x^4 - 4x^3y^3 + 12x^3y^2 + 2x^3y - 8x^3 \\ &\quad + 10x^2y^2 - 15x^2y + 3x^2 + 2xy^3 - 2xy^2 - 2xy + y^3 - 3y^2. \end{aligned}$$

Ainda, a equação $2y + B(x, y) = 0$ tem solução do tipo

$$y = f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{6}x^3 + o(x^4),$$

em uma vizinhança da origem. Daí segue $g(x) = A(x, f(x)) = 4x^4 + o(x^5)$. Portanto, pelo Teorema 1.28 segue que $(0, 0)$ é uma sela-nó para (1.36), o que implica que $(0, -1)$ também é uma sela-nó para (1.37). Para determinar a disposição dos setores hiperbólicos e parabólicos, aplicaremos os Teoremas das variedades central e estável. Esta etapa é importante, visto que estamos interessados no semiplano $u \geq 0$ (nas coordenadas originais).

Procedendo com o cálculo, temos que o campo associado ao sistema (1.36) admite uma única variedade central dada por

$$h(x) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^4),$$

e a dinâmica sobre essa variedade é determinada por

$$\dot{x} = 4x^4 + o(x^5).$$

Considerando os dados acima e a mudança de coordenadas aplicada para levar (1.35) em (1.36), segue que o ponto singular $(0, -1)$ para (1.35) é formado por dois setores hiperbólicos no semiplano $u < 0$ e dois setores parabólicos no semiplano $u > 0$.

Fazendo os cálculos de modo análogo, concluímos que $(0, 1)$ é um nó topológico instável para (1.35).

Agora, vamos aplicar o blow-up na direção de v^+ . Fazendo uma mudança de coordenadas dada por $(u, v) \rightarrow (w, v)$ em que $w = u/v$ e um reescalonamento do tempo de t para t/v , temos que o sistema (1.34) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{w} = -vw + w^2 - 1 \\ \dot{v} = v^3 + v^2w^2 - v^2 \end{cases}. \quad (1.37)$$

Agora, temos interesse nos pontos singulares para os quais $v = 0$. Assim, (1.37) admite dois pontos, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, sendo este último já analisado no blow-up na direção de u^+ . Os autovalores da matriz Jacobiana de (1.37) avaliada no ponto $(-1, 0)$ são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 0$.

Aplicando o Teorema das singularidades semi-hiperbólicas de modo análogo ao caso feito anteriormente, chegamos que $(-1,0)$ é uma sela-nó para (1.37) constituída por dois setores hiperbólicos no semiplano $v > 0$ e dois setores parabólicos no semiplano $v < 0$.

Aplicando o *blow-down*, que nada mais é do que uma "eclosão" do círculo ao ponto, obtemos o retrato de fase em torno de $(0,0)$ para (1.34), como mostra a figura 1.15.

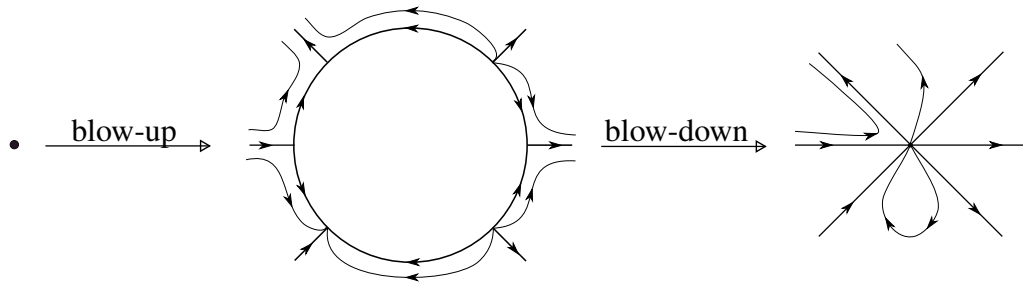


Figura 1.15: Retrato de fase em torno de $(0,0)$ para (1.34).

Observação 1.41. Para desenhar o retrato de fase local em torno de uma singularidade degenerada, basta aplicar o blow-up na direção de x^+ e y^+ uma vez que $\phi^{-x}(x,y) = -\phi^x(x,y)$, o que implica que os retratos de fase obtidos para o blow-up na direção de x^- e y^- serão os mesmos, exceto pelas setas que indicam a direção das trajetórias, que serão invertidas, e que o plano de interesse passa de $x > 0$ para $x < 0$, e de $y > 0$ para $y < 0$, respectivamente.

Capítulo 2

Modelo de Higgins-Selkov

Neste capítulo, será feita a análise qualitativa do oscilador de Higgins-Selkov, associado ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = k_0 - k_1xy^2 \\ \dot{y} = -k_2y + k_1xy^2 \end{cases}, \quad (2.1)$$

em que as incógnitas x e y são concentrações não-negativas e os k_i , com $i = 0, 1, 2$, são reações constantes positivas.

Este modelo sugere que as reações ocorridas durante o processo da glicólise em levedura é um fenômeno puramente químico que é independente de estruturas complicadas na célula. Para analisá-lo, serão estabelecidas algumas propriedades da dinâmica das soluções do sistema de EDOs por ele descrito. Também será apresentada a classificação do retrato de fase a ele associado no disco de Poincaré.

2.1 Pontos singulares finitos

Considere o sistema de EDOs (2.1). Note que, (2.1) possui três parâmetros, o que pode tornar a análise muito complexa. Com a finalidade de simplificar a estrutura deste sistema e reduzir a quantidade de parâmetros, aplicamos uma mudança de coordenadas e reescalonamento do tempo, definidas no teorema a seguir.

Teorema 2.1. *O sistema Higgins-Selkov (2.1), após um reescalonamento de variáveis, pode ser*

escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^2 \\ \dot{y} = ay(xy - 1) \end{cases} \quad (2.2)$$

com $a > 0$.

Prova. Considere a aplicação

$$(x, y, t) \rightarrow (X, Y, \tau) \quad (2.3)$$

onde $X = \alpha x$, $Y = \beta y$, $\tau = ct$, com $\alpha = \frac{k_0 k_1}{k_2^2}$, $\beta = \frac{k_2}{k_0}$ e $c = \frac{k_0^2 k_1}{k_2^2}$, em que α , β e c são constantes não nulas.

Aplicando (2.3), obtemos que o sistema (2.1) vai ser equivalente ao sistema (2.2), onde $a = k_2^3 / (k_0^2 k_1) > 0$. Por abuso de notação, usaremos x e y ao invés de X e Y . ■

Agora, vamos identificar a dinâmica das soluções deste novo sistema (2.2) em torno de pontos singulares finitos.

Inicialmente, vamos supor $a \neq 0$. Sob esta hipótese, temos que o sistema (2.2) possui um único ponto singular finito em $p = (1, 1)$.

O campo vetorial associado ao sistema (2.2) é dado por

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - xy^2 \\ ay(xy - 1) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

e assim temos que

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2 & -2xy \\ ay^2 & 2axy - a \end{pmatrix}.$$

Em particular, se $a \neq 0$ os autovalores de $DX(p)$ são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{(a-1) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{(a-1) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

com

$$\Delta = a^2 - 6a + 1.$$

Assim, o comportamento das órbitas próximo ao ponto singular p dependerá do valor atribuído ao parâmetro a . Com o objetivo de determinar esta dinâmica, aplicaremos o Teorema de Hartman-Grobman sob a condição de que os autovalores mencionados anteriormente são da forma $\lambda = c + di$ com $c \neq 0$, i.e., para os casos em que p trata-se de uma singularidade hiperbólica.

Temos os seguintes casos:

- (i) Se $a < 0$, os autovalores λ_1 e λ_2 são reais distintos, com $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Logo, p é do tipo *sela hiperbólica*.
- (ii) Se $a \in (0, 3 - 2\sqrt{2}]$, os autovalores são reais distintos negativos. Então, p é do tipo *nó atrator hiperbólico*.
- (iii) Se $a \in (3 - 2\sqrt{2}, 1)$, os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa. Assim, p é do tipo *foco atrator hiperbólico*.
- (iv) Se $a \in (1, 3 + 2\sqrt{2})$, os autovalores são complexos conjugados com parte real positiva, o que implica que p é do tipo *foco repulsor hiperbólico*.
- (v) Se $a \in [3 + 2\sqrt{2}, \infty)$, então os autovalores são reais distintos positivos. Daí segue que p é do tipo *nó repulsor hiperbólico*.

Agora, se $a = 1$, os autovalores são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Então, temos que p é um *foco fraco* cuja constante de Lyapunov é dada por $-15\pi/4$, o que indica estabilidade. Note que há uma bifurcação de Hopf em $a = 1$, ou seja, a partir deste momento há uma mudança de estabilidade do foco p .

Por outro lado, se $a = 0$, o campo X pode ser reescrito como

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - xy^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

O campo (2.5) possui infinitos pontos singulares finitos distribuídos ao longo do hiperbóloide

$$1 - xy^2 = 0.$$

O retrato de fase local para (2.5) é dado pela figura 2.1.

2.2 Sobre singularidades degeneradas

Antes de iniciarmos o estudo das singularidades infinitas, precisaremos da seguinte proposição:

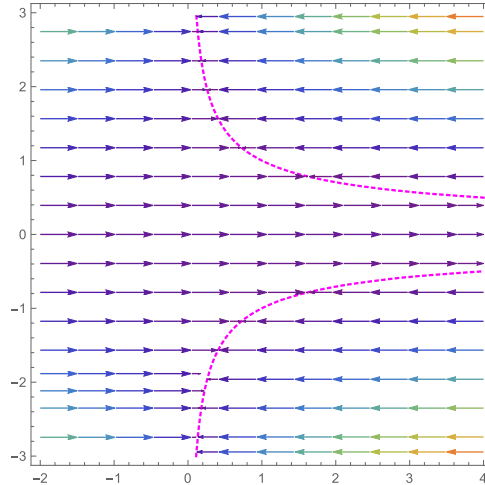


Figura 2.1: Retrato de fase local associado ao campo (2.5).

Proposição 2.2. *Considere o sistema de EDO's*

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au^2 + u^3 - auv^2 - uv^3 \\ vu^2 - v^4 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

com $a \neq 0$ e seja $H(u, v)$ o campo vetorial associado a (2.6). Temos que $(0, 0)$ é uma singularidade degenerada de (2.6), formada por dois setores parabólicos e dois hiperbólicos.

Prova. Note que, $(0, 0)$ é de fato uma singularidade degenerada para (2.6), pois

$$DH(u, v) = \begin{pmatrix} 2au + 3u^2 - av^2 - v^3 & -2auv - 3uv^2 \\ 2uv & u^2 - 4v^3 \end{pmatrix} \Rightarrow DH(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, aplicaremos o blow-up nas direções x e y para determinar a dinâmica das órbitas em torno deste ponto.

Fazendo blow-up para o campo H na direção de x^+ aplicando a mudança de coordenadas

$$(u, v, t) \rightarrow \left(u, w, \frac{1}{u}t\right) \text{ com } w = \frac{v}{u}$$

sob a hipótese de que $a \neq 0$, obtemos:

$$H_x(u, w) = \begin{pmatrix} u(-auw^2 + a - u^2w^3 + u) \\ aw(uw^2 - 1) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

O campo (2.7) possui um único ponto singular localizado em $(0, 0)$. Além disso, como os

autovalores de $DH_x(0,0)$ são a e $-a$, segue que $(0,0)$ é uma sela hiperbólica para (2.7).

Agora, aplicando o blow-up na direção de y^+ para H por meio da mudança de coordenadas e reescalonamento de tempo

$$(u, v, t) \rightarrow \left(w, v, \frac{1}{v}t \right) \text{ com } w = \frac{u}{v}$$

obtemos como campo resultante:

$$H_y(w, v) = \begin{pmatrix} aw^2 - avw \\ v^2w^2 - v^3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A origem é a única singularidade para (2.8). Mais ainda,

$$DH_y(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $(0,0)$ é uma singularidade degenerada. Por este motivo, precisaremos aplicar a técnica de blow-up novamente, para determinar o comportamento em torno deste ponto.

Fazendo o blow-up na direção de x^+ (pela segunda vez) considerando a seguinte mudança

$$(u, w, t) \rightarrow \left(u, v, \frac{1}{u}t \right) \text{ com } v = \frac{w}{u},$$

o campo H_y se torna

$$H_{yx}(u, v) = \begin{pmatrix} au - avu \\ av^2 - av - uv^3 + v^2u^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Obtemos então, duas singularidades localizadas em $(0,0)$ e $(0,1)$, sendo a primeira uma sela hiperbólica, visto que os autovalores de $DH_{yx}(0,0)$ são a e $-a$, com $a \neq 0$.

Por outro lado, como os autovalores de $DH_{yx}(0,1)$ são 0 e a , segue que $(0,1)$ é uma singularidade semi-hiperbólica. Vamos então aplicar o Teorema 1.28 para analisar a dinâmica em torno de $(0,1)$. Serão considerados dois casos: o primeiro, em que $a > 0$ e o segundo, $a < 0$. Os cálculos para o segundo caso serão omitidos, já que a análise é semelhante ao primeiro, diferindo apenas por uma mudança do tempo de t para $-t$. Tome $a > 0$. Aplicando a mudança de coordenadas dada por

$$(u, v) \rightarrow (au, u + v + 1) \quad (2.10)$$

o campo H_{yx} se torna

$$Z_x(u, v) = \begin{pmatrix} A(u, v) \\ av + B(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

com $A(u, v) = -au^2 - auv$ e $B(u, v) = a^2u^4 + 2a^2u^3v + 2a^2u^3 + a^2u^2v^2 + 2a^2u^2v + a^2u^2 - au^4 - 3au^3v - 3au^3 - 3au^2v^2 - 6au^2v - au^2 - auv^3 - 3auv^2 + av^2$. Note que, a equação $av + B(u, v) = 0$ tem solução do tipo

$$v = f(u) = \begin{cases} (1-a)u^2 + O(u^3), & \text{se } a \neq 1 \\ u^3 + O(u^4), & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

em uma vizinhança de $(0,0)$. Além do mais,

$$g(u) = A(u, f(u)) = -u^2 + O(u^3).$$

Portanto, pelo Teorema 1.28 segue que $(0,0)$ é uma sela-nó para Z_x , o que implica que $(0,1)$ também o é para H_{yx} . Além disso, o campo (2.11) admite uma única variedade central dada por

$$h(u) = (1-a)u^2 + u^3 + O(u^4)$$

cuja dinâmica fica determinada por

$$\dot{u} = -au^2 + O(u^3).$$

Portanto, considerando as informações anteriores e a mudança de coordenadas (2.10), concluímos que o ponto singular $(0,1)$ para o campo H_{yx} é constituído por dois setores hiperbólicos no semi-plano $x > 0$ e dois parabólicos contidos no semi-plano $x < 0$, para $a > 0$. Fazendo os cálculos de modo análogo para $a < 0$, obtemos que esta disposição dos setores se inverte.

