UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

# MÉTODOS NÃO-VARIACIONAIS APLICADOS AO ESTUDO DE UMA EQUAÇÃO LOGÍSTICA COM DIFUSÃO NÃO-LOCAL

Edinaldo Júnior Teles de Oliveira
*Magister Scientiae*

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2024

**EDINALDO JÚNIOR TELES DE OLIVEIRA**

# MÉTODOS NÃO-VARIACIONAIS APLICADOS AO ESTUDO DE UMA EQUAÇÃO LOGÍSTICA COM DIFUSÃO NÃO-LOCAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Lais Moreira Dos Santos

**VIÇOSA - MINAS GERAIS**
**2024**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

O48m
2024

Oliveira, Edinaldo Júnior Teles de, 2000-

Métodos não-variacionais aplicados ao estudo de uma equação logística com difusão não-local / Edinaldo Júnior Teles de Oliveira. – Viçosa, MG, 2024.

1 dissertação eletrônica (122 f.): il.

Inclui apêndice.

Orientador: Lais Moreira dos Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, 2024.

Referências bibliográficas: f. 121-122.

DOI: https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2024.762

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Banach, Espaços de. 2. Equações diferenciais. I. Santos, Lais Moreira dos, 1989-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.732

Bibliotecário(a) responsável: Euzébio Luiz Pinto CRB-6/3317

**EDINALDO JÚNIOR TELES DE OLIVEIRA**

**MÉTODOS NÃO-VARIACIONAIS APLICADOS AO ESTUDO DE UMA EQUAÇÃO LOGÍSTICA COM DIFUSÃO NÃO-LOCAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de agosto de 2024.

Assentimento:

Edinaldo Júnior Teles de Oliveira
Autor

Lais Moreira Dos Santos
Orientadora

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela força e sabedoria que me guiaram ao longo desta jornada, e também pelo cuidado que tem comigo e com aqueles que me cercam.

Aos meus pais, Edinaldo e Neusa, pelo apoio, incentivo e por sempre acreditarem em meu potencial. Estendo meus agradecimentos também aos demais membros da minha família (irmãos, sobrinhos, primos e tios), que contribuíram grandemente em minha caminhada, estando sempre ao meu lado, compartilhando desafios e conquistas.

Aos meus colegas de mestrado, em especial à minha amiga Eduarda Almeida, por estar sempre presente nos momentos de alegria e dificuldade, por compartilhar momentos de estudo, surtos e também conquistas. Pelo incentivo em continuar e pelo auxílio. Sua presença tornou tudo mais leve e me deu forças para seguir adiante.

À minha orientadora, Lais Santos, pelo apoio, paciência, conselhos e orientação. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para a realização deste trabalho. Obrigado! Você é um exemplo a seguir.

Aos professores do Departamento de Matemática (DMA/UFV), pelos ensinamentos e contribuições. Agradeço também aos demais funcionários do departamento.

Aos membros da banca examinadora, Ricardo Alves e Anderson Araújo, pelo tempo dedicado à leitura, análise e discussão deste trabalho. Suas observações e sugestões foram extremamente valiosas para o aprimoramento deste estudo. Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e para a conclusão desta etapa importante em minha vida acadêmica.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# RESUMO

OLIVEIRA, Edinaldo Júnior Teles de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2024. **Métodos não-variacionais aplicados ao estudo de uma equação logística com difusão não-local**. Orientadora: Lais Moreira Dos Santos.

Neste trabalho, tratamos de duas importante ferramentas no estudo de zeros de aplicações entre espaços de Banach: o grau topológico e a teoria de bifurcação. Inicialmente, apresentamos a construção do grau de Brouwer e de Leray-Schauder, explorando suas principais propriedades e exibindo algumas de suas aplicações. Em seguida, como aplicação do grau de Leray-Schauder, exibimos a prova do teorema de bifurcação global de Rabinowitz. A prova do teorema de bifurcação local de Crandall-Rabinowitz também é discutida, e se trata de uma ferramenta útil no estudo do comportamento qualitativo de *continuum* de soluções de equações diferenciais. Finalmente, aplicamos os resultados de bifurcação para estudar um problema logístico com difusão não-local, que surge do estudo de dinâmica de populações.



Palavras-chave: teoria do grau; bifurcação; dinâmica populacional; equação logística.

## ABSTRACT

OLIVEIRA, Edinaldo Júnior Teles de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2024. **Non-variational methods applied to the study of a logistics equation with non-local diffusion**. Adviser: Lais Moreira Dos Santos.

In this work, we deal with two important tools in the study of zero of maps between Banach spaces: the topological degree and bifurcation theory. Initially, we present the construction of the Brouwer and Leray-Schauder degrees, exploring their main properties and showing some of their applications. Then, as an application of the Leray-Schauder degree, we prove the Rabinowitz's global bifurcation theorem. The proof of the Crandall-Rabinowitz local bifurcation theorem is also discussed and it is a useful tool in studying the qualitative behavior of *continuum* solutions of partial differential equations. Finally, we apply the bifurcation results to study a logistical problem with non-local diffusion, which arises from the study of population dynamics.

Keywords: degree theory; bifurcation; population dynamics; logistic equation.

# Notações

- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço Euclidiano de dimensão $N$.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio com fronteira suave.
- $\partial\Omega$ é a fronteira de $\Omega$, $\overline{\Omega}$ o fecho de $\Omega$, $int(\Omega)$ o interior de $\Omega$ e $\Omega^c$ o complementar de $\Omega$.
- $Z_\phi = \{x \in \Omega : J_\phi(x) = 0\}$ denota o conjunto dos pontos críticos de $\phi$.
- $A \subset\subset \Omega$ significa que $\overline{A} \subset \Omega$.
- $span\langle\Omega\rangle$ denota o subespaço gerado por $\Omega$.
- $|x|_\infty$ denota a norma do máximo, isto é, $|x|_\infty := \max\{|x_i|\,;\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$.
- $d_\infty(x, A) := \inf\limits_{y \in A} |x - y|_\infty$.
- $d(x) = dist(x, \partial\Omega) = \inf\limits_{y \in \partial\Omega} |x - y|_\infty$.
- $B(a, r)$ é a bola aberta de centro $a$ e raio $r > 0$, isto é, $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - a|_\infty < r\}$.
- $B_E(a, r)$ é a bola aberta de centro $a$ e raio $r > 0$ no espaço de Banach $E$, isto é, $B_E(a, r) = \{x \in E : |x - a|_E < r\}$.
- $\mathbb{M}_{N\times M}(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes $N$ por $M$, definidas em $\mathbb{R}$. Quando $N = M$, denotaremos por $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$.
- $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) = \{\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N :\ \phi \text{ é contínua}\}$, dotado da norma $\| \phi \|_C := \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} |\phi(x)|_\infty$.
- $C(\overline{\Omega}) = \{\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} :\ \phi \text{ é contínua}\}$, dotado da norma $\| \phi \|_C := \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} |\phi(x)|$.
- $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é o conjunto das funções $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tais que $\phi$ admite uma extensão contínua $\hat{\phi}$ em um aberto $\Omega(\phi) \supset \overline{\Omega}$ e $\nabla\phi$ é contínua em $\Omega(\phi)$.
- $C^1(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções $\phi \in C(\overline{\Omega})$ tais que $\phi$ admite uma extensão contínua $\hat{\phi}$ em um aberto $\Omega(\phi) \supset \overline{\Omega}$ e $\nabla\phi$ é contínua em $\Omega(\phi)$.
- Dada $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, definimos $\| \phi \|_{C^1} := \| \phi \|_C + \| \nabla\phi \|_C$.
- $C_0^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega})\ :\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$.
- supp $\phi = \overline{\{x \in \Omega\ :\ \phi(x) \neq 0\}}$.

- $C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega)\ :\ \text{supp}\ u \subset \Omega \text{ é compacto}\}$.

- $P = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u(x) \geq 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}\}$.

- $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x)$ denota a derivada normal exterior de $u$ em um ponto $x \in \partial\Omega$.

- $\dot{P} = \left\{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u(x) > 0 \text{ e } \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) < 0,\ \forall x \in \partial\Omega\right\}$.

- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}$ dotado da norma $\|u\|_{L^p} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$.

- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \text{esssup}_{x\in\Omega}|u(x)| < \infty\}$ dotado da norma $\|u\|_\infty = \text{esssup}_{x\in\Omega}|u(x)|$.

- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ é o espaço das funções cujas derivadas parciais até ordem $k$ são $\alpha$-Hölder contínuas em $\Omega$.

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev dotado com a norma $\|\nabla u\|_{L^p}$.

- $\lambda_1$ é o primeiro autovalor do operador laplaciano em $\Omega$ e $\varphi_1$ é a autofunção positiva associada a $\lambda_1$ com $\|\varphi_1\|_{L^2} = 1$.

- $\mathfrak{r}(L)$ é o conjunto dos valores característicos do operador linear $L : E \to E$.

- $Ker(L)$ é o núcleo do operador $L : E \to E$, isto é, $Ker(L) := \{x \in E : L(x) = 0\}$.

- $Rg(L)$ é o conjunto imagem do operador $L : E \to E$, isto é, $Rg(L) := \{y \in E : L(x) = y,\ \text{para algum } x \in E\}$.

- $\hookrightarrow$ denota uma imersão contínua.

- $\hookrightarrow\hookrightarrow$ denota uma imersão compacta.

# Sumário

# Introdução

Em Matemática, não raramente nos deparamos com o problema de encontrar zeros de aplicações e a importância desse estudo são inúmeras: problemas de otimização, resolução de equações diferenciais, criptografia, etc. Neste trabalho, focamos em duas importantes ferramentas no estudo de zeros de aplicações entre espaços de Banach: o grau topológico e a teoria de bifurcação.

O grau topológico $d(\phi, \Omega, p)$, para operadores $\phi$ definidos em espaços de dimensão finita, foi inicialmente descrito por Brouwer, em 1912, e posteriormente reformulado por Nagumo, em 1951. Nagumo forneceu uma construção do grau explorando ferramentas analíticas, como Teorema da Função Inversa e Lema de Sard, e essa é a versão que discutiremos neste trabalho. A generalização do grau para operadores definidos em espaços de Banach de dimensão infinita foi apresentada por Leray e Schauder, em 1934. Em ambos os casos, o grau se trata de uma aplicação $d : (\phi, \Omega, p) \mapsto \mathbb{Z}$ que associa para cada tripla admissível $(\phi, \Omega, p)$ um número inteiro $d(\phi, \Omega, p)$, que nos traz informações sobre existência, unicidade ou multiplicidade das soluções da equação $\phi(x) = p$.

A teoria do grau é uma poderosa ferramenta em diversas áreas da matemática. Em Topologia, por exemplo, podemos construir uma prova alternativa do aclamado teorema de Borsuk-Ulam, que assegura que toda função contínua da esfera $n$-dimensional no espaço $\mathbb{R}^n$, mapeia algum par de pontos antípodais em uma mesma imagem. O teorema de Perron-Frobenius e o lema de separação de Jordan também são resultados clássicos, cuja prova pode ser abordada via teoria do grau.

Nosso estudo sobre o grau topológico se divide em dois momentos: o grau de Brouwer e o grau de Leray-Schauder. No primeiro caso, $\Omega$ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ e $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma aplicação contínua. Nesse caso, supondo inicialmente que $\phi$ é de classe $C^1$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$ é valor regular de $\phi$, podemos apresentar uma definição inicial de $d(\phi, \Omega, p)$ por meio do Teorema da Função Inversa, que posteriormente é estendida para funções $\phi$ simplesmente contínuas, onde nesse processo fazemos fortemente o uso da compacidade de $\phi(\partial\Omega)$. Por outro lado, no grau de Leray-Schauder assumimos que $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é um operador definido em um espaço de Banach $E$ de dimensão infinita. Através do exemplo apresentado por Leray (veja [14], página 172), a continuidade de $\phi$ não é suficiente para garantir a consistência da definição de $d(\phi, \Omega, p)$, é necessário mais, $\phi$ deve ser uma perturbação compacta da identidade. Nesse caso, explorando a teoria do grau de Brouwer junto com o fato de que todo operador compacto pode ser aproximado por um operador de posto finito, podemos definir o grau de Leray-Schauder e provar que ele goza das mesmas propriedades do grau de Brouwer.

A teoria de bifurcação, por outro lado, nos permite estudar o conjunto solução de uma equação da forma

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0,$$

que admite como soluções triviais os pares $(\lambda, 0)$, isto é, $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Nessa equação, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real que detecta mudanças na estrutura das soluções e $u \in E$, onde $E$ é um espaço de Banach. Assim, a teoria da bifurcação se encarrega de buscar parâmetros $\lambda_0$ para os quais emanam de $(\lambda_0, 0)$ ramos de soluções não triviais, além de fornecer informações sobre a estrutura topológica de tais ramos. Aplicações dessa teoria estão presentes no estudo de estruturas elásticas, equações de reação-difusão, dinâmica de populações, dinâmica de fluídos, etc.

A conexão entre o grau de Leray-Schauder e teoria de bifurcação se dá através do aclamado teorema de bifurcação global de Rabinowitz, que sob circunstâncias apropriadas garante a existência de um *continuum* de soluções não triviais de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ emanando de $(\lambda_0, 0)$, que é ilimitado ou intersecta o conjunto $(\mathbb{R}\backslash\{\lambda_0\}) \times \{0\}$. Com efeito, a prova do teorema de Rabinowitz usa essencialmente a propriedade de invariância homotópica do grau e o teorema de Krasnoselski (veja Teorema 2.1).

O principal objetivo desse trabalho é apresentar uma discussão detalhada dos graus de Brouwer e Leray-Schauder, bem como das teorias local e global de bifurcação, e aplicar os resultados de bifurcação local e global para estudar a seguinte equação logística com difusão não-local:

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = \lambda u - b(x)u^2, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio regular limitado, $p > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $b \in C^1(\overline{\Omega})$ e $a \in C(\overline{\Omega})$ são funções positivas e $q$ é uma função limitada, não trivial e não negativa em $\Omega$.

A equação estacionária (1) surge no estudo de dinâmica de populações, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ representa o habitát da espécie, $u(x)$ é a densidade populacional em $x \in \Omega$, $\lambda$ denota a taxa de natalidade/mortalidade. O termo $a$ está associado à taxa de difusão da espécie e a presença do termo não-local em $a$ indica que a taxa de difusão depende da população total em $\Omega$. A existência de soluções positivas para (1) nos traz informações sobre a existência ou extinção da espécie a longo prazo.

Este trabalho está organizado em 3 capítulos e um apêndice. No Capítulo 1, embasados pelas referências [10] e [14], discutimos os graus de Brouwer e Leray-Schauder. Inicialmente, apresentamos a construção do grau de Brouwer, que se divide em três etapas: definimos o grau $d(\phi, \Omega, p)$ no caso em que $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é de classe $C^1$ e $p$ é valor regular de $\phi$. Em seguida, por meio do Lema de Sard, definimos o grau mesmo no caso em que $p$ não é valor regular de $\phi$. Finalmente, explorando a densidade de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, podemos estender a definição de grau assumindo apenas a continuidade de $\phi$. As propriedades do grau de Brouwer também são discutidas, dentre as quais se destacam normalização, existência de solução, decomposição e invariância homotópica, que são descritas a seguir:

d1) **(Normalização)** $d(I, \Omega, p) = 1$, para todo $p \in \Omega$.

d2) **(Existência)** Se $d(\phi, \Omega, p) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = p$.

d3) **(Decomposição)** $d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega_1, p) + d(\phi, \Omega_2, p)$, onde $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $p \notin \phi(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1 \cup \Omega_2)$.

d4) **(Invariância homotópica)** $d(H(t, \cdot), \Omega, p)$ independe da escolha de $t \in [0, 1]$, sempre que $H : [0, 1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função contínua com $p \notin H(t, \partial\Omega)$, para todo $t \in [0, 1]$.

A propriedade d1) é conhecida como normalização do grau. A propriedade d2) evidencia a relação entre o grau e a existência de solução para a equação $\phi(x) = p$. A propriedade d4), denominada invariância homotópica, garante que o grau é invariante por homotopia em qualquer estágio da deformação, sendo assim uma ferramenta útil que nos permite tirar conclusões sobre o grau de uma determinada função por meio do grau de funções mais simples que possam ser deformadas continuamente nesta.

Na verdade, pode-se mostrar que o grau é a única aplicação definida no conjunto das triplas

$$\{(\phi, \Omega, p) : \phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \Omega \text{ é um aberto limitado de } \mathbb{R}^N, p \notin \phi(\partial\Omega)\}$$

que goza das propriedades d1), d2), d3) e d4) (veja [10]).

Ainda no Capítulo 1, apresentamos a construção do grau de Leray-Schauder e exploramos suas principais propriedades, dentre as quais se destaca a invariância homotópica generalizada, que será fortemente utilizada na prova do Teorema de Rabinowitz. O índice de uma solução isolada também será descrito nesse capítulo, e sobre o índice provaremos um resultado importante, que nos fornece um meio para calcular o índice $i(\phi, 0, 0)$ de perturbações compactas da identidade que não tenham $\lambda = 1$ como valor característico da parte compacta de $\phi$.

No Capítulo 2, nosso principal objetivo é discutir as provas dos teoremas de bifurcação local de Crandall-Rabinowitz e de bifurcação global de Rabinowitz. Ambos os resultados nos fornecem informações sobre as soluções de uma equação da forma $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, que ramificam de um ponto de bifurcação $(\lambda_0, 0)$. Mais precisamente, por ponto de bifurcação entendemos como um par $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times E$ tal que existe uma sequência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times (E \backslash \{0\})$ satisfazendo $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$ e $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_0, 0)$.

O teorema de Rabinowitz, publicado por J. Rabinowitz no ano de 1971 [24], garante a existência de um *continuum* (isto é, um conjunto fechado, conexo e maximal em relação a inclusão) de soluções não triviais da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, emanando de um ponto de bifurcação. Além disso, o referido teorema nos fornece duas possibilidades para o comportamento do *continuum*. Veja na íntegra o que afirma o teorema de Rabinowitz:

**Teorema A** (Rabinowitz)**.** Sejam $E$ um espaço de Banach e $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ dada por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = u - T_\lambda(u), \tag{2}$$

em que $T_\lambda : E \longrightarrow E$ é da forma

$$T_\lambda(u) = \lambda L(u) + h(\lambda, u),$$

com $L$ e $h$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

$(H_1)$ $L : E \longrightarrow E$ é linear e compacto.

$(H_2)$ $h : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ é compacto e $h(\lambda, u) = o(\| u \|_E)$ em $u = 0$, uniformemente sobre intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é valor característico de $L$ de multiplicidade algébrica ímpar, então existe uma componente conexa maximal $\mathcal{C}$ do fecho de $\mathcal{S} = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (E\backslash\{0\}) : \ \mathcal{F}(\lambda, u) = 0\}$ emanando de $(\lambda_0, 0)$. Além disso, $\mathcal{C}$ cumpre uma, e somente uma, das seguintes condições:

$(i)$ $\mathcal{C}$ é ilimitada,

$(ii)$ $\mathcal{C} \cap (\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) \times \{0\} \neq \emptyset$.

Embora o resultado de Rabinowitz seja global, ele não nos permite tirar conclusões acerca do comportamento do *continuum* numa vizinhança do ponto de bifurcação $(\lambda_0, 0)$. Já o teorema de Crandall-Rabinowitz, publicado também em 1971 [9], embora seja mais restritivo, por exigir mais condiçoes do operador $\mathcal{F}$, e nos forneça um resultado apenas local, ele nos auxilia a obter informações qualitativas sobre o comportamento das soluções para pontos próximos de $(\lambda_0, 0)$. Veja o enunciado do teorema de Crandall-Rabinowitz:

**Teorema B** (Crandall-Rabinowitz)**.** Seja $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R} \times E, F)$ tal que $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e denotemos por

$$L_0 := D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0) \quad \text{e} \quad L_1 := D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0).$$

Suponhamos que $Ker(L_0) = span\langle\phi_0\rangle$, $cod(Rg(L_0)) = 1$ e $L_1\phi_0 \notin Rg(L_0)$, onde $span\langle\phi_0\rangle$ é o espaço gerado por $\phi_0$. Considere ainda $Z$ o complemento topológico de $Ker(L_0)$ em $E$, isto é, $E = Ker(L_0) \bigoplus Z$ e as projeções de $E$ sobre $Ker(L_0)$ e $Z$ são contínuas. Então,

a) (*Existência*) $\lambda_0$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ desde a solução trivial e o conjunto de soluções não triviais de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ em uma vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ é uma única curva de classe $C^1$ com representação paramétrica dada por

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(s) \\ u(s) = s(\phi_0 + \psi(s)), \end{cases}$$

em que $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow Z$ e $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ são aplicações de classe $C^1$, com $\lambda(0) = \lambda_0$ e $\psi(0) = 0$.

b) (*Unicidade*) existe $\rho > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in B((\lambda_0, 0), \rho) \subset \mathbb{R} \times E$ é solução não trivial de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, então $(\lambda, u) = (\lambda(s), u(s))$, para algum $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

No Capítulo 3, baseados no trabalho de Figueiredo-Sousa, Rodrigo-Morales e Suárez [12], fornecemos uma aplicação dos resultados de bifurcação discutidos no Capítulo 2 ao estudo da equação logística (1). Mais precisamente, graças ao teorema de Rabinowitz, o seguinte resultado de existência de soluções positivas para (1) foi estabelecido:

**Teorema C.** Existe um *continuum* ilimitado $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluções positivas de (1) emanando de $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$.

O teorema de Crandall-Rabinowitz nos permitiu tirar conclusões sobre o comportamento subcrítico e supercrítico das soluções emanando de $(a(0)\lambda_1, 0)$. Antes de apresentar tal resultado, vamos descrever o que entendemos por bifurcação subcrítica e supercrítica.

**Definição 0.1** (Direção da bifurcação)**.** Sejam $\lambda_0$ um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ desde a solução trivial e $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções não triviais da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. Dizemos que em $\lambda = \lambda_0$ a bifurcação é :

- subcrítica (ou à esquerda), se existe uma vizinhança $V$ de $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$ tal que para todo par $(\lambda, u) \in V \cap \mathcal{S}$ vale $\lambda < \lambda_0$;

- supercrítica (ou à direita), se existe uma vizinhança $V$ de $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$ tal que para todo par $(\lambda, u) \in V \cap \mathcal{S}$ vale $\lambda > \lambda_0$.

Agora, podemos enunciar o teorema que nos dá informações sobre o comportamento do *continuum* de soluções positivas de (1) em uma vizinhança de $(a(0)\lambda_1, 0)$.

**Teorema D.** Seja $\mathcal{C}$ o *continuum* de soluções de (1) emanando de $(a(0)\lambda_1, 0)$. Assuma que $a \in C^1(\mathbb{R})$ e denote por $\varphi_1$ a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor do operador laplaciano que satisfaz $\| \varphi_1 \|_{L^2} = 1$. Então,

1. para $p > 1$ a direção da bifurcação é supercrítica.

2. para $p = 1$ a direção da bifurcação é supercrítica (resp. subcrítica) se

$$a'(0) > -\frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1} \left( \text{resp. } a'(0) < -\frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1} \right).$$

3. para $p < 1$

   (3.1) a direção da bifurcação é supercrítica se $a'(0) < 0$

   (3.2) a direção da bifurcação é subcrítica se $a'(0) > 0$.

Por fim, ainda no Capítulo 3 mostramos que para cada $\lambda > a(0)\lambda_1$, o problema (1) admite solução positiva, desde que $b(x) \geq b_0 > 0$, onde $b_0$ é uma constante, além de estabelecer um resultado de unicidade no caso em que $a$ é crescente.

**Teorema E.** Se $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in \Omega$, então para cada $\lambda > a(0)\lambda_1$ o problema (1) admite solução positiva. Além disso, se $a$ é crescente e $b$ é constante, então a solução de (1) será única.

Finalmente, o Apêndice fornecido ao final da dissertação contém os resultados clássicos de Análise Funcional, Topologia e Equações Diferenciais, que foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

# 1 Grau topológico

Neste capítulo fornecemos uma discussão detalhada sobre as teorias do grau de Brouwer e Leray-Schauder e para sua elaboração utilizamos as seguintes referências: Fonseca e Gangbo [14], Deimling [10], Ambrosetti e Malchiodi [5], Lima [2].

## 1.1 Grau de Brouwer

Nesta seção, apresentaremos o grau topológico definido em espaços vetoriais de dimensão finita, o grau de Brouwer. Nosso objetivo é fornecer a construção do grau conforme a abordagem proposta por [14], estudar as propriedades da função grau $d$ e aplicar a teoria discutida para provar dois resultados clássicos: o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer, que é um importante resultado de ponto fixo, e o Teorema de Borsuk.

### 1.1.1 Grau topológico para funções de classe $C^1$

Ao longo desta seção, assumiremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$ e que $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma aplicação de classe $C^1$. Denotaremos por $J_\phi(x)$ o determinante da matriz jacobiana de $\phi$ em $x \in \Omega$, isto é, $J_\phi(x) = \det \phi'(x)$.

**Definição 1.1.** Diremos que $x \in \Omega$ é um ponto crítico de $\phi$ se $J_\phi(x) = 0$ e denotaremos por $Z_\phi = \{x \in \Omega : J_\phi(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos críticos de $\phi$. Além disso, dado $p \in \mathbb{R}^N$, se $\phi^{-1}(\{p\}) \cap Z_\phi \neq \emptyset$, diremos que $p$ é um valor crítico de $\phi$, caso contrário $p$ será chamado de valor regular de $\phi$.

**Lema 1.1.** Assuma que $p$ é um valor regular de $\phi$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$, então $\phi^{-1}(\{p\}) = \{x \in \overline{\Omega} : \phi(x) = p\}$ é finito.

*Demonstração.* Caso contrário, existiria uma sequência $(x_n) \subset \overline{\Omega}$ tal que $\phi(x_n) = p$. Da limitação de $\overline{\Omega}$, segue que $(x_n)$ é limitada e assim deve existir $y \in \overline{\Omega}$ e uma subsequência $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ tal que $x_{n_k} \to y$. Assim, pela continuidade de $\phi$ concluímos que $p = \phi(x_{n_k}) \to \phi(y)$, isto é, $\phi(y) = p$. Como $p \notin \phi(\partial\Omega)$, temos que $y \notin \partial\Omega$ e portanto $y \in \Omega$. Por fim, desde que $\phi(y) = p$ e $p \notin \phi(Z_\phi)$, podemos aplicar o Teorema da Função Inversa para garantir que existem vizinhanças $V_y$ e $V_p$ de $y$ e $p$, respectivamente, tais que, $\phi : V_y \longrightarrow V_p$ é um difeomorfismo, o que é impossível pois $\phi(x_{n_k}) = p$ e $x_{n_k} \in V_y$, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto, $\phi^{-1}(\{p\})$ é finito. $\square$

O lema anterior torna consistente a primeira definição de grau, que apresentaremos a seguir.

**Definição 1.2.** Para $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)$, definimos o grau de $\phi$ em $p$ com respeito a $\Omega$, e o representamos por $d(\phi, \Omega, p)$, como:

$$d(\phi, \Omega, p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \phi^{-1}(\{p\})} sgn(J_\phi(x)), & \text{se } \phi^{-1}(\{p\}) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } \phi^{-1}(\{p\}) = \emptyset, \end{cases}$$

em que,

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

A fim de estender a definição anterior para o caso em que $p \in \phi(Z_\phi)$, apresentamos as próximas proposições.

**Proposição 1.1.** Sejam $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)$. Então existe $\delta > 0$ tal que para $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\| \phi - \psi \|_{C^1} < \delta$, tem-se que $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial\Omega)$ e $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.

*Demonstração.* Vamos dividir a prova nos seguintes casos:

**Caso 1:** $\phi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$.

Como $\phi(\overline{\Omega})$ é compacto e $p \notin \phi(\overline{\Omega})$, temos que $\delta := \frac{1}{2} d_\infty(p, \phi(\overline{\Omega})) > 0$. Considere $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \phi - \psi \|_{C^1} < \delta$ e suponha que exista $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $\psi(x_0) = p$. Assim,

$$d_\infty(p, \phi(\overline{\Omega})) = \inf_{x \in \overline{\Omega}} |\phi(x) - p|_\infty < 2\delta = d_\infty(p, \phi(\overline{\Omega})),$$

o que é um absurdo. Logo, $\psi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$ e portanto $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial\Omega)$ e $d(\psi, \Omega, p) = 0 = d(\phi, \Omega, p)$.

**Caso 2:** $\phi^{-1}(\{p\}) \neq \emptyset$.

Pelo Lema 1.1, devem existir $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \overline{\Omega}$ tais que $\phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, com $k \in \mathbb{N}$. No que segue, mostraremos que para $\delta > 0$ e $r > 0$ tomados suficientemente pequenos, temos que para todo $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\| \phi - \psi \|_{C^1} < \delta$, vale que $\psi(x) = p$ admite uma, e somente uma, solução em $B(a_i, r)$, para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Como $\Omega$ é aberto e $a_i \in \Omega$, deve existir $r_0 > 0$ tal que $\overline{B(a_i, r_0)} \subset \Omega$, para cada $i = 1, \cdots, k$, e $\overline{B(a_i, r_0)} \cap \overline{B(a_j, r_0)} = \emptyset$, para $i \neq j$. Defina

$$V(r_0) = B(a_1, r_0) \cup B(a_2, r_0) \cup \cdots \cup B(a_k, r_0)$$

e

$$c := \min\{|J_\phi(a_i)| : i \in \{1, 2, \cdots, k\}\}.$$

Desde que $p$ não é um valor crítico de $\phi$, temos que $c > 0$. Além disso, explorando a continuidade de $J_\phi$, podemos garantir a existência de $0 < r_1 < r_0$ tal que

$$|J_\phi(x)| > \frac{2}{3}c, \text{ para todo } x \in B(a_i, r_1) \subset \overline{\Omega} \text{ e } i = 1, \cdots, k. \tag{1.1}$$

Da compacidade de $K := \nabla\phi(\overline{\Omega}) \cup \nabla\psi(\overline{\Omega})$ em $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ e da continuidade da função determinante definida em $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$, concluímos que $\det\Big|_K : K \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $X \mapsto \det X$, é uniformemente contínua. Portanto, dado $\epsilon = \frac{1}{3}c$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $X, Y \in K$ satisfazendo $|X - Y|_\infty < \delta_1$ tem-se

$$|\det X - \det Y| < \frac{1}{3}c. \tag{1.2}$$

Desse modo, se $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é tal que $\| \phi - \psi \|_{C^1} < \delta_1$, então $\| \nabla\phi - \nabla\psi \|_C < \delta_1$, isto é,

$$|\nabla\phi(x) - \nabla\psi(x)|_\infty < \delta_1, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

e assim segue de (1.2) que

$$|J_\phi(x) - J_\psi(x)| < \frac{1}{3}c, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

donde

$$\sup\left\{|J_\phi(x) - J_\psi(x)| : x \in \overline{\Omega}\right\} \leq \frac{1}{3}c. \tag{1.3}$$

Combinando (1.1) e (1.3), concluímos que para $x \in V(r_1)$ vale a seguinte desigualdade

$$|J_\psi(x)| = |J_\psi(x) - J_\phi(x) + J_\phi(x)| \geq |J_\phi(x)| - |J_\phi(x) - J_\psi(x)| > \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}c,$$

e portanto, para $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \phi - \psi \|_{C^1} \leq \delta_1$, tem-se

$$|J_\psi(x)| \geq \frac{1}{3}c, \quad \forall x \in V(r_1). \tag{1.4}$$

No que segue, vamos mostrar que a equação $\phi(x) = p$ admite uma única solução em $B(a_i, r_1)$. A fim de simplificar a notação, dado $i \in \{1, 2, \cdots k\}$, denotaremos por

$$a = a_i; \quad h = \phi(a) - \psi(a); \quad V = (\nabla\psi(a))^{-1}.$$

Defina ainda $T, W : B(0, r_1) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$T(z) := \psi(a + z) - \psi(a) - \nabla\psi(a)z \quad e \quad W(z) := V(h - T(z))$$

Observe que a equação $\psi(x) = p$ admite solução em $B(a, r_1)$ se, e somente se, $\psi(a + z) = p$, para algum $z \in B(0, r_1)$. Além disso,

$$\psi(a + z) = p \Leftrightarrow W(z) = z, \; z \in B(0, r_1).$$

**Afirmação 1:** Existem $r \in (0, r_1)$ e $\delta \in (0, \delta_1)$ tais que a equação $W(z) = z$ admite uma única solução em $B(0, r)$, desde que $\| \phi - \psi \|_{C^1} \leq \delta$.

Para mostrar a afirmação, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver Apêndice, Teorema A.4). Para tanto, note que $W$ é contínua em $B(0, r_1)$. Devemos então encontrar $0 < r < r_1$ tal que $W|_{B(0,r)}$ é uma contração e $W(B(0, r)) \subset B(0, r)$.

Para isso, tomemos $y, z \in B(0, r)$, onde $r$ será escolhido de maneira conveniente posteriormente, e calculemos

$$|W(y) - W(z)|_\infty = |V(h - T(y)) - V(h - T(z))|_\infty = |V(T(z) - T(y))|_\infty.$$

Considere a $k-$ésima coordenada do vetor $(T(y) - T(z)) \in \mathbb{R}^N$ e observe que

$$\begin{aligned}(T(y) - T(z))_k &= (\psi(a + y) - \psi(a) - \nabla\psi(a)y - \psi(a + z) + \psi(a) + \nabla\psi(a)z)_k \\ &= \psi_k(a + y) - \psi_k(a + z) - [\nabla\psi(a)(y - z)]_k. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\psi_k(a + y) - \psi_k(a + z) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta}\psi_k(a + \theta y + (1 - \theta)z)d\theta. \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) em (1.5), obtemos

$$\begin{aligned}&(T(y) - T(z))_k \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial\psi_k}{x_j}(a + \theta y + (1 - \theta)z)(y - z)_j d\theta - \sum_{j=1}^N \frac{\partial\psi_k}{x_j}(a)(y - z)_j \\ &= \sum_{j=1}^N (y - z)_j \int_0^1 \left(\frac{\partial\psi_k}{x_j}(a + \theta y + (1 - \theta)z) - \frac{\partial\psi_k}{x_j}(a)\right) d\theta \\ &= \sum_{j=1}^N (y - z)_j \int_0^1 \left[\frac{\partial\psi_k}{x_j}(\varphi) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(\varphi) + \frac{\partial\phi_k}{x_j}(\varphi) - \frac{\partial\psi_k}{x_j}(a) + \frac{\partial\phi_k}{x_j}(a) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(a)\right] d\theta,\end{aligned}$$

em que $\varphi = a + \theta y + (1 - \theta)z$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}&|(T(y) - T(y))_k| \\ &= \left|\sum_{j=1}^N (y - z)_j \int_0^1 \left[\frac{\partial\psi_k}{x_j}(\varphi) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(\varphi) + \frac{\partial\phi_k}{x_j}(\varphi) - \frac{\partial\psi_k}{x_j}(a) + \frac{\partial\phi_k}{x_j}(a) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(a)\right] d\theta\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |(y - z)_j| \int_0^1 \left[\left|\frac{\partial\psi_k}{x_j}(\varphi) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(\varphi)\right| + \left|\frac{\partial\phi_k}{x_j}(\varphi) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(a)\right| + \left|\frac{\partial\phi_k}{x_j}(a) - \frac{\partial\psi_k}{x_j}(a)\right|\right] d\theta \\ &\leq N|y - z|_\infty \int_0^1 [\ \| \psi - \phi \|_{C^1} + \varepsilon(r) + \| \psi - \phi \|_{C^1}] \, d\theta,\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon(r) := \sup\left\{\int_0^1 \left|\frac{\partial\phi_k}{x_j}(a + \theta y + (1 - \theta)z) - \frac{\partial\phi_k}{x_j}(a)\right| d\theta \ ; j, k = 1, 2, \ldots N \text{ e } y, z \in \overline{B(0, r)}\right\}.$$

Daí,

$$|T(y) - T(y)|_\infty \leq N|y - z|_\infty(2\delta + \varepsilon(r)),$$

e disso decorre que

$$|W(y) - W(z)|_\infty \leq |V|_\infty N|y - z|_\infty(2\delta + \varepsilon(r)). \tag{1.7}$$

Observe que $r \mapsto \varepsilon(r)$ é não- decrescente e $\varepsilon(r) \to 0$ quando $r \to 0^+$. Assim, segue de (1.7) que podemos escolher $r > 0$ e $\delta > 0$ tão pequenos quanto necessário de modo que $W$ seja uma contração em $B(0, r)$. No entanto, queremos escolher $r > 0$ e $\delta > 0$ de maneira conveniente de modo que $W(B(0, r))$ esteja contido em $B(0, r)$. Ora, considere $\delta > 0$ e $r > 0$ satisfazendo $|V|_\infty N(2\delta + \varepsilon(r)) < \frac{1}{5}$ e $|V|_\infty\delta < \frac{4}{5}r$. Então, $|W(y) - W(z)|_\infty \leq \frac{1}{5}|y - z|_\infty$, concluindo assim que $W$ é uma contração. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
|W(y)|_\infty &= |W(y) + W(0) - W(0)|_\infty \\
&\leq |W(y) - W(0)|_\infty + |W(0)|_\infty \\
&\leq |V|_\infty N|y|_\infty(2\delta + \varepsilon(r)) + |V(h)|_\infty \\
&\leq |V|_\infty N|y|_\infty(2\delta + \varepsilon(r)) + |V|_\infty|h|_\infty.
\end{aligned}$$

Como $\parallel \phi - \psi \parallel_{C^1} < \delta$, temos $|h|_\infty \leq \delta$ e assim

$$\begin{aligned}
|W(y)|_\infty &\leq |V|_\infty N|y|_\infty(2\delta + \varepsilon(r)) + |V|_\infty\delta \\
&\leq r\frac{1}{5} + r\frac{4}{5} = r, \quad \forall y \in \overline{B(0, r)},
\end{aligned}$$

isto é, $W(\overline{B(0, r)}) \subset \overline{B(0, r)}$.