Agora, aplicando blow-up para o campo H_y na direção de y^+ (pela segunda vez), obtemos:

$$H_{yy}(u, v) = \begin{pmatrix} au^2 - au - v^2u^3 + vu \\ v^3u^2 - v^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

O campo (2.12) possui dois pontos singulares localizados em $(0,0)$ e $(1,0)$, sendo que o

segundo coincide com o ponto $(0,1)$ encontrado no blow-up na direção de x^+ .

Em relação à origem, temos que os autovalores de $DH_{yy}(0,0)$ são $-a$ e 0 , o que implica que $(0,0)$ é uma singularidade semi-hiperbólica. Para levar o campo (2.12) nas condições do Teorema das singularidades semi-hiperbólicas, basta aplicar a mudança de coordenadas e reescalonamento do tempo dados por

$$(u, v, t) \rightarrow (v, u, -t) \quad (2.13)$$

se $a > 0$, e prosseguir com os cálculos de modo análogo ao que foi mostrado anteriormente no blow-up na direção de x^+ . Já para $a < 0$, aplicamos a mesma mudança, sem alterar o tempo.

Realizando os cálculos correspondentes e aplicando o Teorema 1.28 levando em conta a mudança de coordenadas dada por (2.13), concluímos que $(0,0)$ é uma singularidade do tipo sela-nó para Z_y . Portanto, $(0,0)$ é uma sela-nó para H_{yy} , cujos setores hiperbólicos estão contidos no semiplano $y > 0$, e o setor parabólico, no semiplano $y < 0$, para $a > 0$. E esta disposição se inverte caso $a < 0$.

Finalmente, aplicando blow-down, concluímos que o ponto singular $(0,0)$ de (2.6) é composto por dois setores parabólicos e dois hiperbólicos, como queríamos mostrar (veja as figuras 2.2 e 2.3). ■

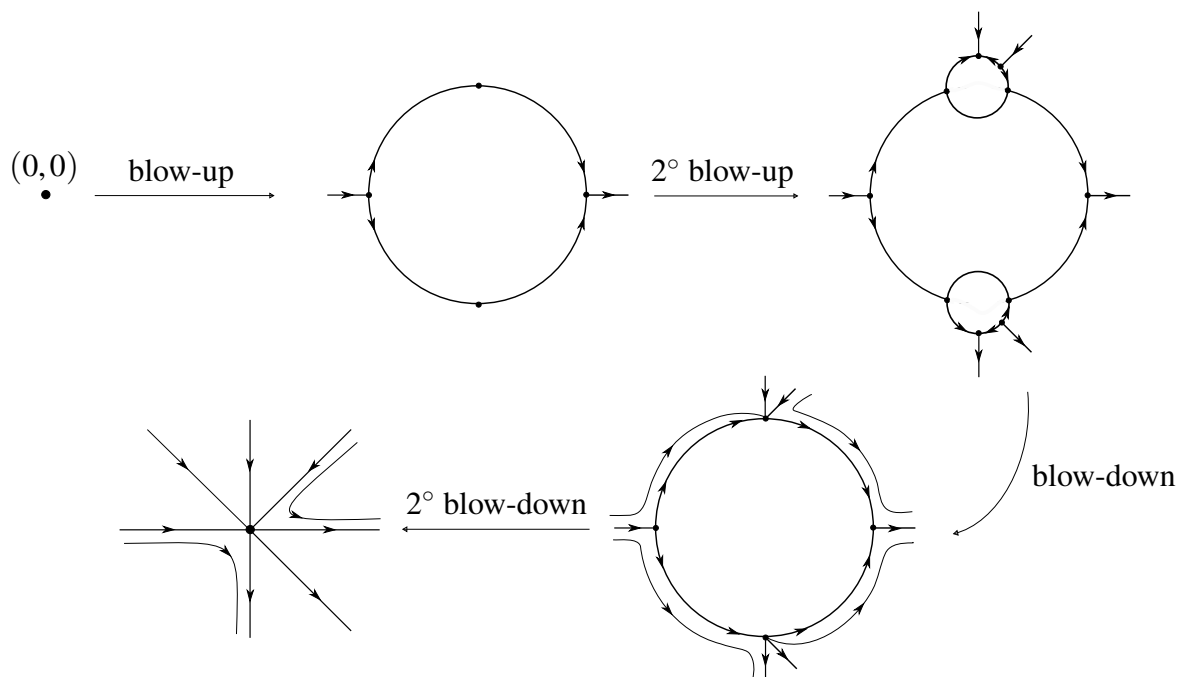


Figura 2.2: Esquemática do blow-up para a singularidade $(0,0)$ de (2.6) para $a > 0$.

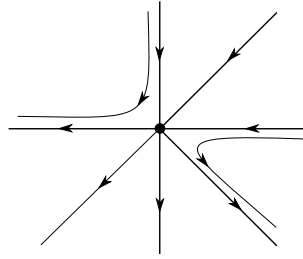


Figura 2.3: Retrato de fase em torno da singularidade $(0,0)$ de (2.6) para $a < 0$.

2.3 Pontos singulares infinitos

Com o intuito de analisar globalmente as soluções do modelo de Higgins-Selkov, precisamos estudar o que acontece quando as soluções se aproximam do infinito. Com esta finalidade, aplicaremos a Compactificação de Poincaré apresentada no Capítulo 1. Por simplicidade de notação, usaremos apenas U_k para nos referirmos às cartas locais (U_k, ϕ_k) , com $k = 1, 2$. Além disso, recorde que as singularidades infinitas são da forma $(u, 0)$.

Considere o campo X , definido na seção 2.1. Vamos dividir a análise em dois casos:

Caso 1: Assuma $a \neq 0$.

A expressão da compactificação na carta local U_1 é dada por:

$$p(X|_{U_1})(u, v) = \begin{pmatrix} au^2 + u^3 - auv^2 - uv^3 \\ vu^2 - v^4 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Então,

$$Dp(X|_{U_1})(u, v) = \begin{pmatrix} 2au + 3u^2 - av^2 - v^3 & -2auv - 3uv^2 \\ 2uv & u^2 - 4v^3 \end{pmatrix}.$$

Os pontos singulares infinitos nesta carta são

$$p_1 = (-a, 0) \quad \text{e} \quad p_2 = (0, 0).$$

Como

$$Dp(X|_{U_1})(p_1) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

possui um único autovalor $\lambda = a^2$ de multiplicidade dois cujos autovetores associados são $\vec{u} = (0, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0)$, segue que p_1 é um *nó hiperbólico instável*, uma vez que, para todo $a \in \mathbb{R}^*$ tem-se $a^2 > 0$.

Já para p_2 temos

$$Dp(X|_{U_1})(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, p_2 é uma singularidade *degenerada*. Pela proposição 2.2, segue que p_2 é formada por dois setores parabólicos e dois hiperbólicos.

Já na carta U_2 , temos

$$p(X|_{U_2})(u, v) = \begin{pmatrix} -u - au^2 + auv^2 + v^3 \\ -auv + av^3 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Assim,

$$Dp(X|_{U_2})(u, v) = \begin{pmatrix} -1 - 2au + av^2 & 2auv + 3v^2 \\ -av & -au + 3av^2 \end{pmatrix}$$

Os pontos singulares infinitos para (2.15) são

$$p_3 = \left(-\frac{1}{a}, 0\right) \quad \text{e} \quad p_4 = (0, 0).$$

A Jacobiana

$$Dp(X|_{U_2})(p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possui um único autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade dois com autovetores associados dados por $\vec{u} = (0, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0)$. Portanto, p_3 é um *nó hiperbólico instável*. Agora, os autovalores de $Dp(X|_{U_2})(p_4)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$. Logo, p_4 é uma singularidade *semi-hiperbólica*.

Na notação do Teorema 1.28, aplicando a mudança de coordenadas dada por

$$(u, v, t) \rightarrow (v, u, -t)$$

para (2.15), obtemos $g(u) = -au^3 + o(u^4)$ (aqui os cálculos serão omitidos). Portanto:

- (i) Se $a > 0$, então p_4 é uma *sela topológica*;
- (ii) Se $a < 0$, então p_4 é uma *nó topológico (atrator)*.

Recorde que as expressões nas cartas locais U_k e V_k se distinguem apenas por um fator $(-1)^{d-1}$, em que d é o grau do campo vetorial. Neste caso, como o grau de X é 3, podemos concluir que em V_1 são obtidas as seguintes singularidades:

- $p_5 = (0,0)$, do tipo *degenerada*;
- $p_6 = (a,0)$, que é um *nó hiperbólico repulsor*.

Já para V_2 , temos:

- $p_7 = (0,0)$, que é singularidade semi-hiperbólica do tipo *sela topológica* se $a > 0$, ou um *nó topológico atrator*, se $a < 0$.
- $p_8 = (\frac{1}{a}, 0)$, do tipo *nó hiperbólico repulsor*.

Os pontos singulares infinitos para o campo vetorial X para o caso 1 estão esquematizados na figura 2.4.

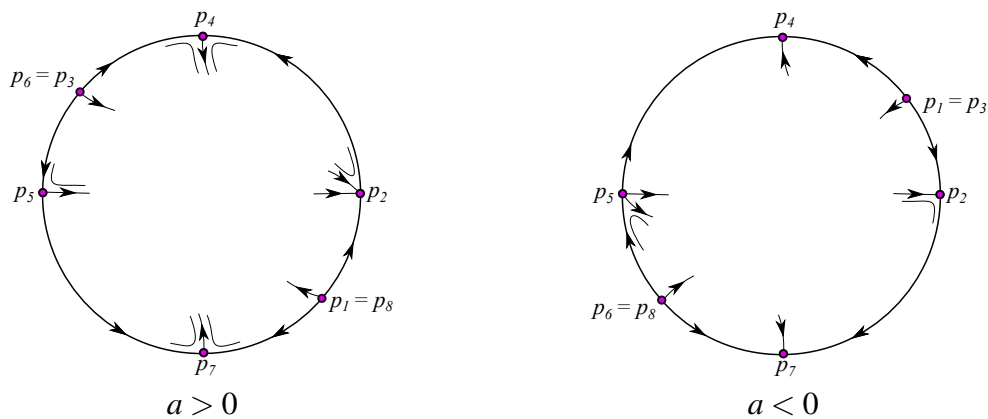


Figura 2.4: Pontos singulares infinitos para o campo vetorial X com $a \neq 0$.

Caso 2: Assuma $a = 0$.

Neste caso, a expressão da compactificação na carta U_1 é dada por:

$$p(X|_{U_1})(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 - uv^3 \\ vu^2 - v^4 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Temos que $q_1 = (0,0)$ é o único ponto singular infinito associado à (2.16). Além disso, $Dp(X|_{U_2})(q_1) = 0$, portanto, temos uma singularidade *degenerada*. Usaremos o blow-up para determinar o retrato de fase em torno de q_1 .

Aplicando blow-up para o campo $p(X|_{U_1})$ na direção de x^+ e reescalando o tempo de t para t/u^2 , obtemos

$$U_{1,x}(u, w) = \begin{pmatrix} u - u^2 w^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

O novo campo (2.17) possui uma única singularidade localizada na origem. Além disso, como os autovalores de $DU_{1x}(0,0)$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, temos uma singularidade do tipo semi-hiperbólica cuja velocidade na segunda coordenada é nula, e as órbitas que estão sobre o eixo u se afastam da origem.

Agora, aplicando o blow-up para o campo $p(X|_{U_1})$ na direção de y^+ e reescalando o tempo de t para t/v^3 , obtemos:

$$U_{1y}(w, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ w^2 - v \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

O campo (2.18) possui uma única singularidade localizada na origem. Ainda, como os autovalores de $DU_{1y}(0,0)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$, temos uma singularidade semi-hiperbólica cuja velocidade na primeira coordenada é nula, e as órbitas que estão sobre o eixo v se aproximam da origem nas direções dos vetores $\vec{v}_1 = (0, 1)$ superiormente, e $\vec{v}_2 = (0, -1)$ inferiormente.

Prosseguindo com a análise das singularidades infinitas, temos que a expressão da compactificação de Poincaré na carta U_2 é dada por:

$$p(X|_{U_2})(u, v) = \begin{pmatrix} -u + v^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

O campo (2.19) possui um único ponto singular, a saber, $q_2 = (0, 0)$. Além do mais, a Jacobiana $Dp(X|_{U_2})(q_2)$ tem como autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$. Logo, q_2 é uma singularidade *semi-hiperbólica*. Temos também que as órbitas dos pontos que estão sobre o eixo u se aproximam de q_2 nas direções dos vetores $\vec{v}_1 = (-1, 0)$ pela esquerda, e $\vec{v}_2 = (1, 0)$ pela direita.

Pelo mesmo argumento utilizado no Caso 1, concluímos que para V_1 existe uma única singularidade $q_3 = (0, 0)$, do tipo *degenerada*. Já para V_2 , temos o ponto singular $q_4 = (0, 0)$, que é *semi-hiperbólico*.

Assim, os pontos singulares infinitos para o campo vetorial X para o caso em que $a = 0$ estão esquematizados na figura 2.5.

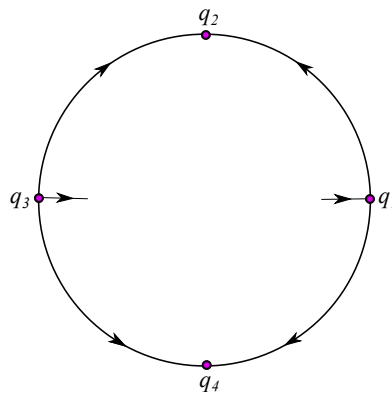


Figura 2.5: Pontos singulares infinitos para o campo vetorial X com $a = 0$.

2.4 Soluções periódicas e ciclos limites

Quando um sistema dinâmico tem uma solução periódica, significa que o fenômeno que é descrito por esta solução exibirá oscilações que são geralmente persistentes, o que justifica a importância do estudo das mesmas. Sob essa perspectiva, nesta seção serão apresentados resultados que dizem respeito a existência de soluções periódicas para o modelo de Higgins-Selkov, bem como será apresentado um teorema que determina para quais valores há a existência de ciclos limites.

O lema a seguir é uma das ferramentas utilizadas para determinar o número de raízes que um polinômio de grau 4 pode ter por meio da análise do sinal de um discriminante denotado por D_k , com $k \in \{2, 3, 4\}$, e será necessário para a demonstração do Lema posterior 2.4, que verifica a existência (ou não) de ciclos limites para o caso em que o parâmetro $a \geq 3$. Para mais detalhes, consulte [12].

Lema 2.3. *Seja $p(x)$ um polinômio geral do quarto grau dado por $p(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, com $a_0 \neq 0$. A tabela a seguir fornece o número de raízes reais e imaginárias e multiplicidades de raízes repetidas em todos os possíveis casos:*

- | | |
|---|------------------|
| (1) $D_4 > 0 \wedge D_3 > 0 \wedge D_2 > 0$ | $\{1, 1, 1, 1\}$ |
| (2) $D_4 > 0 \wedge (D_3 \leq 0 \vee D_2 \leq 0)$ | $\{ \}$ |
| (3) $D_4 < 0$ | $\{1, 1\}$ |
| (4) $D_4 = 0 \wedge D_3 > 0$ | $\{2, 1, 1\}$ |
| (5) $D_4 = 0 \wedge D_3 < 0$ | $\{2\}$ |
| (6) $D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 > 0 \wedge E = 0$ | $\{2, 2\}$ |
| (7) $D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 > 0 \wedge E \neq 0$ | $\{3, 1\}$ |
| (8) $D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 < 0$ | $\{ \}$ |
| (9) $D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 = 0$ | $\{4\}$ |

em que

$$D_2 = 3a_1^2 - 8a_2a_0,$$

$$D_3 = 16a_0^2a_4a_2 - 18a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 + 14a_0a_3a_1a_2 - 6a_0a_4a_1^2 + a_2^2a_1^2 - 3a_3a_1^3,$$

$$D_4 = 256a_0^3a_4^3 - 27a_0^2a_3^4 - 192a_0^2a_3a_4^2a_1 - 27a_1^4a_4^2 - 6a_0a_1^2a_4a_3^2 + a_2^2a_3^2a_1^2 \\ - 4a_0a_2^3a_3^2 + 18a_2a_4a_1^3a_3 + 144a_0a_2a_4^2a_1^2 - 80a_0a_2^2a_4a_1a_3 + 18a_0a_2a_3^3a_1 \\ - 4a_2^3a_4a_1^2 - 4a_1^3a_3^3 + 16a_0a_2^4a_4 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 + 144a_0^2a_2a_4a_3^2$$

$$E = 8a_0^2a_3 + a_1^3 - 4a_0a_1a_2.$$

Esses quatro polinômios formam um sistema de discriminantes que é suficiente para a classificação das raízes de um polinômio de grau quatro.

Lema 2.4. *O sistema Higgins-Selkov (2.20) não tem soluções periódicas se $a \geq 3$.*

Prova. Com efeito, seja o campo vetorial X dado por

$$X = \begin{pmatrix} 1 - xy^2 \\ ay(xy - 1) \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\dot{x}|_{x=0} = 1 > 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}|_{y=0} = 0$$

daí, se existe uma solução periódica, uma vez que deve circundar o ponto $(1, 1)$, obtemos que se o ciclo limite existe, deve estar contido no primeiro quadrante $\{(x, y); x > 0, y > 0\}$, pois nenhuma outra configuração é possível visto que todos os pontos pertencentes aos eixos

coordenados x e y têm por vetor velocidade $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -ay)$, respectivamente. Além disso, a função divergência do sistema (2.20) é

$$f(x, y) = -y^2 - a + 2axy$$

Na sequência, provaremos que a curva $f(x, y)$ restrita ao primeiro quadrante é transversal ao fluxo do sistema (2.20) se $a > 3$ e transversal, exceto no ponto $(2/3, 1)$. Resolvendo $f(x, y) = 0$, obtemos:

$$-y^2 + 2axy - a = 0$$

o que implica

$$x = \frac{a + y^2}{2ay}.$$

Considere a curva

$$f(x, y) = x - \frac{a + y^2}{2ay}$$

e seja a função

$$T_a(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \Big|_{x = \frac{a+y^2}{2ay}} := \frac{p_a(y)}{4ay} = \frac{4ay - a^2 - 3y^4}{4ay}.$$

Note que $p_a(y)$ é um polinômio de grau 4 que pode ser escrito da forma

$$a_4 + a_3 y + a_2 y^2 + a_1 y^3 + a_0 y^4$$

com $a_0 = -3$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 4a$ e $a_4 = -a^2$.

Calculando os *discriminantes*, obtemos:

$$\begin{aligned} D_4 &= 256a_0^3a_4^3 - 27a_0^2a_3^4 - 192a_0^2a_3a_4^2a_1 - 27a_1^4a_4^2 - 6a_0a_1^2a_4a_3^2 + a_2^2a_3^2a_1^2 \\ &\quad - 4a_0a_2^3a_3^2 + 18a_2a_4a_1^3a_3 + 144a_0a_2a_4^2a_1^2 - 80a_0a_2^2a_4a_1a_3 + 18a_0a_2a_3^3a_1 \\ &\quad - 4a_2^3a_4a_1^2 - 4a_1^3a_3^3 + 16a_0a_2^4a_4 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 + 144a_0^2a_2a_4a_3^2 \\ &= 6912(a-3)a^4(a+3), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_3 &= 16a_0^2a_4a_2 - 18a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 + 14a_0a_3a_1a_2 - 6a_0a_4a_1^2 + a_2^2a_1^2 - 3a_3a_1^3 \\ &= -2592a^2 < 0 \end{aligned}$$

obtemos que $D_4 > 0$ para $a > 3$ e $D_4 = 0$ para $a = 3$. Segue do Lema 2.3 que, neste primeiro

caso, o polinômio $p_a(y)$ tem quatro raízes complexas com parte imaginária não nula e, portanto, $T_a(x,y) > 0$ em $\{(x,y); x > 0, y > 0\}$; e, para $a = 3$, $p_a(y)$ tem duas raízes complexas com parte imaginária não nula e uma solução real de multiplicidade dois $y = 1$, então $T_a(x,y) \geq 0$, nula apenas no ponto $(2/3, 1)$ de $(x,y) \in \{x > 0, y > 0\}$. Isto prova que a curva $f(x,y)$ restrita ao primeiro quadrante é transversal ao fluxo do sistema (2.20) se $a > 3$. E esta afirmação junto ao fato de que as órbitas periódicas devem circundar o ponto singular $(1, 1)$, implicará que, se a órbita periódica existe, deve estar contida em uma região conectada simples onde o sinal da função divergência é positivo, (ou positivo, exceto no ponto $(2/3, 1)$ onde é 0). Mas, isto contraria o Teorema de Bendixson. Logo, (2.20) não tem solução periódica para $a \geq 3$, como queríamos mostrar. ■

Pode-se então enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2.5. *O sistema diferencial (2.20) não possui soluções periódicas se $a \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$.*

Prova. Este resultado segue diretamente do Lema 2.4 e do fato de que se $a < 0$, o sistema (2.20) possui uma única singularidade do tipo sela, o que não permite a existência de soluções periódicas dada a configuração das separatrizes que tem como α ou ω -limite o ponto singular $(1, 1)$. ■

Em [1], os autores conjecturaram sobre a existência de um único ciclo limite estável para o modelo de Higgins-Selkov, a partir de evidências numéricas encontradas. Esta conjectura foi provada posteriormente em [7], e é enunciada a seguir como teorema:

Teorema 2.6. *O sistema diferencial (2.20) tem uma única solução periódica quando $a \in (1, a^*)$ com $a^* \in (1.23, 1.24)$. Mais ainda, esta solução periódica é um ciclo limite estável que nasce em uma bifurcação de Hopf no ponto singular $(1, 1)$ quando $a = 1$ e termina em um gráfico com uma parte no infinito quando $a = a^*$.*

2.5 Retratos de fase no Disco de Poincaré

Os retratos de fase são recursos que nos permitem ter uma noção geométrica das trajetórias das soluções de um sistema diferencial. Para construí-los, é necessário reunir todas as informações obtidas no decorrer deste capítulo. Nesta perspectiva, abordaremos nesta seção

todos os possíveis tipos topológicos do retrato de fase do modelo de Higgins-Selkov no disco de Poincaré.

Para que seja possível representá-los, precisamos primeiro determinar qual é a evolução final das trajetórias, e como os pontos singulares se conectam. Consideremos então o caso em que $a < 0$ inicialmente, e o sistema de equações diferenciais Higgins-Selkov reescalonado dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^2 \\ \dot{y} = ay(xy - 1) \end{cases} \quad (2.20)$$

Vimos que, (2.20) possui apenas um ponto singular finito p para $a \neq 0$ e de modo particular, se $a < 0$, então p é uma sela hiperbólica.

Sabemos também que (2.20) possui seis singularidades infinitas para $a \neq 0$ distribuídas ao longo do bordo do círculo unitário, e a dinâmica local destes pontos é estudada na seção 2.3. Além do mais, temos que a reta $y = 0$ é **invariante pelo fluxo** independente do valor de a , uma vez que todos os pontos da forma $(x_0, 0)$ têm como vetor velocidade $\vec{v} = (1, 0)$. Juntando todas estas informações, obtemos a seguinte configuração para os pontos singulares do sistema diferencial (2.20) no círculo unitário, mostrados na figura 2.6.

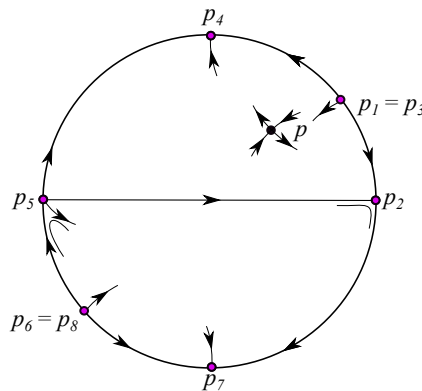


Figura 2.6: Retrato de fase do sistema (2.20) para $a < 0$.

Agora, precisamos estudar como esses pontos se conectam. Para isto, utilizamos o Teorema de Poincaré-Bendixson 1.10, enunciado no capítulo 1, que estabelece três opções para os conjuntos ω -limite de uma trajetória: ou é um ponto singular, ou é um gráfico (conjunto composto por pontos singulares e separatrizes), ou é uma órbita periódica.

Note que, as órbitas pertencentes à sub-região do plano $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y < 0\}$, devem ali permanecer, o que nos é garantido pela unicidade da solução de um sistema diferencial para uma condição inicial dada. Assim, aplicando o Teorema 1.10, obtemos que a

única possibilidade para o conjunto ω -limite de cada uma das órbitas que passa pelos pontos singulares infinitos p_5 e p_8 é o ponto singular p_7 , pois esta é a única configuração possível, visto que não há pontos singulares finitos em R .

Já para as singularidades contidas na sub-região do plano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y > 0\}$, aplicando o teorema 1.10 temos as seguintes possibilidades de conexões: como p é uma sela hiperbólica, segue que esta possui duas variedades estáveis e duas instáveis, daí há duas possibilidades para o conjunto α -limite das órbitas que passam pela variedade estável que tem como ω -limite a singularidade p , e são elas os pontos p_5 e p_1 , o que se justifica pela disposição e classificação das singularidades do sistema (2.20). Por outro lado, as variedades instáveis de p se conectam com as singularidades infinitas p_4 e p_2 .

Outras configurações para as conexões estão relacionadas a seguir: para p_5 , há três possíveis conjuntos ω -limite, sendo eles os pontos p_4 , p_2 e p ; para p_1 , além do ponto p , o conjunto ω -limite pode ser dado pelos pontos p_2 e p_4 . Além do mais, não há uma região limitada para a qual ocorre de toda singularidade ter evolução final finita, isto implica que o sistema (2.20) não tem significado biológico para $a < 0$. Considerando estas conexões, pode-se concluir que o retrato de fase no disco de Poincaré do campo associado ao sistema (2.20) para $a < 0$ é topologicamente equivalente ao da figura 2.7.

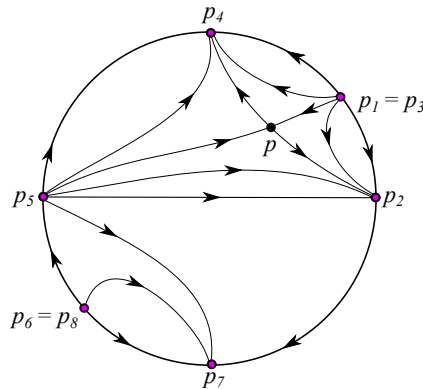


Figura 2.7: Pontos singulares do sistema (2.20) para $a < 0$.