Podemos assim aplicar o Teorema A.4 (ver Apêndice) para concluir que $W(z) = z$ admite apenas uma solução em $\overline{B(0, r)}$.

Precisamos agora descartar a possibilidade de que $\psi(x) = p$ admita solução em $\overline{\Omega}\backslash V(r)$. De fato, suponha que exista $x_0 \in \overline{\Omega}\backslash V(r)$ satisfazendo $\psi(x_0) = p$ e tome $\delta > 0$ ainda menor, se necessário, de tal modo que

$$0 < 2\delta \leq l(r) := \min\{|\phi(x) - p|_\infty : x \notin V(r)\}.$$

Então,

$$\delta > |\phi(x_0) - \psi(x_0)|_\infty = |\phi(x_0) - p|_\infty \geq l(r) \geq 2\delta,$$

o que é uma contradição. Portanto, a equação $\psi(x) = p$ admite uma única solução em cada bola $B(a_i, r)$, para $r$ e $\delta$ suficientemente pequenos, e não admite solução em $x \in \overline{\Omega}\backslash V(r)$. Logo, existem exatamente $k$ soluções para a equação $\psi(x) = p$, isto é, $\psi^{-1}(p) = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$, em que $b_i \in B(a_i, r)$. Para concluir a prova do teorema, nos resta verificar que $b_i \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(Z_\psi)$ e que $sgn(J_\psi(b_i)) = sgn(J_\phi(a_i))$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Ora, como $\overline{B(a_i, r_0)} \subset \Omega$ e $r < r_0$, temos que $B(a_i, r) \subset \Omega$, e portanto, $b_i \notin \partial\Omega$, pois $b_i \in B(a_i, r)$ e $B(a_i, r) \cap \partial\Omega = \emptyset$, para $i = 1, \ldots, k$. Por outro lado, segue de (1.4) que $|J_\psi(b_i)| \geq \frac{1}{3}c$, para $i = 1, \ldots, k$, e portanto $b_i \notin Z_\psi$.

Para provar que $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$, recorde que

$$d(\phi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\phi(a_i)) \text{ e } d(\psi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\psi(b_i)).$$

Primeiramente, observe que $sgn(J_\phi(b_i)) = sgn(J_\phi(a_i))$. Com efeito, sabemos que $J_\phi$ é contínuo em $B(a_i, r)$ e $J_\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in B(a_i, r)$. Suponha que $sgn(J_\phi(b_i)) > 0$ e $sgn(J_\phi(a_i)) < 0$ e defina $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(t) = J_\phi(b_i t + a_i(1-t))$. Daí, $g(0) = J_\phi(a_i) < 0$ e $g(1) = J\phi(b_i) < 0$, donde existe $t \in [0, 1]$ tal que $g(t) = 0 = J_\phi(t)$, o que é uma contradição. Logo, $sgn(J_\phi(a_i)) = sgn(J_\phi(b_i))$.

No resta verificar que $sgn(J_\phi(b_i)) = sgn(J_\psi(b_i))$. De fato, segue de (1.3) que

$$|J_\phi(x) - J_\psi(x)| \leq \frac{1}{3}c,$$

para todo $x \in B(a_i, r)$, daí

$$|J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| \leq \frac{1}{3}c. \tag{1.8}$$

Note que, se $J_\phi(b_i) > 0$ e $J_\psi(b_i) < 0$, temos por (1.4) e (1.8) que

$$\frac{1}{3}c \leq |J_\phi(b_i)| < |J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| \leq \frac{1}{3}c,$$

o que é um absurdo. De modo análogo, concluímos que é impossível $J_\phi(b_i) < 0$ e $J_\psi(b_i) > 0$. Logo, $sgn(J_\phi(a_i)) = sgn(J_\phi(b_i)) = sgn(J_\psi(b_i))$ e portanto

$$d(\phi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\phi(a_i)) = \sum_{i=1}^{k} sgn(J_\psi(b_i)) = d(\psi, \Omega, p).$$

□

A proposição a seguir nos fornece uma representação integral para o grau.

**Proposição 1.2.** Seja $p$ um valor regular de $\phi$ e assuma que $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Desse modo, dada $\varphi_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon(x)dx = 1$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$d(\phi, \Omega, p) = \int_\Omega \varphi_\epsilon(\phi(x) - p)J_\phi(x)dx, \; \forall\, 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 1.1, $\phi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$ ou $\phi^{-1}(\{p\})$ é finito. Se $\phi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, então $d(\phi, \Omega, p) = 0$. Nesse caso, escolhendo $0 < \epsilon_0 < d(p, \phi(\overline{\Omega}))$ temos que $|\phi(x) - p|_\infty \geq \epsilon_0 > \epsilon$ para todo $x \in \Omega$ e portanto $\varphi_\epsilon(\phi(x) - p) = 0$, pois $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$.

Logo,

$$\int_\Omega \varphi_\epsilon(\phi(x) - p)J_\phi(x)dx = 0 = d(\phi, \Omega, p).$$

Assuma agora que $\phi^{-1}(\{p\}) = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$. Nesse caso, segue da regularidade $C^1$ de $\phi$ e do fato de $J_\phi(a_i) \neq 0$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, que podemos escolher $r > 0$ de modo que $B(a_i, r) \subset\subset \Omega$, $B(a_i, r) \cap B(a_j, r) = \emptyset$ para $i \neq j$ e $J_\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in B(a_i, r)$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B(p, \epsilon_1) \subset \phi(\overline{B(a_i, r)})$ e $\phi$ é um difeomorfismo de $\phi^{-1}(B(p, \epsilon_1)) \cap B(a_i, r)$ sobre $B(p, \epsilon_1)$.

Como $\overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i=1}^k B(a_i, r)$ é compacto, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $|\phi(x) - p|_\infty \geq \epsilon_2$, para todo $x \in \overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i=1}^k B(a_i, r)$. Assim, se $x \in \Omega$ e $|\phi(x) - p|_\infty < \epsilon_2$, então

$$x \in \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, r).$$

Considere $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ e $W_i = \phi^{-1}(B(p, \epsilon)) \cap B(a_i, r)$, então explorando a propriedade de mudança de variável da integral obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx &= \int_{\phi^{-1}(B(p,\epsilon))} \varphi_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{W_i} \varphi_\epsilon(\phi(x) - p) |J_\phi(x)| sgn J_\phi(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} sgn J_\phi(a_i) \int_{W_i} \varphi_\epsilon(\phi(x) - p) |J_\phi(x)| dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} sgn J_\phi(a_i) \int_{B(0,\epsilon)} \varphi_\epsilon(y) dy \\
&= \sum_{i=1}^{k} sgn J_\phi(a_i) \cdot 1 = d(\phi, \Omega, p).
\end{aligned}$$

□

Os próximos lemas nos permitem avançar na direção de eliminar a restrição $p \notin \phi(Z_\phi)$ na definição do grau.

**Lema 1.2.** Seja $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$, com $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N-1})$. Defina

$$D_i = \det[\partial_1 \phi, \cdots, \partial_i \hat{\phi}, \cdots, \partial_N \phi],$$

onde $\partial_i \phi = \partial \phi / \partial x_i$ e $\partial_i \hat{\phi}$ indica a supressão da $i$-ésima coluna de $\phi'(x)$. Então,

$$\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \partial_i D_i = 0.$$

*Demonstração.* Pela regra de derivação do determinante, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\det[\partial_1\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_N\phi]) \\
&= \det[\partial_{1i}\phi, \partial_2\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_N\phi] + \cdots + \det[\partial_1\phi, \partial_2\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_{Ni}\phi] \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} \det[\partial_1\phi, \cdots, \partial_{ji}\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_N\phi] + \sum_{j=i+1}^{N} \det[\partial_1\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_{ji}\phi, \cdots, \partial_N\phi] \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1} \det[\partial_{ji}\phi, \partial_1\phi, \cdots\cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_N\phi] + \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{N}(-1)^{j-2} \det[\partial_{ji}\hat{\phi}, \partial_1\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \cdots, \partial_N\phi].
\end{aligned}
$$

Denote por

$$
\begin{cases}
D_{ij} = \det[\partial_{ij}\phi, \partial_1\phi, \cdots, \partial_i\hat{\phi}, \cdots, \partial_N\phi] & \text{se} \quad i \neq j \\
D_{ij} = 0 & \text{se} \quad i = j,
\end{cases}
$$

então,

$$
\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1}D_{ij} + \sum_{j=i+1}^{N}(-1)^{j-2}D_{ij}.
$$

Além disso, definindo

$$
\alpha_{ij} = \begin{cases}
1 & \text{se} \quad i > j \\
0 & \text{se} \quad i = j \\
-1 & \text{se} \quad i < j,
\end{cases}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1}\alpha_{ij}D_{ij} + \sum_{j=i+1}^{N}(-1)^{j-1}\alpha_{ij}D_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\alpha_{ij}D_{ij} \\
&= -\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j}\alpha_{ij}D_{ij}.
\end{aligned}
$$

Logo, pela definição de $\alpha_{ij}$ e pelo teorema de Schwarz, temos

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= -2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{(i+j)}\alpha_{ij}D_{ij} \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{(i+j)}\alpha_{ij}D_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{(i+j)}\alpha_{ij}D_{ij} \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{(i+j)}\alpha_{ij}D_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{(i+j)}\alpha_{ji}D_{ji} \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{(i+j)}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})D_{ij} = 0.
\end{aligned}
$$

□

**Lema 1.3.** Seja $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e denote por $A_{ij}$ o cofator da entrada $\partial_i \phi_j$ em $\phi'(x)$. Então,

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i A_{ij} = 0,$$

para todo $1 \leq j \leq N$.

*Demonstração.* Por definição,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\partial_l \phi_k)_{l \neq i, k \neq j},$$

em que $\det(\partial_l \phi_k)_{l \neq i, k \neq j}$ é o determinante da matriz obtida de $\phi'(x)$ ao suprimirmos a $j$-ésima linha e a $i$-ésima coluna de $\phi'(x)$. Defina $\psi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ por

$$\psi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \cdots, \phi_N),$$

onde $1 \leq j \leq N$, e

$$D_i = \det[\partial_1 \psi, \cdots, \partial_i \hat{\psi}, \cdots, \partial_N \psi],$$

em que $\partial_i \psi = \partial \psi / \partial x_i$ e $\partial_i \hat{\psi}$ indica a supressão da $i$-ésima coluna de $\psi'(x)$. Assim

$$D_i = \det \begin{bmatrix} \partial_1 \phi_1 & \partial_2 \phi_1 & \cdots & \partial_{i-1} \phi_1 & \partial_{i+1} \phi_1 & \cdots & \partial_N \phi_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \phi_{j-1} & \partial_2 \phi_{j-1} & \cdots & \partial_{i-1} \phi_{j-1} & \partial_{i+1} \phi_{j-1} & \cdots & \partial_N \phi_{j-1} \\ \partial_1 \phi_{j+1} & \partial_2 \phi_{j+1} & \cdots & \partial_{i-1} \phi_{j+1} & \partial_{i+1} \phi_{j+1} & \cdots & \partial_N \phi_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \phi_N & \partial_2 \phi_N & \cdots & \partial_{i-1} \phi_N & \partial_{i+1} \phi_N & \cdots & \partial_N \phi_N \end{bmatrix} = \det(\partial_l \phi_k)_{l \neq i, k \neq j}.$$

Desde que $\psi$ é de classe $C^2$, podemos usar o Lema 1.2 para concluir que

$$\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \partial_i D_i = \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \partial_i \det(\partial_l \phi_k)_{l \neq i, k \neq j} = 0$$

e pela definição de $A_{ij}$ obtemos que

$$0 = (-1)^j \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \partial_i \det(\partial_l \phi_k)_{l \neq i, k \neq j} = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+j} \partial_i \det(\partial_l \phi_k)_{l \neq i, k \neq j} = \sum_{i=1}^{N} \partial_i A_{ij}.$$

$\square$

**Proposição 1.3.** Sejam $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $p \notin \phi(\partial \Omega)$ e $r = d_\infty(p, \phi(\partial \Omega))$. Se $p_1, p_2 \in B(p, r) \backslash \phi(Z_\phi)$, então $d(\phi, \Omega, p_1) = d(\phi, \Omega, p_2)$.

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em dois casos:

1º **Caso:** $\phi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Por hipótese, $p_i \notin \phi(\partial\Omega) \cup \phi(Z_\phi)$, desse modo $d(\phi, \Omega, p_i)$ está bem definido para $i = 1, 2$. Agora, considere

$$\delta = \min\{r - |p - p_i|_\infty, i = 1, 2\}.$$

Então, pela Proposição 1.2, existem $\epsilon < \delta$ e $\varphi_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, com $\operatorname{supp}(\varphi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$, tais que

$$d(\phi, \Omega, p_i) = \int_\Omega \varphi_\epsilon(\phi(x) - p_i) J_\phi(x) dx,$$

e portanto

$$d(\phi, \Omega, p_2) - d(\phi, \Omega, p_1) = \int_\Omega [\varphi_\epsilon(\phi(x) - p_2) - \varphi_\epsilon(\phi(x) - p_1)] J_\phi(x) dx.$$

Contudo, observe que pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_\epsilon(y - p_2) - \varphi_\epsilon(y - p_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[\varphi_\epsilon(y - p_1 + (p_1 - p_2)t)] dt \\
&= \int_0^1 \nabla\varphi_\epsilon(\hat{p}_t)(p_1 - p_2) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^N \partial_i \varphi_\epsilon(\hat{p}_t)(p_1 - p_2)_i dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_0^1 \partial_i \varphi_\epsilon(\hat{p}_t)(p_1 - p_2)_i dt,
\end{aligned}$$

onde $(p_1 - p_2)_i$ representa a $i$-ésima coordenada do vetor $p_1 - p_2$ e $\hat{p}_t := y - p_1 + (p_1 - p_2)t$.

Queremos encontrar $\omega(y) = (\omega_1(y), \cdots, \omega_N(y))$ tal que

$$div(\omega(y)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \partial_i \varphi_\epsilon(\hat{p}_t)(p_1 - p_2)_i dt.$$

Ora, para isso basta que

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial y_i}(y) = \int_0^1 \partial_i \varphi_\epsilon(\hat{p}_t)(p_1 - p_2)_i dt,$$

isto é, $\omega_i(y) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_\epsilon(y - p_1 + (p_1 - p_2)t)(p_1 - p_2)_i dt.$

Portanto, para $\omega(y) = (\omega_1(y), \cdots, \omega_N(y))$ definido como

$$\omega_i(y) = \int_0^1 \varphi_\epsilon(\hat{p}_t)(p_1 - p_2)_i dt,$$

temos

$$\varphi_\epsilon(y - p_2) - \varphi_\epsilon(y - p_1) = div(\omega(y)).$$

Além disso, se $y \in \phi(\partial\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
|y - p_1 + (p_1 - p_2)t|_\infty &= |y - b + b - p_2 t + bt - bt + p_1 t - p_1|_\infty \\
&= |(y-b) + (b-p_1)(1-t) + t(b-p_2)|_\infty \\
&\geq |y-b|_\infty - |b-p_1|_\infty(1-t) - t|b-p_2|_\infty \\
&> r - (r-\delta)(1-t) - t(r-\delta) \\
&= r - r + \delta + (r-\delta)t - t(r-\delta) \\
&= \delta > \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, para $y \in \phi(\partial\Omega)$, temos que $\omega(y) = 0$, pois $\mathrm{supp}(\varphi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$.

Finalmente, para $i = 1, \ldots, N$ defina

$$v_i(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^N \omega_j(\phi(x))A_{ij}(x), & \text{se } x \in \overline{\Omega} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}, \end{cases}$$

onde $A_{ij}$ é o cofator da entrada $\partial_i\phi_j$ em $\phi'(x)$. Pela regra da cadeia, para $x \in \Omega$, temos

$$\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{x_i}(x) A_{ij}(x) + \sum_{j=1}^N \omega_j(\phi(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x),$$

assim,

$$div(v(x)) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(\phi(x)) \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_k}{x_i}(x) A_{ij}(x) + \sum_{j=1}^N \omega_j(\phi(x)) \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x).$$

Pelo Lema 1.3 e pela definição de $A_{ij}$, temos

$$\begin{aligned}
div(v(x)) &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(\phi(x)) \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_k}{x_i}(x) A_{ij}(x) + \sum_{j=1}^N \omega_j(\phi(x)) \sum_{i=1}^N \partial_i A_{ij}(x) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(\phi(x)) \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_k}{x_i}(x) A_{ij}(x) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(\phi(x))(\delta_{jk} J_\phi(x)) \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_j}{\partial y_j}(\phi(x)) J_\phi(x) \\
&= div(\omega(\phi(x))) J_\phi(x),
\end{aligned}$$

onde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Assim, desde que $v(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$, segue do teorema do divergente que

$$\begin{aligned} d(\phi, \Omega, p_1) - d(\phi, \Omega, p_2) &= \int_\Omega [\varphi_\epsilon(y - p_1) - \varphi_\epsilon(y - p_2)] J_\phi(x) dx \\ &= \int_\Omega div(\omega(\phi(x))) J_\phi(x) dx \\ &= \int_\Omega div(v(x)) dx = 0, \end{aligned}$$

e portanto $d(\phi, \Omega, p_1) = d(\phi, \Omega, p_2)$.

$2^{\text{o}}$ **Caso:** $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Tomemos $p_1, p_2 \in B(p, r) \backslash \phi(Z_\phi)$, onde $r = d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, e defina

$$l = \max\{|p - p_1|_\infty, |p - p_2|_\infty\}.$$

Da densidade de $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, podemos escolher $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ possuindo $p_1$ e $p_2$ como valores regulares e que satisfaz

$$\| \psi - \phi \|_{C^1} < (r - l(1 + \epsilon)),$$

onde $\epsilon > 0$ é escolhido de modo que $r - l(1 + \epsilon) > 0$.

**Afirmação 1:** $B(p, (1 + \epsilon)l) \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$.

Se a afirmação fosse falsa, existiria $x \in \partial\Omega$ tal que $|\psi(x) - p|_\infty < (1 + \epsilon)l$ e assim teríamos

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)l &> |\psi(x) - p|_\infty \\ &= |\psi(x) - \phi(x) + \phi(x) - p|_\infty \\ &\geq |\phi(x) - p|_\infty - |\psi(x) - \phi(x)|_\infty \\ &\geq r - (r - l(1 + \epsilon)) \\ &= l(1 + \epsilon), \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, $B(p, (1 + \epsilon)l) \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$, donde

$$d_\infty(p, \psi(\partial\Omega)) := r_\psi \geq (1 + \epsilon)l.$$

Em particular, $p_1, p_2 \in B(p, r_\psi) \backslash \psi(Z_\psi)$ e assim podemos usar o Caso 1 para concluir que

$$d(\psi, \Omega, p_1) = d(\psi, \Omega, p_2).$$

Por outro lado, aumentando $\epsilon > 0$, se necessário, de tal modo que $r - (1 + \epsilon)l < \delta$, onde $\delta$ é dado pela Proposição 1.1, podemos acionar tal proposição para concluir que

$$d(\psi, \Omega, p_i) = d(\phi, \Omega, p_i),$$

com $i = 1, 2$, donde obtemos que $d(\phi, \Omega, p_1) = d(\phi, \Omega, p_2)$, como queríamos provar. $\square$

**Lema 1.4** (Lema de Sard)**.** Seja $\phi$ uma aplicação de classe $C^1$ e $Z_\phi$ o conjunto dos pontos críticos de $\phi$. Então o conjunto de valores críticos de $\phi$ (isto é, $\phi(Z_\phi)$) tem medida nula.

O Lema de Sard [14] aliado à proposição anterior nos possibilita estender a definição do grau para o caso em que $p \notin \phi(Z_\phi)$.

**Definição 1.3.** Sejam $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \in \phi(Z_\phi)$. Definimos $d(\phi, \Omega, p)$ por $d(\phi, \Omega, q)$, em que $q \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)$ é tal que $|p - q|_\infty < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$.

Para garantir a consistência da Definição 1.3 note que pelo Lema de Sard (Lema 1.4) fica assegurada a existência de $q \notin \phi(Z_\phi)$ tal que $|p-q|_\infty < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$. Além disso, sejam $q_1, q_2 \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial\Omega)$ tais que $|p-q_i|_\infty < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, isto é, $q_1, q_2 \in B(p, d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)))$. Então, pela Proposição 1.3 vale

$$d(\phi, \Omega, q_1) = d(\phi, \Omega, q_2),$$

e portanto está bem definido o conceito de grau apresentado na Definição 1.3.

A seguir veremos a definição de homotopia, que será de grande importância para a generalização do grau para aplicações contínuas.

**Definição 1.4.** Dadas $\phi, \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, dizemos que e $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma $C^1$ homotopia entre $\phi$ e $\psi$ se:

1. $H_t := H(\cdot, t)$ é de classe $C^1$, para cada $t \in [0, 1]$.
2. $\lim\limits_{t \to s} \| H_t - H_s \|_{C^1} = 0$ para todo $s \in [0, 1]$.
3. $H_0(x) = \phi(x)$, $H_1(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

A seguir, veremos as principais propriedades do grau de funções de classe $C^1$.

**Teorema 1.1.** Sejam $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. As seguintes afirmações são válidas:

1. A aplicação $p \mapsto d(\phi, \Omega, p)$ é invariante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$.
2. Existe $\epsilon > 0$ tal que para $\psi \in B_{C^1}(\phi, \epsilon) \subset C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, vale que
$$p \notin \psi(\partial\Omega) \text{ e } d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p).$$
3. $d(\phi + a, \Omega, p + a) = d(\phi, \Omega, p)$, para $a \in \mathbb{R}^N$.
4. **(Invariância Homotópica)** Se $H$ é uma $C^1$ homotopia entre $\phi$ e $\psi$ e $p \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0, 1]$, então $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.
5. Se $\phi, \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ coincidem em $\partial\Omega$, isto é, $\phi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$, então para $p \in \mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$ tem-se $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.

*Demonstração.* A prova de cada item é dada a seguir.

1 Segue da Proposição 1.3 que $d(\phi, \Omega, \cdot)$ é contínuo e localmente constante em $\mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$. De fato, sejam $p \notin \phi(\partial\Omega)$ e $0 < 4\epsilon < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) := r_p$. Para $q \in B\left(p, \frac{1}{4}r_p\right)$ tem-se

$$\begin{aligned} |q - \phi(x)|_\infty &= |q - p + p - \phi(x)|_\infty \\ &\geq |p - \phi(x)|_\infty - |q - p|_\infty \\ &\geq r_p - \frac{1}{4}r_p = \frac{3}{4}r_p, \end{aligned}$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Logo, $d_\infty(q, \phi(\partial\Omega)) := r_q \geq \frac{3}{4}r_p$ e assim $B(q, r_q) \supset B(p, \frac{1}{4}r_p)$. Portanto, se $\hat{p} \in B(p, \epsilon) \backslash \phi(Z_\phi)$ então $\hat{p} \in B(q, r_q)$. Logo, segue da definição de grau que

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, \hat{p}) \text{ e } d(\phi, \Omega, q) = d(\phi, \Omega, \hat{p}),$$

isto é, $d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, q)$. Portanto, $d(\phi, \Omega, \cdot)$ é contínuo e localmente constante em $\mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$.

2 Se $p \in \phi(Z_\phi)$, pelo lema de Sard (Lema 1.4) existe $q \notin \phi(Z_\phi)$ tal que $|p - q|_\infty < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))/2$. Consequentemente, $p$ e $q$ pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$ e daí, pelo item anterior, $d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, q)$. Pela Proposição 1.1, existem $0 < \delta < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))/2$ e $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\| \phi - \psi \|_{C^1} < \delta$ tais que

$$q \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial\Omega) \text{ e } d(\psi, \Omega, q) = d(\phi, \Omega, q).$$

Afirmamos que $p \notin \psi(\partial\Omega)$. Com efeito,

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\phi(x) - \psi(x)|_\infty \leq \| \phi - \psi \|_{C^1} < \delta < \frac{d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))}{2}.$$

Assim, para $x \in \partial\Omega$ vale que

$$\begin{aligned} |\psi(x) - p|_\infty &= |\psi(x) - \phi(x) + \phi(x) - p|_\infty \\ &\geq |\phi(x) - p|_\infty - |\psi(x) - \phi(x)|_\infty \\ &\geq d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) - \frac{d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))}{2} \\ &= \frac{d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))}{2} \\ &> |p - q|_\infty, \end{aligned}$$

isto é, $0 < |p - q|_\infty < d_\infty(p, \psi(\partial\Omega))$. Portanto, $p \notin \psi(\partial\Omega)$ e $p$ e $q$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$. Logo, pelo item 1 deste teorema e pela definição de grau (Definição 3.1), temos

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, q) = d(\psi, \Omega, q) = d(\psi, \Omega, p),$$

o que conclui a demonstração deste item.

3 Pelo lema de Sard (Lema 1.4) existe $q \notin \phi(Z_\phi)$ satisfazendo $|p-q|_\infty < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$. Sabemos que $d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) = d_\infty(p+a, (\phi+a)(\partial\Omega))$ e $q$ é valor regular de $\phi$ se, e somente se, $(q+a)$ é valor regular de $\phi+a$.

Por outro lado, pela Proposição 1.2, existe $0 < \epsilon$ e $\varphi_\epsilon \in C_c^1(B(0,\epsilon))$ tal que

$$\begin{aligned} d(\phi+a, \Omega, q+a) &= \int_\Omega \varphi_\epsilon(\phi + a - (q+a)) J_{\phi+a}(x)dx \\ &= \int_\Omega \varphi_\epsilon(\phi - q) J_\phi(x)dx \\ &= d(\phi, \Omega, q). \end{aligned}$$

Logo, por definição e pela igualdade acima, concluímos que

$$d(\phi+a, \Omega, p+a) = d(\phi+a, \Omega, q+a) = d(\phi, \Omega, q) = d(\phi, \Omega, p).$$

4 Devemos mostrar que a aplicação $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = d(H_t, \Omega, p)$, é contínua.

Como $p \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$, temos do item 2 do Teorema 1.1, que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\| H_t - H_s \|_{C^1} \leq \epsilon \Rightarrow d(H_t, \Omega, p) = d(H_s, \Omega, p).$$

Entretanto, segue da definição de $C^1$ homotopia que $\lim_{t\to s} \| H_t - H_s \|_{C^1} = 0$, daí existe $\delta > 0$ tal que

$$|t-s| < \delta \Rightarrow \| H_t - H_s \|_{C^1} < \epsilon,$$

isto é, se $|t-s| < \delta$ então $|\varphi(t) - \varphi(s)| = 0$. Portanto $\varphi$ é contínua e localmente constante em $[0,1]$. Como $[0,1]$ é conexo, segue que $\varphi$ é constante em $[0,1]$.

5 Considere a aplicação $H : \overline{\Omega} \times [0,1]$ dada por $H_t(x) = (1-t)\phi(x) + t\psi(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in [0,1]$. Mostraremos que $H_t$ é uma $C^1$ homotopia entre $\phi$ e $\psi$. De fato, $H_t \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ já que $\phi, \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Além disso, $H_0(x) = \phi(x)$ e $H_1(x) = \psi(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, e vale a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} H_t - H_s &= (1-t)\phi + t\psi - (1-s)\phi - s\psi \\ &= \phi - t\phi - \phi + s\phi + t\psi - s\psi \\ &= (s-t)\phi + (t-s)\psi \\ &= (s-t)(\phi - \psi). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \| H_t(x) - H_s(x) \|_{C^1} &= \| H_t(x) - H_s(x) \|_C + \| \nabla H_t(x) - \nabla H_s(x) \|_C \\ &= \| (s-t)(\phi - \psi) \|_C + \| (s-t)\nabla(\phi - \psi) \|_C \\ &= |(s-t)| \|\phi - \psi\|_{C^1} \to 0 \text{ quando } t \to s. \end{aligned}$$

Portanto $H_t$ é uma $C^1$ homotopia.

Suponha que existam $t_0 \in [0,1]$ e $x_0 \in \partial\Omega$ tais que

$$p = H(x_0, t_0) = (1 - t_0)\phi(x_0) - t_0\psi(x_0).$$

Como $\phi(x_0) = \psi(x_0)$, temos

$$p = (1 - t_0)\phi(x_0) - t_0\phi(x_0) = \phi(x_0),$$

isto é, $p \in \phi(\partial\Omega)$, o que é uma contradição. Portanto, $p \notin H_t(\partial\Omega)$ e pela invariância homotópica (Teorema 1.1, item 4), concluímos que

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p).$$

□

### 1.1.2 Grau de Brouwer

Nesta seção apresentaremos o grau de Brouwer, o que conclui a construção do grau para funções contínuas.

**Definição 1.5** (Grau de Brouwer)**.** Sejam $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Definimos o grau $d(\phi, \Omega, p)$ como sendo $d(\psi, \Omega, p)$, para qualquer $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$.

Observe que $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e portanto de fato existe $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$. Por outro lado, se $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$ e $\psi(x) = p$ para algum $x \in \partial\Omega$, então

$$\| \psi - \phi \|_C \geq |\psi(x) - \phi(x)|_\infty = |p - \phi(x)|_\infty \geq d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)),$$

o que é uma contradição. Portanto, $p \notin \psi(\partial\Omega)$.

Para checar a consistência da definição anterior, nos resta verificar que dados $\psi_i \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\| \psi_i - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, com $i = 1, 2$, temos $d(\psi_1, \Omega, p) = d(\psi_2, \Omega, p)$. Ora, considere a homotopia entre $\psi_1$ e $\psi_2$ dada por $H_t(x) = t\psi_2(x) + (1 - t)\psi_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in [0,1]$. Desde que

$$\begin{aligned}
|H_t(x) - \phi(x)|_\infty &= |(1-t)\psi_1(x) + t\psi_2(x) - \phi(x)|_\infty \\
&= |(1-t)\psi_1(x) + t\psi_2(x) - \phi(x) + t\phi(x) - t\phi(x)|_\infty \\
&\leq (1-t)|\psi_1(x) - \phi(x)| + t|\psi_2(x) - \phi(x)|_\infty \\
&< (1-t)d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) + td_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) \\
&= d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)),
\end{aligned}$$

para $x \in \partial\Omega$, temos $|H_t(x) - \phi(x)| < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) \leq |p - \phi(x)|$, portanto $p \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Logo, pelo item 4 do Teorema 1.1, segue que $d(\psi_1, \Omega, p) = d(\psi_2, \Omega, p)$.

O próximo resultado garante que podemos escolher $\psi$ na Definição 1.5 de tal modo que $p$ seja valor regular de $\psi$.

**Proposição 1.4.** Sejam $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Então, existe $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, com $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$ e $p \notin \psi(Z_\psi)$, tal que $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.

*Demonstração.* Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \varphi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))/2$ e $q \notin \varphi(Z_\varphi)$ satisfazendo $|p - q|_\infty < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))/2$ (o lema de Sard assegura a existência de tal $q$).

Defina $\psi(x) = \varphi(x) + p - q$ e note que $\psi(x) = p \Leftrightarrow \varphi(x) = q$. Como $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p$ e $q$ são constantes, temos $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $J_\psi(x) = J_\varphi(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Logo, $p \notin \psi(Z_\psi)$, caso contrário existiria $x \in \Omega$ tal que $0 = J_\psi(x) = J_\varphi(x)$, isto é, $q \in \varphi(Z_\varphi)$, o que contradiz nossa escolha de $q$.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
|\psi(x) - \phi(x)|_\infty &= |\varphi(x) + p - q - \phi(x)|_\infty \\
&\leq |\varphi(x) - \phi(x)|_\infty + |p - q|_\infty \\
&\leq \| \varphi - \phi \|_C + |p - q|_\infty \\
&< d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)), \qquad \forall x \in \overline{\Omega},
\end{aligned}
$$

isto é, $\|\psi - \phi\|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$.

Nos resta verificar que $p \notin \psi(\partial\Omega)$. De fato, suponha que $p \in \psi(\partial\Omega)$, então $q \in \varphi(\partial\Omega)$ e assim

$$
\begin{aligned}
d_\infty(p, \varphi(\partial\Omega)) &= \min_{x \in \partial\Omega} |p - \varphi(x)|_\infty \\
&= \min_{x \in \partial\Omega} |p - q + q - \varphi(x)|_\infty \\
&\leq \min_{x \in \partial\Omega} \{|p - q|_\infty + |q - \varphi(x)|_\infty\} \\
&= |p - q|_\infty + \min_{x \in \partial\Omega} |q - \varphi(x)|_\infty \\
&= |p - q|_\infty + d_\infty(q, \varphi(\partial\Omega)) \\
&< \frac{d_\infty(p, \varphi(\partial\Omega))}{2} + 0,
\end{aligned}
$$

o que é impossível. Assim, $\psi$ atende as condições desejadas. $\square$

### 1.1.3 Propriedades do grau topológico de Brouwer

Apresentaremos nesta seção as principais propriedades do grau de Brouwer. Para tanto, vamos inicialmente definir homotopia para funções contínuas.

**Definição 1.6** (Homotopia)**.** Sejam $\phi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $H$ é uma homotopia entre $\phi$ e $\psi$ se:

1. $H$ é contínua em $\overline{\Omega} \times [0,1]$;

2. $H_0(x) = \phi(x)$, $H_1(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

**Teorema 1.2.** Sejam $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. As seguintes propriedades são válidas:

1. **(Existência)** Se $d(\phi, \Omega, p) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = p$.

2. **(Continuidade)** Se $\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfaz $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, então
$$d(\psi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, p).$$

3. **(Invariância homotópica)** Assuma $H$ é uma homotopia entre $H(\cdot, 0)$ e $H(\cdot, 1)$ e $p \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$. Então, $t \mapsto d(H_t, \Omega, p)$ é constante em $[0,1]$.

4. **(Invariância sobre componente conexa)** Sejam $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p_1, p_2 \notin \phi(\partial\Omega)$. Se $p_1$ e $p_2$ pertencem a mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$, então
$$d(\phi, \Omega, p_1) = d(\phi, \Omega, p_2).$$

5. **(Fronteira)** Sejam $\phi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tais que $\phi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$. Então $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$, para todo $p \notin \phi(\partial\Omega)$.

6. **(Translação)** Suponha que $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $p \notin \phi(\partial\Omega)$ e $q \in \mathbb{R}^N$. Então
$$d(\phi - q, \Omega, p - q) = d(\phi, \Omega, p).$$

7. Sejam $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma homotopia e $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua com $\gamma(t) \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$. Então $d(H_t, \Omega, \gamma(t))$ não depende de $t \in [0,1]$.

8. **(Decomposição/Adição)** Seja $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$, onde $\Omega_i$ são abertos e dois a dois disjuntos. Então existem $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subset \mathbb{N}$ tais que
$$d(\phi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\phi, \Omega_{a_i}, p).$$

9. **(Excisão)** Sejam $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Se $K \subset \overline{\Omega}$ é compacto e tal que $p \notin \phi(K)$, então
$$d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega \backslash K, p).$$

*Demonstração.* A prova de cada item é dada a seguir.

1) Suponha que $p \notin \phi(\Omega)$. Como $p \notin \phi(\partial\Omega)$, concluímos que $p \notin \phi(\overline{\Omega})$. Daí, pela compacidade de $\phi(\overline{\Omega})$, obtemos $d_\infty(p, \phi(\overline{\Omega})) > 0$. Seja $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\overline{\Omega})) \leq d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)).$$

Pela definição, temos

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p).$$

Além disso, note que $p \notin \psi(\overline{\Omega})$, caso contrário existiria $x \in \overline{\Omega}$ tal que $\psi(x) = p$. Daí,

$$|p - \phi(x)|_\infty \leq \| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\overline{\Omega})),$$

o que é uma contradição. Logo, $\psi^{-1}(\{p\}) = \emptyset$ e assim

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p) = 0,$$

o que contraria a hipótese $d(\phi, \Omega, p) \neq 0$. Portanto, existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = p$.

2) Sejam $\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tais que

$$\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) := r \text{ e } \| \psi - \varphi \|_C < r - \| \psi - \phi \|_C .$$

Daí,

$$\| \phi - \varphi \|_C = \| \phi - \psi + \psi - \varphi \|_C \leq \| \psi - \phi \|_C + \| \psi - \varphi \|_C < \| \psi - \phi \|_C + r - \| \psi - \phi \|_C = r.$$

Como $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $\| \phi - \varphi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, pela Definição 1.5 obtemos $d(\phi, \Omega, p) = d(\varphi, \Omega, p)$.

Provaremos que $d(\psi, \Omega, p) = d(\varphi, \Omega, p)$. Com efeito, para todo $x \in \partial\Omega$ temos

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - p|_\infty &= |\psi(x) - \phi(x) + \phi(x) - p|_\infty \\
&\geq |\phi(x) - p|_\infty - |\psi(x) - \phi(x)|_\infty \\
&> d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) - \| \psi - \phi \|_C \\
&= r - \| \psi - \phi \|_C \\
&= \| \psi - \varphi \|_C .
\end{aligned}$$

Daí, $\min\limits_{x \in \partial\Omega} |\psi(x) - p|_\infty = d_\infty(p, \psi(\partial\Omega)) > \| \psi - \varphi \|_C$ . Assim, novamente pela definição do grau de Brouwer, obtemos $d(\psi, \Omega, p) = d(\varphi, \Omega, p)$.

Portanto,

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\varphi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p).$$

3) Considere $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\gamma(t) = d(H_t, \Omega, p)$, afirmamos que $\gamma$ é contínua em $[0, 1]$. De fato, fixando $t_0 \in [0, 1]$, segue da continuidade de $t \mapsto H_t$ que para

$\epsilon \leq d_\infty(p, H_{t_0}(\partial\Omega))$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para $t \in [0,1]$ satisfazendo $|t - t_0| < \delta$, vale que

$$\| H_t - H_{t_0} \|_C < \epsilon \leq d_\infty(p, H_{t_0}(\partial\Omega)).$$

Pela propriedade de continuidade (Teorema 1.2, item 2), temos que

$$\gamma(t) = d(H_t, \Omega, p) = d(H_{t_0}, \Omega, p) = \gamma(t_0), \text{ para } |t - t_0| < \delta.$$

Daí, concluímos que se $|t - t_0| < \delta$, então $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \epsilon$, isto é, $\gamma$ é contínua e localmente constante em $[0,1]$. Portanto, desde que $[0,1]$ é conexo, segue que $\gamma$ é constante em $[0,1]$, isto é, $t \mapsto d(H_t, \Omega, p)$ é constante.

4) Sejam $C$ uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$, $p_1, p_2 \in C$ e $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ um caminho contínuo em $C$ tal que $\gamma(0) = p_1$ a $\gamma(1) = p_2$. Note que, pela construção de $\gamma$, temos

$$d_\infty(\gamma([0,1]), \phi(\partial\Omega)) \leq \min\{d_\infty(p_1, \phi(\partial\Omega)), d_\infty(p_2, \phi(\partial\Omega))\}.$$

Agora, considere $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\| \phi - \psi \|_C < d_\infty(\gamma([0,1]), \phi(\partial\Omega)).$$

Pela definição do grau de Brouwer, segue que $d(\phi, \Omega, p_i) = d(\psi, \Omega, p_i)$, com $i = 1, 2$.

Nos resta mostrar que $p_1$ e $p_2$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$. Com efeito,

$$d_\infty(\gamma([0,1]), \psi(\partial\Omega)) \geq d_\infty(\gamma([0,1]), \phi(\partial\Omega)) - d_\infty(\phi(\partial\Omega), \psi(\partial\Omega)) > 0,$$

já que

$$d_\infty(\phi(\partial\Omega), \psi(\partial\Omega)) = \min_{x \in \partial\Omega} |\phi(x) - \psi(x)|_\infty < \| \phi - \psi \|_C,$$

o que implica em $\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$, isto é, $p_1$ e $p_2$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$. Portanto, pelo item 1 do Teorema 1.1, segue que

$$d(\phi, \Omega, p_1) = d(\psi, \Omega, p_1) = d(\psi, \Omega, p_2) = d(\phi, \Omega, p_2).$$

5) Seja $H_t(x) = (1 - t)\phi(x) + t\psi(x)$ uma homotopia entre $\phi$ e $\psi$. Dado $p \in \mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial\Omega)$, note que $p \notin H_t(\partial\Omega)$. De fato, caso contrário, existiriam $t_0 \in [0,1]$ e $x_0 \in \partial\Omega$ tais que $p = (1 - t_0)\phi(x_0) + t_0\psi(x_0)$. Como $\psi(x) = \phi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$, obtemos da igualdade anterior que $p = \phi(x_0)$, o que é impossível, pois $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Logo, para todo $t \in [0,1]$, temos $p \notin H_t(\partial\Omega)$. Assim, segue do item 3 deste teorema que $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.

6) Pela Proposição 1.4, existe $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, $p \notin \psi(Z_\psi)$ e $d(\psi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, p)$.

Dessa forma:

i) $(p-q) \notin (\phi - q)(\partial\Omega)$, pois $p \in \phi(\partial\Omega) \Leftrightarrow p - q \in (\phi - q)(\partial\Omega)$;

ii) $p-q$ é valor regular de $(\psi - q)$, pois $J_{\psi-q}(x) = J_\psi(x)$ e pela descrição de $\psi$, $J_\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in \psi^{-1}(\{p\})$;

iii)

$$\| (\psi - q) - (\phi - q) \|_C = \| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) = d_\infty(p-q, \phi(\partial\Omega) - q).$$

Assim, por i) e iii) e a definição do grau de Brouwer, obtemos $d(\phi - q, \Omega, p - q) = d(\psi - q, \Omega, p - q)$. Por outro lado, por ii) podemos aplicar a Proposição 1.2 para concluir que

$$\begin{aligned} d(\psi - q, \Omega, p - q) &= \int_\Omega \varphi_\epsilon((\psi - q) - (p - q)) J_{\psi - q}(x) dx \\ &= \int_\Omega \varphi_\epsilon(\psi - p) J_\psi(x) dx \\ &= d(\psi, \Omega, p). \end{aligned}$$

Logo, combinando as informações acima, concluímos que

$$d(\phi - q, \Omega, p - q) = d(\psi - q, \Omega, p - q) = d(\psi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, p).$$

7) Para cada $t \in [0,1]$, defina

$$\Psi_t(x) = H_t(x) - \gamma(t), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Pela definição de $\Psi_t(x)$, temos $\gamma(t) \notin H_t(\partial\Omega)$ se, e somente se, $0 \notin \Psi_t(\partial\Omega)$.

Pela propriedade da translação (item 6 deste teorema), temos

$$d(\Psi_t, \Omega, 0) = d(H_t - \gamma(t), \Omega, 0) = d(H_t - \gamma(t) + \gamma(t), \Omega, 0 + \gamma(t)) = d(H_t, \Omega, \gamma(t)).$$

Como $H$ é uma homotopia e $\gamma$ é contínua, temos que $\Psi$ é uma homotopia entre $\Psi_0 = H_0 - \gamma(0)$ e $\Psi_1 = H_1 - \gamma(1)$. Assim, pela invariância homotópica (item 3 deste teorema), $d(\Psi_t, \Omega, 0)$ não depende de $t$, isto é, $d(H_t, \Omega, \gamma(t))$ não depende de $t$.

8) Observe que $d(\phi, \Omega_i, p)$ está bem definido para todo $i \in \mathbb{N}$. De fato, como os $\Omega_i$'s são disjuntos, temos que $\partial\Omega = \cup_{i\in\mathbb{N}} \partial\Omega_i$, donde concluímos que $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$, logo $p \notin \phi(\partial\Omega_i)$ e portanto $d(\phi, \Omega_i, p)$ está bem definido para todo $i \in \mathbb{N}$.

Pela Proposição 1.4, existe $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $p \notin \psi(Z_\psi)$, $\| \psi - \phi \|_C < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$ e $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$. Para tal $\psi$ temos que

$$\| \psi - \phi \|_{C(\overline{\Omega_i})} \leq \| \psi - \phi \|_{C(\overline{\Omega})} < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) \leq d_\infty(p, \phi(\partial\Omega_i)),$$

donde, pela definição do grau de Brouwer, temos $d(\phi, \Omega_i, p) = d(\psi, \Omega_i, p)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial\Omega)$, segue do Lema 1.1 que $\psi^{-1}(\{p\})$ é finito, digamos $\psi^{-1}(\{p\}) = \{x_1, \cdots, x_{k_0}\}$. Desse modo, $\psi^{-1}(\{p\})$ intersecta um número finito dos $\Omega_i$, digamos $\psi^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \partial\Omega_{a_i}$.

Segue da Definição 3.1, que

$$d(\psi, \Omega, p) = \sum_{x\in\psi^{-1}(\{p\})} sgn(J_\psi(x)) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x\in\psi^{-1}(\{p\}\cap\Omega_{a_i}} sgn(J_\psi(x)) = \sum_{i=1}^{k} d(\psi, \Omega_{a_i}, p).$$

Portanto,

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\psi, \Omega_{a_i}, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\phi, \Omega_{a_i}, p).$$

9) Como $\partial\Omega \subset \partial(\Omega\backslash K) \subset (K \cup \partial\Omega)$, segue que $p \notin \phi(\partial(\Omega\backslash K)$, já que $p \notin \phi(K \cup \partial\Omega)$, e $0 < d_\infty(p, \phi(K \cup \partial\Omega)) \leq d_\infty(p, \phi(\partial(\Omega\backslash K))) \leq d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$.

Pela Proposição 1.4, existe $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \phi - \psi \|_C < d_\infty(p, \phi(K \cup \partial\Omega))$, $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$ e $p \notin \psi(Z_\psi)$.

Assim, pela definição do grau de Brouwer, temos que

$$d(\phi, \Omega\backslash K, p) = d(\psi, \Omega\backslash K, p).$$

Nos resta mostrar que $d(\psi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega\backslash K, p)$. Suponha que $p \in \psi(K)$, então existe $x \in K$ tal que $\psi(x) = p$, assim

$$|\phi(x) - p|_\infty = |\phi(x) - \psi(x)|_\infty \leq \| \phi - \psi \|_C < d_\infty(p, \phi(K \cup \partial\Omega)),$$

o que é um absurdo, portanto, $\psi^{-1}(\{p\}) \subset \Omega\backslash K$ e daí

$$d(\psi, \Omega, p) = \sum_{x\in\psi^{-1}(\{p\})} sgn(J_\psi(x)) = \sum_{x\in\psi^{-1}(\{p\})\subset(\Omega\backslash K)} sgn(J_\psi(x)) = d(\psi, \Omega\backslash K, p).$$

Concluímos assim que

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega\backslash K, p) = d(\phi, \Omega\backslash K, p).$$

□

### 1.1.4 Aplicações do grau de Brouwer

Nesta seção, fornecemos algumas aplicações da teoria do grau de Brouwer, dentre as quais se destacam o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer, Teorema de Borsuk e Teorema de Borsuk-Ulam.

**Teorema 1.3** (Ponto Fixo de Brouwer)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto não- vazio, compacto e convexo e $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ uma função contínua. Então, $\phi$ possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = x$. A conclusão permanece válida se $\Omega$ é homeomorfo a um conjunto compacto e convexo.

*Demonstração.* Consideraremos três casos:
**Caso 1:** $\Omega = \overline{B(0,r)}$.

Podemos assumir que $\phi(x) \neq x$ em $\partial\Omega$, caso contrário o teorema está provado. Defina a seguinte homotopia entre a função identidade $I$ e $\phi$:

$$H_t(x) = x - t\phi(x), \quad x \in \Omega, \ t \in [0,1]$$

e note que $0 \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$. De fato, suponha que exista $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$ tais que

$$H(t,x) = x - t\phi(x) = 0.$$

Se $t = 1$, então $\phi(x) = x$, o que contradiz $\phi(x) \neq x$ em $\partial\Omega$. Se $t \in [0,1)$, então $x = t\phi(x)$. Como $x \in \partial\Omega$, segue que $r = |x| = |t\phi(x)| = t|\phi(x)| \leq tr < r$, o que é uma contradição. Logo, $0 \notin H_t(\partial\Omega)$ e assim pela invariância homotópica (Teorema 1.2, item 3), temos que para todo $t \in [0,1]$ vale a seguinte relação

$$d(H_t, \Omega, 0) = d(I, B(0,r), 0) = 1.$$

Assim, pela propriedade de solução (Teorema 1.2, item 1), existe $x \in B(0,r)$ tal que

$$H_1(x) = 0 \Leftrightarrow x - \phi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = x.$$

**Caso 2:** $\Omega$ é um conjunto compacto e convexo.

Como $\Omega$ é fechado e $\phi$ é contínua, segue do teorema de Dugundji (ver Apêndice, Teorema A.2) que $\phi$ pode ser estendida a uma função $\hat{\phi} : \mathbb{R}^N \longrightarrow conv(\phi(\Omega))$. Portanto, $\hat{\phi}(\mathbb{R}^N) \subset \Omega$, pois $\phi(\Omega) \subset \Omega$ e $\Omega$ é convexo.

Considere uma bola $\overline{B(0,r)}$ tal que $\Omega \subset \overline{B(0,r)}$. Pelo Caso 1, $\hat{\phi} : \overline{B(0,r)} \longrightarrow \Omega$ possui um ponto fixo em $\overline{B(0,r)}$, isto é, $\hat{\phi}(x) = x$, para algum $x \in \Omega$. Portanto $\hat{\phi}(x) = \phi(x) = x$.

**Caso 3:** $\Omega$ é homeomorfo a um conjunto compacto e convexo.

Considere $A \subset \mathbb{R}^N$ compacto, convexo e $h : A \longrightarrow \Omega$ um homeomorfismo. Por hipótese, $h^{-1}\phi h : A \longrightarrow A$ é contínuo e pelo Caso 2 possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in A$ tal que $h^{-1}\phi h(x) = x$, donde $\phi(h(x)) = h(x)$. Como $h(A) \subset \Omega$, concluímos que $\phi$ possui um ponto fixo em $\Omega$. □

**Proposição 1.5.** Não existe uma função contínua $\phi : \overline{B(0,1)} \longrightarrow \partial B(0,1)$ tal que $\phi(x) = x$, para todo $x \in \partial B(0,1)$.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que exista $\phi : \overline{B(0,1)} \longrightarrow \partial B(0,1)$ tal que $\phi(x) = x$, para todo $x \in \partial B(0,1)$. Defina $\psi : \overline{B(0,1)} \longrightarrow \partial B(0,1)$ por $\psi = -\phi$. Temos que $\psi$ é contínua e $\overline{B(0,1)}$ é compacto e convexo. Assim, pelo teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 1.3), $\psi$ possui um ponto fixo $x_0$ em $\overline{B(0,1)}$, isto é, $x_0 = \psi(x_0) = -\phi(x_0)$. Como $\phi(x) = x$ para todo $x \in \partial B(0,1)$, segue que $x_0 = -\phi(x_0) = -x_0$ e portanto $x_0 = 0$, o que é um absurdo, visto que $x_0 \in \partial B(0,1)$. □

Vamos agora enunciar e provar o teorema de Borsuk, para tanto deixamos entendido que um conjunto $\Omega$ é simétrico em relação à origem se $0 \in \Omega$ e dado $x \in \Omega$, então $-x \in \Omega$. Nesse caso, dizemos que a função $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é ímpar se $\phi(x) = -\phi(-x)$, para todo $x \in \Omega$.

**Teorema 1.4** (Borsuk)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e simétrico com respeito à origem, $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ímpar e $0 \notin \phi(\partial\Omega)$. Então $d(\phi, \Omega, 0)$ é um inteiro ímpar.

*Demonstração.* Segue a demonstração do teorema.

**Afirmação 1:** $\phi$ pode ser tomada de modo que $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $J_\phi(0) \neq 0$.

De fato, pelo Teorema A.3 (ver Apêndice), existe $\psi_0 \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\| \psi_0 - \phi \|_C < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))/2$. Agora, tome $\psi_1$ a parte ímpar de $\psi_0$, isto é,

$$\psi_1(x) = \frac{\psi_0(x) - \psi_0(-x)}{2} \text{ e } 0 < \delta < \frac{d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))}{2 \| I \|_C},$$

onde $\delta$ é suficientemente pequeno de modo que não seja autovalor de $\psi_1'(0)$.

Note que, $\gamma := \psi_1 - \delta I$ é ímpar e $\gamma \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Além disso, $J_\gamma(0) \neq 0$, pois caso contrário existiria $x \neq 0$ tal que $0 = \gamma'(0)x = \psi_1{}'(0)x - \delta x$, isto é, $\psi_1{}'(0)x = \delta x$, donde concluiríamos que $\delta$ é autovalor de $\psi_1{}'(0)$, o que é impossível pela escolha feita para $\delta$. Por outro lado, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que

$$\begin{aligned}
|\gamma(x) - \phi(x)|_\infty &= |\psi_1(x) - \delta x - \phi(x)|_\infty \\
&= \left| \frac{\psi_0(x) - \psi_0(-x)}{2} - \phi(x) - \delta x \right|_\infty \\
&= \left| \frac{\psi_0(x) - \psi_0(-x)}{2} - \frac{2\phi(x)}{2} - \delta \cdot I(x) \right|_\infty \\
&\leq \frac{|\psi_0(x) - \phi(x)|_\infty}{2} + \frac{|\phi(-x) - \psi_0(-x)|_\infty}{2} + \delta |I(x)|_\infty \\
&\leq \| \psi_0 - \phi \|_C + \delta \cdot \| I \|_C < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega)),
\end{aligned}$$

desse modo $\| \gamma - \phi \|_C < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))$. Assim, pela Definição 1.5 e $d(\phi, \Omega, 0) = d(\gamma, \Omega, 0)$, caso $\phi$ não satisfaça as condições da afirmação, podemos substituí-la por $\gamma$.

**Afirmação 2:** Existe $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, com $\psi$ ímpar, $0 \notin \psi(Z_\psi(\Omega))$ e $\| \psi - \phi \|_C < \epsilon$, onde $0 < \epsilon < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))$.

A construção de $\psi$ é feita por indução. Para tanto, considere o conjunto aberto e limitado $\Omega_k = \{x \in \Omega : x_i \neq 0 \text{ para algum } i \leq k\}$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ ímpar tal que $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$. Como $\overline{\Omega}$ é limitado, existe uma constante $c > 0$ tal que $|\varphi(x_i)| < c$, $i \in \{1, \cdots, N\}$, para todo $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) \in \overline{\Omega}$.

Defina $\overline{\phi} : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por $\overline{\phi}(x) = \phi(x)/\varphi(x_1)$, onde $\Omega_1 = \{x \in \Omega : x_1 \neq 0\}$. Pelo Lema de Sard (Lema 1.4), existe $y_1 \notin \overline{\phi}(Z_{\overline{\phi}})$ com $|y_1 - 0|_\infty < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))/(2c)$.

Agora considere $\psi_1 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $\psi_1(x) = \phi(x) - \varphi(x_1)y_1$. É claro que $\psi_1 \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é ímpar. Além disso, $0 \notin \psi_1(Z_{\psi_1}(\Omega_1))$, caso contrário existiria $x^* \in \Omega_1$ tal que $\psi_1(x^*) = \phi(x^*) - \varphi(x_1^*)y_1 = 0$, isto é, $y_1 = \phi(x^*)/\varphi(x_1^*) = \overline{\phi}(x^*)$, e $J_{\psi_1}(x^*) = 0$. Ora,

$$\begin{aligned}
\partial_i\psi_1(x) &= \partial_i\phi(x) - \partial_i\varphi(x_1)\frac{\phi(x)}{\varphi(x_1)} \\
&= \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_1)}\left[\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_1)}\partial_i\phi(x) - \partial_i\varphi(x_1)\frac{\phi(x)}{\varphi(x_1)}\right] \\
&= \varphi(x_1)\left[\frac{\varphi(x_1)\partial_i\phi(x) - \partial_i\varphi(x_1)\phi(x)}{(\varphi(x_1))^2}\right] \\
&= \varphi(x_1)\partial_i\overline{\phi}(x), \quad \forall i = 1, \cdots, N
\end{aligned}$$

o que implica em $\psi_1'(x^*) = \varphi(x_1^*)\overline{\phi}(x^*)$, donde concluímos que $y_1 \notin \overline{\phi}(Z_{\overline{\phi}})$, contrariando assim nossa escolha de $y_1$. Portanto, $0 \notin \psi_1(Z_{\psi_1}(\Omega_1))$. Também observe que pela definição de $\psi_1$ temos

$$|\psi_1(x) - \phi(x)|_\infty = |\varphi(x_1)y_1|_\infty \leq |\varphi(x_1)|\,|y_1|_\infty < c \cdot \frac{d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))}{2c} < \frac{d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))}{2},$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e portanto $\| \psi_1 - \phi \|_C < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))$.

Suponha, por hipótese de indução, que exista $\psi_k \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, com $\psi_k$ ímpar, $0 \notin \psi_k(Z_{\psi_k}(\Omega_k))$ e $\| \psi_k - \phi \|_C < (2^k - 1)d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))/2^k$, para $k < N$.

Definimos $\psi_{k+1} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por $\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) - \varphi(x_{k+1})y_{k+1}$, onde $y_{k+1} \notin \overline{\phi}(Z_{\overline{\phi}})$ satisfaz $|y_{k+1}|_\infty < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))/(2^{k+1}c)$ e é tal que 0 é valor regular de $\psi_{k+1}$ em $\{x \in \Omega : x_{k+1} \neq 0\}$. É claro que $\psi_{k+1} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é ímpar e além disso

$$\begin{aligned}
\| \phi - \psi_{k+1} \|_C &= \| \phi - \psi_k(x) + \varphi(x_{k+1})y_{k+1} \|_C \\
&\leq \| \phi - \psi_k(x) \|_C + c|y_{k+1}|_\infty \\
&< \frac{(2^k - 1)d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))}{2^k} + c\frac{d_\infty(0, \phi(\partial\Omega))}{2^{k+1}c} \\
&< \left[\frac{(2^k - 1)}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right] d_\infty(0, \phi(\partial\Omega)) \\
&= \left[\frac{2(2^k - 1) + 1}{2^{k+1}}\right] d_\infty(0, \phi(\partial\Omega)) \\
&= \left[\frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}\right] d_\infty(0, \phi(\partial\Omega)) < d_\infty(0, \phi(\partial\Omega)).
\end{aligned}$$

Portanto, para concluir a indução, nos resta verificar que $0 \notin \psi_{k+1}(Z_{\psi_{k+1}}(\Omega_{k+1}))$. Para isso, tome $x \in \Omega_{k+1}$ e note que se $x_{k+1} = 0$, então $\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) + \varphi(0)y_{k+1} = \psi_k(x)$. Como $0 \notin \psi_k(Z_{\psi_k}(\Omega_k))$ e $x \in \Omega_k$, segue que $0 \notin \psi_{k+1}(Z_{\psi_{k+1}}(\Omega_{k+1}))$.

Agora, considerando $\psi_N = \psi$, temos $\psi$ ímpar e $0 \notin \psi(Z_\psi(\Omega_N))$, onde $\Omega_N = \Omega \backslash \{0\}$. Além disso, como $\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) - \varphi(x_{k+1})y_{k+1}$, segue que

$$\partial_i \psi_{k+1}(x) = \partial_i \psi_k(x) \quad \text{se} \quad i \neq k+1 \quad \text{e} \quad \partial_{k+1}\psi_{k+1}(x) = \partial_{k+1}\psi_k(x) - \varphi'(x_{k+1})y_{k+1}.$$

Desde que $\varphi'(0) = 0$, concluímos que

$$\psi'_{k+1}(0) = \psi'_{k+1}(0) = \psi_k{}'(0)$$

e daí $\psi_N{}'(0) = \psi_1{}'(0) = \phi'(0) + \varphi'(0)y_1 = \phi'(0) \neq 0$. Portanto, $0 \notin \psi(Z_\psi(\Omega))$, o que conclui a prova da afirmação 2.

Por fim, pela afirmação 2, podemos acionar a Proposição 1.5 e a Definição 3.1 e assim obter

$$d(\phi, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{x \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn(J_\psi(x)) = sgn(J_\psi(0)) + \sum_{0 \neq x \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn(J_\psi(x)).$$

Para concluir, observe que do fato de $\psi$ ser ímpar, segue que se $x \in \psi^{-1}(\{0\})$ então $-x \in \psi^{-1}(\{0\})$, pois $\psi(x) = 0$ implica em $0 = -\psi(x) = \psi(-x)$. Portanto, $\psi^{-1}(\{0\}) \backslash \{0\}$ possui um número par de elementos e daí $d(\phi, \Omega, 0)$ é um inteiro ímpar, já que $sgn(J_\psi(0)) \in \{-1, 1\}$ e $\displaystyle\sum_{0 \neq x \in \psi^{-1}(\{0\})} sgn(J_\psi(x))$ é um inteiro par. □

O teorema de Borsuk, além de ser um resultado que pode nos fornecer existência e até mesmo multiplicidade de soluções para a equação $\phi(x) = 0$, caso $d(\phi, \Omega, 0) \neq 1$ ou $-1$, ele tem diversas consequências interessantes.

**Corolário 1.1.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e simétrico com respeito à origem e $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $0 \notin \phi(\partial\Omega)$ e $\phi(-x) \neq \lambda\phi(x)$ em $\partial\Omega$, para todo $\lambda \geq 1$. Então $d(\phi, \Omega, 0)$ é um inteiro ímpar.

*Demonstração.* Considere $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $H(t,x) = H_t(x) = \phi(x) - t\phi(-x)$, que é uma homotopia entre $\phi$ e $\psi(x) = \phi(x) - \phi(-x)$. Afirmamos que $0 \notin H_t(\partial\Omega)$, para $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$. Com efeito,

- para $t = 0$, $H_0(x) = \phi(x) \neq 0$, pois $0 \notin \phi(\partial\Omega)$,
- para $t = 1$, $H_1(x) = \phi(x) - \phi(-x) \neq 0$, pois $\phi(-x) \neq \phi(x)$ em $\partial\Omega$,
- se $t \in (0,1)$ e $H_t(x) = 0$, então $1/t > 1$ e

$$\phi(x) - t\phi(-x) = 0 \Rightarrow \phi(-x) = \frac{1}{t}\phi(x),$$

o que é uma contradição.

Logo, $0 \notin H_t(\partial\Omega)$ e portanto pela invariância homotópica (Teorema 1.2, item 3), temos

$$d(\phi, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, 0).$$

Além disso, como $\psi$ é ímpar e $\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, o teorema de Borsuk (Teorema 1.4) nos garante que $d(\psi, \Omega, 0)$ é um inteiro ímpar. Portanto, $d(\phi, \Omega, 0)$ é um inteiro ímpar. □

**Corolário 1.2** (Borsuk- Ulam)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e simétrico com respeito à origem e $\phi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ contínua, com $M < N$. Então $\phi(x) = \phi(-x)$, para algum $x \in \partial\Omega$.

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que $\phi(x) - \phi(-x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e considere $\hat{\phi} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^M$ uma extensão contínua de $\phi$, cuja existência é garantida pelo teorema de Dugundji (ver Apêndice, Teorema A.2).

Identificando

$$\mathbb{R}^M = \{x = (x_1, \cdots, x_M, x_{M+1}, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_{M+1} = \cdots = x_N = 0\}$$

e definindo

$$\psi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^M, \text{ por } \psi(x) = \hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(-x),$$

temos que se $x \in \partial\Omega$ então $\psi(x) = \hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(-x) \neq 0$. Daí, segue do teorema de Borsuk (Teorema 1.4) que $d(\psi, \Omega, 0) \neq 0$, já que $0 \notin \psi(\partial\Omega)$ e $\psi$ é ímpar.

Considere $r < d_\infty(0, \psi(\partial\Omega)$. Assim, acionando o item 4 do Teorema 1.2, concluímos que para cada $y \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ vale $d(\psi, \Omega, y) = d(\psi, \Omega, 0) \neq 0$. Por outro lado, pela propriedade de solução (Teorema 1.2, item 1), temos ainda que para todo $y \in B(0, r)$ existe $x \in \Omega$ tal que $\psi(x) = y$, ou seja, $B(0, r) \subset \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^M$, o que é uma contradição já que $M < N$. □

**Exemplo 1.** Assuma que a superfície do planeta Terra seja esférica e que a temperatura e pressão variem continuamente sobre a superfície. Então o teorema de Borsuk-Ulam assegura que existe um par de pontos antípodais com a mesma temperatura e pressão.

## 1.2 Generalização do grau topológico

Para a construção do grau de Brouwer, que apresentamos nas seções anteriores, um aspecto é essencial: a igualdade entre as dimensões do domínio e do contradomínio de $\phi$. De fato, se essa condição não se cumprir, não podemos provar o Lema 1.1 e portanto não podemos garantir a consistência da primeira definição de grau. Nesta seção, apresentaremos uma generalização do grau topológico para funções com domínio e contradomínio em espaços euclidianos de dimensões diferentes. Neste caso, uma condição adicional deve ser exigida de $\phi$.

No que segue, assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado, $T : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ é contínua, com $M < N$, e $p \in \mathbb{R}^M \backslash T(\partial\Omega)$. Faremos a seguinte identificação:

$$\mathbb{R}^M = \{x = (x_1, \cdots, x_M, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_{M+1} = \cdots = x_N = 0\}$$

e definiremos

$$\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^M \text{ por } \phi = I - T,$$

ou seja, $\phi(x) = (x_1 - T_1(x), \cdots, x_M - T_M(x), x_{M+1}, \cdots, x_N)$.

**Teorema 1.5.** Sejam $T : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ contínua, $p \in \mathbb{R}^M \backslash T(\partial\Omega)$ e $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ dada por $\phi(x) = x - T(x)$. Então o grau de $\phi$ em $p$ com respeito a $\Omega$ é dado por $d(\phi, \Omega, p) = d(\phi_M, \Omega \cap \mathbb{R}^M, p)$, onde $\phi_M$ é a restrição de $\phi$ a $\overline{\Omega \cap \mathbb{R}^M}$.

*Demonstração.* Afirmamos que $\phi^{-1}(\{p\}) = \phi_M^{-1}(\{p\})$. De fato, a inclusão $\phi_M^{-1}(\{p\}) \subset \phi^{-1}(\{p\})$ é imediata, assim, nos resta mostrar que $\phi^{-1}(\{p\}) \subset \phi_M^{-1}(\{p\})$. Para isso, tome $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = p$, então

$$\phi(x) = x - T(x) = p \Rightarrow x = p + T(x) \in \mathbb{R}^M.$$

Logo, $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^M$, isto é, $\phi^{-1}(\{p\}) \subset \phi_M^{-1}(\{p\})$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $T \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin \phi(Z_\phi)$. Além disso, denotaremos por $\phi_M$ a restrição de $\phi$ a $\overline{\Omega \cap \mathbb{R}^M}$ e $I_k$ a matriz identidade $k \times k$, para $k \in \mathbb{N}$.

Suponha $\phi(x) = p$, para algum $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^M$. Então,

$$J_\phi(x) = \det \begin{bmatrix} 1-\partial_1 T_1(x) & -\partial_2 T_1(x) & \cdots & -\partial_M T_1(x) & -\partial_{M+1} T_1(x) & \cdots & -\partial_N T_1(x) \\ -\partial_1 T_2(x) & 1-\partial_2 T_2(x) & \cdots & -\partial_M T_2(x) & -\partial_{M+1} T_2(x) & \cdots & -\partial_N T_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\partial_1 T_M(x) & -\partial_2 T_M(x) & \cdots & 1-\partial_M T_M(x) & -\partial_{M+1} T_M(x) & \cdots & -\partial_N T_M(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

que escrevendo na forma de matriz em blocos nos fornece

$$J_\phi(x) = \det \begin{bmatrix} I_M - \nabla_M T(x) & -\nabla_{M \times N-M} T(x) \\ O_{N-M \times M} & I_{N-M} \end{bmatrix},$$

em que

- $\nabla_M T(x)$ é a submatriz extraída da matriz jacobiana de $T$ contendo as derivadas parciais das coordenadas $T_i$, $i = 1, \cdots, M$, em relação às variáveis $x_j, j = 1, \cdots, M$;

- $\nabla_{M \times N-M} T(x)$ é a submatriz extraída da matriz jacobiana de $T$ contendo as derivadas parciais das coordenadas $T_i$, $i = 1, \cdots, M$, em relação às variáveis $x_i, i = M + 1, \cdots, N$,

- $O_{N-M \times M}$ é a matriz nula de ordem $N - M \times M$.

Daí,

$$J_\phi(x) = \det(I_M - \nabla_M T(x)) \cdot \det(I_{N-M}) = \det(I_M - \nabla_M T(x)).$$

Por outro lado, como $\phi_M$ é a restrição de $\phi$ a $\overline{\Omega \cap \mathbb{R}^M} \subset \mathbb{R}^M$, temos

$$\begin{aligned} J_{\phi_M}(x) &= \det \begin{bmatrix} 1 - \partial_1 T_1(x) & -\partial_2 T_1(x) & \cdots & -\partial_M T_1(x) \\ -\partial_1 T_2(x) & 1 - \partial_2 T_2(x) & \cdots & -\partial_M T_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\partial_1 T_M(x) & -\partial_2 T_M(x) & \cdots & -\partial_M T_M(x) \end{bmatrix} \\ &= \det(I_M - \nabla_M T(x)) \end{aligned}$$

donde $J_\phi(x) = J_{\phi_M}(x)$. Sabendo que $\phi^{-1}(\{p\}) = \phi_M^{-1}(\{p\})$, segue da Definição 3.1 que

$$d(\phi_M, \Omega \cap \mathbb{R}^M, p) = d(\phi, \Omega, p).$$

□

Podemos ainda definir grau para operadores contínuos definidos em espaços vetoriais de dimensão finita, mas não necessariamente espaços euclidianos.

**Definição 1.7.** Sejam $E$ um espaço vetorial normado de dimensão finita, $\phi : \Omega \subset E \longrightarrow E$ uma função contínua e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Definimos o grau de $\phi$ em $p$ com respeito a $\Omega$ por $d(\phi, \Omega, p) = d(h\phi h^{-1}, h(\Omega), h(p))$, onde $h : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é o homeomorfismo linear definido por $h(x_i) = \epsilon_i$, com $\{x_i, \cdots, x_N\}$ e $\{\epsilon_i, \cdots, \epsilon_N\}$ bases de $E$ e $\mathbb{R}^N$, respectivamente.

Primeiramente, note que de $p \notin \phi(\partial\Omega)$, segue que

$$h(p) \notin h(\phi(\partial\Omega)) = (h\phi\ h^{-1}h)(\partial\Omega) = (h\phi h^{-1})(h(\partial\Omega)) \subset (h\phi h^{-1})(\partial h(\Omega)),$$

onde a última inclusão ocorre pelo fato de $h$ ser homeomorfismo. Portanto, $h(p) \notin (h\phi h^{-1})(\partial h(\Omega))$ e assim faz sentido calcular $d(h\phi h^{-1}, h(\Omega), h(p))$.

Para garantir a consistência da definição, basta verificarmos que a definição faz sentido independente da base $\{x_1, \cdots, x_N\}$ escolhida. Para tanto, consideraremos apenas o caso em que $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, E)$.

Sejam $\{x_1, \cdots, x_N\}$ e $\{y_1, \cdots, y_N\}$ duas bases de $E$ e considere a matriz de mudança de base $A$, daí $\det A \neq 0$. Dado $x \in \Omega$, adotaremos as seguintes notações $\hat{x} = A(x)$, $\hat{\Omega} = A(\Omega)$ e $\hat{\phi}(\hat{x}) = A\phi(x) = A\phi(A^{-1}Ax) = A\phi(A^{-1}\hat{x})$. Assim, segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned}
J_{\hat{\phi}}(\hat{x}) &= \det(\nabla\hat{\phi}(\hat{x})) = \det(\nabla(A\phi(A^{-1}\hat{x})) \\
&= \det(A\nabla\phi(A^{-1}\hat{x})A^{-1}) \\
&= \det(A)\det(\nabla\phi(A^{-1}\hat{x}))\det(A^{-1}) \\
&= \det(A)J_\phi(x)(\det A)^{-1} \\
&= J_\phi(x).
\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 3.1, segue a independência da base escolhida, já que $J_{\hat{\phi}}(\hat{x}) = J_\phi(x)$, o que implica em $d(\phi, \Omega, p) = d(\hat{\phi}, \hat{\Omega}, p)$.

## 1.3 Grau de Leray-Schauder

Na Seção 1.1 tratamos do grau topológico para funções definidas em espaços vetoriais de dimensão finita, porém muitos problemas matemáticos, como equações diferenciais, equações integrais e equações integro-diferenciais podem ser formulados em equações da forma $\phi(x) = p$, com $\phi$ definida em espaços vetoriais de dimensão infinita. Este fato levou Jean Leray e Juliusz Schauder a mostrarem, em 1934, que existe uma versão similar da teoria do grau em dimensão finita (Grau de Brouwer) para espaços de dimensão infinita. Nesta seção, apresentaremos a construção do grau de Leray-Schauder usando ferramentas de Análise Funcional. Como aplicação desse estudo, forneceremos dois resultados de ponto fixo, que são ferramentas poderosas no estudo de existência de soluções para equações diferenciais. Finalmente, trataremos do conceito de índice de uma solução isolada, que será amplamente utilizada no Capítulo 3.

Antes de iniciar o estudo do grau de Leray-Schauder, veremos através do exemplo a seguir que para aplicações definidas em espaços de dimensão infinita, somente a continuidade do operador não é suficiente para garantir a consistência do grau topológico. De acordo com Fonseca e Gangbo [14], tal exemplo foi apresentado por Leray, em 1936.

**Exemplo 2.** Considere $E$ o espaço de Banach das funções contínuas $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, munido da norma usual $\| x \|_C = \max\limits_{s\in[0,1]} |x(s)|$. Sejam $x_0(s) = 1/2$, para todo $s \in [0,1]$, e $\Omega = \{x \in E : \| x - x_0 \|_C < 1/2\} = B(x_0, 1/2)$. Afirmamos que não existe uma função

$$d : \{(\phi, \Omega, p) : \Omega \subset E \text{ é aberto e limitado, } \phi : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ é contínua e } p \notin \phi(\partial\Omega)\} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

satisfazendo as seguintes condições.

i) $d(I, \Omega, p) = 1$, se $p \in \Omega$, onde $I$ é o operador identidade de $\Omega$;

ii) $d(\phi, \Omega, p) \neq 0$ implica que $p \in \phi(\Omega)$;

iii) $d(H_t, \Omega, p)$ é independente de $t$, se $H_t$ é uma homotopia tal que $p \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0, 1]$.

*Demonstração.* Suponha que exista tal função. Considere a função contínua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq 1/2, \\ 1 - s, & 1/2 \leq s \leq 5/8, \\ \frac{5}{3}(s-1) + 1 & 5/8 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

e defina $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ por $\phi(x) = \gamma \circ x$. Considere ainda a homotopia $H_t(x) = tx + (1-t)\phi(x)$, $t \in [0, 1]$ e $x \in \overline{\Omega}$. Como $\overline{\Omega}$ é convexo e $\phi(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$, temos que $H_t(x) \in \overline{\Omega}$. De fato, dado $x \in \overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned} \| H_t(x) - x_0 \|_C &= \max_{s \in [0,1]} |H_t(x(s)) - x_0(s)| \\ &= \max_{s \in [0,1]} \left| tx(s) + (1-t)\phi(x(s)) - \frac{1}{2} \right| \\ &= \max_{s \in [0,1]} \left| tx(s) + (1-t)\phi(x(s)) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(1-t) \right| \\ &= \max_{s \in [0,1]} \left| t\left[x(s) - \frac{1}{2}\right] + (1-t)\left[\phi(x(s)) - \frac{1}{2}\right] \right| \\ &\leq \max_{s \in [0,1]} \left( t\left|x(s) - \frac{1}{2}\right| + (1-t)\left|\phi(x(s)) - \frac{1}{2}\right| \right) \\ &\leq \max_{s \in [0,1]} \left( t\frac{1}{2} + (1-t)\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Afirmação 1:** $H_t(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$, para todo $t \in [0, 1]$.