Agora, se $a = 0$ vimos que o sistema diferencial (2.20) possui infinitos pontos singulares finitos, distribuídos ao longo da curva $1 - xy^2 = 0$, e quatro singularidades infinitas cuja dinâmica foi estudada na seção 2.3. O retrato de fase parcial para este caso é mostrado na figura 2.8.

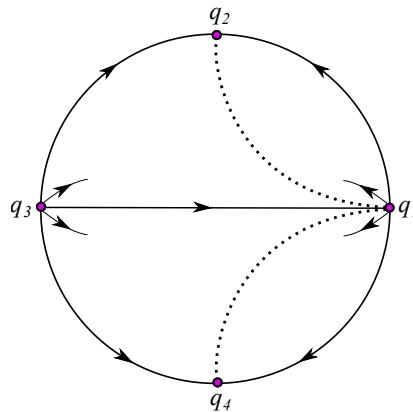


Figura 2.8: Pontos singulares do sistema (2.20) para $a = 0$.

Também foi visto que as órbitas dos pontos do campo vetorial X se aproximam dos pontos singulares finitos em ambas as direções, formando um fluxo de linhas paralelas (localmente). Conclui-se então que o retrato de fase do sistema (2.20) para o caso em que $a = 0$ é topologicamente equivalente ao dado na figura 2.9.

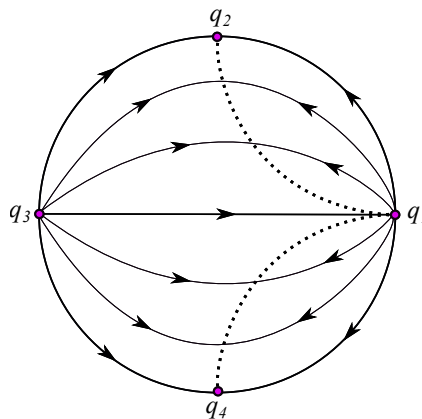


Figura 2.9: Retrato de fase do sistema (2.20) para $a = 0$.

Agora, vamos avaliar o retrato de fase para o caso em que $a > 0$. Se $a \in (0, 1]$, temos que p pode ser tanto um nó quanto um foco atrator, já que, do ponto de vista topológico, nós e focos são objetos indistintos. Assim, vamos supor que p é do tipo nó atrator.

Sabemos também que (2.20) possui seis singularidades infinitas distribuídas ao longo do bordo do círculo unitário, cuja dinâmica local é estudada na seção 2.3 e que a reta $y = 0$ é invariante pelo fluxo. Unindo todas estas informações, obtemos a seguinte configuração e disposição dos pontos singulares para o sistema diferencial (2.20), mostrados na figura 2.10.

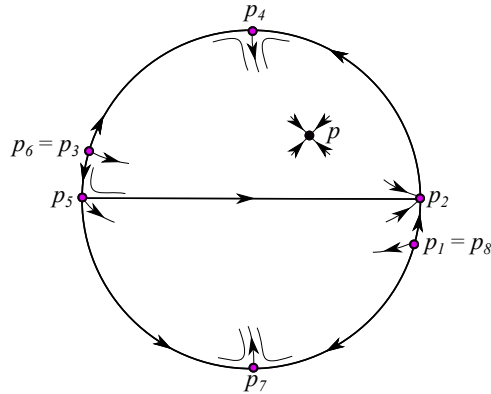


Figura 2.10: Pontos singulares do sistema (2.20) para $a \in (0, 1]$.

Observe que, novamente, as órbitas pertencentes à sub-região do plano $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y < 0\}$, não extrapolam esta região, fato fundamentado na unicidade da solução de um sistema diferencial. Assim, aplicando o Teorema 1.10, obtemos que a única possibilidade para o conjunto ω -limite de cada uma das órbitas que passa pelos pontos singulares infinitos p_5 , p_7 e p_1 é o ponto singular p_2 , isto é, em R todas as trajetórias tem evolução final infinita. Ainda, a configuração nesta sub-região é válida para todos os casos em que $a > 0$, conforme mostrado na figura 2.11, uma vez que não há pontos singulares finitos em R .

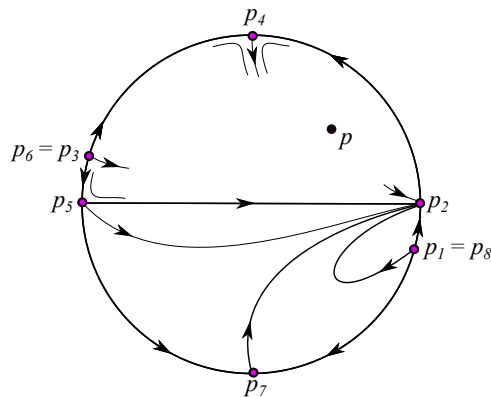


Figura 2.11: Conexões entre pontos singulares contidos na sub-região R para $a > 0$.

Vamos então analisar as possíveis conexões entre as singularidades contidas na sub-região do plano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y > 0\}$. Pelo Teorema 1.10, como p_3 é um nó repulsor, há duas possibilidades para o conjunto ω -limite de variedades cujo α -limite é o ponto p_3 , e são elas: a singularidade finita p , visto que esta é do tipo nó atrator, e o ponto singular infinito p_2 . Por outro lado, temos que p_4 é uma sela topológica, assim, a variedade instável de p_4 teria como possíveis conjuntos limite as singularidades p_2 e p . No entanto, ao considerar o fluxo contido em S e a trajetória de uma partícula cujo ω -limite se aproxima do ponto p_2 passando

próximo de p , verifica-se que, ao se aproximar de p , esta partícula é atraída para este ponto, o que impossibilita a conexão entre p_4 e p_2 . Assim, o conjunto ω -limite de p_4 é a singularidade finita p .

Conclui-se então que as órbitas contidas na sub-região do plano S limitada pela variedade que conecta os pontos singulares infinitos p_2 e p_3 , ali permanecem (região sombreada na figura 2.12), e têm como conjunto ω -limite o ponto singular finito p , isto é, evoluem para uma singularidade finita. Quando isto ocorre, dizemos que para os valores considerados para o parâmetro a , o modelo apresenta significado biológico.

Completando estas informações para o caso em que $a \in (0, 1]$, obtemos o retrato de fase global do sistema (2.20) no disco de Poincaré, conforme a figura 2.12.

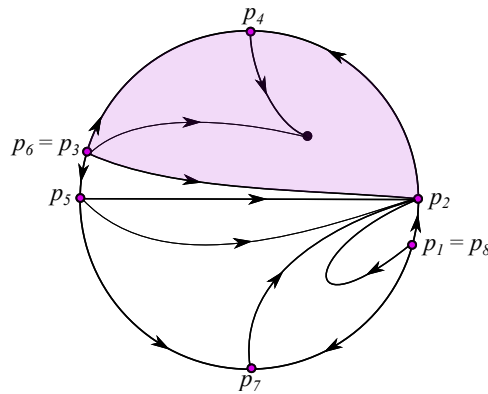


Figura 2.12: Retrato de fase do sistema (2.20) para $a \in (0, 1]$.

Ainda sob a hipótese de que $a > 0$, vamos estudar a dinâmica das órbitas do sistema (2.20) contidas na sub-região do plano S . Pelo teorema 2.6, temos que o sistema (2.20) possui uma única solução periódica para $a \in (1, a^*)$ com $a^* \in (1.23, 1.24)$, que se trata de um ciclo limite estável que nasce em $a = 1$ e termina em um gráfico (estrutura constituída por separatrizes e pontos singulares) com uma parte no infinito quanto $a = a^*$. Também vimos na seção 2.1 que se $a \in (1, a^*]$, então p é uma singularidade do tipo nó/foco repulsor. Estas relações estão esquematizadas na figura 2.13.

Como o ciclo limite contido da sub-região S é estável para $a \in (1, a^*]$, segue que as órbitas dos pontos singulares infinitos p_3 e p_4 , e da singularidade finita p convergem para este ciclo. Além disso, pode-se estabelecer uma variedade que conecta as singularidades infinitas p_3 e p_2 , uma vez que em S o ponto p_2 é composto por um setor parabólico e um hiperbólico. Já para $a \in [a^*, +\infty)$, não havendo a existência de ciclo limite e dado o fato de que a singularidade finita p é do tipo foco/nó repulsor, segue que tanto a trajetória de p_4 quanto de p_3 evoluem para o

infinito, tendendo à p_2 .

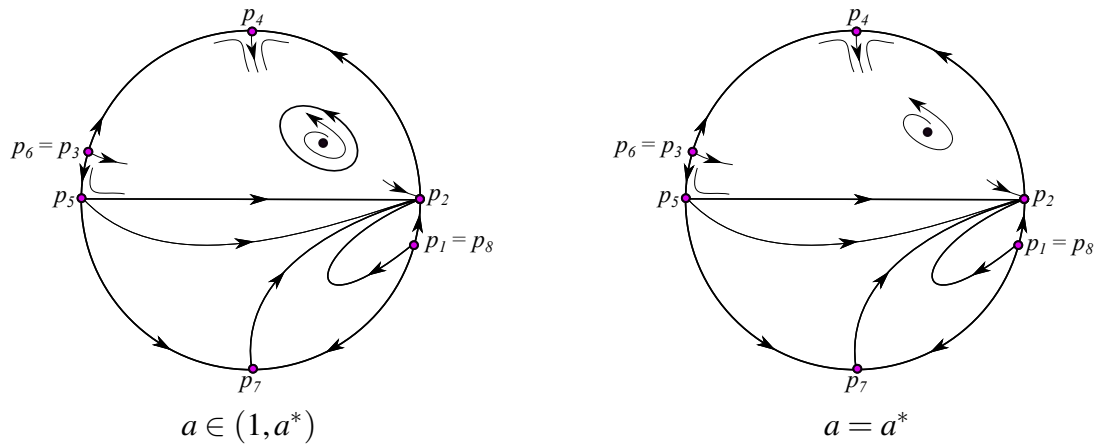


Figura 2.13: Retratos de fase parciais para $a \in (1, a^*)$, com $a^* \in (1.23, 1.24)$ e $a \in [a^*, +\infty)$, respectivamente.

Em suma, estudando a dinâmica dos pontos singulares de (2.20) em função do parâmetro a , conclui-se que o retrato de fase associado ao modelo de Higgins-Selkov vai ser equivalente a algum dos mostrados na figura 2.14, sendo:

- A, se $a < 0$, em que p é uma sela hiperbólica;
- B, se $a = 0$;
- C, se $a \in (0, 1]$, em que p é um nó/foco hiperbólico atrator;
- D, se $a \in (1, a^*)$, $a^* \in (1.23, 1.24)$, onde p é um foco repulsor;
- E, se $a = a^*$, onde p é um foco repulsor;
- F, se $a \in (a^*, \infty)$, em que p é um nó repulsor;

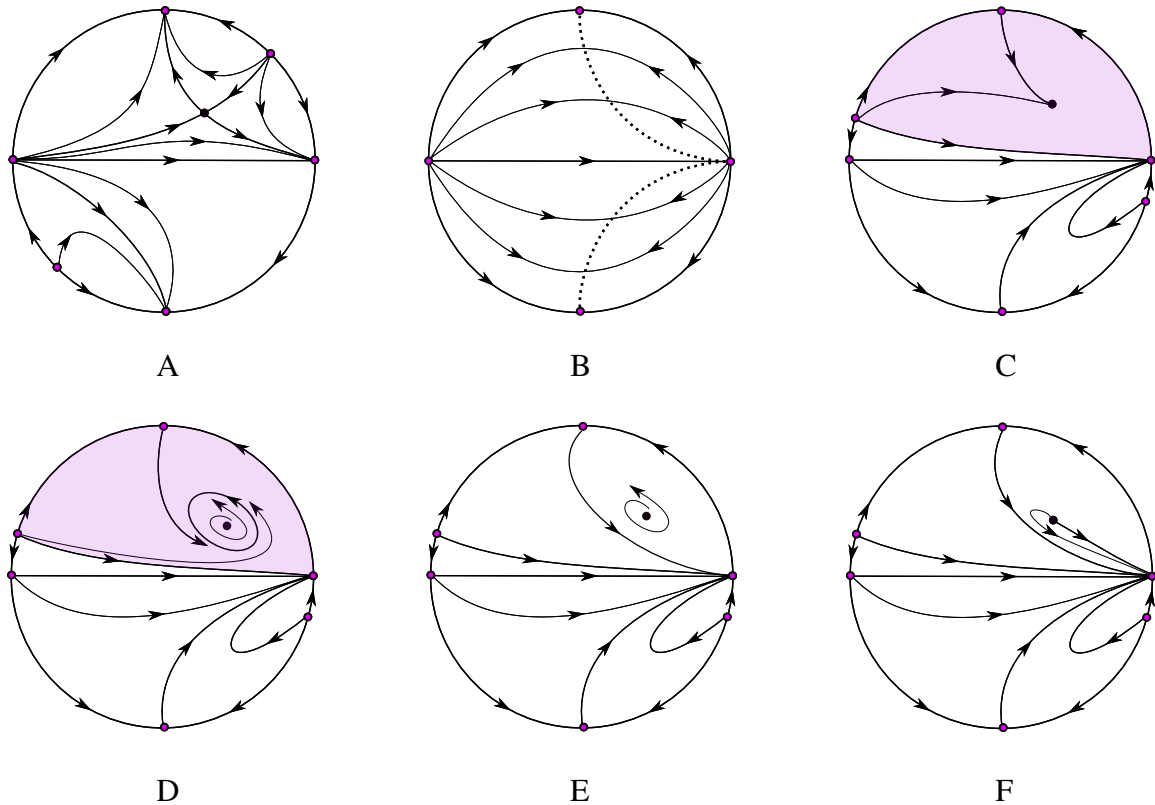


Figura 2.14: Retratos de fase do modelo de Higgins-Selkov em função do parâmetro a .

De modo geral, se $a \neq 0$, o sistema diferencial (2.20) possui seis singularidades infinitas e uma singularidade finita p , sendo a dinâmica em torno de p determinada pelo parâmetro a . Contudo, se $a = 0$, (2.20) admite infinitos pontos singulares finitos, distribuídos ao longo da curva $1 - xy^2 = 0$, e quatro singularidades infinitas conforme é possível observar na figura 2.14(B).

Para o retrato de fase D, o teorema 2.6 nos garante a existência de ciclo limite. Além do mais, temos que os valores de bifurcação para estes modelos são $a = 0$, $a = 1$ e $a = a^*$, isto é, valores para os quais a dinâmica em torno de p apresenta mudanças de estabilidade.

Finalmente, as regiões sombreadas nas figuras 2.14(C) e 2.14(D) correspondem às regiões em que o modelo apresenta significado biológico, uma vez que a evolução final das trajetórias ali contidas é finita.

Capítulo 3

Modelo de Selkov

Um outro exemplo clássico de modelo matemático para oscilações em um sistema biológico é o oscilador de Selkov, que será analisado neste Capítulo. A finalidade prática deste modelo é tentar determinar as propriedades da reação da fosfofrutoquinase que podem explicar o aparecimento de auto-oscilações durante o processo da glicólise. Para mais detalhes sobre os fatores biológicos, consulte [14].

3.1 Pontos singulares finitos

Considere o sistema de EDO's dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y \\ \dot{y} = b - ay - x^2y \end{cases}, \quad (3.1)$$

em que a e b são parâmetros positivos. Este sistema recebe o nome de oscilador de Selkov, e modela as variações ocorridas durante o processo da glicólise. Os parâmetros b e a são chamados de fosfofrutoquinase e hexoquinase, respectivamente, que são as enzimas responsáveis pela ativação de todo o ciclo glicolítico.

Seja

$$Y(x,y) = \begin{pmatrix} -x + ay + x^2y \\ b - ay - x^2y \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

o campo vetorial associado a (3.25). Na sequência, vamos determinar a dinâmica das soluções deste sistema próximo a pontos singulares.

O sistema (3.25) possui um único ponto singular finito $p = \left(b, \frac{b}{a+b^2}\right)$ quando $a + b^2 \neq 0$.

Agora, se $a = b = 0$, o sistema (3.25) se transforma em

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^2y \\ \dot{y} = -x^2y \end{cases}. \quad (3.3)$$

Note que, todo ponto da forma $(0, y_0)$ é uma singularidade de (3.3). Assim, a reta y é formada apenas por pontos singulares. Por fim, se $a = -b^2$ e $b \neq 0$, (3.25) não possui pontos singulares finitos.

A matriz Jacobiana de Y em p é dada por:

$$DY(p) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2b^2}{a+b^2} & a+b^2 \\ -\frac{2b^2}{a+b^2} & -a-b^2 \end{pmatrix}.$$

Sejam τ e δ , o traço e o determinante da matriz $DY(p)$, respectivamente, com:

$$\begin{aligned} \tau &= -a - b^2 + 1 - \frac{2a}{a+b^2}, & \delta &= a + b^2 \quad \text{e} \\ \tau^2 - 4\delta &= -4(a+b^2) + \left(-\frac{2a}{a+b^2} - a - b^2 + 1\right)^2 \end{aligned}$$

Calculando os autovalores de $DY(p)$, obtemos:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2},$$

Defina os seguintes conjuntos em \mathbb{R}^2 : $\Omega_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; \tau^2 - 4\delta < 0, \delta > 0 \text{ e } \tau \neq 0\}$, $\Omega_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; \tau^2 - 4\delta \geq 0 \text{ e } \delta > 0\}$, $\Omega_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; \delta > 0 \text{ e } \tau = 0\}$ e $\Omega_4 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; \delta < 0\}$ (veja figura 3.1).

Pelo Teorema 1.23, segue que p é:

- (i) uma sela hiperbólica se $(a, b) \in \Omega_4$ (veja figura 3.2 (a));
- (ii) um nó hiperbólico se $(a, b) \in \Omega_2$. Atrator, se $\tau < 0$ e repulsor se $\tau > 0$ (veja figura 3.2 (b) e (c));
- (iii) um foco se $(a, b) \in \Omega_1$. Atrator, se $\tau < 0$ e repulsor se $\tau > 0$ (veja figura 3.2 (d) e (e));

Agora, se $(a, b) \in \Omega_3$, os autovalores de $DY(p)$ são dados por

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8b^2}}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 8b^2}}}{2}.$$

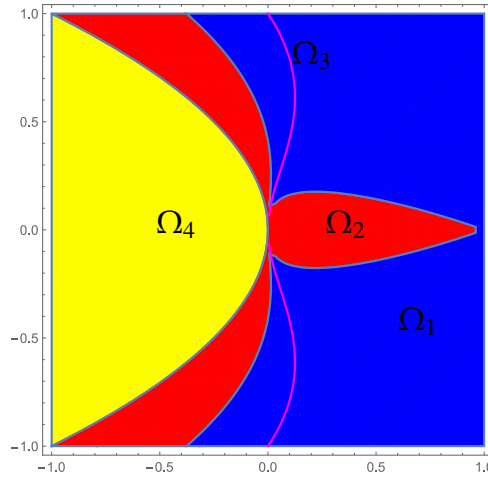


Figura 3.1: Conjuntos Ω_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Como $1 + 8b^2 > 1$, segue que λ_1 e λ_2 são puramente imaginários, daí conclui-se que p é uma singularidade do tipo foco fraco (veja figura 3.2 (f)). Ainda para este caso, temos

$$a = \frac{1}{2} \left(-1 - 2b^2 \pm \sqrt{1 + 8b^2} \right).$$

O número de Lyapunov só está definido para o caso positivo, i.e.,

$$a = \frac{1}{2} \left(-1 - 2b^2 + \sqrt{1 + 8b^2} \right),$$

e é dado por

$$L = \frac{3\pi\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 8b^2}} \left(3 + 8b^4 - 3\sqrt{1 + 8b^2} + b^2 \left(22 - 10\sqrt{1 + 8b^2} \right) \right)}{\sqrt{2} \left(-1 - 4b^2 + \sqrt{1 + 8b^2} \right)^2}.$$

Defina

$$b^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left(7 + 2\sqrt{13} \right)}.$$

Temos estabilidade se $-b^* < b < 0$ ou $0 < b < b^*$, uma vez que para estes valores de b , vale $L < 0$. Por outro lado, $L > 0$ se $b < -b^*$ ou $b > b^*$.

3.2 Pontos singulares infinitos

A proposição a seguir irá nos auxiliar na análise da dinâmica próximo ao infinito das soluções do modelo de Selkov. Vale ressaltar que, por se tratar de singularidades infinitas,

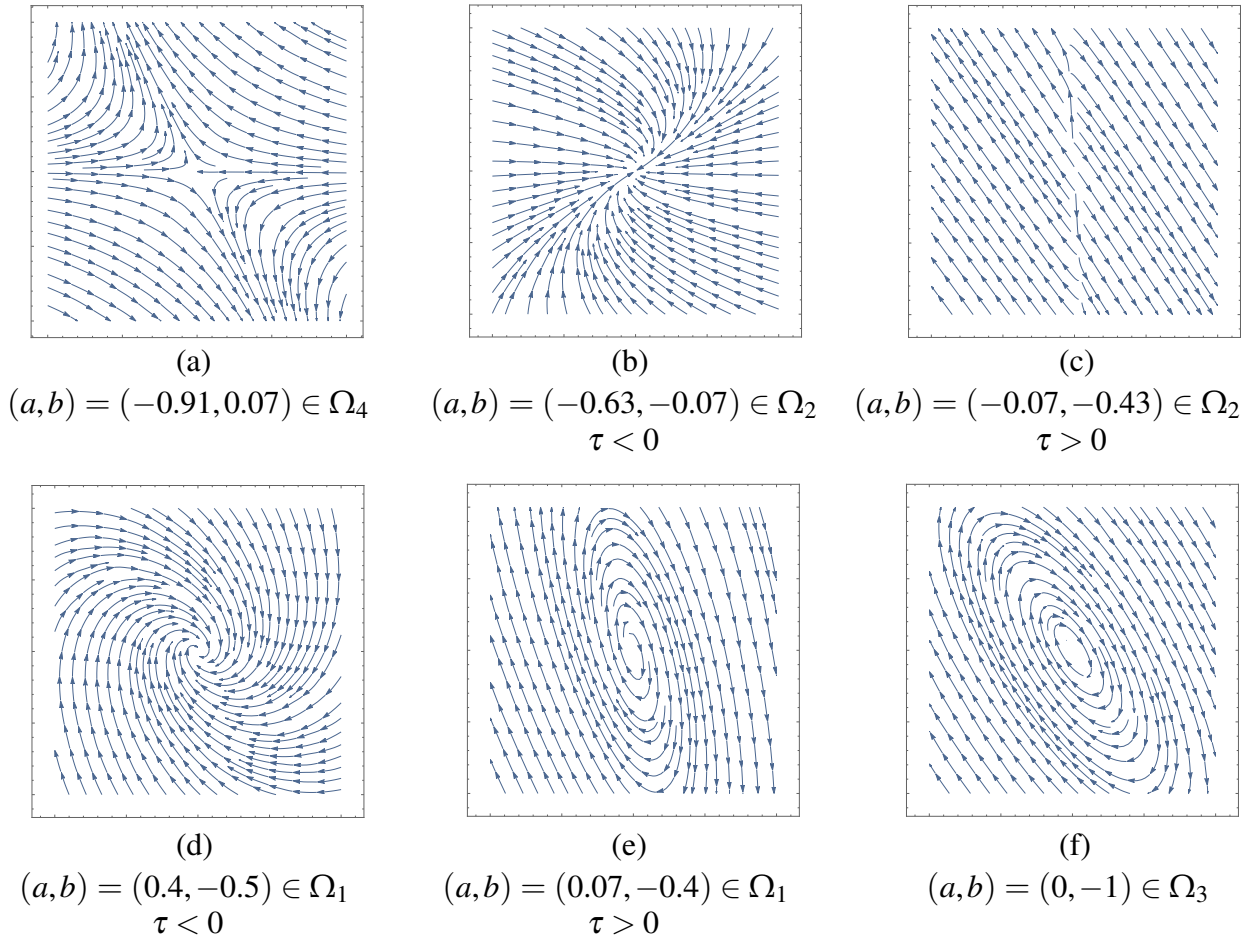


Figura 3.2: Exemplos para o retrato de fase do sistema (3.25) em torno de p para $(a, b) \in \Omega_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

nosso interesse é em pontos singulares cuja segunda coordenada é nula.

Proposição 3.1. *Considere o seguinte sistema de EDO's*

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + u(-v + u) \\ v^2(a - bv + u^2) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

e seja F o campo associado à este sistema. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Se $a > 0$, não existem singularidades;
2. Se $a < 0$, temos duas singularidade semi-hiperbólicas, a saber, $(\sqrt{-a}, 0)$ e $(-\sqrt{-a}, 0)$.

Além disso:

- (i) Se $b \in \mathbb{R}$ e $a < -b^2$, $(\sqrt{-a}, 0)$ e $(-\sqrt{-a}, 0)$ são do tipo nó hiperbólico instável;
- (ii) Se $b < 0$ e $a > -b^2$, $(\sqrt{-a}, 0)$ é um nó instável hiperbólico e $(-\sqrt{-a}, 0)$ é uma sela topológica;

(iii) Se $b > 0$ e $a > -b^2$, $(\sqrt{-a}, 0)$ é uma sela topológica e $(-\sqrt{-a}, 0)$ é nó hiperbólico estável;

(iv) Se $a = -b^2$ e $b > 0$, $(\sqrt{-a}, 0)$ é uma sela nó e $(-\sqrt{-a}, 0)$ é nó hiperbólico estável;

(v) Se $a = -b^2$ e $b < 0$, $(\sqrt{-a}, 0)$ é um nó hiperbólico estável e $(-\sqrt{-a}, 0)$ é uma sela nó.

3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos uma única singularidade degenerada localizada em $(0, 0)$, formada por dois setores parabólicos e dois hiperbólicos.

Prova. De fato:

1. Recorde que, as singularidades infinitas são da forma $(u_0, 0)$. Então, se $v = 0$

$$\dot{u} = 0 \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{-a} \text{ e } \dot{v} = 0$$

Assim, se $a > 0$, (3.4) não possui singularidades.

2. Suponha $a < 0$. Pelo item 1, temos que as singularidades de (3.4) para $v = 0$ serão $(\sqrt{-a}, 0)$ e $(-\sqrt{-a}, 0)$. Apresentaremos aqui os cálculos para $(-\sqrt{-a}, 0)$. O outro caso segue de modo análogo.