De fato, tome $x \in \partial\Omega$ e fixe $t \in [0, 1]$. Pela definição de $\Omega$ temos

$$\| x - x_0 \|_C = \max_{s \in [0,1]} |x(s) - x_0(s)| = 1/2$$

e portanto existe $s_0 \in [0, 1]$ tal que

$$|x(s_0) - x_0(s_0)| = \left| x(s_0) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Logo, $x(s_0) \in \{0,1\}$, o que implica em $H_t(x(s_0)) \in \{0,1\}$. Assim,

$$|H_t(x(s_0)) - x_0(s_0)| = \left|H_t(x(s_0)) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Sabemos que $\| H_t(x) - x_0 \|_C \geq |H_t(x(s_0)) - x_0(s_0)| = 1/2$, por outro lado, $\| H_t(x) - x_0 \|_C \leq 1/2$. Portanto, $\| H_t(x) - x_0 \|_C = 1/2$, concluindo assim que $H_t(x) \in \partial\Omega$, isto é, $H_t(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$, para todo $t \in [0,1]$.

**Afirmação 2**: Existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = p$, onde $p(s) = s/2 + 1/4$, para todo $s \in [0,1]$, e $p \notin \phi(\partial\Omega)$.

Seja $p \in E$ dada por $p(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}$, então

$$\| p - x_0 \|_C = \max_{s\in[0,1]} \left|\frac{1}{2}s + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4},$$

portanto $p \notin \partial\Omega$. Pela afirmação 1, temos que $p \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$, e assim $d(H_t, \Omega, p)$ está bem definido. Como $H$ é uma homotopia, pelos itens i) e iii) temos

$$d(\phi, \Omega, p) = d(I, \Omega, p) = 1.$$

Então, pelo item ii), existe $x \in \Omega$ tal que $\gamma \circ x = \phi(x) = p$.

**Afirmação 3**: A equação $x(s) = 1/2$ possui uma única solução.

De fato,

$$p(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \gamma \circ x(0) = \phi(x(0)) = p(0) = \frac{1}{4}.$$

Como, $\gamma^{-1}\left(\left\{\frac{1}{4}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{4}\right\}$, temos $x(0) = \frac{1}{4}$. Além disso,

$$\begin{aligned} p(1) = \frac{3}{4} &\Rightarrow \gamma(x(1)) = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \frac{5}{3}(x(1) - 1) + 1 = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow x(1) = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

Desde que $x$ é contínua e $x(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{17}{20} = x(1)$, a equação $x(s) = \frac{1}{2}$ possui solução para $s \in (0,1)$. Além disso, como $\gamma \circ x = p$, temos

$$\begin{aligned} x(s) = \frac{1}{2} &\Rightarrow \gamma(x(s)) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = p(s) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow s = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $s = 1/2$ é a única solução de $x(s) = 1/2$, o que prova a afirmação 3.

**Afirmação 4:** $x(s) > 1/2$ para $s \in (1/2, 1]$.

Pela afirmação 3 temos que $x(s) > 1/2$ ou $x(s) < 1/2$ para $s \in (1/2, 1]$. Entretanto, da continuidade de $x$ e da desigualdade $x(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{17}{20} = x(1)$, concluímos que $x(s) > 1/2$, para $s \in (1/2, 1]$, o que conclui a prova da afirmação 4.

Para obter a contradição desejada, observe que $p$ é crescente, logo, $p(s) > p(1/2) = 1/2$, para todo $s \in (1/2, 1]$. Por outro lado, pela afirmação 4 existe $\epsilon > 0$ tal que $x(s) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$, para todo $s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon\right]$. Assim,

$$p(s) = \gamma(x(s)) = 1 - x(s) \Rightarrow p(s) \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right],$$

para todo $s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon\right]$, isto é,

$$p\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \leq \frac{1}{2} = p\left(\frac{1}{2}\right),$$

o que é um absurdo, já que $p$ é crescente.

Portanto, alguma das propriedades i), ii) ou iii) não é satisfeita, concluindo assim que não é possível definirmos o grau em dimensão infinita para aplicações apenas contínuas. $\square$

Veremos que podemos estender o grau para dimensão infinita se nos restringirmos a perturbações compactas da identidade. Diante disso, apresentaremos algumas definições que serão essenciais para o estudo do grau de Leray-Schauder.

**Definição 1.8.** Sejam $E$, $F$ dois espaços de Banach. Dizemos que $T : M \subset E \longrightarrow F$ é um operador compacto se

(i) $T$ é contínuo;

(ii) $\overline{T(A)}$ é compacto, para todo $A \subset M$ limitado.

Denotaremos por $K(M)$ o conjunto dos operadores compactos de $M \subset E$ em $E$ e definiremos o conjunto das perturbações compactas da identidade em $M$ por

$$K_1(M) := \{\phi : M \subset E \longrightarrow E : \phi = I - T,\ T \in K(M)\}.$$

Para o cálculo do grau topológico em espaços vetoriais de dimensão infinita recorremos ao grau topológico em dimensão finita, para isso utilizaremos resultados vistos na Seção 1.2 e também o conceito de operador de posto finito, que será introduzido a seguir.

**Definição 1.9.** Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $M \subset E$. Dizemos que $T : M \subset E \longrightarrow F$ é um operador de posto finito se $T$ é contínua e $T(M)$ está contido em um subespaço de $F$ de dimensão finita.

O próximo resultado nos permite aproximar um operador compacto, definido em em um conjunto limitado, por operadores de posto finito. Tal teorema será fundamental para a definição do grau de Leray-Schauder.

**Teorema 1.6.** Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach munidos com as normas $\| \cdot \|_E$ e $\| \cdot \|_F$, respectivamente. Assuma que $M \subset E$ é um conjunto limitado e seja $T : M \longrightarrow F$ uma aplicação compacta. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $T_\epsilon : M \longrightarrow F$ tal que $T_\epsilon(M)$ tem dimensão finita em $F$ e $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_F < \epsilon$, para todo $x \in M$.

*Demonstração.* Como $T$ é uma aplicação compacta, segue que $\overline{T(M)}$ é compacto. Tomemos $\epsilon > 0$ e considere uma cobertura de $\overline{T(M)}$ dada por

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{p \in \overline{T(M)}} B(p, \epsilon).$$

Pela compacidade de $\overline{T(M)}$, existem $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \overline{T(M)}$ tais que

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(p_i, \epsilon).$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, defina $m_i : M \longrightarrow F$ por $m_i(x, \epsilon) := \max\{0, \epsilon - \| T(x) - p_i \|_F\}$ e considere

$$\theta_i(x, \epsilon) := \frac{m_i(x, \epsilon)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x, \epsilon)}, \text{ para } x \in M.$$

Note que $\theta_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida e é contínua para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, pois $m_i(x, \epsilon)$ é contínua e para cada $x \in M$ existe $t \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $T(x) \in B(p_t, \epsilon)$, donde $\| T(x) - p_t \|_F < \epsilon$, isto é, $m_t(x, \epsilon) > 0$.

Defina

$$T_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x, \epsilon) p_j, \text{ para } x \in M$$

e observe que

$$\sum_{j=1}^{k} \theta_j(x, \epsilon) = \frac{m_1(x, \epsilon)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x, \epsilon)} + \cdots + \frac{m_k(x, \epsilon)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x, \epsilon)} = \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j(x, \epsilon)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x, \epsilon)} = 1.$$

Para $F_k := span\langle\{p_1, \ldots, p_k\}\rangle$, temos que $\dim(F_k) < \infty$ e por construção $T_\epsilon(M) \subset F_k$. Além disso,

$$T(x) - T_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x, \epsilon) T(x) - \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x, \epsilon) p_j = \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x, \epsilon) \left[ T(x) - p_j \right],$$

o que implica em

$$\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_F \leq \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x, \epsilon) \| T(x) - p_j \|_F < \epsilon, \text{ para todo } x \in M.$$

$\square$

Para a construção do grau de Brouwer, um fato muito importante utilizado na Definição 1.5 é que $d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) > 0$. Tal propriedade não é imediata quando $\phi : E \longrightarrow E$ é tal que $E$ é um espaço de Banach de dimensão infinita. O próximo resultado generaliza esse fato para perturbações compactas da identidade.

**Lema 1.5.** Sejam $E$ um espaço métrico, $\Omega \subset E$ aberto e limitado, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ compacto e suponha que $p \notin \phi(\partial\Omega)$, onde $\phi := I - T$. Então $r := d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) > 0$.

*Demonstração.* Por contradição, assuma que $0 = r = d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) = \inf_{x \in \partial\Omega} \| p - \phi(x) \|_E$. Assim, existe uma sequência $\{x_k\}$ em $\partial\Omega$ tal que $\| p - \phi(x_k) \|_E \to 0$. Da compacidade de $T$ e limitação de $\{x_k\}$ segue que $T(x_k) \to y$, para algum $y \in E$, a menos de subsequência. Diante disso, obtemos

$$p = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} (x_k - T(x_k)) = \lim_{k\to\infty} x_k - y,$$

isto é, $p + y = \lim_{k\to\infty} x_k$ e assim da continuidade de $T$ concluímos que

$$T(p + y) = \lim_{k\to\infty} T(x_k)) = y.$$

Logo, $\phi(p + y) = p + y - T(p + y) = p + y - y = p$, o que implica em $p \in \phi(\partial\Omega)$, o que é um absurdo. Portanto, $r = d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) > 0$. $\square$

A menos de menção contrária, consideraremos a partir de agora que $E$ é um espaço de Banach com a métrica induzida pela norma $\| \cdot \|_E$, $I$ é o operador identidade de $E$, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é um operador compacto e $\phi := I - T$ é uma perturbação compacta da identidade. Também assumiremos que $p \notin \phi(\partial\Omega)$, onde $\Omega \subset E$ é aberto e limitado.

Para $\epsilon > 0$, seja $T_\epsilon$ o operador de posto finito dado pelo Teorema 1.6. Adotaremos as seguintes notações: $V_\epsilon := span\langle\{T_\epsilon(\overline{\Omega}), p\}\rangle$, $\Omega_\epsilon = \Omega \cap V_\epsilon$, $\partial_\epsilon\Omega_\epsilon$ é a fronteira de $\Omega_\epsilon$ em $V_\epsilon$ e $\phi_\epsilon := I - T_\epsilon$. Podemos agora definir o grau de Leray-Schauder.

**Definição 1.10.** Sejam $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ compacto, $\phi := I - T$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. O grau de Leray-Schauder de $\phi$ em $p$ com respeito a $\Omega$ é definido pelo grau de Brouwer $d(\phi_\epsilon, \Omega_\epsilon, p)$, em que $0 < \epsilon < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, $\phi_\epsilon := I - T_\epsilon$ e $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é um operador de posto finito satisfazendo $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < \epsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ .

O Lema 1.5 garante que $0 < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, desse modo podemos acionar o Teorema 1.6 para garantir a existência de um operador de posto finito $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ tal que $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < \epsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, onde $0 < \epsilon < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$. Assim, para justificar a consistência da definição anterior, precisamos comprovar que $p \notin \phi_\epsilon(\partial_\epsilon\Omega)$ e que $d(\phi_\epsilon, \Omega_\epsilon, p)$ independe de $\epsilon \in (0, r)$.

Para a primeira parte, observe inicialmente que $\partial_\epsilon\Omega_\epsilon \subset \partial\Omega$, para $\epsilon \in (0, r)$. De fato, sejam $B(x, \delta)$ uma bola em $E$ com centro em $x \in \partial_\epsilon\Omega_\epsilon$ e raio $\delta > 0$ e $B_\epsilon(x, \delta)$ a restrição de

$B(x,\delta)$ a $V_\epsilon$. Então, $B_\epsilon(x,\delta)\cap\Omega_\epsilon \neq \emptyset$ e $B_\epsilon(x,\delta)\cap(V_\epsilon\backslash\Omega_\epsilon) \neq \emptyset$, donde $B_\epsilon(x,\delta)\cap(\Omega\cap V_\epsilon) \neq \emptyset$ e

$$B_\epsilon(x,\delta)\cap(V_\epsilon\cap(\Omega_\epsilon)^c) = B_\epsilon(x,\delta)\cap V_\epsilon\cap(\Omega^c\cup(V_\epsilon)^c) = B_\epsilon(x,\delta)\cap V_\epsilon\cap\Omega^c \neq \emptyset.$$

Como $B_\epsilon(x,\delta)\subset V_\epsilon$, segue que $B_\epsilon(x,\delta)\cap\Omega\neq\emptyset$ e $B_\epsilon(x,\delta)\cap\Omega^c\neq\emptyset$, o que implica em

$$B(x,\delta)\cap\Omega\neq\emptyset \text{ e } B(x,\delta)\cap\Omega^c\neq\emptyset$$

e portanto $x\in\partial\Omega$, o que nos leva a concluir que $\partial_\epsilon\Omega_\epsilon\subset\partial\Omega$. Diante disso, verificaremos que $p\notin\phi_\epsilon(\partial_\epsilon\Omega_\epsilon)$. Com efeito, pela definição de $\phi$ e $\phi_\epsilon$ temos

$$\| \phi(x)-\phi_\epsilon(x) \|_E=\| x-T(x)-x+T_\epsilon(x) \|_E=\| T(x)-T_\epsilon(x) \|_E<\epsilon<r, \tag{1.9}$$

para todo $x\in\overline{\Omega}$. Assim, se supormos que $p\in\phi_\epsilon(\partial_\epsilon\Omega_\epsilon)$, então deverá existir $x_0\in\partial_\epsilon\Omega_\epsilon\subset\partial\Omega$ tal que $\phi_\epsilon(x_0)=p$ e portanto de (1.9) concluímos que

$$\| \phi(x_0)-\phi_\epsilon(x_0) \|_E=\| \phi(x_0)-p \|_E<\epsilon<r=d_\infty(p,\phi(\partial\Omega)),$$

o que é um absurdo. Portanto, $p\notin\phi_\epsilon(\partial_\epsilon\Omega_\epsilon)$ e $d(\phi_\epsilon,\Omega_\epsilon,p)$ está bem definido.

Agora, verificaremos que $d(\phi_\epsilon,\Omega_\epsilon,p)$ independe da escolha de $\epsilon\in(0,r)$. Para isso, considere $\epsilon_1,\epsilon_2\in(0,r)$ e defina $V_0=span\langle\{V_{\epsilon_1},V_{\epsilon_2}\}\rangle$ e $\Omega_0=\Omega\cap V_0$. Da Definição 1.7, podemos calcular o grau em espaços vetoriais de dimensão finita e pelo Teorema 1.5 conseguimos calcular o grau de aplicações contínuas cuja dimensão do domínio é maior que a dimensão do contradomínio. Diante disso, temos

$$d(\phi_{\epsilon_i},\Omega_0,p)=d(\phi_{\epsilon_i},(\Omega\cap V_0)\cap V_{\epsilon_i},p)=d(\phi_{\epsilon_i},\Omega\cap V_{\epsilon_i},p)=d(\phi_{\epsilon_i},\Omega_{\epsilon_i},p),$$

para $i\in\{1,2\}$, isto é,

$$d(\phi_{\epsilon_1},\Omega_0,p)=d(\phi_{\epsilon_1},\Omega_{\epsilon_1},p) \text{ e } d(\phi_{\epsilon_2},\Omega_0,p)=d(\phi_{\epsilon_2},\Omega_{\epsilon_2},p). \tag{1.10}$$

Defina a homotopia $H:[0,1]\times\overline{\Omega_0}\longrightarrow E$ por

$$H(x,t)=t\phi_{\epsilon_1}(x)+(1-t)\phi_{\epsilon_2}(x).$$

Afirmamos que $p\notin H_t(\partial\Omega_0)$, $t\in[0,1]$. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\| H(t,x)-\phi(x) \|_E &=\| t\phi_{\epsilon_1}(x)+(1-t)\phi_{\epsilon_2}(x)-\phi(x) \|_E\\
&=\| t\phi_{\epsilon_1}(x)+(1-t)\phi_{\epsilon_2}(x)-(1-t)\phi(x)-t\phi(x) \|_E\\
&=\| t(\phi_{\epsilon_1}(x)-\phi(x))+(1-t)(\phi_{\epsilon_2}(x)-\phi(x)) \|_E\\
&\le\ t\,\| \phi_{\epsilon_1}(x)-\phi(x) \|_E+(1-t)\,\|_E\,\phi_{\epsilon_2}(x)-\phi(x) \|_E\\
&\le\ t\epsilon_1+(1+t)\epsilon_2\\
&< tr+(1-t)r=r.
\end{aligned}$$

Assim, para $x \in \partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} \| H(t,x) - p \|_E &= \| H(t,x) - \phi(x) + \phi(x) - p \|_E \\ &\geq \| \phi(x) - p \|_E - \| H(t,x) - \phi(x) \|_E \\ &> \| \phi(x) - p \|_E - r > 0, \end{aligned}$$

o que implica em $d_\infty(p, H_t(\partial\Omega_0)) > 0$, isto é, $p \notin H_t(\partial\Omega_0)$. Então, pela invariância homotópica (Teorema 1.7, item 3) e por (1.10) segue que

$$d(\phi_{\epsilon_1}, \Omega_{\epsilon_1}, p) = d(\phi_{\epsilon_1}, \Omega_0, p) = d(\phi_{\epsilon_2}, \Omega_0, p) = d(\phi_{\epsilon_2}, \Omega_{\epsilon_2}, p),$$

ou seja, o grau não depende da escolha de $\epsilon \in (0, r)$. Com isso, concluímos a justificativa da consistência da definição do grau de Leray-Schauder.

### 1.3.1 Propriedades do grau de Leray-Schauder

Veremos nesta seção que o grau de Leray-Schauder satisfaz propriedades semelhantes ao grau de Brouwer. Antes de introduzi-las, vamos definir o conceito de homotopia entre perturbações compactas da identidade e operadores compactos.

**Definição 1.11.** Sejam $M \subset E$ e $H : M \times [0,1] \longrightarrow E$. Dizemos que $H$ é uma homotopia de perturbações compactas da identidade (operadores compactos) em $M$, se:

i) $H_t = H(\cdot, t) \in K(M)$, para todo $t \in [0,1]$;

ii) dados $L \subset M$ um conjunto limitado e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\| H(x,s) - H(x,t) \|_E < \epsilon$, sempre que $x \in L$ e $|s - t| < \delta$.

**Teorema 1.7.** Sejam $E$ um espaço de Banach, $\Omega \subset E$ um conjunto aberto e limitado, $T \in K(\overline{\Omega})$, $\phi = I - T$, $p \notin \phi(\partial\Omega)$ e $r = d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$. As seguintes propriedades são válidas.

1. **(Normalização)** Se $p \in \Omega$, então $d(I, \Omega, p) = 1$. Se $p \notin \Omega$, então $d(I, \Omega, p) = 0$.

2. **(Solução)** Se $d(\phi, \Omega, p) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = p$.

3. **(Invariância homotópica)** Seja $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow E$ uma homotopia de operadores compactos em $\overline{\Omega}$. Defina

$$\phi_t = I - H(\cdot, t), \ \ t \in [0,1]$$

e assuma que $p \notin \phi_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$. Então $d(\phi_t, \Omega, p)$ é independente de $t$.

4. **(Continuidade)** Sejam $\phi, \psi \in K_1(\overline{\Omega})$ tais que $\| \phi(x) - \psi(x) \|_E < r$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, e assuma que $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Então, $p \notin \psi(\partial\Omega)$ e $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.

5. **(Fronteira)** Para $\phi, \psi \in K_1(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\phi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$, e $p \notin \phi(\partial\Omega)$, tem-se $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$.

6. **(Translação)** Para $q \in E$, vale a igualdade $d(\phi, \Omega, p) = d(\phi - q, \Omega, p - q)$.

7. **(Invariância sobre componente conexa)** Seja $C$ uma componente conexa de $E \backslash \phi(\partial\Omega)$. Então $d(\phi, \Omega, \cdot)$ é constante em $C$.

8. **(Decomposição)** Se $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$, onde $\Omega_i$ são abertos disjuntos, então existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ tais que
$$d(\phi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\phi, \Omega_{a_i}, p).$$

9. **(Excisão)** Sejam $\phi \in K_1(\overline{\Omega})$ e $p \notin \phi(\partial\Omega)$. Se $K \subset \overline{\Omega}$ é fechado e tal que $p \notin \phi(K)$, então
$$d(\phi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega \backslash K, p).$$

*Demonstração.* A prova de cada item é dada a seguir.

1. Para $0 < \epsilon < r$, tome $T_\epsilon(x) := 0$ para $x \in \overline{\Omega}$, $V_\epsilon = span\langle p \rangle$ e $\Omega_\epsilon = \Omega \cap V_\epsilon$. Claramente $T_\epsilon$ é um operador de posto finito e pela Definição 1.10 temos $d(I, \Omega, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_\epsilon, p)$. Se $p \in \Omega$, então $p \in \Omega_\epsilon$ e desde que $T_\epsilon(x) = 0$ segue da propriedade de normalização do grau de Brouwer que $d(I, \Omega, p) = d(I, \Omega_\epsilon, p) = 1$.

   Analogamente, se $p \notin \Omega$, então $p \notin \Omega_\epsilon$ e portanto $d(I, \Omega, p) = d(I, \Omega_\epsilon, p) = 0$.

2. Como $\Omega \subset E$ é um conjunto aberto e limitado e $T : \overline{D} \longrightarrow E$ é compacto, o Teorema 1.6 nos diz que para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $1/n < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, existe um operador de posto finito $T_n : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ tal que $\| T(x) - T_n(x) \|_E < 1/n$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

   Defina $V_n = span\langle \{T_n(\overline{\Omega}), p\} \rangle$ e $\Omega_n = \Omega \cap V_n$. Neste caso, segue da definição grau de Leray-Schauder (Definição 1.10) que
$$d(\phi, \Omega, p) = d(I - T, \Omega, p) = d(I - T_n, \Omega_n, p).$$

   Por hipótese, temos que $d(\phi, \Omega, p) \neq 0$, logo segue da igualdade anterior que $d(I - T_n, \Omega, p) \neq 0$ e assim pela propriedade de solução (Teorema 1.2, item 1) fica assegurada a existência de $x_n \in \Omega_n$ tal que $(I - T_n)(x_n) = x_n - T_n(x_n) = p$.

   Da limitação de $\overline{\Omega}$ e da compacidade de $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$, concluímos que, a menos de subsequência, $T(x_n) \to y$, para algum $y \in E$. Desse modo, segue da desigualdade $\| T(x) - T_n(x) \|_E < 1/n$ que $T_n(x_n) \to y$ e portanto
$$x_n = p + T_n(x_n) \to p + y \in \overline{\Omega}.$$

Como $\phi$ é contínua, concluímos que

$$\phi(y+p) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (I-T)(x_n) = \lim_{n\to\infty} [x_n - T(x_n)] = y + p - y = p.$$

Assim, da hipótese $p \notin \phi(\partial\Omega)$ segue que $(p+y) \in \Omega$ e portanto a equação $\phi(x) = p$ possui solução em $\Omega$, a saber, $x = y + p$.

3. Primeiramente, observemos que existe $k > 0$ tal que $\| p - \phi_t(x) \|_E \geq k$, para todo $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$.

De fato, caso contrário, para todo $k = 1/n$ existiriam $x_n \in \partial\Omega$ e $t_n \in [0,1]$ tais que $\| p - \phi_{t_n}(x_n) \|_E \leq 1/n$, donde

$$\lim_{n\to\infty} \| p - \phi_{t_n}(x_n) \|_E = 0.$$

Da compacidade do intervalo $[0,1]$, deve existir $s \in [0,1]$ tal que $t_n \to s$, para alguma subsequência. Desde que $H(\cdot, s)$ é compacto e $\{x_n\} \subset \partial\Omega$ é limitada, temos que $H(x_n, s) \to y$, para algum $y \in E$, a menos de subsequência. Daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \| p - \phi_s(x_n) \|_E &= \lim_{n\to\infty} \| p - \phi_{t_n}(x_n) + \phi_{t_n}(x_n) - \phi_s(x_n) \|_E \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (\| p - \phi_{t_n}(x_n) \|_E + \| \phi_{t_n}(x_n) - \phi_s(x_n) \|_E) \\
&= \lim_{n\to\infty} \| p - \phi_{t_n}(x_n) \|_E + \lim_{n\to\infty} \| \phi_{t_n}(x_n) - \phi_s(x_n) \|_E \\
&= 0 + \lim_{n\to\infty} \| x_n - H(x_n, t_n) - x_n + H(x_n, s) \|_E \\
&= \lim_{n\to\infty} \| -H(x_n, t_n) + H(x_n, s) \|_E = 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\phi_s(x_n) \to p$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - H(x_n, s) + H(x_n, s)) = \lim_{n\to\infty} (\phi_s(x_n) + H(x_n, s)) = p + y.$$

Como $\{x_n\} \subset \partial\Omega$, concluímos da relação anterior que $p + y \in \partial\Omega$. Desse modo, explorando a continuidade de $H(\cdot, s)$, obtemos

$$p = p + y - y = (p+y) - \lim_{n\to\infty} H(x_n, s) = (p+y) - H(p+y, s),$$

ou seja, $p = \phi_s(p+y) \in \phi_s(\partial\Omega)$, mas isso contradiz a hipótese $p \notin \phi_t(\partial\Omega)$. Assim, deve existir $k > 0$ tal que $\| p - \phi_t(x) \|_E \geq k$, para todo $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$.

Vamos agora definir a relação de equivalência $\mathcal{R}$ sobre o intervalo $[0,1]$ por

$$s\mathcal{R}t \Leftrightarrow d(\phi_s, \Omega, p) = d(\phi_t, \Omega, p).$$

Uma simples verificação nos permite concluir que a relação definida acima de fato é uma relação de equivalência. Mostraremos que cada classe de equivalência definida em $\mathcal{R}$ é um aberto em $[0,1]$. Para tanto, fixemos $s \in [0,1]$ e consideremos $C$ a classe de equivalência de $s$ com relação a $\mathcal{R}$.

Pelo Lema 1.5, sabemos que $r := d_\infty(p, \phi_s(\partial\Omega)) > 0$. Desse modo, tomando $0 < \epsilon < r/4$, segue do Teorema 1.6 que existe um operador compacto $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ de posto finito tal que $\| T_\epsilon(x) - H(x,s) \|_E < \epsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Por outro lado, pela definição de homotopia, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \| H(x,t) - H(x,s) \|_E < \epsilon, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ t \in [0,1].$$

Seja $V_\epsilon = span\langle \{p, T_\epsilon(\overline{\Omega})\}\rangle$ e defina $\Omega_\epsilon := \Omega \cup V_\epsilon$. Pela Definição 1.10, segue que

$$d(I - H(\cdot, s), \Omega, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega, p). \tag{1.11}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \| T_\epsilon(x) - H(x,t) \|_E &= \| T_\epsilon(x) - H(x,s) + H(x,s) - H(x,t) \|_E \\ &\leq \| T_\epsilon(x) - H(x,s) \| + \| H(x,s) - H(x,t) \|_E \\ &\leq 2\epsilon < \frac{r}{2} < \frac{3r}{4}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

para todo $|t - s| < \delta$. Como,

$$\begin{aligned} \| p - \phi_t(x) \|_E &\leq \| p - \phi_s(x) \|_E + \| \phi_s(x) - \phi_t(x) \|_E \\ &= \| p - \phi_s(x) \|_E + \| x - H(x,s) - x + H(x,t) \|_E \\ &= \| p - \phi_s(x) \|_E + \| -H(x,s) + H(x,t) \|_E \\ &< \| p - \phi_s(x) \|_E + \epsilon, \quad \forall x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} &\inf_{x \in \partial\Omega} (\| p - \phi_t(x) \|_E) \leq \inf_{x \in \partial\Omega} (\| p - \phi_s(x) \|_E + \epsilon) \\ &\Rightarrow d_\infty(p, \phi_t(x)) \leq d_\infty(p, \phi_s(x)) + \epsilon < r + \frac{r}{4} < \frac{3r}{4}. \end{aligned}$$

Dessa forma, combinando a desigualdade anterior com (1.12), segue da definição de grau que

$$d(I - H(\cdot, t), \Omega, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega, p),$$

e portanto por (1.11) concluímos que

$$d(I - H(\cdot, t), \Omega, p) = d(I - H(\cdot, s), \Omega, p),$$

isto é $t\mathcal{R}s$. Portanto, como as classes de equivalência de $\mathcal{R}$ são conjuntos abertos e disjuntos, segue da conexidade de $[0,1]$ que $\mathcal{R}$ possui somente uma classe de equivalência, isto é, $d(\phi_t, \Omega, p)$ é independente de $t$.

4. Suponha que exista $x \in \partial\Omega$ tal que $p = \psi(x)$, então

$$\| \phi(x) - \psi(x) \|_E = \| \phi(x) - p \|_E < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)),$$

o que é um absurdo, portanto, $p \notin \psi(\partial\Omega)$.

Mostraremos que $d(\phi,\Omega,p) = d(\psi,\Omega,p)$. Seja $H_t(x) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x)$, com $t \in [0,1]$ e $x \in \overline{\Omega}$, uma homotopia de perturbações compactas da identidade. Note que para todo $x \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned}
\| p - H_t(x) \|_E &= \| p - t\phi(x) + (1-t)\psi(x) \|_E \\
&= \| p - \phi(x) + \phi(x) - t\phi(x) + (1-t)\psi(x) \|_E \\
&= \| p - \phi(x) + (1-t)\phi(x) + (1-t)\psi(x) \|_E \\
&\geq \| p - \phi(x) \|_E - (1-t) \| \phi(x) + \psi(x) \|_E \\
&> r - (1-t)r \\
&= tr > 0,
\end{aligned}$$

pois $\| \phi(x) - \psi(x) \|_E < r$ e $\| p - \phi(x) \|_E \geq r$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Logo, $p \notin H_t(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$ e assim, pela invariância homotópica (item 3 deste teorema), segue que $d(\phi,\Omega,p) = d(\psi,\Omega,p)$.

5. Considere $H(x,t) = I(x) - t\phi(x) + (t-1)\psi(x)$. Como $\phi, \psi \in K_1(\overline{\Omega})$, segue que $H$ é uma homotopia de operadores compactos em $\overline{\Omega}$.

   Desde que $\phi(x) = \psi(x)$ em $\partial\Omega$, temos que

$$H(x,t) = I(x) - t\phi(x) + (t-1)\phi(x) = I(x) - \phi(x)$$

   para todo $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$, isto é, $\phi = I - H(\cdot,t)$ em $\partial\Omega$, o que implica em $p \notin (I - H(\cdot,t))$, já que $p \notin \phi(\partial\Omega)$.

   Portanto, pela invariância homotópica (item 3 deste teorema), concluímos que

$$d(\phi,\Omega,p) = d(\psi,\Omega,p).$$

6. Seja $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ um operador de posto finito tal que $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < d_\infty(p,\phi(\partial\Omega))$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, e denote por $V_\epsilon := span\langle\{p, q, T_\epsilon(\overline{\Omega})\}\rangle$. Assim, pela Definição 1.10, temos $d(\phi,\Omega,p) = d(\phi_\epsilon,\Omega_\epsilon,p)$, onde $\phi_\epsilon = I - T_\epsilon$ e $\Omega_\epsilon = \Omega \cap V_\epsilon$.

   Note que, $span\langle\{p, p-q, T_\epsilon(\overline{\Omega}) + q\}\rangle \subset V_\epsilon$, pois $p, q \in V_\epsilon$ e $T_\epsilon(\overline{\Omega}) \subset V_\epsilon$, e

$$\| (T+q)(x) - (T_\epsilon+q)(x) \|_E = \| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < d_\infty(p,\phi(\partial\Omega)) = d_\infty(p-q,(\phi-q)(\partial\Omega)).$$

   Pela Definição 1.10, temos que $d(\phi - q,\Omega,p-q) = d(\phi_\epsilon - q,\Omega_\epsilon,p-q)$ e pela propriedade de translação do grau de Brouwer (Teorema 1.2, item 6) segue que $d(\phi_\epsilon - q,\Omega_\epsilon,p-q) = d(\phi_\epsilon,\Omega_\epsilon,p)$. Portanto,

$$d(\phi - q,\Omega,p-q) = d(\phi,\Omega,p).$$

7. Para mostrar este item, precisamos apenas verificar que $f : C \subset E \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(p) = d(\phi, \Omega, p)$, é contínua.

   Para tanto, vamos fixar $p \in C$ arbitrário e mostrar que $f(q) \to f(p)$ quando $\| q - p \|_E \to 0$. Com efeito, seja $\epsilon > 0$ dado e tomemos $\delta = d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$ e $q$ satisfazendo $\| q - p \|_E < \delta$, então $q \in C$. Além disso, pela propriedades de translação (item 6 deste teorema), temos $d(\phi, \Omega, q) = d(\phi + p - q, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p)$, onde $\psi(x) = \phi(x) + p - q$, para $x \in \overline{\Omega}$. Note que $\psi \in K_1(\overline{\Omega})$, já que $\phi \in K_1(\overline{\Omega})$, e

$$\| \phi(x) - \psi(x) \|_E = \| \phi(x) - \phi(x) - (p - q) \|_E = \| q - p \|_E < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)).$$

   Assim, pelo item 4 deste teorema obtemos $d(\phi, \Omega, p) = d(\psi, \Omega, p) = d(\phi, \Omega, q)$ e portanto $|f(q) - f(p)| < \epsilon$.

   Por fim, desde que $C$ é aberto e $f$ é contínua em $C$ e assume apenas valores inteiros, segue que $f$ é constante.

8. Seja $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ o operador de posto finito tal que $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, e denote por $V_\epsilon := span\langle\{p, T_\epsilon(\overline{\Omega})\}\rangle$. Logo, pela Definição 1.10, $d(\phi, \Omega, p) = d(\phi_\epsilon, \Omega_\epsilon, p)$, onde $\Omega_\epsilon = \Omega \cap V_\epsilon$.

   Por outro lado, $\Omega_\epsilon = \Omega \cap V_\epsilon = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\right) \cap V_\epsilon = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\Omega_i \cap V_\epsilon) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\Omega_i)_\epsilon$. Logo, pela propriedade de decomposição do grau de Brouwer (Teorema 1.2, item 8), temos

$$d(\phi, \Omega, p) = d(\phi_\epsilon, \Omega_\epsilon, p) = d(\phi_\epsilon, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\Omega_i)_\epsilon, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\phi_\epsilon, (\Omega_{a_i})_\epsilon, p),$$

   para alguns $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$.

   Portanto, para concluir a prova, basta mostrarmos que $d(\phi, \Omega_{a_i}, p) = d(\phi_\epsilon, (\Omega_{a_i})_\epsilon, p)$, para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$. Para tanto, observe que $\partial\Omega_{a_i} \subset \partial\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \partial\Omega_i$ e $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))$, donde obtemos que $d_\infty(p, \phi(\partial\Omega)) \le d_\infty(p, \phi(\partial\Omega_{a_i}))$ e $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < d_\infty(p, \phi(\partial\Omega_{a_i}))$. Então, segue da Definição 1.10 que $d(\phi, \Omega_{a_i}, p) = d(\phi_\epsilon, (\Omega_{a_i})_\epsilon, p)$, para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, concluindo assim que

$$d(\phi, \Omega, p) = \sum_{i=1}^{k} d(\phi, \Omega_{a_i}, p).$$

9. Sejam

$$0 < \epsilon < \min\{d_\infty(p, \phi(K)), d_\infty(p, \phi(\partial\Omega))\}$$

   e $T_\epsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ um operador de posto finito tal que $\| T(x) - T_\epsilon(x) \|_E < \epsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Assim, considerando $V_\epsilon = span\langle\{T_\epsilon(\overline{\Omega}), p\}\rangle$ e $\Omega_\epsilon = \Omega \cap V_\epsilon$, segue da Definição 1.10 que

$$d(I - T, \Omega, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_\epsilon, p). \tag{1.13}$$

Como $p \notin \phi(\partial\Omega) \cup \phi(K)$, temos que $p \notin \phi(\partial(\Omega \backslash K))$, pois $\partial(\Omega\backslash K) \subset \partial\Omega \cup K$. Logo, $d(\phi, \Omega\backslash K, p)$ está bem definido e tomando

$$\Omega_K := (\Omega\backslash K) \cap V_\epsilon = (\Omega \cap V_\epsilon)\backslash(K \cap V_\epsilon) = \Omega_\epsilon\backslash(K \cap V_\epsilon) = \Omega_\epsilon\backslash(K \cap \Omega_\epsilon), \qquad (1.14)$$

pela Definição 1.10 segue que

$$d(\phi, \Omega\backslash K, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_K, p). \qquad (1.15)$$

Desde que $p \notin (I - T)(K)$ e pela escolha de $\epsilon$, temos que $p \notin (I - T_\epsilon)(K)$. Além disso, como $K$ é fechado e $\dim(K \cap V_\epsilon) < \infty$, segue que $(K \cap \Omega_\epsilon)$ é compacto em $\Omega_\epsilon$. Então, pela propriedade de excisão do grau de Brouwer (Teorema 1.2, item 9) e por (1.14) e (1.15), temos que

$$d(I - T_\epsilon, \Omega_\epsilon, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_\epsilon\backslash(K \cap \Omega_\epsilon), p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_K, p) = d(I - T, \Omega\backslash K, p). \qquad (1.16)$$

Portanto, por (1.13) e (1.16), segue que

$$d(\phi, \Omega, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_\epsilon, p) = d(I - T_\epsilon, \Omega_K, p) = d(I - T, \Omega\backslash K, p) = d(\phi, \Omega\backslash K, p),$$

como queríamos mostrar.

□

O próximo resultado é uma versão mais geral da propriedade de invariância homotópica, por permitir que o domínio da homotopia seja um aberto qualquer de $\mathbb{R} \times E$ e não necessariamente uma região retangular.