A parte linear do campo associado ao sistema (3.4) é dada por

$$DF(u, v) = \begin{pmatrix} 2u - v & -u \\ 2uv^2 & 2v(a - bv + u^2) - bu^2 \end{pmatrix}$$

Particularmente, $DF(-\sqrt{-a}, 0)$ possui como autovalores $-2\sqrt{-a}$ e 0. Portanto, temos uma singularidade semi-hiperbólica. Com a finalidade de levar o campo (3.4) nas condições do Teorema da singularidades semi-hiperbólicas, considere a seguinte mudança de coordenadas

$$(u, v, t) \rightarrow (-\sqrt{-a} + u + v, 2u, -t). \quad (3.5)$$

Aplicando (3.5), o campo F se torna

$$\tilde{F}(u, v) = \begin{pmatrix} A(u, v) \\ v + B(u, v) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

com $A(u, v) = -2u^2(-2\sqrt{-a}(u+v) - 2bu + (u+v)^2)$ e $B(u, v) = -2u\sqrt{-a} - 2uv$

$-u^2 - v^2 + 2(\sqrt{-a} + u)(u + v) + 2u^2(-2\sqrt{-a}(u + v) - 2bu + (u + v)^2)$. Note que, em torno da origem, a equação $v + B(u, v) = 0$ tem solução do tipo

$$v = f(u) = \frac{\sqrt{(2u^2 - 1)(-2au^2 + a + 4bu^3) + u^2} + 2u^2(\sqrt{-a} - u) - \sqrt{-a}}{2u^2 - 1}$$

Além disso,

$$g(u) = A(u, f(u)) = 4(\sqrt{-a} + b)u^3 - 4u^4 + O(u^5).$$

Analisando o sinal do termo cúbico da expansão acima, e aplicando o Teorema 1.28 obtemos que $(-\sqrt{-a}, 0)$ será:

- i) um nó estável se $b > 0$ e $(a \geq -b^2)$, ou $b \in \mathbb{R}$ e $a \in (0, -b^2)$.
- ii) uma sela topológica se $b < 0$ e $a > -b^2$, pois $4(\sqrt{-a} + b) < 0$;
- iii) uma sela-nó se $b > 0$ e $a > -b^2$, cuja variedade central é dada por

$$h(u) = -\frac{1}{2\sqrt{-a}}u^2 + O(u^3)$$

e a dinâmica sobre essa variedade fica determinada por

$$\dot{u} = -4u^4 + O(u^5).$$

Fazendo os cálculos de modo análogo para $(\sqrt{-a}, 0)$, obtemos:

$$g(u) = 4(\sqrt{-a} - b)u^3 + 4u^4 + O(u^5)$$

cuja análise nos permite concluir a partir do Teorema 1.28 que $(\sqrt{-a}, 0)$ será:

- i) Um nó instável se $b < 0$ e $a \geq -b^2$, ou $b \in \mathbb{R}$ e $a \in (0, -b^2)$, i.e., $4(\sqrt{-a} - b) > 0$;
- ii) Uma sela topológica se $b > 0$ e $a > -b^2$, pois $4(\sqrt{-a} - b) < 0$;
- iii) Uma sela-nó se $b > 0$ e $a = -b^2$, cuja variedade central é da forma

$$h(u) = \frac{1}{2\sqrt{-a}}u^2 + O(u^3)$$

e tem a dinâmica determinada por

$$\dot{u} = 4u^4 + O(x^5).$$

Com isto, concluímos a prova do item 2.

3. Assuma $a = 0$. Então, (3.4) possui uma única singularidade situada na origem. Além disso, o campo F pode ser reescrito como

$$F_0(u, v) = \begin{pmatrix} u(u-v) \\ v^2(u^2 - bv) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Calculando a parte linear do campo (3.7) considerando $b \neq 0$, obtemos:

$$DF_0(u, v) = \begin{pmatrix} 2u - v & -u \\ 2uv^2 & 2v(u^2 - bv) - bv^2 \end{pmatrix} \Rightarrow DF_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Portanto, a origem é uma singularidade degenerada. Assim, será necessário utilizar a técnica de blow-up para determinar seu retrato de fase local.

Aplicando blow-up para o campo (3.7) na direção de x^+ , e considerando a mudança de coordenadas

$$(u, v, t) \rightarrow (u, w, \frac{1}{u}t) \text{ com } w = \frac{v}{u}$$

obtemos:

$$F_{0x}(u, w) = \begin{pmatrix} u - uw \\ w^2(-buw + u^2 + 1) - w \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

O campo (3.9) possui duas singularidades para $u = 0$, localizadas em $(0, 0)$ e $(0, 1)$. De modo particular, $DF_{0x}(0, 0)$ tem como autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, portanto, $(0, 0)$ é uma *sela hiperbólica*.

Por outro lado, os autovalores de $DF_{0x}(0, 1)$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Logo, $(0, 1)$ é uma singularidade semi-hiperbólica. Vamos agora estudar qual a dinâmica das órbitas de (3.9) em torno de $(0, 1)$. Para isso, considere a seguinte mudança de coordenadas

$$(u, v) \rightarrow \left(\frac{u}{b}, 1 + u + v\right). \quad (3.10)$$

Aplicando (3.10), o campo F_{0x} se torna

$$\tilde{F}_0(u, v) = \begin{pmatrix} A(u, v) \\ v + B(u, v) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

com $B(u, v) = (u + v + 1) \left((u + v + 1) \left(\frac{u^2}{b^2} - u(u + v + 1) + 1 \right) - 1 \right) + u(u + v) - v$ e $A(u, v) = -u(u + v)$. Assuma que $v = f(u)$ seja a solução da equação $v + B(u, v) = 0$, numa vizinhança da origem, com

$$v = f(u) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)u^2 + O(u^3), & \text{se } b \neq \pm 1 \\ u^3 + O(u^4), & \text{se } b = \pm 1 \end{cases}.$$

Também temos:

$$g(u) = A(u, f(u)) = \begin{cases} -u^2 + \left(\frac{1}{b^2} - 1\right)u^3 + O(u^4), & \text{se } b \neq \pm 1 \\ -u^2 - u^4 + O(u^5), & \text{se } b = \pm 1 \end{cases}$$

De qualquer modo, obtemos que o grau de $g(u)$ é par. Portanto, pelo Teorema 1.23, segue que $(0, 0)$ é uma singularidade de \tilde{F}_0 do tipo sela-nó, o que implica que $(0, 1)$ também o é para o campo F_{0x} .

Além disso, pelo Teorema 1.35, o campo (3.11) admite uma única variedade central da forma

$$h(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)u^2 + u^3 + O(u^4)$$

e a dinâmica sobre essa variedade fica determinada por

$$\dot{u} = -u^2 + \left(\frac{1}{b^2} - 1\right)u^3 + O(u^4).$$

Portanto, considerando a mudança de coordenadas (3.10), concluímos que $(0, 1)$ é composta por dois setores hiperbólicos e dois parabólicos.

Por outro lado, aplicando blow-up para o campo (3.7) na direção de y^+ , e considerando o reescalonamento de variáveis

$$(u, v, t) \rightarrow \left(w, v, \frac{1}{v}t\right) \text{ com } w = \frac{u}{v} \quad (3.12)$$

obtemos

$$F_{0y}(w, v) = \begin{pmatrix} w(v(b - vw^2) + w - 1) \\ v^2(vw^2 - b) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

O campo (3.13) possui dois pontos singulares, $(0,0)$ e $(1,0)$, sendo este segundo correspondente ao ponto $(0,1)$ encontrado para o campo (3.9). Sendo assim, faremos apenas a análise das órbitas em torno da origem. Com esta finalidade, considere a seguinte mudança de coordenadas e reescalonamento de tempo

$$(w, v, t) \rightarrow (v, w, -t). \quad (3.14)$$

Aplicando a mudança de coordenadas (3.14) e prosseguindo com os cálculos de modo análogo aos casos anteriores, obtemos

$$g(u) = bu^2 + O(u^6).$$

Como estamos supondo para este caso que $b \neq 0$, segue que $(0,0)$ é uma sela-nó para (3.13), cuja variedade central é dada por

$$h(u) = 0$$

isto é, coincide com o eixo u e a dinâmica sobre esta variedade é determinada por

$$\dot{u} = bx^2 + O(x^4).$$

Portando, $(0,0)$ também o é uma sela nó para (3.13).

Juntando as informações obtidas anteriormente e aplicando blow-down, chegamos que a singularidade $(0,0)$ de (3.4) é formada dois setores hiperbólicos e um setor parabólico, conforme Figura 3.3.

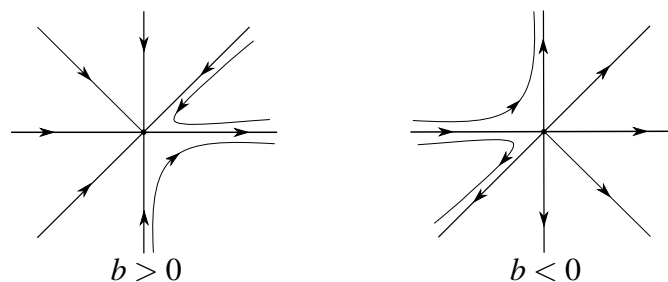


Figura 3.3: Retrato de fase (local) de (3.4) em torno de $(0,0)$.

Isto conclui a prova da proposição. ■

Agora, pretendemos analisar o comportamento qualitativo das órbitas no infinito, e para isso, aplicaremos a Compactificação de Poincaré.

A expressão da compactificação na carta local U_1 é dada por:

$$p(Y|_{U_1})(u, v) = \begin{pmatrix} -uv^2(au + a - 1) + bv^3 - u(u + 1) \\ v^3 - u(av^3 + v) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

O campo (3.15) admite duas singularidades infinitas, $p_1 = (-1, 0)$ e $p_2 = (0, 0)$. Além do mais, a matriz Jacobiana de (3.15) é dada por:

$$Dp(Y|_{U_1})(u, v) = \begin{pmatrix} -auv^2 - v^2(au + a - 1) - 2u - 1 & 3bv^2 - 2uv(au + a - 1) \\ -v - av^3 & 3v^2 - u(1 + 3av^2) \end{pmatrix}.$$

De modo particular, temos que $Dp(Y|_{U_1})(p_1)$ possui como autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade dois, e os autovetores associados são dados por $\vec{u} = (0, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0)$. Portanto, p_1 é um nó hiperbólico repulsor. Por outro lado, temos que p_2 é uma singularidade semi-hiperbólica, visto que os autovalores de $Dp(Y|_{U_1})(p_2)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$.

Para estudar o comportamento qualitativo das órbitas de (3.15) em torno de p_2 , aplicamos uma mudança de coordenadas e reescalonamento do tempo dados por

$$(u, v, t) \rightarrow (v, u, -t) \quad (3.16)$$

obtendo o seguinte campo

$$\tilde{Y}(u, v) = \begin{pmatrix} A(u, v) \\ v + B(u, v) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

com $A(u, v) = uv(au^2 + 1) - u^3$ e $B(u, v) = v(u^2(av + a - 1) + v + 1) - bu^3 - v$. A equação $v + B(u, v) = 0$ tem solução do tipo

$$v = f(u) = \frac{u^2 - 1 - au^2 + \sqrt{4bu^3(au^2 + 1) + (au^2 - u^2 + 1)^2}}{2(au^2 + 1)}$$

em uma vizinhança de $(0, 0)$. Além disso

$$g(u) = A(u, f(u)) = -u^3 + bu^4 + O(u^6).$$

Aplicando o Teorema 1.23, concluímos que $(0,0)$ é uma sela topológica para \tilde{Y} . Daí, segue que p_2 também é uma *sela topológica* para $p(Y|_{U_1})$.

Por outro lado, a expressão da compactificação na carta U_2 é dada por:

$$p(Y|_{U_2})(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + u^3 + av^2 + uv^2(-1 + a - bv) \\ v(u^2 + v^2(a - bv)) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

O campo (3.18) admite duas singularidades infinitas, sendo elas p_3 e p_4 , localizadas em $(-1, 0)$ e $(0, 0)$, respectivamente. Note que, o ponto p_3 é simétrico ao ponto p_1 analisado anteriormente na carta local U_1 . Por este motivo, só será necessário avaliar o comportamento qualitativo próximo a p_4 .

Assim, a Jacobiana do campo (3.18) é dada por:

$$Dp(Y|_{U_2})(u, v) = \begin{pmatrix} v^2(a - bv - 1) + 3u^2 + 2u & 2uv(a - bv - 1) + 2av - buv^2 \\ 2uv & v^2(a - bv) + v(2v(a - bv) - bv^2) + u^2 \end{pmatrix}$$

Em particular,

$$Dp(Y|_{U_2})(p_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, p_4 é uma singularidade degenerada. Para estudar o que acontece com as órbitas de (3.18) próximo à p_4 , vamos utilizar blow-up.

Aplicando o blow-up para o campo $p(Y|_{U_2})$ na direção de y^+ , obtemos:

$$U_{2y}(w, v) = \begin{pmatrix} a + w(-v + w) \\ v^2(a - bv + w^2) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Pela proposição 3.1, segue que o campo U_{2y} possui:

- (i) Duas singularidade semi-hiperbólicas localizadas em $(\sqrt{-a}, 0)$ e $(-\sqrt{-a}, 0)$, cuja dinâmica em função dos parâmetros a e b é determinada pela Proposição 3.1, se $a < 0$;
- (ii) Uma única singularidade degenerada localizada em $(0, 0)$, formada por dois setores parabólicos e dois hiperbólicos se $a = 0$ e $b \neq 0$;
- (iii) Nenhuma singularidade, se $a > 0$.

Agora, aplicando o blow-up para o campo $p(Y|_{U_2})$ na direção de x^+ , obtemos:

$$U_{2x}(u, w) = \begin{pmatrix} u(uw^2(a - buw - 1) + aw^2 + u + 1) \\ w^3(u - a) - w \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Para o campo (3.20), temos as seguintes possibilidades:

- (i) Se $a \geq 0$, temos um único ponto singular na origem, cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Portanto, temos uma sela hiperbólica.
- (ii) Se $a < 0$ temos, temos três pontos singulares localizados em $(0, 0)$, $(0, -1/\sqrt{-a})$ e $(0, 1/\sqrt{-a})$. A origem é uma sela hiperbólica, já que os autovalores associados à este ponto são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, e as duas últimas singularidades coincidem com as encontradas na direção de y^+ . Por este motivo, a análise será omitida aqui.

Aplicando o blow-down, obtemos que o retrato de fase em torno de p_4 é equivalente a alguma das imagens da Figura 3.4.

Observação 3.2. Os retratos de fase da figura 3.4 estão representados apenas para o caso em que $b > 0$ em algumas situações. Isso se deve à simetria existente nos retratos de fase, se comparados aos casos em que $b < 0$.