**Teorema 1.8** (Invariância homotópica generalizada)**.** Sejam $\mathcal{O} \subset [a, b] \times E$ um aberto limitado e $\phi_\lambda(u) = \phi(\lambda, u) = u - H(\lambda, u)$, onde $H : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ é um operador compacto. Denotando por $\mathcal{O}_\lambda = \{u \in E : (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}$, se para cada $\lambda \in [a, b]$ temos que $0 \notin \phi_\lambda(\partial\mathcal{O}_\lambda)$, então $d(\phi_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0)$ é constante.

*Demonstração.* Inicialmente, observe que $\mathcal{U}_\lambda := \{u \in \overline{\mathcal{O}_\lambda} : \phi(\lambda, u) = 0\} \subset E$ é compacto. De fato, seja $(u_n) \subset \mathcal{U}_\lambda$, isto é, $H_\lambda(u_n) = 0$. Da limitação de $\mathcal{O}$, segue que $(u_n)$ é limitado e da compacidade de $H$ concluímos que

$$H(\lambda, u_n) \to \overline{u} \qquad (1.17)$$

para algum $\overline{u} \in E$, a menos de subsequência. Assim, desde que

$$\phi_\lambda(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n - H(\lambda, u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n = H(\lambda, u_n),$$

segue de (1.17) que

$$u_n = H(\lambda, u_n) \to \overline{u} \in \overline{\mathcal{O}}_\lambda,$$

e portanto, pela continuidade de $H$, concluímos que

$$0 = u_n - H(\lambda, u_n) \Rightarrow \overline{u} - H(\lambda, \overline{u}) = 0 \Rightarrow \phi_\lambda(\overline{u}) = \overline{u} - H(\lambda, \overline{u}) = 0 \Rightarrow \overline{u} \in \mathcal{U}_\lambda.$$

Logo, $\mathcal{U}_\lambda$ é compacto.

Agora, note que $\mathcal{U}_\lambda \cap \partial(\mathcal{O}_\lambda) = \emptyset$. Com efeito, como $\phi_\lambda(\mathcal{U}_\lambda) = \{0\}$, se houvesse $u \in \mathcal{U}_\lambda \cap \partial\mathcal{O}_\lambda$ então $\phi_\lambda(u) = 0$, isto é, $0 \in \phi_\lambda(\partial\mathcal{O}_\lambda)$, o que contraria a hipótese do presente teorema.

**Afirmação 1:** Existe uma vizinhança aberta $\mathfrak{O}_\lambda$ de $\mathcal{U}_\lambda$ e $\epsilon > 0$ tal que $[\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon]\times\mathfrak{O}_\lambda \subset \mathcal{O}$.

Desde que $\{\lambda\} \times \mathcal{U}_\lambda \subset \mathcal{O}$, para cada $\gamma \in \mathcal{U}_\lambda$ existem $\epsilon_\gamma > 0$ e $\mathfrak{O}_\gamma$ aberto em $E$ tais que $(\lambda - \epsilon_\gamma, \lambda + \epsilon_\gamma) \times \mathfrak{O}_\gamma \subset \mathcal{O}$. Daí $\bigcup\limits_{\gamma\in\mathcal{U}_\lambda} (\lambda - \epsilon_\gamma, \lambda + \epsilon_\gamma) \times \mathfrak{O}_\gamma \subset \mathcal{O}$.

Como $\bigcup\limits_{\gamma\in\mathcal{U}_\lambda} (\lambda - \epsilon_\gamma, \lambda + \epsilon_\gamma) \times \mathfrak{O}_\gamma$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{U}_\lambda$ e $\mathcal{U}_\lambda$ é compacto, podemos encontrar $\{\gamma_k, k = 1, \ldots, n\}$ tal que

$$\{\lambda\} \times \mathcal{U}_\lambda \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\lambda - \epsilon_{\gamma_k}, \lambda + \epsilon_{\gamma_k}) \times \mathfrak{O}_{\gamma_k} \subset \mathcal{O}.$$

Sejam $\epsilon = \min\{\epsilon_{\gamma_k} : k = 1, \ldots, n\}$ e $\mathfrak{O}_\lambda = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{O}_{\gamma_k}$. Então,

$$\mathcal{U}_\lambda \subset (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \times \mathfrak{O}_\lambda \subset \mathcal{O},$$

o que prova a afirmação.

**Afirmação 2:** Existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\{(\overline{\lambda}, u) \in \overline{\mathcal{O}} : \phi(\overline{\lambda}, u) = 0 \text{ e } \lambda - \epsilon \leq \overline{\lambda} \leq \lambda + \epsilon\} \subset [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \times \mathfrak{O}_\lambda$.

Caso contrário, existiriam sequências $\epsilon_n \downarrow 0^+$ e $(\lambda_n, u_n) \subset [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \times \mathfrak{O}_\lambda^c$ tais que

$$\phi(\lambda_n, u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n - H(\lambda_n, u_n) = 0 \tag{1.18}$$

Desde que $\lambda_n \in [\lambda - \epsilon_n, \lambda + \epsilon_n]$ e $(\lambda_n, u_n) \subset \mathcal{O}$, segue que $\lambda_n \to \lambda$ e $(u_n)$ é limitada em $E$. Daí, pela compacidade de $H$, temos que $H(\lambda_n, u_n) \to \overline{x} \in E$, para algum $\overline{x} \in E$, a menos de subsequência.

Da relação (1.18) concluímos que $u_n = H(\lambda_n, u_n) \to \overline{x}$ e pela continuidade de $H$ obtemos ainda que

$$u_n = H(\lambda_n, u_n) \Rightarrow \overline{x} = H(\lambda, \overline{x}) \Rightarrow \overline{x} - H(\lambda, \overline{x}) = 0 \Rightarrow \phi(\lambda, \overline{x}) = 0.$$

Assim, por um lado temos que $(u_n) \subset \mathfrak{O}_\lambda^c$, donde $u_n \to \overline{x} \in \mathfrak{O}_\lambda^c$. Por outro lado, pela definição de $\mathcal{U}_\lambda$ temos que $\overline{x} \in \mathcal{U}_\lambda \subset \mathfrak{O}_\lambda$, o que é uma contradição.

Segue da afirmação 2 que $\phi$ é uma homotopia admissível em $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \times \mathfrak{O}_\lambda$ e portanto pela invariância homotópica temos que $d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathfrak{O}_\lambda, 0)$ é independente de $\overline{\lambda} \in [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$.

Tomando $K = \overline{\mathcal{O}_\lambda \backslash \mathfrak{O}_\lambda} \subset \overline{\mathcal{O}_\lambda}$ na propriedade de excisão (Teorema 1.7, item 9), desde que $0 \notin \phi_{\overline{\lambda}}(K)$ temos que

$$d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}}, 0) = d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} \backslash K, 0) = d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathfrak{O}_\lambda, 0)$$

é constante para todo $\overline{\lambda} \in [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$.

Repetindo o argumento anterior, também podemos mostrar que $d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathfrak{O}_{\overline{\lambda}}, 0)$ é constante em $[a, a+\epsilon]$ e $[b-\epsilon, b]$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Daí, $\overline{\lambda} \mapsto d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}}, 0)$ é localmente constante em $[a, b]$. Como o grau assume valores em $\mathbb{Z}$, segue que $\overline{\lambda} \mapsto d(\phi_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}}, 0)$ é constante em $[a, b]$. □

O grau de Leray-Schauder é uma poderosa ferramenta no estudo de Equações Diferenciais Parciais, dentre outras áreas. Os resultados que apresentaremos a seguir, são teoremas de ponto fixo, amplamente utilizados na prova de resultados de existência de soluções para equações diferenciais.

**Teorema 1.9** (Ponto Fixo de Schauder)**.** *Sejam $E$ espaço de Banach e $\Omega \subset E$ um subconjunto aberto, limitado e convexo tal que $0 \in \Omega$. Assuma que $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é um operador compacto, com $T(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$. Então $T$ possui um ponto fixo em $\overline{\Omega}$, isto é, existe $x \in \overline{\Omega}$ tal que $T(x) = x$.*

*Demonstração.* Se $T(x) = x$ para algum $x \in \partial\Omega$, então o teorema está provado. Caso contrário, isto é, se $T(x) \neq x$ para todo $x \in \partial\Omega$, então $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$ e portanto o grau $d(I - T, \Omega, 0)$ está bem definido. Vamos usar invariância homotópica para mostrar que $d(I - T, \Omega, 0) \neq 0$. Para isso, considere $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to E$ a homotopia de pertubações compactas da identidade dada por

$$H_t(x) := (I - tT)(x).$$

**Afirmação**: $0 \notin H_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0, 1]$.

Para provar a afirmação, suponha por absurdo que existam $t \in [0, 1]$ e $x \in \partial\Omega$ tais que $x - tT(x) = 0$. Como $T(x) \neq x$, para todo $x \in \partial\Omega$, segue que $t \neq 1$. Observe também que $t \neq 0$, caso contrário $x = 0T(x) = 0$ e $x \in \partial\Omega$, o que é impossível. Por fim, se $t \in (0, 1)$, desde que $0 \in \Omega$ e $T(x) \in \overline{\Omega}$ (isso decorre da hipótese $T(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$), podemos explorar a convexidade de $\Omega$ para concluir que

$$(1 - t)0 - tT(x) = tT(x) \in \Omega.$$

Ora, mas isto é impossível, pois $x = tT(x)$ e $x \in \partial\Omega$, com isso concluímos a prova da afirmação.

Segue da afirmação anterior que podemos usar a propriedade de invariância homotópica para concluir que

$$d(I-T,\Omega,0)=d(I,\Omega,0)=1,$$

onde na última igualdade usamos a propriedade de normalização e o fato de $0\in\Omega$. Por fim, pela propriedade de solução (Teorema 1.7, item 2), existe $x\in\Omega$ tal que $(I-T)(x)=0$, isto é, $T(x)=x$. □

**Exemplo 3.** Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua e limitada. Então

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega \\ u=0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.19}$$

admite solução fraca.

*Demonstração.* Seja $E=C(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{K}=\Delta^{-1}:C(\overline{\Omega})\longrightarrow C(\overline{\Omega})$, em que $\mathcal{K}(g)=u$ se

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x), & \text{em } \Omega \\ u=0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.20}$$

Então, podemos reescrever (1.19) como $\mathcal{K}(f(u))=u$. Defina $T:C(\overline{\Omega})\longrightarrow C(\overline{\Omega})$ por $T(u)=\mathcal{K}(f(u))$. Logo, $T$ é compacto e $u\in C(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (1.19) se, e somente se, $u=T(u)$.

Para mostrar que $T$ admite ponto fixo em $C(\overline{\Omega})$, vamos usar o teorema do Ponto Fixo de Schauder. Para tanto, precisamos encontrar um aberto limitado e convexo $A$ tal que $T(A)\subset A$.

Ora, desde que existe $M>0$ tal que $|f(t)|\leq M$, para todo $t\in\mathbb{R}$, segue que $|f(u(x))|\leq M$, para todo $u\in C(\overline{\Omega})$ e $x\in\overline{\Omega}$, isto é,

$$\| f(u)\|_C\leq M,\quad \forall\, u\in C(\overline{\Omega}).$$

Contudo, segue da teoria de regularidade que se $g\in C(\overline{\Omega})$ e $u$ é a única solução fraca de (1.20), então $u\in C^1(\overline{\Omega})$ e

$$\| u\|_C\leq\| u\|_{C^1}\leq c\,\| g\|_C,\quad \text{para algum } c>0.$$

isto é,

$$\| \mathcal{K}(g)\|_C\leq c\,\| g\|_C\,. \tag{1.21}$$

Assim, tomando em (1.21) $g=f(u)$, temos que

$$\| \mathcal{K}(f(u))\|_C\leq c\,\| f(u)\|_C\leq cM,$$

para todo $u\in C(\overline{\Omega})$. Desse modo, para $A=\overline{B(0,cM)}$ concluímos que $T(A)\subset A$.

Portanto, segue do teorema do Ponto Fixo de Schauder que $T$ admite um ponto fixo em $A$, ou seja, (1.19) admite solução fraca. □

**Teorema 1.10** (Ponto Fixo de Schaefer)**.** Sejam $E$ um espaço de Banach e $H : [0,1] \times E \longrightarrow E$ uma homotopia de operadores compactos tal que $H(0,x) = 0$, para todo $x \in E$. Se o conjunto $S = \{x \in E : \exists\, t \in [0,1]$ tal que $x = H(t,x)\}$ é limitado, então $H(1,\cdot)$ tem um ponto fixo.

*Demonstração.* Como $S$ é limitado, existe $r > 0$ tal que $S \in B(0,r)$. Defina $\phi_t(x) = x - H(t,x)$, para $x \in B(0,r)$ e $t \in [0,1]$.

A fim de usar a propriedade de invariância homotópica, precisamos mostrar que $0 \notin \phi_t(\partial B(0,r))$. Com efeito, caso contrário existiriam $x \in \partial B(0,r)$ e $t \in [0,1]$ tais que $x - H(t,x) = 0$, isto é, $x = H(t,x)$. Como $x \in \partial B(0,r)$, segue que $\| x \|_E = r$, contudo pela definição de $S$ temos que $x \in S \subset B(0,r)$, o que é impossível. Portanto, $0 \notin \phi_t(\partial B(0,r))$ e assim segue da propriedade de invariância homotópica que

$$d(I - H(1,\cdot), B(0,r), 0) = d(I - H(0,\cdot), B(0,r), 0) = d(I, B(0,r), 0) = 1$$

e pela propriedade de solução (Teorema 1.7, item 2) concluímos que existe $x \in B(0,r)$ tal que $x - H(x,1) = 0$, isto é, $H(\cdot,1)$ tem um ponto fixo.

□

### 1.3.2 O índice

Agora, estudaremos o índice de uma solução isolada via linearização. Os resultados aqui apresentados serão de grande utilidade para o estudo da teoria de bifurcação global.

**Definição 1.12.** Dizemos que $x_0 \in E$ é uma solução isolada da equação $(I - T)(x) = p$, se existe $r_0 > 0$ tal que $x_0$ é a única solução da equação $(I - T)(x) = p$ em $B(x_0, r_0)$.

Como consequência da propriedade de excisão (Teorema 1.7, item 9), pode-se verificar que se $x_0$ é uma solução isolada de $(I - T)(x) = p$ e $0 < r < r_0$, então

$$d(\phi, B(x_0, r), p) = d(\phi, B(x_0, r_0), p), \qquad \text{para todo } r \in (0, r_0),$$

em que $\phi = I - T$. Em outras palavras, $r \mapsto d(\phi, B(x_0, r), p)$ é constante para $r > 0$ suficientemente pequeno, esse valor comum é conhecido como índice da solução isolada $x_0$.

**Definição 1.13.** Sejam $T : \overline{\Omega} \subset E \longrightarrow E$ um operador compacto, $\phi = I - T$ e $x_0$ uma solução isolada da equação $\phi(x) = p$. O índice de $T$ relativo a $x_0$, denotado por $i(\phi, x_0, p)$, é definido por

$$i(\phi, x_0, p) = \lim_{r \to 0} d(\phi, B(x_0, r), p).$$

No que segue, veremos como computar o índice para uma classe especial de operadores compactos.

**Definição 1.14.** Seja $T : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear contínua, definida no espaço de Banach $E$. Dizemos que $\lambda \neq 0$ é um valor característico de $T$ se $ker(I - \lambda T) \neq \{0\}$, isto é, se existe $u \neq 0$ tal que $u = \lambda T(u)$.

Pela definição apresentada, concluímos que se $\lambda$ é um valor característico de $T$, então $1/\lambda$ é um autovalor de $T$.

**Proposição 1.6.** Seja $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ a aplicação linear definida por $T(x) = Ax$, em que $A \in \mathbb{M}_N(\mathbb{R})$. Assuma que 1 não é valor característico de $T$, isto é, $\phi = I - T$ é inversível. Então

$$i(\phi, 0, 0) = i(I - T, 0, 0) = (-1)^\beta,$$

onde $\beta$ é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de $T$ em $(0, 1)$.

*Demonstração.* Como $I - T$ é inversível e $(I - T)(0) = 0$, segue que $(I - T)^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, isto é, 0 é uma solução isolada de $(I - T)(x) = 0$ (na verdade é a única). Assim, para todo $r > 0$ temos que $0 \notin (I - T)(\partial B(0, r))$. Além disso, $0 \notin (I - T)(Z_{(I-T)})$, pois $\det((I - T)'(0)) = \det(I - A) \neq 0$, já que 1 não é valor característico de $T$ (e portanto de $A$). Logo, pelas definições 3.1 e 1.13, temos

$$i(I - T, 0, 0) = \lim_{r \to 0} d(I - T, B(0, r), 0) = sgn(det(I - A)).$$

Por outro lado, o polinômio característico de $T$ é

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

onde cada $\lambda_i$ é um autovalor de $T$ e $m_i$ é a multiplicidade algébrica de $\lambda_i$. Em particular,

$$det(I - A) = p(1) = (1 - \lambda_1)^{m_1}(1 - \lambda_2)^{m_2} \cdots (1 - \lambda_k)^{m_k}.$$

Vamos analisar o sinal de $p(1)$. Note que se $\lambda_i < 1$, então $(1 - \lambda_i) > 0$ e assim o fator $(1 - \lambda_i)^{m_i}$ não irá interferir no sinal de $p(1)$. Se $\lambda_i \in \mathbb{C}$, então o seu conjugado complexo $\overline{\lambda_i}$ também será autovalor de $T$, neste caso, digamos que $\lambda_i = a + bi$ e $\overline{\lambda_i} = a - bi$, então

$$(1 - \lambda_i)(1 - \overline{\lambda_i}) = (1 - a - bi)(1 - a + b_i) = (1 - a)^2 - (bi)^2 = (1 - a)^2 + b^2 > 0$$

e portanto os fatores complexos em $p(1)$ também não irão interferir no sinal de $p(1)$. Logo, os autovalores reais tais que $\lambda_i > 1$ são os únicos que determinam o sinal de $p(1)$ e assim

$$sgn\ p(1) = sgn\left(\prod_{\lambda_i > 1}(1 - \lambda_i)^{m_i}\right) = sgn\left(\prod_{\mu_i \in (0,1)}(\mu_i - 1)^{m_i}\right),$$

em que $\mu_i := 1/\lambda_i$ é valor característico de $T$. Portanto, da última igualdade concluímos que

$$i(I-T,0,0) = sgn(det(I-A)) = sgn(p(1)) = (-1)^\beta,$$

onde $\beta$ é a soma das multiplicidades dos valores característicos de $T$ em $(0,1)$. □

Nosso objetivo agora é generalizar o resultado anterior para operadores definidos em espaços vetoriais de dimensão infinita.

**Proposição 1.7.** Sejam $E$ um espaço de Banach e $T : E \longrightarrow E$ um operador linear compacto. Se 1 não é valor característico de $T$, então

$$i(\phi, 0, 0) = (-1)^\beta,$$

onde $\phi = I - T$ e $\beta$ é a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T$ em $(0,1)$.

*Demonstração.* Pelo Teorema A.11 (ver Apêndice), há um número finito de valores característicos de $T$ em $(0,1)$. Denote por $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ os valores característicos de $T$ em $(0,1)$ e seja $N_i = Ker(I-\mu_i T)^{k_i}$ o autoespaço generalizado associado a $\mu_i$ (ver Apêndice, Teorema A.12), isto é,

$$Ker(I-\mu_i T) \subsetneq Ker(I-\mu_i T)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(I-\mu_i T)^{k_i} = Ker(I-\mu_i T)^{k_i+1} = \cdots .$$

Considere

$$N = N_1 \bigoplus N_2 \bigoplus \cdots \bigoplus N_p = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i.$$

Pelo item 1 do Teorema A.15 (ver Apêndice), temos que $\dim(N_i) < \infty$, o que implica que $N$ é um subespaço vetorial de $E$ de dimensão finita e portanto admite complemento topológico, digamos $F$. Assim, $E = N \bigoplus F$.

**Afirmação:** $F = \bigcap_{i=1}^{p} Rg(I-\mu_i T)^{k_i}$.

Para mostrar a afirmação, devemos verificar que $N \cap F = \{0\}$ e que $E = N \bigoplus F$. Para a primeira parte, tomemos $x \in N \cap F$, então $x \in N$ e assim $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, com $x_i \in N_i$. Por outro lado, $x \in F = \bigcap_{i=1}^{p} Rg(I-\mu_i T)^{k_i}$, o que implica que $x = x_1 + \sum_{j=2}^{p} x_j \in Rg(I-\mu_1 T)^{k_1}$. Pelo item 3 do Teorema A.15 (ver Apêndice), temos que $x_j \in N_j \subset Rg(I-\mu_1 T)^{k_1}$, para $j = 2, 3, \ldots, p$. Desse modo, como $x$ e $\sum_{j=2}^{p} x_j$ pertencem a $Rg(I-\mu_1 T)^{k_1}$, segue que $x_1 \in Rg(I-\mu_1 T)^{k_1}$, pois $x_1 = x - \sum_{j=2}^{p} x_i \in N_1$. Portanto, $x_1 \in N_1 \cap Rg_1 = \{0\}$, isto é, $x_1 = 0$. De modo análogo, obtemos que $x_2 = x_3 = \cdots = x_p = 0$, isto é, $N \cap F = \{0\}$.

Agora, mostraremos que $E = N \bigoplus F$. Pelo item 1 do Teorema A.15 (ver Apêndice), temos que para cada $i = 1, \cdots, p$ vale a decomposição $E = N_i \bigoplus Rg(I - \mu_i T)^{k_i}$, de modo que para cada $z \in E$ devem existir $x_i \in N_i$ e $y_i \in Rg(I - \mu_i T)^{k_i}$ tais que $z = x_i + y_i$. Tome $i \in \{1, \cdots, p\}$ arbitrário e denote por $x := x_1 + x_2 + \cdots + x_p$. Então, temos que

$$z - x = z - \sum_{j=1}^{p} x_j = z - x_i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{p} x_j = y_i - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{p} x_j, \tag{1.22}$$

em que $y_i = z - x_i$. Usando novamente o item 3 do Teorema A.15 (ver Apêndice), obtemos de (1.22) que $z - x \in Rg(I - \mu_i T)^{k_i}$. Como $i$ foi tomado arbitrariamente, segue que $z - x \in Rg(I - \mu_i T)^{k_i}$, para todo $i = 1, \cdots, p$, e portanto $(z - x) \in F$. Diante disso, temos

$$z = \sum_{j=1}^{p} x_j + \left( z - \sum_{j=1}^{p} x_j \right) = x + (z - x),$$

com $x \in N$ e $(z - x) \in F$, o que implica que $E = N \bigoplus F$, concluindo a prova da afirmação.

Considere agora $P$ e $Q$ as projeções contínuas de $E$ sobre $N$ e $F$, respectivamente, e defina a homotopia $H : E \times [0, 1] \longrightarrow E$ por

$$H(x, t) = x - T(Px) - tT(Qx).$$

Note que, para todo $t \in [0, 1]$, $H$ é uma pertubação compacta da identidade, já que $T$ é compacto e $P$ e $Q$ são aplicações contínuas. Além disso, se existirem $r > 0$, $x \in \partial B(0, r) \subset E$ e $t \in [0, 1]$ tais que $H(x, t) = 0$ então

$$x - T(Px) - tT(Qx) = 0 \Leftrightarrow Px + Qx - T(Px) - tT(Qx) = 0,$$

isto é,

$$Px - T(Px) = -Qx + tT(Qx).$$

Pelo item 2 do Teorema A.15 (ver Apêndice), temos que $N$ e $F$ são $T$-invariantes e assim $Px - T(Px) \in N$ e $-Qx + tT(Qx) \in F$. Diante disso e do fato que $N \cap F = \{0\}$, segue que

$$Px - T(Px) = 0 = -Qx + tT(Qx),$$

isto é, $Px = T(Px)$ e $Qx = tT(Qx)$.

Por hipótese temos que 1 não é valor característico de $T$, logo $Px = 0$, donde obtemos que $x = 0 + Qx = tT(Qx)$, isto é, $x = tT(x)$. Note que $t \in (0, 1)$, pois se $t = 1$ ou $t = 0$, então $Tx = x$ ou $x = 0$, respectivamente, o que não pode ocorrer pois 1 não é valor característico de $T$ e $x \in \partial B(0, r)$. Portanto, $t \in (0, 1)$ e

$$x = tT(x) \Rightarrow (I - tT)x = 0.$$

Da relação anterior, concluímos que $1/t = \mu_i$, para algum $i = 1, \cdots, p$, e portanto $x \in Ker(I - \mu_i T) \subset N$, o que contradiz a igualdade $x = Qx \in F \backslash \{0\}$. Logo, $0 \notin H_t(\partial B(0, r))$.

Pela invariância homotópica (Teorema 1.7, item 3), temos

$$\begin{aligned} d(I - T, B(0, r), 0) &= d(I - H(1, \cdot), B(0, r), 0) \\ &= d(I - H(0, \cdot), B(0, r), 0) \\ &= d(I - TP, B(0, r), 0). \end{aligned}$$

Por fim, desde que $T(P(E)) = T(N) \subset N$, $\dim(N) < \infty$ e pelo fato da multiplicidade algébrica de $1/\mu_i$ com respeito ao operador $T(P)$ ser $k_i$ (ver Apêndice, Definição A.4), podemos acionar a Proposição 1.6 para concluir que

$$i(\phi, 0, 0) = d(I - T, B(0, r), 0) = d(I - TP, B(0, r), 0) = (-1)^{\beta},$$

onde $\beta = k_1 + k_2 + \cdots + k_p$, isto é, a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T$ em $(0, 1)$.

$\square$

# 2 Bifurcação

Nesse capítulo, trataremos de equações da forma $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, em que $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Duas questões são centrais na teoria de bifurcação: conhecer valores de $\lambda$ de onde bifurcam novos ramos de soluções e descrever o comportamento global desses ramos de soluções. O teorema de Crandall-Rabinowitz nos auxilia na primeira tarefa e o teorema de Rabinowitz nos traz resposta sobre a segunda questão. A teoria que abordaremos aqui é uma ferramenta importante no estudo de problemas de autovalor, dentre outros. A discussão apresentada aqui, se baseia essencialmente nas seguintes referências: [4], [5] e [10].

Ao longo desta seção, assumiremos que $E$ e $F$ são espaços de Banach e $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \longrightarrow F$ é uma aplicação satisfazendo $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é discutir sobre existência e comportamento qualitativo das soluções da equação

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0. \tag{2.1}$$

Primeiramente, observe que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o par $(\lambda, 0)$ é solução da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, tais soluções são chamadas de soluções triviais. Estamos interessados em encontrar soluções não triviais para a equação (2.1). Vamos denotar o conjunto das soluções não triviais de (2.1) por

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (E \backslash \{0\}) : \mathcal{F}(\lambda, u) = 0\}. \tag{2.2}$$

**Definição 2.1.** Dizemos que $\lambda_0$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ desde a solução trivial, se existe uma sequência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times E$, com $u_n \neq 0$ e $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$, tal que $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$.

Dizer que $(\lambda_0, 0)$ é ponto de bifurcação, significa que $(\lambda_0, 0) \in \overline{\mathcal{S}}$. Se $(\lambda_0, 0)$ não é ponto de bifurcação, então existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R} \times E$ do ponto $(\lambda_0, 0)$ tal que $V \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Assim, dado $(\lambda, u) \in V$ com $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, temos que $u = 0$.

Observe que a definição de ponto de bifurcação apresentada não implica que haja uma curva de soluções bifurcando de $(\lambda_0, 0)$, apenas assegura a existência de uma sequência de soluções não triviais de (2.1) convergindo para $(\lambda_0, 0)$. Caso $\mathcal{F}$ satisfaça determinadas condições, pode-se garantir a existência de uma curva de soluções bifurcando de $(\lambda_0, 0)$, nessa situação é interessante conhecer a direção de bifurcação.

**Definição 2.2** (Direção da bifurcação)**.** Seja $\lambda_0$ um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ desde a solução trivial. Dizemos que a bifurcação é :

- subcrítica (ou à esquerda) se existe uma vizinhança $V$ de $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$ tal que para todo par $(\lambda, u) \in V \cap \mathcal{S}$ vale $\lambda < \lambda_0$;
- supercrítica (ou à direita) se existe uma vizinhança $V$ de $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$ tal que para todo par $(\lambda, u) \in V \cap \mathcal{S}$ vale $\lambda > \lambda_0$.

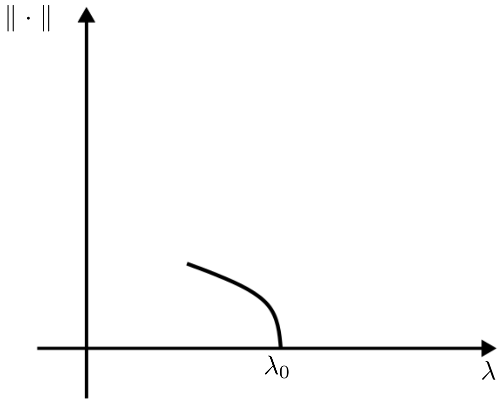


Figura 1 – Bifurcação subcrítica.

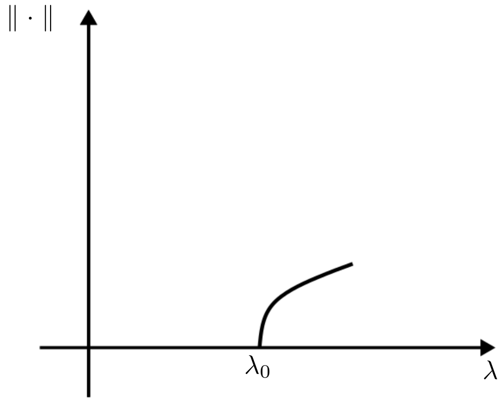


Figura 2 – Bifurcação supercrítica.

O próximo resultado nos dá condições necessárias para que $(\lambda_0, 0)$ seja ponto de bifurcação para $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$.

**Proposição 2.1.** Assuma que $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R} \times E, F)$ e $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Se $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$, então $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ não é invertível.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ seja invertível, isto é, $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ é contínua e bijetiva. Como $\mathcal{F}$ é de classe $C^1$ e $\mathcal{F}(\lambda_0, 0) = 0$, o Teorema da Função Implícita nos garante que existe uma vizinhança $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \times U$ do ponto $(\lambda_0, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$ tal que para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ existe um único $u = u(\lambda) \in U$ tal que $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. No entanto, para $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ temos que $(\lambda, 0) \in ((\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \times U) \cap \mathcal{F}^{-1}(\{0\})$, já que $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, da unicidade assegurada pelo Teorema da Função Implícita, concluímos que $u = u(\lambda) = 0,\ \forall \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, contrariando assim o fato de $(\lambda_0, 0)$ ser ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$. Portanto, $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ não é invertível. $\square$

A recíproca desse resultado não é verdadeira, isto é, se $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ é invertível, não é garantido que $\lambda_0$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$. Tal fato pode ser visto no exemplo abaixo.

**Exemplo 4.** Seja $E = F = \mathbb{R}^2$ e defina $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\mathcal{F}(\lambda, x, y) = \lambda(x, y) - (x + y^3, y - x^3).$$

Temos que $\mathcal{F}$ é de classe $C^1$ e $\mathcal{F}(\lambda, 0, 0) = (0, 0)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, podemos facilmente concluir que

$$D_{(x,y)}\mathcal{F}(\lambda, x, y) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3y^2 \\ -3x^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$D_{(x,y)}\mathcal{F}(\lambda, 0, 0) = (\lambda - 1)I = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que $D_{(x,y)}\mathcal{F}(\lambda, 0, 0)$ seja não invertível, deve existir $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tal que

$$D_{(x,y)}\mathcal{F}(\lambda, 0, 0)v = (0, 0) \Leftrightarrow (\lambda - 1)v = (0, 0) \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda, x, y) = \lambda(x, y) - (x + y^3, y - x^3) &= (0, 0) \\ \Rightarrow &\begin{cases} x + y^3 = \lambda x \\ y - x^3 = \lambda y \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} xy + y^4 = \lambda xy \\ xy - x^4 = \lambda xy \end{cases} \quad \Rightarrow x^4 + y^4 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação $\mathcal{F}(\lambda, 0, 0) = 0$ tem apenas soluções triviais, independente do valor de $\lambda$. Desse modo, concluímos que, embora $D_{(x,y)}\mathcal{F}(1, 0, 0)$ seja não inversível, $\lambda = 1$ não é ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$ desde a solução trivial.

## 2.1 Teorema da bifurcação global de Rabinowitz

Nesta seção, exibiremos a prova do notável Teorema de Rabinowitz, para tanto assumiremos que $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ é dada por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = u - T_\lambda(u), \tag{2.3}$$

em que $T_\lambda : E \longrightarrow E$ é da forma

$$T_\lambda(u) = \lambda L(u) + h(\lambda, u),$$

com $L$ e $h$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

$(H_1)$ $L : E \longrightarrow E$ é linear e compacto.

$(H_2)$ $h : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ é compacto e $h(\lambda, u) = o(\| u \|_E)$ em $u = 0$, uniformemente sobre intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

O próximo resultado nos fornece um caminho para buscar pontos de bifurcação de $\mathcal{F}$.

**Proposição 2.2.** Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é um ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$, então $1/\lambda_0$ é um autovalor de $L$.

*Demonstração.* Desde que $\lambda_0$ é ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$, segue que existe uma sequência $\{(\lambda_n, u_n)\}$ em $\mathbb{R} \times E$, com $u_n \neq 0$, $\lambda_n \to \lambda_0$ e $\| u_n \|_E \to 0$ tal que $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$. Assim,

$$u_n - \lambda_n L(u_n) - h(\lambda_n, u_n) = 0. \tag{2.4}$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.4) por $\| u_n \|_E$ e denotando por $v_n = u_n/\|u_n\|_E$, obtemos

$$v_n - \lambda_n L(v_n) - \frac{h(\lambda_n, u_n)}{\| u_n \|_E} = 0. \tag{2.5}$$

Por outro lado, como $\{v_n\}$ é limitada em $E$, segue da compacidade de $L$ e do Teorema A.10 (ver Apêndice) que existe $\omega \in E$ tal que

$$L(v_n) \to \omega, \quad \text{para alguma subsequência de } \{v_n\}.$$

Assim, considerando a igualdade (2.5) para tal subsequência e passando o limite $n \to \infty$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \left[ \lambda_n L(v_n) + \frac{h(\lambda_n, u_n)}{\| u_n \|_E} \right] = \lambda_0 \omega,$$

onde na última igualdade usamos que $h(\lambda_n, u_n)/ \| u_n \|_E \to 0$ desde que $||u_n||_E \to 0$. Denotando por $v := \lambda_0 \omega$ e usando a continuidade de $L$ e (2.5), obtemos

$$v - \lambda_0 L(v) = \lim_{n\to\infty} \left[ v_n - \lambda_n L(v_n) - \frac{h(\lambda_n, u_n)}{\| u_n \|} \right] = 0,$$

isto é, $L(v) = \frac{1}{\lambda_0} v$, onde $v \neq 0$ pois $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ e $||v_n||_E = 1$. □

O próximo resultado nos fornece uma condição suficiente para que um valor característico de $L$ seja ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$ e sua prova faz uso das propriedades do grau de Leray-Schauder.

**Teorema 2.1** (Krasnoselski)**.** Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ um valor característico de $L$ (ou equivalentemente, $1/\lambda_0$ é um autovalor de $L$) de multiplicidade algébrica ímpar. Então, $\lambda_0$ é um ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$.

*Demonstração.* Suponha que $\lambda_0$ não seja um ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$. Então existem $\epsilon_0 > 0$ e $r > 0$ de tal modo que para $(\lambda, u) \in [\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0] \times \overline{B(0, r)}$ satisfazendo $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ tem-se $u = 0$, onde $B(0, r)$ representa a bola em $E$ de centro em $u = 0$ e raio

$r$. Assim, para $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0]$ temos que $0 \notin (I - T_\lambda)(\partial B)$, isto é, não existe $u \in \partial B$ tal que $(I - T_\lambda)(u) = \mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. Desse modo, $d(I - T_\lambda, B, 0)$ está bem definido e, pela propriedade de invariância homotópica (Teorema 1.7, item 3), independe da escolha de $\lambda$. Daí,

$$d(I - T_{\lambda_1}, B, 0) = d(I - T_{\lambda_2}, B, 0), \tag{2.6}$$

para todos $\lambda_0 - \epsilon_0 < \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_0 + \epsilon_0$.

Agora, para $\lambda \neq \lambda_0$ defina a homotopia $H : [0, 1] \times \overline{B(0, r)} \longrightarrow E$ por

$$H_t(u) = H(t, u) = \lambda L(u) + th(\lambda, u).$$

Desde que $\lambda \neq \lambda_0$ e $1/\lambda_0$ é um ponto isolado de $L$ (ver Apêndice, Teorema A.11), podemos tomar $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno de tal modo que para $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0) \setminus \{\lambda_0\}$ o operador $I - \lambda L$ é inversível, isto é, $\lambda_0$ é o único valor característico de $L$ em $(\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0)$. Desse modo, suponha por absurdo que $0 \in (I - H_t)(\partial B)$, para algum $t \in [0, 1]$. Então existirá $u \in \partial B$ tal que

$$\begin{aligned} u - H(t, u) = 0 &\Leftrightarrow u - \lambda L(u) - th(\lambda, u) = 0 \\ &\Leftrightarrow (I - \lambda L)(u) = th(\lambda, u) \\ &\Leftrightarrow u = (I - \lambda L)^{-1} th(\lambda, u). \end{aligned}$$

Aplicando a norma, obtemos

$$\| u \|_E = \| (I - \lambda L)^{-1} th(\lambda, u) \|_E \leq \| (I - \lambda L)^{-1} \|_E \| th(\lambda, u) \|_E . \tag{2.7}$$

Como $u \neq 0$ e $\displaystyle\lim_{\|u\|_E \to 0} \frac{h(\lambda, u)}{\| u \|_E} = 0$ uniformemente para $\lambda$ em intervalos compactos, reduzindo o valor de $r$, se necessário, temos que

$$\left\| \frac{h(\lambda, u)}{\| u \|_E} \right\|_E < \frac{1}{2 \| (I - \lambda L)^{-1} \|_E},$$

que substituindo em (2.7) nos fornece

$$\begin{aligned} 1 \ &\leq \ \frac{\| (I - \lambda L)^{-1} \|_E \| th(\lambda, u) \|_E}{\| u \|_E} \\ &\leq \| (I - \lambda L)^{-1} \|_E \, |t| \left\| \frac{h(\lambda, u)}{\| u \|_E} \right\|_E \\ &< \| (I - \lambda L)^{-1} \|_E \, \frac{1}{2 \| (I - \lambda L)^{-1} \|_E} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, $0 \notin (I - H_t)(\partial B)$ e assim segue da invariância homotópica (Teorema 1.7, item 3) que

$$d(I - T_\lambda, B, 0) = d(I - H(1, \cdot), B, 0) = d(I - H(0, \cdot), B, 0) = d(I - \lambda L, B, 0), \tag{2.8}$$

para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)\backslash\{\lambda_0\}$.