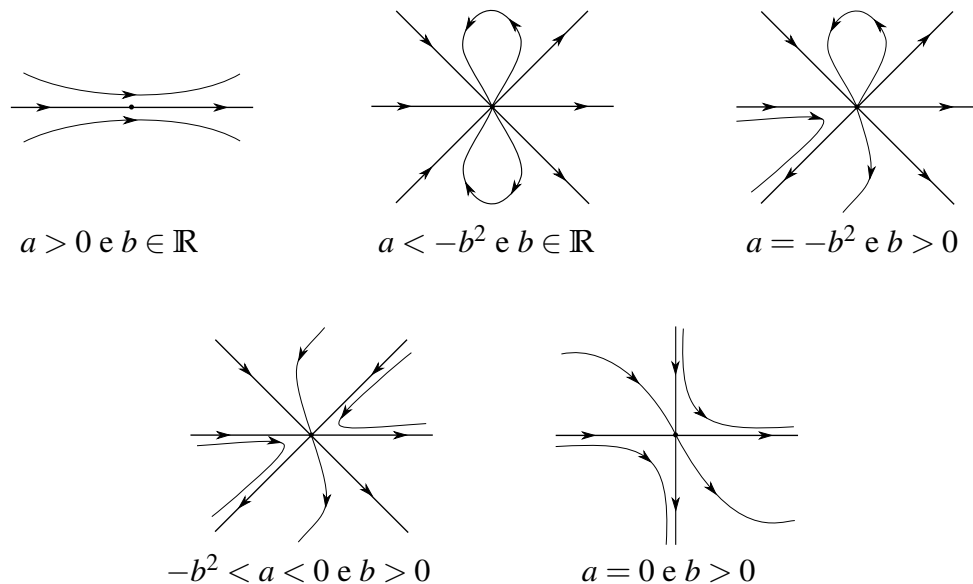


Figura 3.4: Possíveis retratos de fase em torno de p_4 .

A figura 3.5 mostra a disposição dos pontos singulares infinitos do sistema (3.25). Note que, independente do valor atribuído aos parâmetros a e b , haverá seis singularidades infinitas,

além disso, a existência das singularidades p_5 e p_6 nas cartas locais V_2 e V_1 , respectivamente, se justifica pelo fato de que singularidades infinitas aparecem aos pares, assim, p_5 é simétrica à p_4 , já p_6 é simétrica à p_2 .

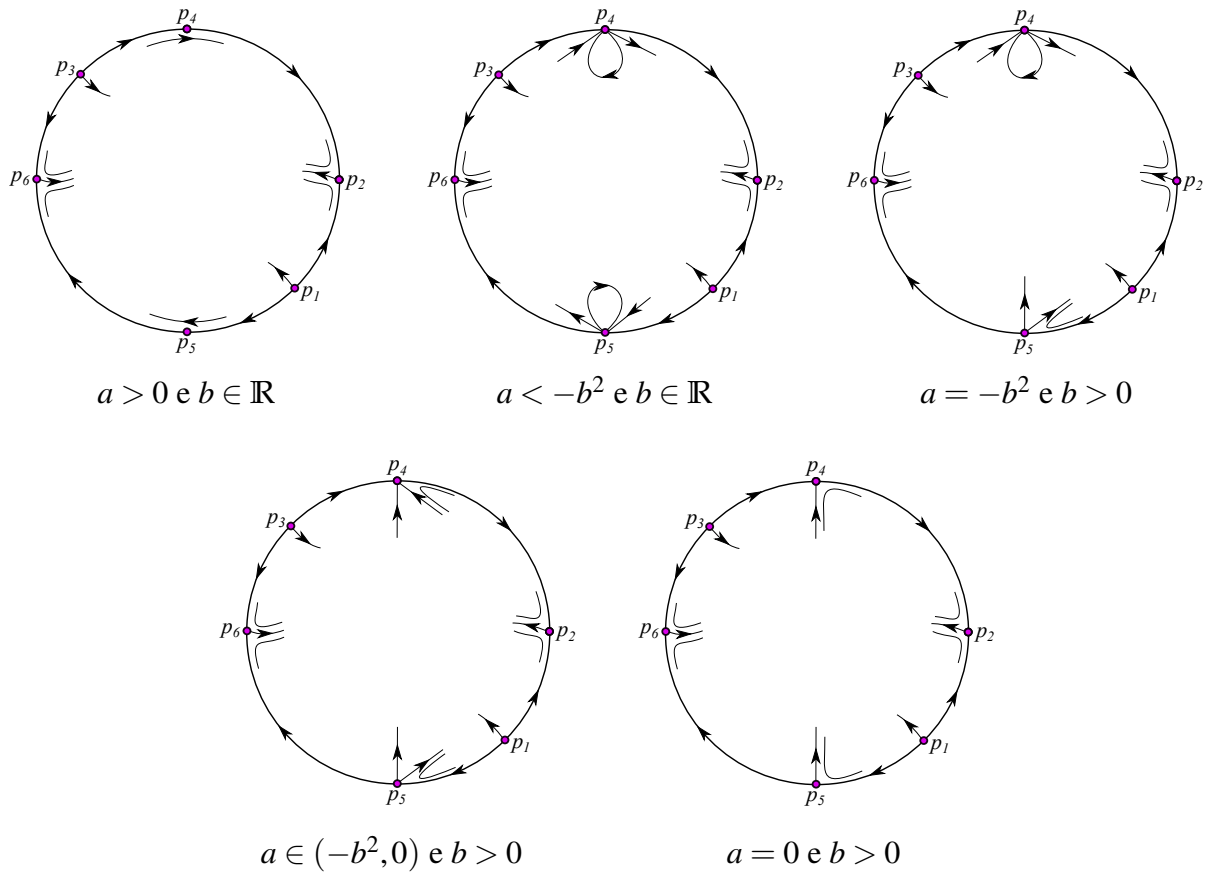


Figura 3.5: Configuração pontos singulares infinitos para o sistema (3.25).

Por outro lado, considere $a = 0$ e $b = 0$, e assuma $x \neq 0$. O sistema Selkov, após um reescalonamento de tempo de t para t/x , pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + xy \\ \dot{y} = -xy \end{cases}. \quad (3.21)$$

Claramente, o sistema (3.26) não possui pontos singulares finitos, visto que o fato de $-xy = 0$ implica automaticamente $xy - 1 \neq 0$. Além do mais, se $x < 0$, pelo reescalonamento de tempo aplicado, as trajetórias contidas neste semiplano terão o sentido das setas invertido em relação ao sistema original.

Quanto às singularidades infinitas, temos que a expressão do campo associado ao sistema

(3.26) na carta local U_1 é dado por

$$C_1(u, v) = \begin{pmatrix} -u^2 + uv^2 - u \\ v^3 - uv \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

O campo (3.22) possui dois pontos singulares finitos localizados em $q_1 = (0, 0)$ e $q_2 = (-1, 0)$. Como a Jacobiana $DC_1(q_2)$ possui um único autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade dois, cujos autovetores associados são $\vec{u}_1 = (0, 1)$ e $\vec{v}_1 = (1, 0)$, temos que q_2 é um *nó hiperbólico instável*. Por outro lado, $DC_1(q_1)$ tem como autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$. Sendo assim, temos uma singularidade semi-hiperbólica. Aplicando a mudança de coordenadas

$$(u, v, t) \rightarrow (v, u, -t)$$

o campo (3.22) se transforma em

$$\tilde{U}_1(u, v) = \begin{pmatrix} A(u, v) \\ v + B(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv - u^3 \\ v + u^2(-v) + v^2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Na notação do Teorema 1.28, temos que $v = f(u) = 0$ é solução da equação $v + B(u, v) = 0$ em uma vizinhança da origem. Além disso,

$$g(u) = A(u, f(u)) = -u^3 + O(u^5)$$

Portanto, pelo Teorema 1.28 segue que q_1 é uma sela topológica.

Em contrapartida, a expressão da compactificação do campo associado ao sistema (3.26) na carta local U_2 é dada por

$$C_2(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + u - v^2 \\ uv \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Obtemos então dois pontos singulares, sendo eles $q_3 = (-1, 0)$ e $q_4 = (0, 0)$. Como $DC_2(q_3)$ possui um único autovalor $\lambda = -1$ de multiplicidade dois, e os autovetores associados são $\vec{u}_2 = (0, 1)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0)$, segue que q_3 é um *nó hiperbólico estável*. Já q_4 é uma singularidade semi-hiperbólica, visto que $DC_2(q_4)$ tem como autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Efetuando os cálculos de modo semelhante ao que já foi mostrado, e aplicando o Teorema 1.28, concluímos que q_4 é um *nó topológico repulsor*.

Note também que, se $y = 0$, temos $(\dot{x}, \dot{y}) = (-1, 0)$, portanto, a reta x é invariante pelo fluxo para o campo (3.26). Os pontos singulares do sistema (3.26) estão esquematizados na figura 3.6.

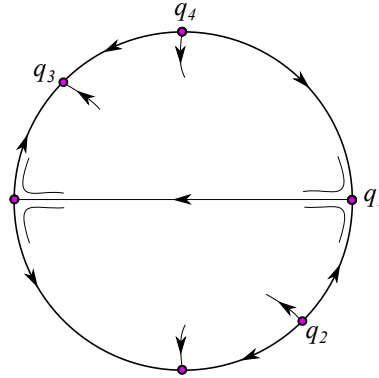


Figura 3.6: Configuração dos pontos singulares infinitos para o sistema (3.26).

3.3 Soluções periódicas e ciclos limite

Assim como foi feito no Capítulo 2, é necessário obter informações quanto a existência de ciclos limites para que possamos estudar para quais parâmetros o modelo apresenta oscilações.

Lema 3.3. *Assuma $b = 1$. O sistema diferencial (3.25) não possui soluções periódicas para $a > \bar{a}$ onde*

$$\bar{a} = \frac{1}{3} \left(-1 + \sqrt[3]{\frac{25}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} (25 + 3\sqrt{69})} \right) = 0.7548\dots$$

Prova. Observe que, se $a > 0$ temos

$$\dot{y}|_{y=\frac{1}{a}} = -\frac{x^2}{a} < 0, \dot{y}|_{y=0} = 1 > 0 \text{ e } \dot{x}|_{x=0} = ay > 0 \text{ se } y > 0$$

Portanto, uma vez que o ciclo limite deve circundar o ponto singular $(1, 1/(a+1))$, conclui-se que, se ele existe, deve estar contido no conjunto $R = \{x > 0, y \in (0, \frac{1}{a})\}$. Agora, calculando a função divergência do sistema (3.25), obtém-se que, na região R é satisfeita

$$\text{div} = -1 - a - x^2 + 2xy < -1 - a - x^2 + \frac{2x}{a} := p(x) < 0 \Leftrightarrow a > \bar{a}$$

pois, as duas raízes do polinômio $p(x)$ são $\left(1 \pm \frac{\sqrt{1-a^3-a^2}}{a}\right)$, e $1 - a^3 - a^2 < 0$ se, e somente se,

$a > \bar{a}$.

Uma vez que a função divergência do sistema (3.25) é negativa na região R para $a > \bar{a}$, e para $a = \bar{a}$ é negativa exceto no ponto $(\frac{1}{\bar{a}}, \frac{2}{\bar{a}^2})$, pelo Teorema de Bendixson, segue que não podem existir soluções periódicas em R . Isto conclui a prova do lema. ■

Note que, se $a \in (-\infty, -1]$ e $b = 1$, então $a + b^2 \leq 0$. Nestas condições, pelo que foi visto na seção 3.1 segue que o ponto singular finito do sistema associado ao modelo de Selkov é do tipo sela hiperbólica se $a \in (-\infty, -1)$ e $b = 1$, e não está definido para $a = -1$ e $b = 1$. Considerando este fato e o lema 3.3 mencionado anteriormente, prova-se, em suma, a seguinte proposição:

Proposição 3.4. *O sistema diferencial (3.25) não possui soluções periódicas se $b = 1$ e $a \in (-\infty, -1] \cup [\bar{a}, \infty)$.*

O Teorema enunciado a seguir, conjecturado em [1] e provado em [7] nos garante a existência de soluções periódicas para determinados valores de a , assumindo $b = 1$.

Teorema 3.5. *O sistema diferencial (3.25) tem uma única solução periódica quando $a \in (a_1, 0)$ onde $a_1 \in (-0.037, -0.036)$. Além disso, esta solução periódica é um ciclo limite estável que nasce em um gráfico com uma parte no infinito quando $a = a_1$ e termina em uma bifurcação de Hopf no ponto singular $(1, 1/(1+a))$.*

3.4 Retratos de fase no Disco de Poincaré

Nesta seção, serão apresentados os possíveis retratos de fase globais para o modelo de Selkov no disco de Poincaré, cuja configuração é determinada em função dos valores dos parâmetros a e b . Os argumentos utilizados aqui se assemelham aos do Capítulo 2.

Nas seções anteriores, vimos que o modelo de Selkov dado pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y \\ \dot{y} = b - ay - x^2y \end{cases}, \quad (3.25)$$

possui seis singularidades infinitas distribuídas ao longo do bordo do disco unitário dado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, independente dos valores atribuídos aos parâmetros a e b , conforme mostra figura 3.7. A existência das singularidades p_5 e p_6 , dá-se pelo fato dos pontos singulares

infinitos aparecerem aos pares na Compactificação de Poincaré, conforme mencionado no Capítulo 1. Também sabemos que: o sistema (3.25) possui um único ponto singular finito p se $a \neq -b^2$; tem infinitos pontos singulares finitos distribuídos ao longo da reta $x = 0$ se $a = b = 0$; e não possui singularidade finita se $a = -b^2$, com $b \neq 0$. Abordaremos a construção do retrato de fase global do sistema Selkov na situação em que $a < -b^2$ e $b \in \mathbb{R}$, ou seja, p é uma singularidade do tipo sela hiperbólica. Os outros casos seguem de modo análogo.