De (2.6) e (2.8), obtemos

$$d(I - \lambda_1 L, B_2, 0) = d(I - T_{\lambda_1}, B_2, 0) = d(I - T_{\lambda_2}, B_2, 0) = d(I - \lambda_2 L, B_2, 0), \qquad (2.9)$$

para todos $\lambda_0 - \epsilon_0 < \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_0 + \epsilon_0$.

Por outro lado, para $r > 0$ suficientemente pequeno, $d(I-\lambda L, B, 0) = i(I-\lambda L, 0, 0)$, onde tal índice pode ser calculado pela Proposição 1.7. Mais precisamente, sejam $\beta_1$ e $\beta_2$ a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $L$ em $(0, \lambda_1)$ e $(0, \lambda_2)$, respectivamente. Então, pela Proposição 1.7 segue que

$$d(I - \lambda_2 L, B_2, 0) = (-1)^{\beta_2} \quad \text{e} \quad d(I - \lambda_1 L, B_2, 0) = (-1)^{\beta_1}.$$

Desde que $\lambda_0$ é o único valor característico de $L$ em $(\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0)$ e $\lambda_0 - \epsilon_0 < \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_0 + \epsilon_0$, concluímos que $\beta_2 = \beta + \beta_1$, onde $\beta$ é a multiplicidade algébrica do valor característico $\lambda_0$. Como, por hipótese, $\beta$ é ímpar, segue que

$$d(I-\lambda_2 L, B_2, 0) = (-1)^{\beta_2} = (-1)^{\beta}(-1)^{\beta_1} = (-1)^{\beta} d(I-\lambda_1 L, B_2, 0) = -d(I-\lambda_1 L, B_2, 0),$$

o que contraria (2.9). Portanto, $\lambda_0$ deve ser um ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$. $\square$

O resultado de Krasnoselski, embora nos dê condição suficiente para que um valor característico da parte linear de $\mathcal{F}$ seja ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$, ele não garante a existência de componentes conexas de $\overline{\mathcal{S}}$ emanando de $(\lambda_0, 0)$. O teorema de Rabinowitz, que será apresentado a seguir, estende o resultado de Krasnoselski por garantir a existência de uma componente conexa maximal de $\overline{\mathcal{S}}$ emanando de $(\lambda_0, 0)$, além de assegurar que tal *continuum* de soluções não triviais necessariamente será ilimitado ou encontrará o eixo das soluções triviais em um outro valor característico de $L$ diferente de $\lambda_0$. Antes de apresentar a prova do notável teorema de Rabinowitz, forneceremos dois lemas essenciais em sua demonstração.

**Lema 2.1.** Seja $K$ um espaço métrico compacto, $K_1$ uma componente conexa de $K$ e $K_2$ um subconjunto fechado de $K$ tal que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Então, existem conjuntos compactos $M_1$ e $M_2$ tais que

(*i*) $K_1 \subset M_1$ e $K_2 \subset M_2$.

(*ii*) $K = M_1 \cup M_2$ e $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

*Demonstração.* Veja Lema 4.3.1 em [4]. $\square$

No que segue, denotaremos por $\mathfrak{r}(L)$ o conjunto dos valores característicos de $L$.

**Lema 2.2.** Seja $\mathcal{C}$ uma componente conexa maximal de $\overline{\mathcal{S}}$ contendo $(\lambda_0, 0)$ e suponha que $\mathcal{C}$ é limitada e não contém nenhum ponto da forma $(\lambda, 0)$, com $\lambda \in \mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}$. Então, existe uma conjunto aberto e limitado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times E$ (veja Figura 3) tal que

(*i*) $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$

(*ii*) $\partial\mathcal{O} \cap \mathcal{S} = \emptyset$

(*iii*) $\mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \times \{0\}$, onde $0 < \epsilon < \delta =: d_\infty(\mathcal{C}, (\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) \times \{0\})$

(iv) Existe $\alpha > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in \mathcal{O}$ com $|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon$, então $\| u \|_E \geq \alpha$.

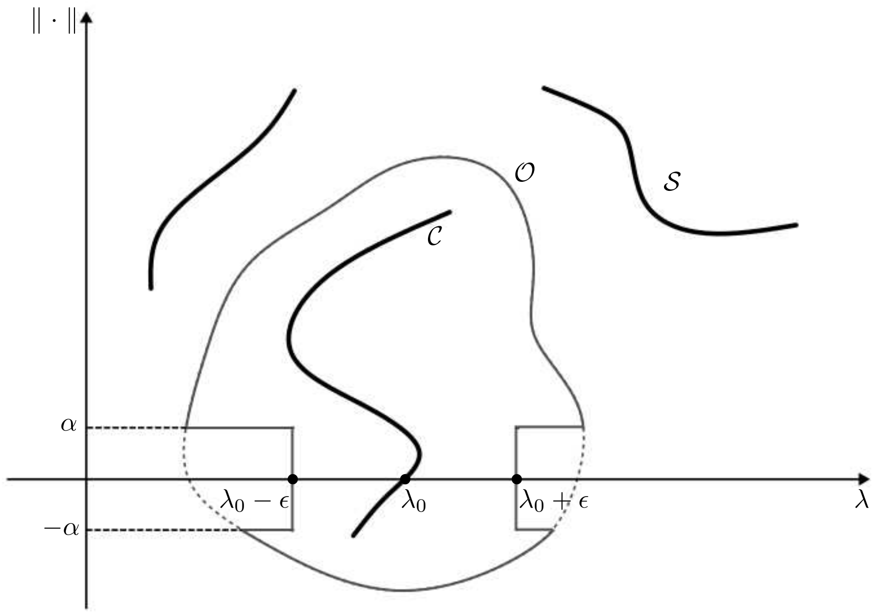


Figura 3 – Aberto $\mathcal{O}$.

*Demonstração.* Seja $0 < \epsilon < \delta := d(\mathcal{C}, \mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\} \times \{0\})$ e defina

$$U_\epsilon = \{p \in \mathbb{R} \times E : d_\infty(p, \mathcal{C}) < \epsilon\}.$$

Claramente $\mathcal{C} \subset U_\epsilon$ e $U_\epsilon \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, donde $U_\epsilon$ satisfaz as condições (*i*) e (*iii*), entretanto, $U_\epsilon$ não necessariamente satisfaz (*ii*) e (*iv*).

Para contornar esse fato, considere então $K_1 = \mathcal{C}$, $K_2 = \partial U_\epsilon \cap \overline{\mathcal{S}}$ e $K = \overline{U_\epsilon} \cap \overline{\mathcal{S}}$. Note que $K_1$ é um conjunto conexo e fechado de $K$ e maximal com respeito a inclusão. Além disso, $K_2$ é fechado em $K$ por ser a interseção de $K$ com o conjunto fechado $\partial U_\epsilon$. Por fim, a compacidade de $K$ segue da compacidade de $L$ e $h$. De fato, tomemos $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \overline{\mathcal{S}} \cap \overline{U_\epsilon} = K$ uma sequência. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathcal{S}$, caso contrário, poderíamos considerar no argumento abaixo uma sequência $\{(\hat{\lambda}_n, \hat{u}_n)\} \subset \mathcal{S}$ tal que $\| (\lambda_n, u_n) - (\hat{\lambda}_n, \hat{u}_n) \|_{\mathbb{R}\times E} < 1/n$.

Pela compacidade de $L$ e $h$, temos que existem $v_1, v_2 \in E$ e $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tais que

$$L(u_n) \to v_1,\ \ h(\lambda_n, u_n) \to v_2 \text{ e } \lambda_n \to \lambda^*, \tag{2.10}$$

para alguma subsequência. Assim, desde que $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{S}$, segue que

$$u_n - \lambda_n L(u_n) - h(\lambda_n, u_n) = 0$$

e por (2.10) obtemos

$$u_n \to \lambda^* v_1 + v_2 := z. \tag{2.11}$$

Pela continuidade de $L$ e $h$, concluímos de (2.10) e (2.11) que

$$z - \lambda^* L(z) - h(\lambda^*, z) = 0,$$

isto é, $(\lambda^*, z) \in \overline{\mathcal{S}} \cap \overline{U_\epsilon} = K$ e assim fica provado a compacidade de $K$.

Desse modo, podemos acionar o Lema 2.1 para concluir que existem compactos disjuntos $M_1 \supset K_1$ e $M_2 \supset K_2$ tais que $K = M_1 \cup M_2$.

Denote por $d = \min\{d_\infty(M_1, M_2), d_\infty(K_1, \partial U_\epsilon)\}$ e tome $\epsilon < \min\{d/2, \delta\}$. Então, considerando $U'_\epsilon = \{p \in \mathbb{R} \times E : d_\infty(p, M_1) < \epsilon\}$, concluímos que $U'_\epsilon$ satisfaz $(i)$, pois $\mathcal{C} \subset M_1 \subset U'_\epsilon$. Reduzindo o $\epsilon$, se necessário, $U'_\epsilon$ também satisfaz $(iii)$. Além disso, como $U'_\epsilon \supset M_1$, segue que $\partial U'_\epsilon \cap M_1 = \emptyset$. Por outro lado, $\partial U'_\epsilon \cap M_2 = \emptyset$, caso contrário existiria $(\lambda_1, u_1) \in M_2$ tal que

$$2\epsilon < d \leq d_\infty(M_1, M_2) \leq d_\infty((\lambda_1, u_1), M_1) = \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, $U'_\epsilon$ também satisfaz $(ii)$.

Para construir um aberto que também satisfaça $(iv)$, basta considerar

$$\mathcal{O} = U'_\epsilon \backslash [(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)^c \times \overline{B(0,\alpha)}],$$

onde $\overline{B(0,\alpha)} = \{u \in E : \| u \|_E \leq \alpha\}$, em que $\alpha = \frac{1}{2} d_\infty(K, (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)^c \times \{0\})$.

Note que de fato $\alpha > 0$, pois $K$ é compacto, $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)^c \times \{0\}$ é fechado e $K \cap \mathbb{R} \times \{0\} = \{\lambda_0\}$, portanto $K \cap (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)^c \times \{0\} = \emptyset$. Logo, $\mathcal{O}$ satisfaz $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ e $(iv)$. □

Podemos agora enunciar e provar o teorema de Rabinowitz.

**Teorema A** (Rabinowitz)**.** Considere $\mathcal{F}$ como em (2.3) satisfazendo as hipóteses $(H_1)$ e $(H_2)$. Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é valor característico de $L$ de multiplicidade algébrica ímpar, então existe uma componente conexa maximal $\mathcal{C}$ de $\overline{\mathcal{S}}$ emanando de $(\lambda_0, 0)$. Além disso, $\mathcal{C}$ cumpre uma, e somente uma, das seguintes condições:

$(i)$ $\mathcal{C}$ é ilimitada,

(ii) $\mathcal{C} \cap [(\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) \times \{0\}] \neq \emptyset$.

*Demonstração.* Suponha que a afirmação do teorema seja falsa. Nesse caso, a componente maximal $\mathcal{C}$ de $\overline{\mathcal{S}}$ que contém $(\lambda_0, 0)$ deve ser limitada e satisfazer $\mathcal{C} \cap (\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) \times \{0\} = \emptyset$.

Assim, acionando o Lema 2.2, concluímos que existe um aberto limitado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times E$ tal que:

(i) $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$;

(ii) $\partial\mathcal{O} \cap \mathcal{S} = \emptyset$;

(iii) $\mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \times \{0\}$, onde $0 < \epsilon < \delta =: d_\infty(\mathcal{C}, (\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) \times \{0\})$;

(iv) existe $\alpha > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in \mathcal{O}$ com $|\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon$, então $\| u \|_E \geq \alpha$.

Defina,

$$\overline{\mathcal{S}}_\lambda = \{u \in E : (\lambda, u) \in \overline{\mathcal{S}}\} \text{ e } \mathcal{O}_\lambda = \{u \in E : (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}.$$

Pela escolha de $\epsilon$ no item (iii), temos que $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \cap (\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) = \emptyset$, daí se $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, então $d_\infty(0, \overline{\mathcal{S}}_\lambda) > 0$. De fato, caso contrário existiria uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{S}_\lambda$ tal que $d_\infty(0, \overline{\mathcal{S}}_\lambda) = \lim\limits_{x\to\infty} \| u_n - 0 \|_E = 0$. Nesse caso, $(\lambda, 0)$ seria um ponto de bifurcação de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ e portanto, pela Proposição 2.2, teríamos que $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \cap (\mathfrak{r}(L)\backslash\{\lambda_0\}) = \emptyset$, o que é um absurdo.

Desse modo, podemos definir

$$r(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} d_\infty(0, \overline{\mathcal{S}}_\lambda), & \text{se } 0 < |\lambda - \lambda_0| < \epsilon \\ \frac{1}{2}\alpha, & \text{se } |\lambda - \lambda_0| \geq \epsilon. \end{cases}$$

**Afirmação 1:** Para $\lambda \neq \lambda_0$, o grau $d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))}, 0)$ está bem definido, isto é, não existe $u \in \partial(\mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))})$ tal que $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$.

Observe que $\mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))} = \mathcal{O}_\lambda \cap (\overline{B(0, r(\lambda))})^c$. Assim, se $u \in \partial(\mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))})$ e $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, então $(\lambda, u) \in \overline{\mathcal{S}}$, pois $u \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\lambda, u) &\in \overline{\mathcal{S}} \cap (\{\lambda\} \times (\partial(\mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))}))) \\
&\subset \overline{\mathcal{S}} \cap \{\lambda\} \times \left[\partial\mathcal{O}_\lambda \cup \left(\overline{\mathcal{O}}_\lambda \cap \partial\overline{B(0, r(\lambda))}^c\right)\right] \\
&\subset \overline{\mathcal{S}} \cap \left[(\{\lambda\} \times \partial\mathcal{O}_\lambda) \cup \left(\{\lambda\} \times (\overline{\mathcal{O}}_\lambda \cap \partial\overline{B(0, r(\lambda))}^c)\right)\right] \\
&= [\overline{\mathcal{S}} \cap (\{\lambda\} \times \partial\mathcal{O}_\lambda)] \cup \left[\overline{\mathcal{S}} \cap \left(\{\lambda\} \times \left(\overline{\mathcal{O}}_\lambda \cap \partial\overline{B(0, r(\lambda))}\right)\right)\right] \\
&\subset [\overline{\mathcal{S}} \cap \partial\mathcal{O}] \cup [\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{O}} \cap (\{\lambda\} \times \partial\overline{B(0, r(\lambda))})] \\
&= \emptyset,
\end{aligned}$$

pois pelo item $(ii)$ do Lema 2.2 temos $\overline{\mathcal{S}} \cap \partial\mathcal{O} = \emptyset$ e pela escolha de $r(\lambda)$ segue que $\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{O}} \cap (\{\lambda\} \times \partial B(0, r(\lambda))) = \emptyset$. Portanto, o grau $d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))}, 0)$ está bem definido.

**Afirmação 2:** $d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))}, 0) = 0$, para todo $\lambda \neq \lambda_0$.

Inicialmente, considere $\overline{\lambda} > \lambda_0$. Desde que $\mathcal{O}$ é limitado, existe $\lambda^* > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\lambda^*} = \emptyset$. Note que para esse $\lambda^*$ a afirmação 2 é imediata. Defina

$$r = \inf\{r(\lambda) : \overline{\lambda} \leq \lambda \leq \lambda^*\}.$$

Se $|\overline{\lambda} - \lambda_0| \geq \epsilon$, então $r(\lambda) = \frac{1}{2}\alpha$ para todo $\lambda \in [\overline{\lambda}, \lambda^*]$, o que implica em $r = \frac{1}{2}\alpha > 0$. Por outro lado, se $|\overline{\lambda} - \lambda_0| < \epsilon$, então também teremos $r > 0$, caso contrário existiria uma sequência $\{\lambda_n\} \subset [\overline{\lambda}, \lambda^*] \subset \mathbb{R}$ tal que $r(\lambda_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Da compacidade de $[\overline{\lambda}, \lambda^*]$ resultaria que $\lambda_n \to \hat{\lambda} \in [\overline{\lambda}, \lambda^*]$, para alguma subsequência de $\{\lambda_n\}$. Nesse caso, $r(\lambda_n) = d_\infty(0, \mathcal{S}_{\lambda_n}) \to r(\hat{\lambda}) = d_\infty(0, \mathcal{S}_{\hat{\lambda}}) = 0$, o que novamente contraria o item $(iii)$ do Lema 2.2. Portanto, $r > 0$.

Pela propriedade de decomposição (Teorema 1.7, item 8), temos que

$$d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r)}, 0) = d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))}, 0) + d(I - T_\lambda, B(0, r(\lambda)) \backslash \overline{B(0, r)}, 0).$$

Desde que $0 \notin B(0, r(\lambda)) \backslash \overline{B(0, r)}$ e $(\{\lambda\} \times \overline{B(0, r(\lambda))}) \cap \mathcal{S} = \emptyset$, segue que

$$d(I - T_\lambda, B(0, r(\lambda)) \backslash \overline{B(0, r)}, 0) = 0.$$

Portanto,

$$d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r)}, 0) = d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda \backslash \overline{B(0, r(\lambda))}, 0), \ \forall \lambda \in [\overline{\lambda}, \lambda^*]. \tag{2.12}$$

Considere o aberto limitado $\mathfrak{A} = \mathcal{O} \backslash ([\overline{\lambda}, \lambda^*] \times \overline{B(0, r)})$ e $\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{A} \cap (\{\lambda\} \times E)$, para $\lambda \in [\overline{\lambda}, \lambda^*]$. Observe que em $\partial\mathfrak{A}_\lambda$ não existe solução de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. De fato, se $u \in \partial\mathfrak{A}_\lambda \subset (\partial\mathfrak{A})_\lambda = \{u \in E : (\lambda, u) \in \partial\mathfrak{A}\}$ e $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, então $u \neq 0$, o que implica em $(\lambda, u) \in \overline{\mathcal{S}}$. Logo, pelo item $(ii)$ do Lema 2.2 e pela escolha de $r$ temos

$$\begin{aligned}
(\lambda, u) \in \overline{\mathcal{S}} \cap \partial\mathfrak{A} &= \overline{\mathcal{S}} \cap \partial(\mathcal{O} \backslash [\overline{\lambda}, \lambda^*] \times \overline{B(0, r)}) \\
&\subset \overline{\mathcal{S}} \cap \left(\partial\mathcal{O} \cup \left[\overline{\mathcal{O}} \cap \partial\left([\overline{\lambda}, \lambda^*] \times \overline{B(0, r)})^c\right)\right]\right) \\
&\subset (\overline{\mathcal{S}} \cap \partial\mathcal{O}) \cup (\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{O}} \cap \partial([\overline{\lambda}, \lambda^*] \times \overline{B(0, r)})) \\
&= \emptyset,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Daí, $d(I - T_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda, 0)$ está bem definido e assim pela propriedade de homotopia generalizada (Teorema 1.8) temos

$$d(I - T_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda, 0) = d(I - T_{\lambda^*}, \mathfrak{A}_{\lambda^*}, 0) = 0,$$

onde a última igualdade decorre do fato que $\mathfrak{A}_{\lambda^*} = \mathfrak{A} \cap (\{\lambda^*\} \times E) \subset \mathcal{O} \cap (\{\lambda^*\} \times E) = \emptyset$.

Por fim, desde que $d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathfrak{A}_{\overline{\lambda}}, 0) = d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} \backslash \overline{B(0,r)}, 0)$, por (2.12) segue que

$$d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} \backslash \overline{B(0,r)}, 0) = d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} \backslash \overline{B(0,r(\overline{\lambda}))}, 0) = 0. \tag{2.13}$$

Analogamente, podemos mostrar que se $\overline{\lambda} < \lambda_0$ então (2.13) também valerá.

Sejam $\underline{\lambda}$ e $\overline{\lambda}$ tais que $\lambda_0 - \epsilon < \underline{\lambda} < \lambda_0 < \overline{\lambda} < \lambda_0 + \epsilon$. Pelas propriedades de excisão (Teorema 1.7, item 9) e decomposição (Teorema 1.7, item 8), segue de (2.13) e da definição de índice que

$$\begin{aligned} d(I - T_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}}, 0) &= d(I - T_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}} \backslash \partial \overline{B(0, r(\underline{\lambda}))}, 0) \\ &= d(I - T_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}} \backslash \overline{B(0, r(\underline{\lambda}))}, 0) + d(I - T_{\underline{\lambda}}, B(0, r(\underline{\lambda})), 0) \\ &= 0 + i(I - T_{\underline{\lambda}}, 0, 0), \end{aligned} \tag{2.14}$$

pois 0 é solução isolada de $I - T_{\underline{\lambda}} = 0$ em $B(0, r(\underline{\lambda}))$.

Analogamente,

$$d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}}, 0) = d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} \backslash \overline{B(0, r(\overline{\lambda}))}, 0) + i(I - T_{\overline{\lambda}}, 0, 0) = i(I - T_{\overline{\lambda}}, 0, 0). \tag{2.15}$$

Por fim, segue do item $(iii)$ do Lema 2.2 que o grau $d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0)$ está bem definido para $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Assim, novamente pela propriedade de invariância homotópica generalizada (Teorema 1.8), segue que $d(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0)$ é constante em $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Explorando esse fato junto com (2.14) e (2.15) concluímos que

$$i(I - T_{\underline{\lambda}}, 0, 0) = i(I - T_{\overline{\lambda}}, 0, 0).$$

Entretanto, pelo teorema de Krasnoselski (Teorema 2.1) temos que

$$i(I - T_{\overline{\lambda}}, 0, 0) = (-1)^\beta i(I - T_{\underline{\lambda}}, 0, 0) \neq 0, \tag{2.16}$$

onde $\beta$ e a multiplicidade algébrica de $\lambda_0$, que é o único valor característico de $L$ em $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$. Desde que $\beta$ é ímpar e $i(I - T_\lambda, 0, 0)$ é não nulo, pois 0 é solução isolada de $I - T_\lambda = 0$, a relação (2.16) nos conduz a uma contradição. Portanto, o *continuum* $\mathcal{C}$ deve satisfazer a condição $(i)$ ou $(ii)$ deste teorema.

□

## 2.2 Teorema de Crandall-Rabinowitz

Nesta seção, apresentaremos a prova do teorema de Crandall-Rabinowitz, que nos fornece condições suficientes para que um parâmetro $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ seja um ponto de bifurcação de $\mathcal{F}$, além de assegurar a existência de uma curva de soluções não triviais emanando de $(\lambda_0, 0)$. Graças ao teorema de Crandall-Rabinowitz, podemos em muitas situações descrever localmente a estrutura das soluções bifurcadas.

**Teorema B** (Crandall-Rabinowitz)**.** Seja $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R} \times E, F)$ tal que $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, e denotemos por

$$L_0 := D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0) \quad \text{e} \quad L_1 := D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0).$$

Suponhamos que $Ker(L_0) = span\langle\phi_0\rangle$, $cod(Rg(L_0)) = 1$ e $L_1\phi_0 \notin Rg(L_0)$, onde $span\langle\phi_0\rangle$ é o espaço gerado por $\phi_0$. Considere ainda $Z$ o complemento topológico de $Ker(L_0)$ em $E$, isto é, $E = Ker(L_0) \bigoplus Z$ e as projeções de $E$ sobre $Ker(L_0)$ e $Z$ são contínuas. Então,

a) (*Existência*) $\lambda_0$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ desde a solução trivial e o conjunto de soluções não triviais de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ em uma vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ é uma única curva de classe $C^1$ com representação paramétrica dada por

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(s) \\ u(s) = s(\phi_0 + \psi(s)), \end{cases}$$

em que $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow Z$ e $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ são aplicações de classe $C^1$, com $\lambda(0) = \lambda_0$ e $\psi(0) = 0$.

b) (*Unicidade*) existe $\rho > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in B((\lambda_0, 0), \rho) \subset \mathbb{R} \times E$ é solução não trivial de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, então $(\lambda, u) = (\lambda(s), u(s))$, para algum $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

*Demonstração.* A fim de evitar a singularidade, defina o operador $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \times E \longrightarrow F$ dado por

$$\mathcal{G}(s, \lambda, u) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u))}{s}, & s \neq 0 \\ D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)(\phi_0 + u), & s = 0, \end{cases}$$

para $(s, \lambda, u) \cong (0, \lambda_0, 0)$.

**Afirmação 1:** $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R} \times E, F)$.

Mostraremos que as derivadas de $\mathcal{G}$ em relação a $u$, $\lambda$ e $s$ são contínuas. Vamos começar calculando a derivada de $\mathcal{G}$ em relação a $u$ na direção $h \in E$:

$$\begin{aligned} D_u\mathcal{G}(s, \lambda, u)h &= \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{G}(s, \lambda, u + th) - \mathcal{G}(s, \lambda, u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u + th))}{s} - \dfrac{\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u))}{s}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u + th)) - \mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u))}{st} \\ &= \frac{1}{s} \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u) + ths) - \mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u))}{t} \\ &= \frac{1}{s} D_u\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u))hs \\ &= D_u\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + u))h, \end{aligned}$$

para $s \neq 0$. Para $s = 0$, temos

$$\begin{aligned}
D_u\mathcal{G}(0,\lambda,u)h &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(0,\lambda,u+th)-\mathcal{G}(0,\lambda,u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u+th)-D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u)+D_u\mathcal{F}(\lambda,0)th-D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} D_u\mathcal{F}(\lambda,0)h\\
&= D_u\mathcal{F}(\lambda,0)h.
\end{aligned}$$

Portanto, desde que $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}\times E, F)$ e $\lim\limits_{s\to 0} D_u\mathcal{G}(s,\lambda,u)h = D_u\mathcal{G}(0,\lambda,u)h$, segue que $D_u\mathcal{G}$ é contínua.

Agora, derivando com respeito a $\lambda$, para $s \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
D_\lambda\mathcal{G}(s,\lambda,u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(s,\lambda+t,u)+\mathcal{G}(s,\lambda,u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{F}(\lambda+t,s(\phi_0+u))-\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))}{st}\\
&= \frac{1}{s}D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $s = 0$ vale

$$\begin{aligned}
D_\lambda\mathcal{G}(0,\lambda,u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(0,\lambda+t,u)-\mathcal{G}(0,\lambda,u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda+t,0)(\phi_0+u)-D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u)}{t}\\
&= D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}\times E, F)$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} D_\lambda\mathcal{G}(s,\lambda,u) &= \lim_{s\to 0}\frac{D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u)+0)-D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,0)}{s}\\
&= D_uD_\lambda\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u)\\
&= D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u).
\end{aligned}$$

Assim, do limite acima e da regularidade $C^2$ de $\mathcal{F}$, segue que $D_\lambda\mathcal{G}$ é contínua.

Nos resta verificar que $D_s\mathcal{G}$ é contínua. Para $s \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
D_s\mathcal{G}(s,\lambda,u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(s+t,\lambda,u)-\mathcal{G}(s,\lambda,u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\mathcal{F}(\lambda,(s+t)(\phi_0+u))}{(s+t)t}-\frac{\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))}{st}\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{F}(\lambda,(s+t)(\phi_0+u))s-\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))(s+t)}{(s+t)st}\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{s[\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u)+t(\phi_0+u))-\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u)]}{s(s+t)t}-\frac{\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))t}{(s^2+st)t}\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u)+t(\phi_0+u))-\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u)}{(s+t)t}\right]-\frac{\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))}{s^2}\\
&= \frac{1}{s}D_u\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))(\phi_0+u)-\frac{\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))}{s^2}\\
&= \frac{D_u\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))(\phi_0+u)s-\mathcal{F}(\lambda,s(\phi_0+u))}{s^2}.
\end{aligned}$$

Para $s = 0$, temos

$$\begin{aligned}
D_s\mathcal{G}(0,\lambda,u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(t,\lambda,u)-\mathcal{G}(0,\lambda,u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^{-1}\mathcal{F}(\lambda,t(\phi_0+u))-D_u\mathcal{F}(\lambda,0)(\phi_0+u)}{t},
\end{aligned}$$

que resulta em uma indeterminação do tipo $0/0$. Desse modo, podemos usar a Regra de L'Hospital para concluir que

$$\begin{aligned}
D_s\mathcal{G}(0,\lambda,u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\lim_{s\to 0}\left[\frac{\mathcal{F}(\lambda,(t+s)(\phi_0+u))}{s+t}-\frac{\mathcal{F}(\lambda,t(\phi_0+u))}{t}\right]\frac{1}{s}-0}{1}\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\lim_{s\to 0}\left(\frac{\mathcal{F}(\lambda,(t+s)(\phi_0+u))}{(t+s)s}-\frac{\mathcal{F}(\lambda,t(\phi_0+u))}{ts}\right)\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\lim_{s\to 0}\frac{\mathcal{F}(\lambda,(t+s)(\phi_0+u))t-\mathcal{F}(\lambda,t(\phi_0+u))(t+s)}{(t+s)ts}\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda,t(\phi_0+u))(\phi_0+u)t-\mathcal{F}(\lambda,t(\phi_0+u))}{t^2}\right]\\
&= \lim_{t\to 0}D_s\mathcal{G}(t,\lambda,u),
\end{aligned}$$

o que conclui a prova da continuidade de $D_s\mathcal{G}$. Portanto, $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R}^2 \times E, F)$.

Agora, observe que do fato que $\phi_0 \in Ker(L_0)$, segue que

$$\mathcal{G}(0,\lambda_0,0) = D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)\phi_0 = L_0\phi_0 = 0.$$

Derivando $\mathcal{G}$ em relação a $(\lambda, u)$ no ponto $(0, \lambda_0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)(\lambda,u) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(0,\lambda_0+t\lambda,tu)-\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda_0+t\lambda,0)(\phi_0+tu)-D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)\phi_0}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda_0+t\lambda,0)\phi_0-D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)\phi_0}{t}+\frac{D_u\mathcal{F}(\lambda_0+t\lambda,0)tu}{t}\right]\\
&= D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)\lambda\phi_0 + D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)u\\
&= \lambda L_1\phi_0 + L_0 u.
\end{aligned}$$

Além disso, observe que o operador $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times Z \longrightarrow L_0u + \lambda L_1\phi_0$ é linear e contínuo. Agora, mostraremos que $D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)\Big|_{\mathbb{R}\times Z}$ é um isomorfismo, ou seja, é bijetivo e possui inversa contínua.

Para a injetividade, mostraremos que $Ker\left(D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)\Big|_{\mathbb{R}\times Z}\right) = \{0\}$, isto é, dado $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times Z$ tais que $L_0u + \lambda L_1\phi_0 = 0$, então $u = 0$ e $\lambda = 0$. Com efeito, se $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times Z$ satisfaz $L_0u + \lambda L_1\phi_0 = 0$ e $\lambda \neq 0$, então

$$L_0u + \lambda L_1\phi_0 = 0 \Rightarrow L_1\phi_0 = -\frac{1}{\lambda}L_0u \Rightarrow L_1\phi_0 \in Rg(L_0),$$

o que contradiz a hipótese de transversalidade $L_1\phi_0 \notin Rg(L_0)$, logo $\lambda = 0$, o que implica em $L_0u = 0$. Se $u \neq 0$, segue que $u \in Ker(L_0)\backslash\{0\}$, mas isso contraria o fato de $u \in Z$. Portanto, $(\lambda, u) = (0, 0)$, o que conclui a prova da injetividade de $D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)\Big|_{\mathbb{R}\times Z}$.

Para a sobrejetividade, recorde inicialmente que $cod(Rg(L_0)) = 1$ e $L_1\phi_0 \notin Rg(L_0)$, logo podemos escrever

$$F = Rg(L_0)\bigoplus span\langle L_1\phi_0\rangle,$$

o que implica em $\overline{Rg(L_0)} \neq F$, já que $Rg(L_0)$ é fechado. Assim, como consequência do teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice, Teorema A.5), existe $\phi \in F^\star$ não nulo tal que $\phi(x) = 0$, para todo $x \in Rg(L_0)$. Mais ainda, $\phi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in Rg(L_0)$. De fato, suponha que exista $x \in span\langle L_1\phi_0\rangle\backslash\{0\}$ tal que $\phi(x) = 0$, então $x = \hat{\lambda}L_1\phi_0$ e

$$\phi(\hat{\lambda}L_1\phi_0) = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}\phi(L_1\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi(L_1\phi_0) = 0,$$

logo $\phi(span\langle L_1\phi_0\rangle) = \{0\}$. Ora, nesse caso teríamos $\phi \equiv 0$, pois $\phi(Rg(L_0)) = \{0\}$, $\phi(span\langle L_1\phi_0\rangle) = \{0\}$ e $F = Rg(L_0)\bigoplus span\langle L_1\phi_0\rangle$, contrariando assim o fato de $\phi$ ser não nula. Disso, segue que $\phi(x) \neq 0$, para $x \notin Rg(L_0)$.

Diante disso, mostraremos agora que $D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)\Big|_{\mathbb{R}\times Z}$ é sobrejetiva, isto é, dado $x \in F$ existe $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times Z$ tal que $L_0u + \lambda L_1\phi_0 = x$. Para tanto, note que

$$L_0u + \lambda L_1\phi_0 = x \Leftrightarrow L_0u = x - \lambda L_1\phi_0 \Leftrightarrow x - \lambda L_1\phi_0 \in Rg(L_0).$$

Sabendo que $L_1\phi_0 \notin Rg(L_0)$, e portanto $\phi(L_1\phi_0) \neq 0$, temos que

$$\phi(x - \lambda L_1\phi_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) - \lambda\phi(L_1\phi_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\phi(x)}{\phi(L_1\phi_0)}.$$

Logo, para $\lambda$ tomado como acima, temos que $x - \lambda L_1\phi_0 \in Rg(L_0)$. Assim, escolhendo $u \in Z$ de modo que $L_0 u = x - \lambda L_1\phi_0 \in Rg(L_0)$, temos que o par $(\lambda, u)$ satisfaz $L_0 u + \lambda L_1\phi_0 = x$, o que conclui a prova da sobrejetividade, e portanto $D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)\Big|_{\mathbb{R}\times Z}$ é bijetiva.

Como consequência do teorema da Aplicação Aberta (ver Apêndice, Teorema A.7), segue que a inversa de $D_{(\lambda,u)}\mathcal{G}(0,\lambda_0,0)\Big|_{\mathbb{R}\times Z}$ é contínua, e assim concluímos que tal aplicação linear é um isomorfismo. Desse modo, podemos acionar o Teorema da Função Implícita para obter a existência de $\epsilon > 0$ e aplicações de classe $C^1$

$$\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \psi : (-\epsilon, \epsilon) \to Z$$

tais que $\lambda(0) = \lambda_0$, $\psi(0) = 0$ e $\mathcal{G}(s, \lambda(s), \psi(s)) = 0$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Pela definição de $\mathcal{G}$, temos que

$$0 = \mathcal{G}(s, \lambda(s), \psi(s)) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\lambda(s), s(\phi_0 + \psi(s))) = 0, \qquad \text{para todo} \quad s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Observe que para $s \neq 0$, temos que $s(\phi_0 + \psi(s)) \neq 0$, pois $\phi_0 \in Ker(L_0)$ e $\psi(s) \in Z$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Portanto $s \mapsto (\lambda(s), s(\phi_0 + \psi(s)))$ é de fato uma curva de soluções não triviais de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, o que conclui a prova da existência.

Agora, mostraremos que em uma vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ não há solução não trivial da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ que não seja aquelas contidas na curva $s \mapsto (\lambda(s), s(\phi_0 + \psi(s)))$. Para isso, é suficiente mostrar a seguinte afirmação.

**Afirmação 2:** Existe $\rho > 0$ e $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ contínua, com $g(0) = 0$, tal que se $(\lambda, s\phi_0 + z) \in B((\lambda_0, 0), \rho) \subset \mathbb{R} \times E$ e $\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) = 0$, então

$$\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0| \leq |s| g(|s|).$$

Vejamos primeiramente que de fato a afirmação acima é suficiente para garantir a unicidade afirmada no teorema. Para tanto, suponha que a afirmação seja válida e tome $(\lambda, u) \in B((\lambda_0, 0), \rho)$, com $u \neq 0$, e tal que $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. Como $u \in E = span\langle\phi_0\rangle \bigoplus Z$, segue que $u = s\phi_0 + z$, para algum $s \in \mathbb{R}$ e $z \in Z$.

Pela afirmação 2, temos que $\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0| \leq |s| g(|s|)$. Desde que $u \neq 0$, segue que $s \neq 0$, pois caso contrário teríamos $\| z \|_E + |0||\lambda - \lambda_0| \leq 0$, o que implicaria em $z = 0$ e consequentemente $u = 0$. Portanto, $s \neq 0$ e assim

$$\left\|\frac{z}{s}\right\|_E + |\lambda - \lambda_0| \leq g(|s|). \tag{2.17}$$

Daí, se $\rho > 0$ for tomado suficientemente pequeno, desde que $(\lambda, s\phi_0 + z) \in B((\lambda_0, 0), \rho)$, segue que $s \approx 0$ e portanto da continuidade de $g$ e do fato que $g(0) = 0$, teremos por (2.17) que

$$\left\|\frac{z}{s}\right\|_E + |\lambda - \lambda_0| \approx 0$$

e além disso

$$\mathcal{G}(s, \lambda, s^{-1}z) = s^{-1}(\mathcal{F}(\lambda, s(\phi_0 + s^{-1}z)) = s^{-1}\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) = 0.$$

Logo, pela unicidade garantida pelo teorema da Função Implícita, temos $(\lambda, s^{-1}z) = (\lambda(s), \psi(s))$, isto é, $\lambda = \lambda(s)$ e $z = s\psi(s)$. Portanto,

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(s) \\ u = s(\phi_0 + \psi(s)), \end{cases}$$

como queríamos mostrar.

Agora, nos resta provar a afirmação 2. Para isso, tomemos $(\lambda, u) = (\lambda, s\phi_0 + z) \in B((\lambda_0, 0), \rho)$ tal que $\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 =& \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) - \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z \\ &+ \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)s\phi_0 \\ &+ sD_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 - s(\lambda - \lambda_0)D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)\phi_0 \\ &+ D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z - D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)z \\ &+ D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)z + s(\lambda - \lambda_0)D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)\phi_0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como $\mathcal{F}$ é de classe $C^2$, temos que

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) = \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) + D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z + o_1(\| z \|_E) \\ \Rightarrow& \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) - \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z = o_1(\| z \|_E)\frac{\| z \|_E}{\| z \|_E} \\ \Rightarrow& ||\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) - \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z||_F = \left\|o_1(\| z \|_E)\frac{\| z \|_E}{\| z \|_E}\right\|_F \\ \Rightarrow& \| \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) - \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z \|_F \leq h_1(\| z \|_E)\| z \|_E, \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde, $h_1(\| z \|_E) := \left\|\dfrac{o_1(\| z \|_E)}{\| z \|_E}\right\|_F$ e $\lim\limits_{\|z\|_E \to 0} h_1(\| z \|_E) = 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + 0) = \mathcal{F}(\lambda, 0) + D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)s\phi_0 + o_2(\| s\phi_0 \|_E) \\ \Rightarrow& \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)s\phi_0 = o_2(\| s\phi_0 \|_E)\frac{\| s\phi_0 \|_E}{\| s\phi_0 \|_E} \\ \Rightarrow& ||\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - sD_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0||_F = \left\|o_2(\| s\phi_0 \|_E)\frac{|s| \ \| \phi_0 \|_E}{|s| \ \| \phi_0 \|_E}\right\|_F \\ \Rightarrow& \| \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - sD_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 \|_F \leq |s|h_2(|s|), \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $h_2(|s|) := \left\| \dfrac{o_2(\| s\phi_0 \|_E) \| \phi_0 \|_E}{\| s\phi_0 \|_E} \right\|_F$ e $\lim_{s\to 0} h_2(|s|) = 0$.

Por último, usando que $D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)\phi_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} & D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 = D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)\phi_0 + D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)(\lambda - \lambda_0)\phi_0 + o_3(|\lambda - \lambda_0|) \\ \Rightarrow & D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 - D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)(\lambda - \lambda_0)\phi_0 = o_3(|\lambda - \lambda_0|)\frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\lambda - \lambda_0|} \\ \Rightarrow & ||D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 - D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)(\lambda - \lambda_0)\phi_0||_F = \left\| o_3(|\lambda - \lambda_0|)\frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\lambda - \lambda_0|} \right\|_F \\ \Rightarrow & \| D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 - D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)(\lambda - \lambda_0)\phi_0 \|_F \leq |\lambda - \lambda_0| h_3(|\lambda - \lambda_0|), \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $h_3(|\lambda - \lambda_0|) := \left\| \dfrac{o_3(|\lambda - \lambda_0|)}{|\lambda - \lambda_0|} \right\|_F$ e $\lim_{\lambda\to\lambda_0} h_3(|\lambda - \lambda_0|) = 0$.

Como $L_0 = D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ e $L_1 = D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)$, usando as relações (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} \| L_0 z + s(\lambda - \lambda_0)L_1\phi_0 \|_F = & \| D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)z + s(\lambda - \lambda_0)D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)\phi_0 \|_F \\ \leq & \| \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0 + z) - \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z \|_F \\ & + \| \mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)s\phi_0 \|_F \\ & + |s| \, \| D_u\mathcal{F}(\lambda, 0)\phi_0 - (\lambda - \lambda_0)D_\lambda D_u\mathcal{F}(\lambda_0, 0)\phi_0 \|_F \\ & + \| D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z - L_0 z \|_F \\ \leq & h_1(\| z \|_E) \| z \|_E + |s|h_2(|s|) + |s||\lambda - \lambda_0|h_3(|\lambda - \lambda_0|) \\ & + \| D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0)z - L_0 z \|_F . \end{aligned}$$

Como o operador $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times Z \to L_0 z + \lambda L_1\phi_0 \in F$ é um isomorfismo, segue do Teorema A.8 que existe $c > 0$ tal que

$$\| L_0 z + s(\lambda - \lambda_0)L_1\phi_0 \|_F \geq c(\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0|),$$

para todo $s, \lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in Z$, o que implica em

$$\begin{aligned} c(\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0|) \leq & h_1(\| z \|_E) \| z \|_E + |s|h_2(|s|) + |s||\lambda - \lambda_0|h_3(|\lambda - \lambda_0|) \\ & + \| D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - L_0 \|_F \| z \|_E . \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\rho > 0$ de modo que para $(\lambda, s\phi_0 + z) \in B((\lambda_0, 0), \rho)$ tenhamos

$$h_1(\| z \|_E) \leq \frac{c}{4}, \;\; h_3(|\lambda - \lambda_0|) \leq \frac{c}{2} \text{ e } \| D_u\mathcal{F}(\lambda, s\phi_0) - L_0 \|_F \leq \frac{c}{4},$$

obtemos,

$$\begin{aligned} c(\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0|) \leq & \frac{c}{4} \| z \|_E + |s|h_2(|s|) + |s||\lambda - \lambda_0|\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \| z \|_E \\ = & \frac{c}{2}(\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0|) + |s|h_2(|s|), \end{aligned}$$

isto é,

$$\| z \|_E + |s||\lambda - \lambda_0| \leq \frac{2}{c}|s|h_2(|s|).$$

Logo, basta tomar $g(|s|) = \dfrac{2}{c}h_2(|s|)$ para concluir a prova da afirmação 2 e, portanto, do teorema. $\square$

**Observação 2.1.** Segundo Crandall-Rabinowitz [9], a hipótese $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R} \times E, F)$ pode ser substituída pela seguinte condição

- $D_\lambda \mathcal{F}$, $D_u \mathcal{F}$ e $D_u D_\lambda \mathcal{F}$ existem e são contínuas.

No entanto, nesse caso só podemos garantir a continuidade das aplicações $s \mapsto \lambda(s)$ e $s \mapsto u(s)$.

# 3 Estudo de um problema logístico com difusão não-local via teoria de bifurcação

Neste Capítulo, baseados no trabalho de Figueiredo-Sousa, Rodrigo-Morales e Suárez [12], forneceremos uma aplicação da teoria de bifurcação ao estudo de uma equação logística com termo de difusão não-local, que modela problemas estacionários de dinâmica de populações. Com esse estudo, perceberemos que uma combinação dos teoremas de bifurcação local e global nos fornece mais do que a existência de soluções para o problema em questão, mas nos permite compreender o comportamento da dinâmica da população em termos da taxa de crescimento.

Esse capítulo está organizado do seguinte modo: na primeira seção apresentamos o problema estudado, na segunda seção fornecemos resultados preliminares para a discussão que virá em seguida, na terceira seção apresentamos o resultado principal desse capítulo.

## 3.1 Modelo estacionário de dinâmica populacional

Em Ecologia, a Dinâmica de Populações é uma importante área que estuda uma ou mais espécies vivendo em uma determinada região, buscando entender como a(s) espécie(s) interagem entre si e com o ambiente e como as populações se distribuem através do espaço. No estudo de dinâmica de populações, um modelo estacionário que retrata as soluções em um tempo infinitamente grande é

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d(x,u)\nabla u) + \operatorname{div}(\vec{v}(x,u,\int_\Omega c(x)u^p dx)u) = (\lambda - b(x)u)u & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ representa o habitat da espécie, $u$ é a densidade populacional em $\Omega$, $\lambda$ denota a taxa de crescimento da espécie e $b$ representa o efeito limitante da aglomeração na população $u$. O termo $d$ retrata a taxa de difusão, que representa movimento espacial da espécie, e poderá depender da localização geográfica $x$, do número de indivíduos $u(x)$ e também da população total em $\Omega$, dada por $\int_\Omega c(x)u^p dx$. No último caso, a presença do termo integral irá caracterizar a equação (3.1) como não local. A presença do termo não local pode acarretar algumas dificuldades técnicas no estudo de (3.1): método variacionais, por exemplo, nem sempre podem ser empregados nessa situação.

O estudo do modelo estacionário (3.1) nos permite, por exemplo, entender se uma dada espécie tende a sobreviver ou se extinguir a longo prazo. Mais precisamente, se (3.1) admite solução positiva, então a população sobreviverá, caso contrário a espécie será extinta em um tempo suficientemente grande. Na literatura, a abordagem mais usual de (3.1) é através de métodos não-variacionais, transformando o problema de encontrar soluções para (3.1) em uma equação equivalente da forma

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0.$$

O objetivo do presente capítulo é estudar o seguinte problema logístico

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = \lambda u - b(x)u^2, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $N \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado, $p > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $b \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma função positiva, $a \in C(\mathbb{R})$ é uma função positiva e $q$ é uma função limitada, não trivial e não negativa definida em $\Omega$. Para tanto, vamos esclarecer o que entendemos por solução de (3.2).

**Definição 3.1.** Dizemos que:

*i)* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ é solução clássica de (3.2) se $u$ satisfaz pontualmente a equação diferencial em (3.2) e a condição de fronteira de Dirichlet.

*ii)* $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução fraca de (3.2) se

$$a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left(\lambda u - b(x)u^2\right)\varphi,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

## 3.2 Preliminares

Para auxiliar o leitor, fornecemos nesta seção alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste capítulo.

### 3.2.1 Autovalor

Considere o problema de autovalor

$$\begin{cases} -d\Delta u + bu = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $b \in L^\infty(\Omega)$ e $d$ é uma constante positiva.

Denotaremos por $\lambda_1[-d\Delta + b]$ o primeiro autovalor de (3.3), que é o único autovalor que admite autofunção positiva associada. No caso em que $d = 1$ e $b \equiv 0$, denotaremos o primeiro autovalor de (3.3) simplesmente por $\lambda_1 = \lambda_1[-\Delta]$.

**Proposição 3.1.** O autovalor principal $\lambda_1[-d\Delta + b]$ satisfaz as seguintes afirmações:

1. A aplicação $d \in (0, \infty) \mapsto \lambda_1[-d\Delta + b] \in \mathbb{R}$ é contínua e crescente.

2. A aplicação $b \in C(\overline{\Omega}) \mapsto \lambda_1[-d\Delta + b] \in \mathbb{R}$ é contínua e crescente.

*Demonstração.* Veja [19]. □

### 3.2.2 Equação logística local

Considere o problema logístico local

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u - b(x)u^2, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Uma descrição detalhada do comportamento de (3.4) é fornecida no próximo teorema.

**Teorema 3.1.** Se $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in \Omega$, então (3.4) admite solução positiva se, e somente se, $\mu > \lambda_1$. Além disso, tal solução é única e será denotada por $\theta_{[\mu,b]}$.

*Demonstração.* Veja [15], [16] ou [23]. □

### 3.2.3 Sub e supersolução

Nesta seção, introduziremos o método de sub-supersolução para o seguinte problema elíptico não local

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$. A seguir, definiremos sub-supersolução de (3.5) e posteriormente enunciaremos um resultado que será muito útil no decorrer do trabalho.

**Definição 3.2.** Dizemos que o par $(\underline{u}, \overline{u})$, com $\underline{u}, \overline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, é um par de sub-supersolução de (3.5) se

1. $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\Omega$,

2. $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ em $\partial\Omega$,

3. $$a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi \leq \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi$$

e

$$a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi \geq \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em $\Omega$ e para todo $u \in [\underline{u},\overline{u}]$, onde $[\underline{u},\overline{u}] = \{u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$.

**Teorema 3.2.** Assuma que exista um par de sub-supersolução de (3.5), digamos $\underline{u},\overline{u} \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Então, existe uma solução $u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ de (3.5) tal que $u \in [\underline{u},\overline{u}]$.

*Demonstração.* Veja Teorema 3.2 de [8]. □

### 3.2.4 Regularidade elíptica

Considere o operador $\mathcal{K} : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$, definido por $\mathcal{K}(f) = u$, onde $u$ é a única solução fraca (e clássica) da equação linear elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

O operador $\mathcal{K}$ é o operador solução do problema (3.6). É um fato conhecido na literatura que $\mathcal{K}$ é linear, sua compacidade segue da discussão feita na Observação 3.1 abaixo.

**Teorema 3.3.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado.

1. Se $f \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$, então (3.6) tem uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ tal que
$$\| u \|_{W^{2,p}} \leq c \| f \|_{L^p}. \tag{3.7}$$
2. (Estimativa de Schauder) Se $\Omega$ é de classe $C^{2,\alpha}$ e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica de (3.6) e
$$\| u \|_{C^{2,\alpha}} \leq c \| f \|_{C^{0,\alpha}}.$$

*Demonstração.* Veja [5]. □

**Observação 3.1.** Segue da desigualdade (3.7) que se $\{f_n\} \subset C(\overline{\Omega})$ é uma sequência limitada e $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ é tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f_n(x), & \text{em } \Omega \\ u_n = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $\{u_n\} \subset W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > N$ e $\| u_n \|_{W^{2,p}} \leq c \| f_n \|_{L^p} \leq M$, onde $M$ independe de $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, usando a compacidade da imersão dada no item 3 do Teorema A.21 (ver Apêndice), concluímos que a sequência $\{u_n\}$ admite subsequência convergente em $C_0^1(\overline{\Omega})$.

## 3.3 Resultados de bifurcação para uma equação logística não-local

Nesta seção, discutiremos a prova do Teorema C. O primeiro resultado que apresentaremos é uma aplicação do teorema de bifurcação global de Rabinowitz (Teorema A) e estabelece a existência de um *continuum* de soluções, não necessariamente positivas, para

$$(P_{aux}) : \begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)\Delta u = \lambda u - b(x)u^2, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é solução fraca positiva de (3.2) se, e somente se, $u$ é solução de $(P_{aux})$. Desse modo, vamos nos concentrar em provar a existência de um *continuum* ilimitado de soluções positivas para $(P_{aux})$.

No que segue, denotaremos por $\mathcal{S}$ o fecho do conjunto das soluções não triviais de $(P_{aux})$.

**Teorema 3.4.** Existe um *continuum* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ de soluções de $(P_{aux})$ emanando de $(\lambda, u) = (a(0)\lambda_1, 0)$.

*Demonstração.* Primeiramente, note que $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é solução fraca positiva de $(P_{aux})$ se, e somente se, $u$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)}u - \dfrac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)}u^2 + \dfrac{\lambda}{a\,(0)}u - \dfrac{\lambda}{a\,(0)}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, pela definição do operador solução, temos

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{K}\left(\frac{\lambda}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)}u - \frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)}u^2 + \frac{\lambda}{a\,(0)}u - \frac{\lambda}{a\,(0)}u\right) \\ &= \frac{\lambda}{a(0)}\mathcal{K}u + \lambda\mathcal{K}\left(\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)}\right)u\right) - \mathcal{K}\left(\frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)}u^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Logo, encontrar solução positiva para $(P_{aux})$ é equivalente a resolver a equação

$$u = T_\lambda(u) := \lambda\frac{\mathcal{K}u}{a(0)} + h(\lambda, u),$$

onde $h : \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ é definido por

$$h(\lambda, u) = \lambda\mathcal{K}\left(\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)}\right)u\right) - \mathcal{K}\left(\frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)}u^2\right) = 0.$$

Desde que $\mathcal{K} : C_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ é um operador linear e compacto, para aplicar o teorema de bifurcação de Rabinowitz (Teorema A) nos resta checar que $h$ satisfaz $(H_2)$.

Para tanto, observe inicialmente que se $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, então

$$\left( \frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} u^2 \right) \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Assim, usando a relação (3.7) fornecida no Teorema 3.3, e as imersões $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, para $p > N$ e $C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $p > 1$, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\frac{\| h(\lambda, u) \|_{C^1}}{\| u \|_{C^1}} &= \frac{\left\| \lambda\mathcal{K}\left( \left( \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right) u \right) - \mathcal{K}\left( \frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} u^2 \right) \right\|_{C^1}}{\| u \|_{C^1}} \\
&\leq \frac{|\lambda| \left\| \mathcal{K}\left( \left( \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right) u \right) \right\|_{C^1} + \left\| \mathcal{K}\left( \frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} u^2 \right) \right\|_{C^1}}{\| u \|_{C^1}} \\
&\leq \frac{C\left[ |\lambda| \left\| \left( \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right) u \right\|_{C^1} + \left\| \frac{b(x)}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} u^2 \right\|_{C^1} \right]}{\| u \|_{C^1}}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\left\| \left( \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right) u \right\|_{C^1} \leq \left| \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right| \| u \|_{C^1}$$

e

$$\left\| \frac{b}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} u^2 \right\|_{C^1} \leq \frac{\| b \|_{C^1}}{a_L} \| u \|_{C^1}^2,$$

onde $a_L = \inf\limits_{s \in [0,\infty)]} a(s)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\| h(\lambda, u) \|_{C^1}}{\| u \|_{C^1}} &\leq \frac{C\left( |\lambda| \left| \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right| \| u \|_{C^1} + \frac{\| b \|_{C^1}}{a_L} \| u \|_{C^1}^2 \right)}{\| u \|_{C^1}} \\
&= C\left( |\lambda| \left| \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p\right)} - \frac{1}{a(0)} \right| + \frac{\| b \|_{C^1}}{a_L} \| u \|_{C^1} \right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega q(x)|u|^p(x)dx\right| &\leq \int_\Omega |q(x)||u(x)|^p dx \\
&\leq \int_\Omega |q(x)|(\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|)^p dx \\
&= \int_\Omega |q(x)| \ \| u \|_C^p \, dx \\
&= \| u \|_C^p \int_\Omega |q(x)|dx \to 0 \quad \text{quando} \quad \| u \|_{C^1} \to 0
\end{aligned}$$

e assim, pela continuidade de $a$, segue que

$$a\left(\int_\Omega q(x)|u|^p(x)dx\right) \to a(0) \quad \text{quando} \quad \| u \|_{C^1} \to 0.$$

Portanto, de (3.8) concluímos que

$$\frac{\| h(\lambda, u) \|_{C^1}}{\| u \|_{C^1}} \to 0, \quad \text{quando} \quad \| u \|_{C^1} \to 0,$$

uniformemente para $\lambda$ em intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Agora, mostraremos a compacidade de $h$. Seja $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ uma sequência limitada, isto é, $|\lambda_n| + \| u_n \|_{C^1} \leq M$, para algum $M > 0$. Então,

$$h(\lambda_n, u_n) = \lambda_n \mathcal{K}\left(\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)} - \frac{1}{a(0)}\right)u_n\right) - \mathcal{K}\left(\frac{b(x)u_n^2}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)}\right).$$

Para o termo integral, vale a seguinte estimativa

$$\left|\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right| \leq \| u_n \|_{C^1}^p \int_\Omega |q(x)| \leq M^p \int_\Omega |q(x)| := \hat{M},$$

e portanto

$$a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right) \in \left[\min_{[-\hat{M},\hat{M}]} a, \max_{[-\hat{M},\hat{M}]} a\right] \Rightarrow \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)} \in \left[\frac{1}{\max_{[-\hat{M},\hat{M}]} a}, \frac{1}{\min_{[-\hat{M},\hat{M}]} a}\right],$$

donde $\left\{\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)} - \frac{1}{a(0)}\right)u_n\lambda_n\right\}$ é limitada em $C^1(\overline{\Omega})$.

Analogamente,

$$\left\|\frac{b(x)u_n^2}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)}\right\|_{C^1} \leq \frac{\|b\|_{C^1} \| u_n \|_{C^1}^2}{\min_{[-\hat{M},\hat{M}]} a} \leq \frac{\|b\|_{C^1} M^2}{\min_{[-\hat{M},\hat{M}]} a}.$$

Logo, observado isso, a compacidade de $h$ segue porque cada uma de suas parcelas é a composição do operador compacto $\mathcal{K}$ com um operador contínuo localmente limitado.

Para aplicar o teorema de Rabinowitz (Teorema A), devemos encontrar um valor característico de $\mathcal{K}/a(0)$ com multiplicidade algébrica ímpar. Note que $\lambda \neq 0$ é valor característico de $\mathcal{K}/a(0)$ se, e somente se, existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$ tal que

$$\frac{\mathcal{K}(u)}{a(0)} = \frac{1}{\lambda}u \Leftrightarrow \mathcal{K}(u) = \frac{a(0)}{\lambda}u \Leftrightarrow -\Delta\left(\frac{a(0)}{\lambda}u\right) = u \Leftrightarrow -\Delta u = \frac{\lambda}{a(0)}u.$$

Tomando $\lambda = a(0)\lambda_1$ na relação anterior, onde $\lambda_1$ é o primeiro autovalor do laplaciano, concluímos que a equação $\frac{\mathcal{K}(u)}{a(0)} = \frac{1}{a(0)\lambda_1} u$ é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{a(0)\lambda_1}{a(0)} u = \lambda_1 u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $\lambda_1$ é autovalor simples do operador laplaciano, segue que $\lambda = \lambda_1 a(0)$ é valor característico de $\mathcal{K}/a(0)$ com multiplicidade algébrica ímpar. Portanto, do teorema de Rabinowitz (Teorema A) concluímos que existe uma componente conexa maximal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ emanando de $(a(0)\lambda_1, 0)$.

□

O teorema de Rabinowitz, apesar de nos fornecer a existência de um *continuum* global de soluções para $(P_{aux})$, ele nada nos diz sobre o sinal das soluções. No que segue, aplicaremos a estratégia adotada por López Gómez em [20] para mostrar que $\mathcal{C}$ admite um *subcontinuum* ilimitado de soluções positivas de $(P_{aux})$. Para tanto, observemos inicialmente que, denotando por $\lambda_0 = a(0)\lambda_1$ e $\mathcal{L}(\lambda) : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ o operador definido por

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = u - \frac{\lambda}{a(0)}\mathcal{K}(u),$$

temos que $Ker(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = span\langle \phi_1 \rangle$, em que $\phi_1$ é a autofunção do laplaciano associada ao autovalor $\lambda_1$ e que satisfaz $\|\phi_1\|_{C^1} = 1$. Pelo Teorema A.15 (ver Apêndice), podemos decompor o espaço $C_0^1(\overline{\Omega})$ como segue

$$C_0^1(\overline{\Omega}) = Ker(\mathcal{L}_{\lambda_0}) \oplus Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0}). \tag{3.9}$$

Novamente do teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice, Teorema A.5), concluímos que existe $\phi_1^* \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^\star$ não nulo tal que

$$Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \ : \ \langle \phi_1^*, u \rangle = 0\} \ \text{ e } \ \langle \phi_1^*, \phi_1 \rangle = 1,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade entre $C_0^1(\overline{\Omega})$ e $\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^\star$.

Da decomposição dada em (3.9), temos que para cada $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, existem únicos $s \in \mathbb{R}$ e $w \in Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0})$ tais que $u = s\phi_1 + w$. Além disso, segue da caracterização de $Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0})$ que

$$\langle \phi_1^*, u \rangle = \langle \phi_1^*, s\phi_1 \rangle = s\langle \phi_1^*, \phi_1 \rangle = s. \tag{3.10}$$

Vamos agora definir os seguintes conjuntos abertos:

$$A_{\epsilon,\delta}^+ = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}) \ : \ |\lambda - \lambda_0| < \epsilon \text{ e } \langle \phi_1^*, u \rangle > \delta \|u\|_{C^1}\}$$

e

$$A_{\epsilon,\delta}^- = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}) \ : \ |\lambda - \lambda_0| < \epsilon \text{ e } \langle \phi_1^*, u \rangle < -\delta \|u\|_{C^1}\}.$$

**Proposição 3.2.** O conjunto $\mathcal{S}$ admite dois *subcontinuums* $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$ emanando de $(\lambda_0, 0)$, em que $\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{S}\backslash A^-_{\epsilon,\delta}$ e $\mathcal{C}^- \subset \mathcal{S}\backslash A^+_{\epsilon,\delta}$. Além disso, dado $\delta > 0$, existe $r_0 = r(\delta) > 0$ tal que para $r \in (0, r_0)$ tem-se

$$\mathcal{S}\backslash\{(\lambda_0,0)\} \cap B_r(\lambda_0,0) \subset \mathcal{A}_{\epsilon,\delta} := A^+_{\epsilon,\delta} \cup A^-_{\epsilon,\delta} \;\text{ e }\; \mathcal{C} \cap B_r(\lambda_0,0) = (\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap B_r(\lambda_0,0)$$

e para cada $(\lambda, u) \in (\mathcal{S}\backslash\{(\lambda_0, 0)\}) \cap B_r(\lambda_0, 0)$ existem únicos $s \in \mathbb{R}$ e $w \in Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0})$ tais $u = s\phi_1 + w$, onde $|s| > \delta\|u\|_{C^1}$, $\lambda = \lambda_0 + o(1)$ e $w = so(1)$ quando $s \to 0$. Finalmente, cada uma das componentes $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$ satisfazem uma das alternativas do Teorema A ou contém um ponto $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0})\backslash\{0\})$.

*Demonstração.* Veja Proposição 6.4.2 e Teorema 6.4.3 em [20]. □

Denotando por $P$ o cone positivo de $C^1_0(\overline{\Omega})$ e $\dot{P}$ o interior de $P$, é um fato conhecido na literatura que $\dot{P} = \left\{u \in C^1_0(\overline{\Omega}) : u(x) > 0 \text{ e } \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) < 0,\ \forall x \in \partial\Omega\right\} \neq \emptyset$. Para concluir a prova do Teorema C devemos mostrar que $\mathcal{C}^+$ satisfaz o item $(i)$ do teorema de Rabinowitz (Teorema A) e que $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times \dot{P}$. As proposições que seguem nos auxiliarão nessa tarefa.

**Proposição 3.3.** $\lambda_0$ é um valor de bifurcação de soluções positivas de $(P_{aux})$ e é o único com esta propriedade.

*Demonstração.* Ora, primeiramente observe que se $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+ \cap B_r(\lambda_0, 0)$, então segue da Proposição 3.2 que $u = s\phi_1 + w$, para algum $s > \delta\|u\|_{C^1} > 0$ e $w = so(1)$. Como $\phi_1 \in \dot{P}$, temos que se $s > 0$ é suficientemente pequeno, então $\phi_1 + o(1) \in \dot{P}$ e portanto $u = s(\phi_1 + o(1)) \in \dot{P}$. Com isso, concluímos que $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação de soluções positivas de $(P_{aux})$.

Para provar que $(\lambda_0, 0)$ é o único ponto de bifurcação de soluções positivas de $(P_{aux})$, suponha por contradição que existe um valor característico $\lambda_*$ de $\mathcal{K}/a(0)$ tal que $(\lambda_*, 0) \in \mathcal{S}$, com $\lambda_* \neq a(0)\lambda_1$, e considere $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_*, 0)$ em $\mathbb{R} \times C^1_0(\overline{\Omega})$ com $u_n > 0$, onde $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathcal{S}$. Então,

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)}(u_n - b(x)u_n^2), & x \in \Omega \\ u_n(x) > 0, & x \in \Omega \\ u_n(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Dividindo ambos os lados da equação em (3.11) por $\| u_n \|_{C^1}$, obtemos

$$-\Delta \frac{u_n}{\| u_n \|_{C^1}} = \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right)}\left(\frac{\lambda_n u_n}{\| u_n \|_{C^1}} - b(x)u_n\frac{u_n}{\| u_n \|_{C^1}}\right).$$

Desse modo, denotando por $z_n = u_n / \parallel u_n \parallel_{C^1}$, concluímos que $z_n$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta z_n = \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right)} \left(\lambda_n z_n - b(x) u_n z_n\right), & \text{em } \Omega \\ z_n = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

Aplicando o operador solução em (3.12), obtemos

$$\mathcal{K}\left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right)} \left(\lambda_n z_n - b(x) u_n z_n\right)\right) = z_n.$$

Como $\{u_n\}$ é limitada em $C_0^1(\overline{\Omega})$, segue que existem constantes positivas $c_1$ e $c_2$ tais que

$$c_1 \leq a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right) \leq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Explorando que $\parallel z_n \parallel_{C^1} = 1$ e (3.13), temos

$$\left\|\frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right)} \left(\lambda_n z_n - b(x) u_n z_n\right)\right\|_C \leq M, \quad \text{para algum } M > 0.$$

Logo, pela Observação 3.1 segue que $z_n \to z$ em $C^1(\overline{\Omega})$, a menos de subsequência, para algum $0 \leq z \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Assim, testando (3.12) por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla z_n \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right)} (\lambda_n z_n - b(x) u_n z_n) \varphi. \tag{3.14}$$

Desse modo, fazendo $n \to \infty$ em (3.14) concluímos que

$$\int_\Omega \nabla z \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{1}{a(0)} (\lambda_* z - 0) \varphi = \int_\Omega \frac{\lambda_*}{a(0)} z \varphi,$$

isto é, $z \geq 0$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta z = \frac{\lambda_*}{a(0)} z, & \text{em } \Omega \\ z = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $\parallel z_n \parallel_{C^1} = 1$, segue que $\parallel z \parallel_{C^1} = 1$, donde $z \neq 0$. Logo, $\lambda_* / a(0) = \lambda_1$, o que implica em $\lambda_* = a(0)\lambda_1$, que é uma contradição.

□

**Proposição 3.4.** Seja $\mathcal{C}_P^+$ o *subcontinuum* maximal de $\mathcal{C}^+$ que está contido em $\mathbb{R} \times \dot{P}$. Então $\mathcal{C}_P^+ = \mathcal{C}^+$.

*Demonstração.* Temos até agora a garantia de que os pontos de $\mathcal{C}^+$ em uma vizinhança $B_r(\lambda_0, 0)$ de $(\lambda_0, 0)$ estão em $\mathbb{R} \times \dot{P}$. Vamos agora provar que $\mathcal{C}_P^+ = \mathcal{C}^+$. De fato, caso contrário existiria $(\lambda_*, u_*)$ satisfazendo:

*i)* $(\lambda_*, u_*) \notin B_r(\lambda_0, 0)$

*ii)* $(\lambda_*, u_*) \in \mathcal{C}^+ \cap (\mathbb{R} \times \partial P) \cap \partial \mathcal{C}_P^+$.

Desse modo, para alguma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+ \cap \mathbb{R} \times \dot{P}$ teríamos

$$(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_*, u_*) \quad \text{em} \ \ \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}),$$

em que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{\lambda_n}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_n|^p\right)}(u_n - b(x)u_n^2), & x \in \Omega \\ u_n(x) > 0, & x \in \Omega \\ u_n(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Portanto, usando a formulação fraca de (3.15) e aplicando o limite $n \to \infty$, concluímos que $(\lambda_*, u_*)$ é solução de $(P_{aux})$ e $u_* \geq 0$ em $\Omega$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u_* + \left(\frac{b}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_*|^p\right)} u_*\right) u_* = \dfrac{\lambda_*}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_*|^p\right)} u_*, & x \in \Omega \\ u_*(x) \geq 0, & x \in \Omega \\ u_*(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que da relação acima, devemos ter $u_* = 0$ em $\Omega$, caso contrário, como o operador $-\Delta \cdot + \left(\frac{b}{a\left(\int_\Omega q(x)|u_*|^p\right)} u_*\right) \cdot$ satisfaz o princípio do máximo forte (veja Teorema A.23), teríamos $u_* \in \dot{P}$, o que é impossível. Portanto, $u_* = 0$, e como consequência da Proposição 3.3 temos que $\lambda_* = \lambda_0$, mas isto contraria o item *i)*. □

A seguir, fornecemos um resultado de existência, que é uma consequência do Teorema de Krein-Rutman.

**Proposição 3.5.** Para cada $f \in \dot{P}$, a equação

$$u - \frac{\lambda}{a(0)} \mathcal{K}(u) = y,$$

admite exatamente uma solução positiva em $\dot{P}$ se $\lambda < \lambda_0$ e não tem solução em $\dot{P}$ se $\lambda \geq \lambda_0$.

*Demonstração.* Veja Teorema 3.1 em [3]. □

***Prova do Teorema C:*** Segue da Proposição 3.4 que $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times \dot{P}$, daí $\mathcal{C}^+$ trata-se de um *continuum* de soluções positivas de $(P_{aux})$, e portanto de (3.2). Por outro lado, segue da Proposição 3.3 que $\mathcal{C}^+ \cap \mathbb{R} \times \{0\} = \{(\lambda_0, 0)\}$. Assim, a prova do **Teorema C** fica estabelecida se concluirmos que o *continuum* $\mathcal{C}^+$ satisfaz a condição $(i)$ do Teorema A, para isto devemos excluir a terceira possibilidade dada na Proposição 3.2.

Suponha por contradição que exista um par $(\lambda, y) \in \mathcal{C}^+ \cap \left(\mathbb{R} \times Rg(\mathcal{L}_{\lambda_0})\backslash\{0\}\right)$. Então, $y \in \dot{P}$ e

$$u - \frac{\lambda_0}{a(0)}\mathcal{K}u = y,$$

para algum $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Tomando $M > 0$ suficientemente grande, temos que $u + M\phi_1 \in \dot{P}$, e mais,

$$u + M\phi_1 - \frac{\lambda_0}{a(0)}\mathcal{K}(u + M\phi_1) = \left(u - \frac{\lambda_0}{a(0)}\mathcal{K}(u)\right) + M(\phi_1 - \lambda_1\phi_1) = \left(u - \frac{\lambda_0}{a(0)}\mathcal{K}(u)\right) = y, \tag{3.16}$$

isto é,

$$u + M\phi_1 - \frac{\lambda_0}{a(0)}\mathcal{K}(u + M\phi_1) = y \in \dot{P}.$$

Ora, mas pela Proposição 3.5 isto é impossível. Com esta contradição, descartamos a possibilidade do *continuum* $\mathcal{C}^+$ satisfazer a terceira alternativa fornecida na Proposição 3.2, portanto $\mathcal{C}^+$ é um *continuum* ilimitado de soluções positivas de (3.2).

### 3.3.1 Direção da bifurcação

Nesta seção, nosso principal objetivo é estudar o comportamento qualitativo das soluções positivas de (3.2). Para tanto, relembre que pela Definição 2.2 a direção da bifurcação é dita supercrítica se para qualquer sequência de soluções positivas $\{(\lambda_n, u_n)\}$ de (3.2) tal que $\lambda_n \to a(0)\lambda_1$ e $\| u_n \|_C \to 0$, temos $\lambda_n > a(0)\lambda_1$. Analogamente, se $\lambda_n < a(0)\lambda_1$, então a direção da bifurcação é dita subcrítica.

**Proposição 3.6.** Seja $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ uma solução positiva de (3.2) e denote por

$$d = a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right).$$

Então, $u/d$ é a única solução positiva do problema (3.4) e $\lambda > d\lambda_1 \geq a_L\lambda_1$, em que $a_L = \inf_{s\in[0,\infty)]} a(s)$.

*Demonstração.* Para a primeira parte, observe que ao denotarmos por $d = a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)$, segue do fato de $(\lambda, u)$ ser solução de (3.2) que

$$\begin{aligned} -\Delta u = \frac{1}{d}(\lambda u - b(x)u^2) &\Leftrightarrow -\frac{1}{d}\Delta u = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{d}(\lambda u - b(x)u^2)\right) \\ &\Leftrightarrow -\Delta\left(\frac{u}{d}\right) = \frac{\lambda}{d}\left(\frac{u}{d}\right) - b(x)\left(\frac{u}{d}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos das equivalências acima que $u/d$ é solução positiva de (3.4) com $\mu = \lambda/d$. Desse modo, segue da unicidade afirmada no Teorema 3.1 que

$$\frac{u}{d} = \theta_{[\frac{\lambda}{d}, b]}.$$

Para a segunda parte, note que de $u$ ser solução positiva de (3.2) segue que $u$ satisfaz

$$\begin{cases} -d\Delta u + (b(x)u)u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, $u$ é autofunção positiva do operador $(-d\Delta \cdot + bu\cdot)$. Contudo, sabemos que o primeiro autovalor de $(-d\Delta \cdot + bu\cdot)$ é o único autovalor que admite autofunção positiva associada, portanto temos necessariamente que $\lambda = \lambda_1[-d\Delta + b(x)u]$. Assim, pelo item 2 da Proposição 3.1 concluímos que

$$\lambda = \lambda_1[-d\Delta + b(x)u] > \lambda_1[-d\Delta + 0] = \lambda_1[-d\Delta]. \tag{3.17}$$

No entanto, note que $\lambda_1[-d\Delta]$ é o único autovalor do problema

$$\begin{cases} -d\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda}{d} u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

para o qual (3.18) admite solução positiva. Por outro lado, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

só admite solução positiva para $\lambda = \lambda_1$. Portanto, devemos ter

$$\frac{\lambda_1[-d\Delta]}{d} = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1[-d\Delta] = d\lambda_1$$

e assim segue de (3.17) que

$$a_L \lambda_1 \leq a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\lambda_1 < \lambda.$$

$\square$

A seguir, demonstraremos o Teorema D, que nos fornece resultados sobre a direção da bifurcação do *continuum* $\mathcal{C}^+$ de soluções positivas de (3.2) que emana de $(a(0)\lambda_1, 0)$.

**Teorema D.** Seja $\mathcal{C}^+$ o *continuum* de soluções de (3.2) emanando de $(a(0)\lambda_1, 0)$. Assuma que $a \in C^1(\mathbb{R})$ e denote por $\varphi_1$ a autofunção positiva associada ao primeiro autovalor $\lambda_1$, com norma $\| \varphi_1 \|_{L^2} = 1$. Então,

1. para $p > 1$ a direção da bifurcação é supercrítica.