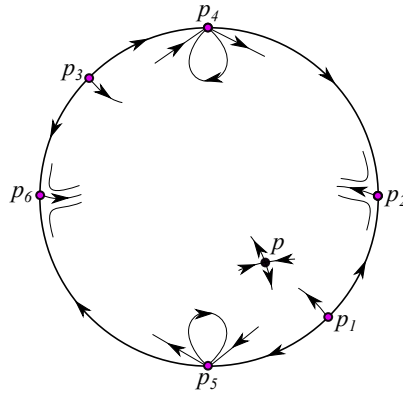


Figura 3.7: Pontos singulares do sistema (3.25) para $a < -b^2$ e $b \in \mathbb{R}$.

Queremos estudar as possíveis conexões existentes entre as singularidades de (3.25). Considere então o ponto singular finito p . Dentre as possibilidades dadas pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, temos que os conjuntos α -limite das variedades estáveis de p são singularidades infinitas. Suponhamos que sejam p_5 e p_1 . Prosseguindo de modo análogo para as variedades instáveis de p , suponhamos que o conjunto ω -limite seja formado pelas singularidades infinitas p_4 e p_5 . De modo geral, uma das situações que pode ocorrer considerando as hipóteses anteriores, é de todas as trajetórias das singularidades infinitas evoluírem para o ponto singular p_4 . Neste caso, obtemos o retrato de fase dado pela figura 3.8.

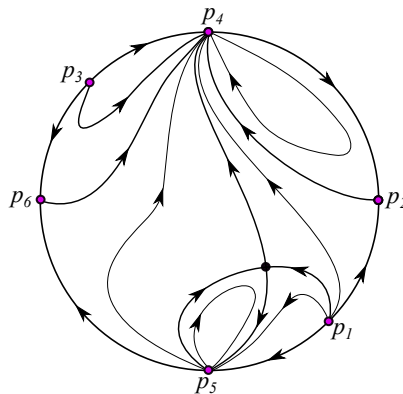


Figura 3.8: Retrato de fase global do sistema (3.25) para $a < -b^2$ e $b > 0$.

É importante ressaltar que o retrato de fase mostrado na figura 3.8 não corresponde à única configuração possível para o caso em que $a < -b^2$ e $b \in \mathbb{R}$, mas algumas características intrínsecas são mantidas para todos os tipos topológicos destes retratos de fase, por exemplo: tanto as variedades estáveis, quanto as variedades instáveis do ponto de sela p estão conectadas a pontos singulares infinitos, além disso, mesmo mudando a configuração das separatrizes, não é possível delimitar alguma sub-região no disco de Poincaré para a qual as órbitas ali contidas tenham evolução final finita.

Por outro lado, para o caso em que $a = 0 = b$, obtemos a partir da análise feita na seção 3.2 que o sistema (3.25) possui infinitos pontos singulares finitos, distribuídos ao longo da reta $x = 0$ e quatro singularidades infinitas. No entanto, para possibilitar a análise da dinâmica em torno das singularidades infinitas, foi necessário realizar um reescalonamento de tempo no sistema (3.3) transformando-o em

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + xy \\ \dot{y} = -xy \end{cases} . \quad (3.26)$$

Este reescalonamento causa uma mudança no sentido das setas das trajetórias contidas no semiplano $x < 0$. Logo, para o caso em que $a = 0 = b$, obtêm-se os seguintes retratos de fase para os sistemas (3.26) e (3.3), respectivamente (figura 3.9):

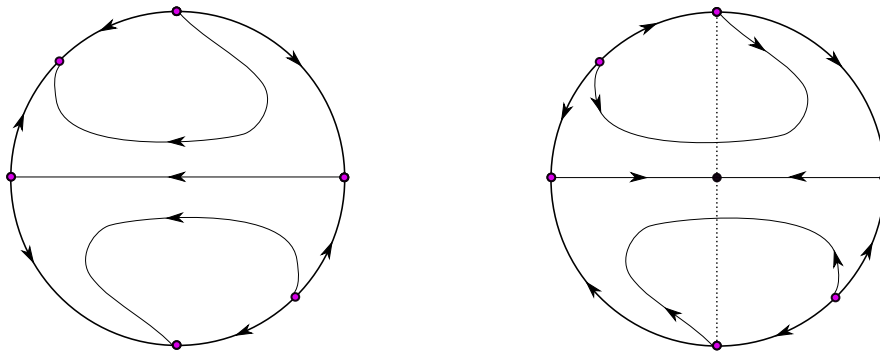


Figura 3.9: Retrato de fase global dos sistemas (3.26) e (3.3), para $a = b = 0$.

Agora, recorde dos conjuntos Ω_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definidos na seção 3.1, e do fato de que, dada a singularidade p do sistema (3.25), temos que p é do tipo:

- (i) sela hiperbólica se $(a, b) \in \Omega_4$;
- (ii) nó hiperbólico se $(a, b) \in \Omega_2$. Atrator, se $\tau < 0$ e repulsor se $\tau > 0$;

(iii) foco se $(a,b) \in \Omega_1$. Atrator, se $\tau < 0$ e repulsor se $\tau > 0$.

Considerando estas informações e argumentando de modo análogo ao que foi apresentado nos casos anteriores, de modo geral, conclui-se que os possíveis tipos topológicos para o retrato de fase do modelo de Selkov no disco de Poincaré (veja figura 3.10) são dados por:

- A, se $a < -b^2$ e $b \in \mathbb{R}$, com $(a,b) \in \Omega_4$;
- B, se $a = 0$ e $b > 0$, com $(a,b) \in \Omega_1$ (ou Ω_2) e $\tau > 0$;
- C, se $a = 0$ e $b > 0$, com $(a,b) \in \Omega_1, \Omega_2$ e $\tau < 0$;
- D, se $a \in (-b^2, 0)$ e $b > 0$, com $(a,b) \in \Omega_1$ (ou Ω_2) e $\tau > 0$;
- E, se $a \in (-b^2, 0)$ e $b > 0$, com $(a,b) \in \Omega_1$ (ou Ω_2) e $\tau < 0$;
- F, se $a = -b^2$ e $b > 0$ - note que, para este caso, não há ponto singular finito definido;
- G, se $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, com $(a,b) \in \Omega_1$ (ou Ω_2) e $\tau > 0$;
- H, se $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, com $(a,b) \in \Omega_1$ (ou Ω_2) e $\tau < 0$;
- I, se $a = 0 = b$.

Vale observar que os retratos de fase foram representados considerando em alguns casos apenas a condição $b > 0$, visto que nestas situações específicas, para $b < 0$ as representações são simétricas.

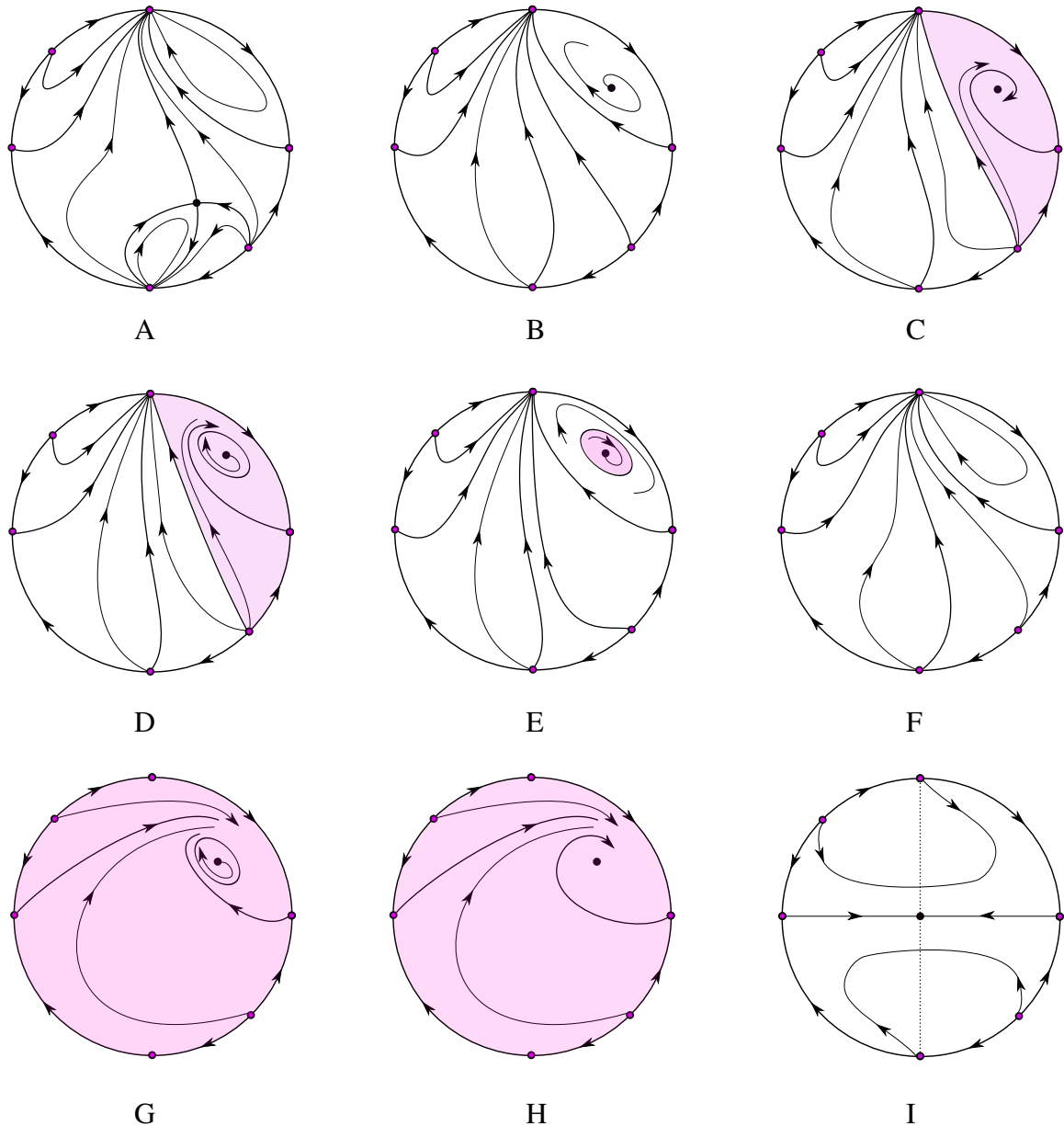


Figura 3.10: Retratos de fase do modelo de Selkov em função dos parâmetros a e b .

Note que, para os retratos de fase C, D, E, G e H, os parâmetros a e b assumem valores para os quais o modelo de Selkov apresenta significado biológico, uma vez que nas regiões sombreadas, as trajetórias apresentam evolução final finita. Além do mais, sob a hipótese de $b = 1$, o teorema 3.5 nos garante a existência de um ciclo limite estável que nasce em um gráfico com uma parte no infinito quando $a \in (a_1, 0)$ onde $a_1 \in (-0.037, -0.036)$, e termina no ponto singular $(1, 1/(1+a))$, situação esta que satisfaz a condição $-b^2 < a < 0$ e $b > 0$, representada no retrato de fase cujo tipo topológico é dado pela figura 3.10(D).

Uma observação importante é que para o retrato de fase mostrado na figura 3.10(G), por exemplo, há evidências da existência de ciclo limite já que existem valores para os parâmetros

a e b que atendem as condições $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ para os quais $(a, b) \in \Omega_1$, isto é, p pode assumir a configuração de foco repulsor. Uma vez que não há a possibilidade das órbitas terem evolução final infinita, pois a configuração das separatrizes não o permite, e aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson, segue que o conjunto ω -limite dessas trajetórias precisa estar contido no finito, e como não pode ser o próprio ponto singular finito p que é único, estima-se a existência de uma solução periódica para a qual as trajetórias evoluem. Contudo, não temos dados numéricos extatos que explicitam isto. Mais detalhes sobre a análise deste modelo, podem ser consultados em [10].

Referências Bibliográficas

- [1] ARTÉS, J.; LLIBRE, J. and VALLS, C., *Dynamics of the Higgins–Selkov and Selkov systems*. Chaos, Solitons & Fractals. 10.1016 (2018), v. 114, 145–150.
- [2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L. and WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3ª. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. *Curves and Singularities: The geometrical introduction to singularity theory*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 340 p.
- [4] D. NEUMANN, *Classification of continuous flows on 2–manifolds*. Proc. Am. Math. Soc. 48:73–81, 1975
- [5] F. DUMORTIER, J. LLIBRE and J.C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer–Verlag, New York, 2006.
- [6] GONZÁLES VELASCO, ENRIQUE A., *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*. Trans. Am. Math. Soc. 143 (1969), 201–221.
- [7] H. CHEN and Y. TANG, *Proof of Arté-Llibre-Valls’s conjectures for the Higgins–Selkov and Selkov systems*, J. Differential Equations, 266 (2019), 7638-7657.
- [8] H. POINCARÉ, *Mémoire sur les courbes définies par une equation différentielle*, J. Mathématiques (3) 7 (1881), 375-422.
- [9] INKSCAPE, *Inkscape vector graphics editor*, 2021-2022.
- [10] J. LLIBRE, A. NAVABI, *Phase portraits of the Selkov Model in the Poincaré Disc*. The 50th Annual Iranian Mathematics Conference. Shiraz University, 2019.
- [11] L. MARKUS. *Global structure of ordinary differential equations in the plane*. Trans. Am. Math. Soc. 76:127–148, 1954.

- [12] L. YANG, *Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials*, J. Symbolic Computation 28 (1999), 225–242.
- [13] PERKO, LAWRENCE, *Differential equations and dynamical systems*, 3^a edition, Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [14] S.H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison Wesley 1994, pp.205.
- [15] WOLFRAM, S. *Wolfram mathematica*, 2021–2022.
- [16] ZILL, DENNIS G., CULLEN, MICHAEL R. *Equações Diferenciais*. Tradução: Alfredo Alves de Faria. São Paulo: Makron Books, 2001.