2. para $p = 1$ a direção da bifurcação é supercrítica (resp. subcrítica) se
$$a'(0) > -\frac{\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \int_\Omega q(x)\varphi_1} \left( \text{resp. } a'(0) < -\frac{\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \int_\Omega q(x)\varphi_1} \right).$$

3. para $p < 1$

   (3.1) a direção da bifurcação é supercrítica se $a'(0) > 0$

   (3.2) a direção da bifurcação é subcrítica se $a'(0) < 0$.

*Demonstração.* Assuma que $p \geq 1$ e defina $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times C_0^2(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ por
$$\mathcal{F}(\lambda, u) = a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u + \lambda u - b(x)u^2.$$
Se $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C_0^2(\overline{\Omega})$ é tal que $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, então $u$ é solução clássica (e, portanto fraca) de (3.2). Vamos aplicar o teorema de Crandall-Rabinowitz (Teorema B) para a equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. Para tanto, segue da Observação 2.1 que devemos checar se $D_\lambda\mathcal{F}$, $D_u\mathcal{F}$ e $D_uD_\lambda\mathcal{F}$ existem e são contínuas. De fato,
$$\begin{aligned}
D_u\mathcal{F}(\lambda, u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(\lambda, u+tv) - \mathcal{F}(\lambda, u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left[ \frac{a\left(\int_\Omega q(x)(u+tv)^p\right)\Delta(u+tv) + \lambda(u+tv) - b(x)(u+tv)^2}{t} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u + \lambda u - b(x)u^2}{t} \right] \\
&= \lim_{t\to 0} \left[ \frac{\left[a\left(\int_\Omega q(x)(u+tv)^p\right) - a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\right]\Delta u + b(x)(u^2 - (u+tv)^2)}{t} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{t\left[a\left(\int_\Omega q(x)(u+tv)^p\right)\Delta v + \lambda v\right]}{t} \right] \\
&= \left[a'\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega q(x)pu^{p-1}v\right]\Delta u - 2b(x)uv + a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta v + \lambda v,
\end{aligned}$$

para todo $v \in C_0^2(\overline{\Omega})$, onde a última igualdade decorre dos seguintes limites:
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{a\left(\int_\Omega q(x)(u+tv)^p\right) - a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)}{t} &= \lim_{t\to 0} a'\left(\int_\Omega q(x)(u+tv)^p\right)\int_\Omega q(x)p(u+tv)^{p-1}v \\
&= a'\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\int_\Omega q(x)pu^{p-1}v
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{t\to 0} \frac{b(x)[u^2-(u+tv)^2]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{b(x)(u^2-u^2-2utv-t^2v^2)}{t} = -2b(x)uv,$$

onde no cálculo do primeiro limite usamos o Teorema do Valor Médio. Logo, segue do fato de $p \geq 1$ e da regularidade $C^1$ de $a$ que $D_u\mathcal{F}$ é contínua. Analogamente,

$$\begin{aligned} D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,u) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(\lambda+h,u)-\mathcal{F}(\lambda,u)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u + (\lambda+h)u - b(x)u^2 - a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u - \lambda u + b(x)u^2\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{hu}{h} \\ &= u, \end{aligned}$$

o que implica que $D_\lambda\mathcal{F}$ é contínua. Por fim,

$$\begin{aligned} D_uD_\lambda\mathcal{F}(\lambda,u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,u+tv)-D_\lambda\mathcal{F}(\lambda,u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(u+tv)-u}{t} = v, \end{aligned}$$

para todo $v \in C_0^2(\overline{\Omega})$, donde segue a continuidade de $D_uD_\lambda\mathcal{F}$.

Para aplicar o teorema de Crandall-Rabinowitz (Teorema B), nos resta agora encontrar $\lambda_0$ tal que $L_0 := D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)$ satisfaça $Ker(L_0) = span\langle\varphi_1\rangle$ e $cod(Rg(L_0)) = 1$ e $L_1 := D_uD_\lambda\mathcal{F}(\lambda_0,0)$ cumpra a condição $L_1\varphi_1 \notin Rg(L_0)$.

Ora, $L_0v = D_u\mathcal{F}(\lambda_0,0)v = a(0)\Delta v + \lambda_0 v = 0$ para $v \in C_0^2(\overline{\Omega})$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -\Delta v = \dfrac{\lambda_0}{a(0)}v, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad 6$$

Assim, tomando $\frac{\lambda_0}{a(0)} = \lambda_1$, temos que $v \in Ker(L_0)$ se, e somente se, $v \in span\langle\varphi_1\rangle$, em que $\varphi_1$ é a autofunção positiva do laplaciano associada ao primeiro autovalor $\lambda_1$. Portanto, tomando $\lambda_0 = \lambda_1 a(0)$, a condição $Ker(L_0) = span\langle\varphi_1\rangle$ se cumpre.

Vamos determinar $cod(Rg(L_0))$. Ora, $f \in Rg(L_0) \in C(\overline{\Omega})$ se, e somente se, $f = L_0v$, para algum $v \in C_0^2(\overline{\Omega})$, o que é equivalente a $v$ ser solução clássica, e portanto fraca, de

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v - \frac{f}{a(0)}, & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Considere $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ o operador solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

isto é, $S(f) = u$, onde $u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca de (3.20). Desse modo, voltando em (3.19), temos que

$$f \in Rg(L_0) \Leftrightarrow v = \lambda_1 S(v) - S\left(\frac{f}{a(0)}\right) \Leftrightarrow (I - \lambda_1 S)v = -S\left(\frac{f}{a(0)}\right) \tag{3.21}$$

e $f \in C(\overline{\Omega})$. Denotando por $T := \lambda_1 S$, podemos ainda reescrever (3.21) como

$$(I - T)v = -S\left(\frac{f}{a(0)}\right). \tag{3.22}$$

Desde que $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é um operador compacto, segue da Alternativa de Fredholm (ver Apêndice, Teorema A.16) que

$$Rg(I - T) = Ker(I - T^*)^{\perp}. \tag{3.23}$$

Por outro lado, $T$ é um operador compacto e simétrico definido no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, munido do produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2} = \int_\Omega \phi\psi dx.$$

Desse modo, $T^* = T$ e

$$\begin{aligned} Ker(I - T^*)^{\perp} &= Ker(I - T)^{\perp} \\ &= \{w \in L^2(\Omega) : \langle w, v\rangle_{L^2} = 0, \ \forall\, v \in Ker(I - T)\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

No entanto,

$$\begin{aligned} v \in Ker(I - T) &\Leftrightarrow v = Tv = \lambda_1 S v = S(\lambda_1 v) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v & \text{em } \Omega \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \\ &\Leftrightarrow v \in span\langle \varphi_1 \rangle. \end{aligned}$$

Assim, unindo as informações dadas em (3.22), (3.23) e (3.24), concluímos que $f \in Rg(L_0)$ se, e somente se,

$$-S\left(\frac{f}{a(0)}\right) \in Rg(I - T) = Ker(I - T)^{\perp}$$

e portanto

$$\left\langle -S\left(\frac{f}{a(0)}\right), \varphi_1 \right\rangle_{L^2} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \int_\Omega -S\left(\frac{f}{a(0)}\right)\varphi_1 dx = 0.$$

Por outro lado, desde que

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 & \text{em } \Omega \\ \varphi_1 = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

segue que

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \nabla u = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $u_0 := -S\left(\frac{f}{a(0)}\right) = S\left(-\frac{f}{a(0)}\right)$ temos

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \nabla u_0 = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u_0. \tag{3.25}$$

Finalmente, desde que

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = -\frac{f}{a(0)} & \text{em } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.26}$$

usando a formulação fraca de (3.26) e tomando como função teste $\varphi = \varphi_1$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi_1 = \int_\Omega \varphi_1 \left(-\frac{f}{a(0)}\right). \tag{3.27}$$

Portanto, combinando (3.25) e (3.27), concluímos que $f \in Rg(L_0) \Leftrightarrow f \in C(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{aligned} \int_\Omega -S\left(\frac{f}{a(0)}\right)\varphi_1 dx = 0 &\Leftrightarrow \int_\Omega u_0\varphi_1 = 0, \quad f \in C(\overline{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi_1 = 0, \quad f \in C(\overline{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{a(0)\lambda_1}\int_\Omega \varphi_1 f = 0, \quad f \in C(\overline{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow \int_\Omega \varphi_1 f = 0, \quad f \in C(\overline{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow \langle f, \varphi_1\rangle_{L^2} = 0, \quad f \in C(\overline{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow f \in span\langle\varphi_1\rangle^\perp \cap C(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Como $L^2(\Omega) = span\langle\varphi_1\rangle \bigoplus span\langle\varphi_1\rangle^\perp$ e $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, segue que

$$C(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}) \cap span\langle\varphi_1\rangle) \bigoplus (C(\overline{\Omega}) \cap span\langle\varphi_1\rangle^\perp) = span\langle\varphi_1\rangle \bigoplus Rg(L_0). \tag{3.28}$$

Portanto, $cod(Rg(L_0)) = 1$, como queríamos provar.

Por fim, segue de $L_1(\varphi_1) = D_u D_\lambda \mathcal{F}(a(0)\lambda_1, 0)(\varphi_1) = \varphi_1$ e (3.28) que

$$L_1\varphi_1 \notin Rg(L_0).$$

Checadas as hipóteses do Teorema de Crandall-Rabinowitz (Teorema B), concluímos que existe $\epsilon > 0$ e aplicações contínuas

$$\mu : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ e } \psi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow Z,$$

onde $Z$ é o complemento topológico de $Ker(L_0)$, tais que a curva parametrizada

$$\begin{cases} \lambda(s) = a(0)\lambda_1 + \mu(s) \\ u(s) = s(\varphi_1 + \psi(s)) \end{cases}$$

contém toda e qualquer solução não trivial de $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ em uma vizinhança de $(a(0)\lambda_1, 0)$ em $\mathbb{R} \times C_0^2(\overline{\Omega})$.

Expandindo $a(t)$ em séries de Taylor, obtemos

$$a(t) = a(0) + ta'(0) + \theta(t), \quad \text{onde } \lim_{t\to 0} \frac{\theta(t)}{t} = 0. \tag{3.29}$$

Assim, usando (3.29) e explorando o fato de que para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ o par ordenado $(\lambda(s), u(s))$ é solução da equação diferencial (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
&-\left(a(0) + a'(0)\int_\Omega q(x)u^p(s)dx + \theta\left(\int_\Omega q(x)u^p(s)dx\right)\right)\Delta u(s) = \lambda(s)u(s) - b(x)u^2(s)\\
\Leftrightarrow &-\left(a(0) + a'(0)s^p\int_\Omega q(x)(\varphi_1+\psi(s))^p dx + \theta\left(s^p\int_\Omega q(x)(\varphi_1+\psi(s))^p dx\right)\right)\Delta(s(\varphi_1+\psi(s)))\\
&\quad = (a(0)\lambda_1 + \mu(s))s(\varphi_1+\psi(s)) - b(x)s^2(\varphi_1+\psi(s))^2.
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotaremos por $J = \displaystyle\int_\Omega q(x)(\varphi_1+\psi(s))^p dx$. Desse modo, voltando na equação acima, dividindo ambos os lados por $s$ e testando a equação com $\varphi_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (a(0) + a'(0)s^pJ + \theta(s^pJ))\nabla(\varphi_1+\psi(s))\nabla\varphi_1\\
&\quad = \int_\Omega \left[(a(0)\lambda_1+\mu(s))(\varphi_1+\psi(s)) - b(x)s(\varphi_1+\psi(s))^2\right]\varphi_1 dx\\
\Leftrightarrow &\int_\Omega a(0)\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 + \int_\Omega a(0)\nabla\varphi_1\nabla\psi(s) + \int_\Omega a'(0)s^pJ\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 + \int_\Omega a'(0)s^pJ\nabla\varphi_1\nabla\psi(s)\\
&\quad + \int_\Omega \theta(s^pJ)\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 + \int_\Omega \theta(s^pJ)\nabla\varphi_1\nabla\psi(s) = \int_\Omega a(0)\lambda_1\varphi_1^2\\
&\quad + \int_\Omega a(0)\lambda_1\psi(s)\varphi_1 + \int_\Omega \mu(s)(\varphi_1+\psi(s))\varphi_1 - s\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Como $\displaystyle\int \nabla\varphi_1\nabla\varphi = \lambda_1\int \varphi_1\varphi$, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, temos em particular que

- $\displaystyle\int_\Omega a(0)\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 = a(0)\lambda_1\int_\Omega \varphi_1^2$
- $\displaystyle\int_\Omega a(0)\nabla\varphi_1\nabla\psi(s) = a(0)\lambda_1\int_\Omega \varphi_1\psi(s)$
- $\displaystyle\int_\Omega a'(0)s^pJ\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 = a'(0)\lambda_1 s^pJ\int_\Omega \varphi_1^2$
- $\displaystyle\int_\Omega a'(0)s^pJ\nabla\varphi_1\nabla\psi(s) = a'(0)\lambda_1 s^pJ\int_\Omega \varphi_1\psi(s)$
- $\displaystyle\int_\Omega \theta(s^pJ)\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 = \theta(s^pJ)\lambda_1\int_\Omega \varphi_1^2$
- $\displaystyle\int_\Omega \theta(s^pJ)\nabla\varphi_1\nabla\psi(s) = \theta(s^pJ)\lambda_1\int_\Omega \varphi_1\psi(s).$

Assim, substituindo as relações anteriores em (3.30), obtemos

$$
\begin{aligned}
& a(0)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 + a(0)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\psi(s) + a'(0)\lambda_1 s^p J \int_\Omega \varphi_1^2 + a'(0)\lambda_1 s^p J \int_\Omega \varphi_1\psi(s) \\
& \quad + \theta(s^pJ)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 + \theta(s^pJ)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\psi(s) = a(0)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 + a(0)\lambda_1 \int_\Omega \psi(s)\varphi_1 \\
& \quad + \mu(s) \int_\Omega (\varphi_1 + \psi(s))\varphi_1 - s\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1 \\
\Leftrightarrow\ & a'(0)\lambda_1 s^p J \int_\Omega \varphi_1^2 + a'(0)\lambda_1 s^p J \int_\Omega \varphi_1\psi(s) + \theta(s^pJ)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 \\
& \quad + \theta(s^pJ)\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\psi(s) = \mu(s) \int_\Omega (\varphi_1 + \psi(s))\varphi_1 - s\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1.
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Agora, isolando $\mu(s)$ na relação (3.31) e dividindo cada parcela por $s^p$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu(s)}{s^p} =& \frac{a'(0)\lambda_1 s^p J \left[\int_\Omega \varphi_1^2 + \int_\Omega \varphi_1\psi(s)\right] + \theta(s^pJ)\lambda_1 \left[\int_\Omega \varphi_1^2 + \int_\Omega \varphi_1\psi(s)\right]}{s^p \int_\Omega (\varphi_1+\psi(s))\varphi_1} \\
& + \frac{s\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1}{s^p\int_\Omega(\varphi_1+\psi(s))\varphi_1} \\
=& \frac{a'(0)\lambda_1 J \left[\int_\Omega \varphi_1^2 + \int_\Omega \varphi_1\psi(s)\right] + s^{1-p}\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1}{\int_\Omega (\varphi_1+\psi(s))\varphi_1} \\
& + \frac{\theta(s^pJ)\lambda_1 \left[\int_\Omega \varphi_1^2 + \int_\Omega \varphi_1\psi(s)\right]}{s^p\int_\Omega(\varphi_1+\psi(s))\varphi_1}.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Queremos agora fazer $s \to 0^+$ e analisar o que ocorre com $\mu(s)/s^p$. Vamos usar o teorema da Convergência Dominada (ver Apêndice, Teorema A.19) para mostrar que

$$\int_\Omega (\varphi_1+\psi(s))^p dx \xrightarrow{s\to 0^+} \int_\Omega (\varphi_1+\psi(0))^p dx.$$

Com efeito, denotando $\psi(s)$ por $\psi_s$, sabemos que $s \mapsto \psi_s$ é contínua, donde

$$\lim_{s\to 0^+} \| \psi_s - \psi_0 \|_C = 0,$$

portanto, usando que $\psi(0) = 0$, concluímos

$$
\begin{aligned}
& \lim_{s\to 0^+} \left[\max_{x\in\overline{\Omega}} \{|\psi_s(x)|\}\right] = 0 \qquad (3.33)\\
\Rightarrow\ & \lim_{s\to 0^+} |\psi_s(x)| = 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \\
\Rightarrow\ & \lim_{s\to 0^+} \psi_s(x) = 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.
\end{aligned}
$$

Além disso, de (3.33) segue que, dado $M > 0$, existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que para todo $s \in (0, \delta)$ vale que

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |\psi_s(x)| < M \Rightarrow |\psi_s(x)| < M, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, segue do teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{s\to 0^+}\int_\Omega (\varphi_1+\psi(s))^p = \int_\Omega \lim_{s\to 0^+}(\varphi_1+\psi_s)^p = \int_\Omega \varphi_1^p.$$

Analogamente,

- $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\int_\Omega q(x)(\varphi_1+\psi(s))^p = \int_\Omega q(x)\varphi_1^p$
- $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\int_\Omega \psi(s)\varphi_1 = 0$
- $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1 = \int_\Omega b(x)\varphi_1^3$
- $\displaystyle\lim_{s\to 0^+}\int_\Omega (\varphi_1+\psi(s))\varphi_1 = \int_\Omega \varphi_1^2.$

Por fim, explorando que

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{\theta(s^pJ)}{s^p}=0$$

e $J=\displaystyle\int_\Omega q(x)(\varphi_1+\psi(s))^p dx$, podemos fazer $s\to 0^+$ em (3.32) para concluir que

$$\begin{aligned}\frac{\mu(s)}{s^p} =& \frac{a'(0)\lambda_1\int_\Omega q(x)(\varphi_1+\psi(s))^p dx\left[\int_\Omega \varphi_1^2+\int_\Omega \varphi_1\psi(s)\right]+s^{1-p}\int_\Omega b(x)(\varphi_1+\psi(s))^2\varphi_1}{\int_\Omega(\varphi_1+\psi(s))\varphi_1}\\ &+\frac{\theta(s^pJ)\lambda_1\left[\int_\Omega \varphi_1^2+\int_\Omega\varphi_1\psi(s)\right]}{s^p\int_\Omega(\varphi_1+\psi(s))\varphi_1}\longrightarrow \\ &\frac{a'(0)\lambda_1\int_\Omega q(x)\varphi_1^p\int_\Omega\varphi_1^2+\left(\lim_{s\to 0^+}s^{1-p}\right)\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\int_\Omega\varphi_1^2},\quad \text{quando}\quad s\to 0^+.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Finalmente, afirmamos que o *continuum* $\mathcal{C}^+$ de soluções positivas de (3.2) obtido no Teorema C está contido em $\mathbb{R}\times C_0^2(\overline{\Omega})$. Com efeito, se $(\lambda,u)\in\mathcal{C}^+$, então

$$\begin{cases}-\Delta u=\frac{1}{a\left(\int_\Omega qu^p\right)}\left(\lambda u-bu^2\right), & \text{em } \Omega\\ u=0, & \text{em } \partial\Omega,\end{cases}$$

onde a expressão do lado direito da equação acima pertence a $C(\overline{\Omega})$. Desse modo, segue da regularidade elíptica dada no item 1 do Teorema 3.3 que $u\in W^{2,p}(\Omega)$, para $p>N$. Portanto, usando a imersão de Sobolev (ver Apêndice, Teorema A.21) concluímos que $u\in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, para $\gamma=1-N/p$. Assim, explorando que $b\in C^1(\overline{\Omega})\subset C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e usando regularidade dada no item 2 do Teorema 3.3, concluímos que $u\in C_0^2(\overline{\Omega})$, provando assim a afirmação. Assim, desde que para $s>0$ temos $u(s)>0$, podemos explorar a unicidade garantida pelo teorema de Crandall-Rabinowitz (Teorema B) para garantir que o *continuum* obtido no Teorema C coincide com a curva $s \mapsto (\lambda(s), u(s))$, para $s > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, para saber se $(a(0)\lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação subcrítico ou supercrítico, basta analisarmos o sinal de $\mu(s)$ (ou $\mu(s)/s^p$) quando $s \to 0^+$. Vamos agora provar cada um dos itens do teorema.

**Item 1:** $p > 1$.

Nesse caso, desde que $\lim\limits_{s\to 0^+} s^{1-p} = +\infty$, segue de (3.34) que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\mu(s)}{s^p} > 0,$$

independente do valor de $a'(0)$, donde a direção da bifurcação será supercrítica.

**Item 2:** $p = 1$.

Note que,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\mu(s)}{s} = \frac{a'(0)\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1 \int_\Omega \varphi_1^2 + \int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^2}.$$

Daí, se

$$a'(0) > -\frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1} \left( \text{resp. } a'(0) < -\frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1} \right)$$

então $(a(0)\lambda_1, 0)$ será um ponto de bifurcação supercrítica (resp. subcrítica).

**Item 3:** $p < 1$.

Nesse caso, não podemos acionar o teorema de Crandall- Rabinowitz para estudar a direção da bifurcação, uma vez que a regularidade $C^1$ do funcional não é garantida. Para determinar a direção da bifurcação, consideremos $\{(\lambda_n, u_n)\}$ uma sequência de soluções positivas de (3.2) tal que

$$\begin{cases} \lambda_n \to a(0)\lambda_1 \\ \| u_n \|_C \to 0. \end{cases}$$

Vamos separar a nossa análise em dois subcasos: $a'(0) > 0$ e $a'(0) < 0$.

**Item 3.1:** $a'(0) > 0$.

Como

$$0 < a'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{a(t) - a(0)}{t - 0},$$

então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $a(t) - a(0) > 0$, para todo $t \in (0, \epsilon)$.

Por outro lado,

$$0 < \int_\Omega q(x) u_n^p dx \leq \int_\Omega q(x) \| u_n \|_C^p dx = \| u_n \|_C^p \int_\Omega q(x) dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Desse modo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ vale que

$$0 < \int_\Omega q(x) u_n^p dx < \epsilon,$$

donde

$$a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p dx\right) > a(0).$$

Agora, uma vez que $(\lambda_n, u_n)$ satisfaz

$$\begin{cases} a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right) \Delta u_n + b(x) u_n u_n = \lambda_n u_n, & \text{em } \Omega \\ u_n = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

temos que

$$\lambda_n = \lambda_1 \left[-a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right) \Delta + b(x) u_n\right],$$

e assim segue da Proposição 3.1 que

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda_1 \left[-a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right) \Delta + b(x) u_n\right] \\ &> \lambda_1 \left[-a\left(\int_\Omega q(x) u_n^p\right) \Delta\right] \\ &> \lambda_1 \left[-a\,(0)\,\Delta\right] \\ &= a\,(0)\,\lambda_1 \left[-\Delta\right] = a(0)\lambda_1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que $a'(0) > 0$ e $p < 1$, a direção da bifurcação será supercrítica.

**Item 3.2:** $a'(0) < 0$.

Suponha por contradição que em $a(0)\lambda_1$ a bifurcação é supercrítica. Nesse caso, existe uma sequência $\{(\lambda_n, u_n)\}$ de soluções positivas de (3.2) tal que

$$\begin{cases} \lambda_n \to a(0)\lambda_1 \\ \| u_n \|_C \to 0 \\ \lambda_n > a(0)\lambda_1. \end{cases} \tag{3.35}$$

Seja $c > 0$ suficientemente grande de tal modo que

$$a'(0) < -\frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)\varphi_1^3}{c\lambda_1 \displaystyle\int_\Omega q(x)\varphi_1} \tag{3.36}$$

e considere o problema

$$\begin{cases} -a\left(c\int_\Omega q(x) u\right) \Delta u = \lambda u - b(x) u^2, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.37}$$

Observe que (3.37) é análogo a (3.2) no caso em que $p = 1$ e $q(x)$ é substituído por $cq(x)$. Assim, explorando a desigualdade (3.36), podemos aplicar o item$-2$) deste teorema para concluir que a direção da bifurcação de (3.37) em $a(0)\lambda_1$ é subcrítica.

Vamos usar o método de sub-supersolução para construir uma sequência $\{(\mu_n, \omega_n)\}$ de soluções de (3.37) de modo que $\mu_n > a(0)\lambda_1$, o que contradiz o fato de $(a(0)\lambda_1, 0)$ ser um ponto de bifurcação subcrítico para (3.37). Para tanto, considere a sequência $\{(\lambda_n, u_n)\}$ de soluções positivas de (3.2) dada em (3.35) e tomemos $\mu_n = \lambda_n$. Desde que $a \in C^1(\mathbb{R})$ e $a'(0) < 0$, segue que existe $\epsilon > 0$ tal que $a'(t) < 0$, para todo $t \in (0, \epsilon)$, e portanto $a$ é decrescente em $(0, \epsilon)$. Além disso, por hipótese $p < 1$ e

$$\begin{cases} \| u_n \|_C \to 0 \\ u_n(x) > 0, \ \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Daí, temos que

$$\| u_n \|_C^{1-p} \to 0,$$

ou seja, para $c$ dado em (3.36), existe $n_0 > 0$ tal que para todo $n > n_0$ temos

$$\frac{u_n}{u_n^p} = u_n^{1-p} \leq \| u_n \|_C^{1-p} < \frac{1}{c}.$$

Desse modo, para $n$ suficientemente grande temos que

$$cu_n < u_n^p \Rightarrow q(x)cu_n < q(x)u_n^p \text{ em } \Omega$$

e portanto

$$0 < \int_\Omega cq(x)u_n < \int_\Omega q(x)u_n^p < \epsilon.$$

Logo, desde que $a$ é decrescente em $(0, \epsilon)$, tem-se

$$a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right) < a\left(\int_\Omega cq(x)u_n\right),$$

para $n$ suficientemente grande.

Vamos agora construir a subsolução e a supersolução de (3.37) com $\lambda = \mu_n$. Para a supersolução, considere $\overline{u} = u_n$ e tome $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ arbitrário. Desde que $\| u_n \|_C \to 0$ e $\lambda_n \to \lambda_1 a(0) > 0$, segue que $\lambda_n - b(x)u_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e $n$ suficientemente grande. Daí,

$$\int_\Omega u_n(\lambda - b(x)u_n)\varphi \geq 0, \tag{3.38}$$

para $n$ suficientemente grande e $0 \leq \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, vimos que $a$ é decrescente em $(0, \epsilon)$. Desse modo, como

$$0 < \int_\Omega q(x)u_n^p < \epsilon$$

para todo $n$ suficientemente grande, para $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ temos

$$0 < \int_\Omega q(x)u^p \leq \int_\Omega q(x)u_n^p < \epsilon.$$

Logo,

$$a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right) \leq a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)$$

e portanto explorando que $(\lambda_n, u_n)$ é solução de (3.2) e a desigualdade (3.38), temos que

$$\begin{aligned} a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi &= \frac{a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)}{a\left(\int_\Omega q(x)u_n^p\right)}\int_\Omega u_n(\lambda_n - b(x)u_n)\varphi \\ &\geq \frac{a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)}{a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)}\int_\Omega u_n(\lambda_n - b(x)u_n)\varphi. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Finalmente, desde que $u \cong 0$, temos que $q(x)u^p > cq(x)u$, donde

$$a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right) \leq a\left(\int_\Omega cq(x)u\right).$$

Assim, voltando em (3.39), concluímos que

$$a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \varphi \geq \int_\Omega \overline{u}(\lambda_n - b(x)\overline{u})\varphi,$$

para todo $\varphi \geq 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$. Logo, $\overline{u} = u_n$ é supersolução de (3.37).

Queremos agora construir uma subsolução $\underline{u}$ para (3.37) tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\Omega$. Para isso, tomemos $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$, onde $\epsilon > 0$ será escolhido apropriadamente. Para que $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ seja subsolução de (3.37), devemos ter

$$a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi \leq \int_\Omega \left(\lambda_n \underline{u} - b(x)\underline{u}^2\right)\varphi, \tag{3.40}$$

para todo $0 \leq \varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$, isto é,

$$a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)\lambda_1\epsilon\int_\Omega \varphi_1\varphi \leq \int_\Omega \left(\lambda_n\epsilon\varphi_1 - b(x)\epsilon^2\varphi_1^2\right)\varphi. \tag{3.41}$$

Explorando mais uma vez o fato de $a$ ser decrescente em $(0, \epsilon)$ e que $\int_\Omega cq(x)u_n \in (0, \epsilon)$ para todo $n$ suficientemente grande, se supormos por um momento que $\underline{u} \leq \overline{u} = u_n$, então para todo $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ teremos

$$a(0) \geq a\left(\int_\Omega cq(x)u\right).$$

Desse modo, para que (3.41) ocorra, basta que

$$\begin{aligned} &a\left(\int_\Omega cq(x)u\right)\epsilon\lambda_1\int_\Omega \varphi_1\varphi - \int_\Omega \lambda_n\epsilon\varphi_1\varphi + \int_\Omega b\epsilon^2\varphi_1^2\varphi \\ \leq& a(0)\epsilon\lambda_1\int_\Omega \varphi_1\varphi - \lambda_n\epsilon\int_\Omega \varphi_1\varphi + \epsilon^2 \parallel b \parallel_C \parallel \varphi_1 \parallel_C \int_\Omega \varphi_1\varphi \\ =& \epsilon\left(a(0)\lambda_1 - \lambda_n + \epsilon \parallel b \parallel_C \parallel \varphi_1 \parallel_C\right)\int_\Omega \varphi_1\varphi < 0. \end{aligned}$$

Assim, tomando

$$0 < \epsilon < \frac{\lambda_n - a(0)\lambda_1}{\| b \|_C \| \varphi_1 \|_C}$$

temos a garantia de que $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ satisfaz (3.40), para todo $\varphi \geq 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$.

Agora, nos resta verificar que $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, para todo $x \in \Omega$. Desde que $\varphi_1$ pertence ao interior do cone positivo $P$ de $C_0^1(\overline{\Omega})$, então existem constantes positivas $c_1$ e $c_2$ tais que $c_1 d(x) \leq \varphi_1(x) \leq c_2 d(x)$, para todo $x \in \Omega$. Logo,

$$\epsilon c_1 d(x) \leq \underline{u} = \epsilon\varphi_1 \leq \epsilon c_2 d(x),$$

para $x \in \Omega$.

Por outro lado, como $\overline{u} = u_n$ e

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{1}{a\left(\int_\Omega cq(x)u_n\right)}(\lambda_n u_n - b(x)u_n^2), & \text{em } \Omega \\ u_n = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h_n(x) := \dfrac{\lambda_n u_n - b(x)u_n^2}{a\left(\int_\Omega cq(x)u_n\right)} \in C(\overline{\Omega})$, segue da teoria de regularidade elíptica que $u_n \in W^{2,p}(\Omega)$ para $p > N$. Assim, podemos acionar o princípio do máximo forte (ver Apêndice, Teorema A.23), para garantir que $\underline{u} = u_n$ também pertence a $\dot{P}$. Assim, devem existir constantes positivas $b_1$ e $b_2$ tais que

$$b_1 d(x) \leq \overline{u} = u_n \leq b_2 d(x).$$

Reduzindo $\epsilon$, se necessário, de tal modo que $\epsilon c_2 < b_1$, então teremos que

$$\underline{u} \leq \epsilon c_2 d(x) \leq b_1 d(x) < \overline{u}.$$

Logo, $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ e $\overline{u} = u_n$ é um par de sub-supersolução para (3.37) e portanto segue do Teorema 3.2 que existe uma solução de (3.37) em $[\underline{u}, \overline{u}]$, com $\lambda = \lambda_n > a(0)\lambda_1$. Ora, mas isso contraria o fato de $(\lambda_1 a(0), 0)$ ser um ponto de bifurcação subcrítico para (3.37) e esta contradição decorre de supormos que $(a(0)\lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação supercrítica de (3.2). □

Vimos na Proposição 3.6 que se (3.2) tem solução positiva, então $\lambda > a_L\lambda_1$. Além disso, graças aos Teoremas C e D, temos a garantia da existência de um *continuum* de soluções positivas de (3.2) emanando de $(a(0)\lambda_1, 0)$, além de conhecermos a direção da bifurcação desse *continuum*. O Teorema E, que provaremos a seguir, assegura a existência de soluções positivas de (3.2) para qualquer $\lambda > a(0)\lambda_1$ e nos fornece um resultado de unicidade, caso condições adicionais de $a$ e $b$ sejam requeridas.

**Teorema E.** Se $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in \Omega$, então para cada $\lambda > a(0)\lambda_1$ o problema (3.2) admite solução positiva. Além disso, se $a$ é crescente e $b$ é constante, então a solução de (3.2) será única.

*Demonstração.* Por hipótese, $b(x) \geq b_0 > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha que para algum $\lambda^* > a(0)\lambda_1$ o problema (3.2) não admita solução. Nesse caso, a projeção de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}$ ($Proj_{\mathbb{R}}\ \mathcal{C}$) está contida em $[a_L\lambda_1, \lambda^*]$, onde $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ é o *continuum* de soluções positivas de (3.2) fornecido no Teorema C.

Seja $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$ e defina

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \Omega : u(x) > \frac{\lambda}{b_0} \right\}.$$

Então, $u\Big|_{\partial\Omega_0} = \lambda/b_0$ e

$$\begin{aligned} -a\left(\int_\Omega q(x)u(x)^p\right)\Delta u(x) &= \lambda u(x) - b(x)u^2(x) \\ &= u(x)(\lambda - b(x)u(x)) \\ &\leq u(x)(b_0 u(x) - b(x)u(x)) \\ &= u^2(x)(b_0 - b(x)) \leq 0, \quad \text{em } \Omega_0. \end{aligned}$$

Resumidamente, temos

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u^p\right)\Delta u \leq 0, & \text{em } \Omega_0 \\ u = \dfrac{\lambda}{b_0}, & \text{em } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Nesse caso, segue do princípio do máximo (ver Apêndice, Teorema A.23) que $u \leq \lambda/b_0$ em $\Omega_0$, o que é um absurdo. Portanto, $\Omega_0 = \emptyset$ e assim temos que

$$0 \leq u(x) \leq \frac{\lambda}{b_0} \leq \frac{\lambda^*}{b_0},$$

donde $\| u \|_C \leq \lambda^*/b_0$. Ora, mas isso é uma contradição, pois por um lado temos que $\mathcal{C}$ é ilimitado, por outro lado acabamos de provar que se $(\lambda, u) \subset \mathcal{C}$, então

$$\lambda \in [a_L\lambda_1, \lambda^*] \text{ e } \| u \|_C \leq \frac{\lambda^*}{b_0}.$$

Portanto,

$$[a_L\lambda_1, \infty) \supset Proj_{\mathbb{R}}\ \mathcal{C} \supset [a(0)\lambda_1, \infty).$$

Assuma agora que $a$ é crescente e $b$ é constante e tome $u_1$ e $u_2$ soluções positivas de (3.2). Temos 3 casos a considerar:

**Caso 1:** $\int_\Omega q(x)u_1^p = \int_\Omega q(x)u_2^p$.

Nesse caso, temos

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega q(x)u_i^p\right)\Delta u_i = \lambda u_i - b(x)u_i^2, & \text{em } \Omega \\ u_i = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $i = 1, 2$. Denotando por $d = a\left(\int_\Omega q(x)u_1^p\right) = a\left(\int_\Omega q(x)u_2^p\right)$, temos então que $u_1$ e $u_2$ são soluções positivas de

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{d}[\lambda u - b(x)u^2], & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.42}$$

Pela unicidade de soluções para (3.42) afirmado no Teorema 3.1, temos que $u_1 = u_2$ em $\Omega$.

**Caso 2:** $\int_\Omega q(x)u_1^p < \int_\Omega q(x)u_2^p$.

Desde que $a$ é crescente, temos que

$$a\left(\int_\Omega q(x)u_1^p\right) < a\left(\int_\Omega q(x)u_2^p\right).$$

Logo, usando que $u_2 \leq \lambda/b$ temos

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 &= \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)u_2^p\right)}[\lambda u_2 - bu_2^2] \\ &= \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)u_2^p\right)}u_2[\lambda - bu_2] \\ &\leq \frac{1}{a\left(\int_\Omega q(x)u_1^p\right)}u_2[\lambda - bu_2]. \end{aligned}$$

Desse modo, denotando por $d = a\left(\int_\Omega q(x)u_1^p\right)$, segue que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \frac{1}{d}[\lambda u_1 - b(x)u_1^2], & \text{em } \Omega \\ u_1 = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta u_2 \leq \frac{1}{d}[\lambda u_2 - b(x)u_2^2], & \text{em } \Omega \\ u_2 = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, $u_1$ e $u_2$ são supersolução e subsolução de (3.42), respectivamente. Desde que

$$u \mapsto \frac{1}{d}\frac{[\lambda u - b(x)u^2]}{u} = \frac{\lambda - b(x)u}{d}$$

é decrescente em $(0, \infty)$, segue do teorema de Brezis-Oswald (Teorema A.22) que $u_2 \leq u_1$ em $\Omega$. Disso, concluímos que

$$\int_\Omega q(x)u_2^p \leq \int_\Omega q(x)u_1^p,$$

o que contradiz a hipótese

$$\int_\Omega q(x)u_1^p < \int_\Omega q(x)u_2^p.$$

**Caso 3:** $\int_\Omega q(x)u_1^p > \int_\Omega q(x)u_2^p$.

É análogo ao Caso 2.

Portanto, os Casos 2 e 3 são impossíveis, donde o Caso 1 necessariamente deve ocorrer e daí segue a unicidade afirmada.

□

# A Apêndice

## A.1 Topologia e Análise Funcional

**Teorema A.1.** Se $K \subset \mathbb{R}^N$ é compacto e $F \subset \mathbb{R}^N$ é fechado, então existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $d(F, K) = |x_0 - y_0|$. Em particular, se $K \cap F = \emptyset$ então $d(K, F) > 0$.

*Demonstração.* [18, p. 40]. □

**Teorema A.2** (Dugundji)**.** Sejam $E, F$ espaços normados, $\Omega \subset E$ fechado e $\phi : \Omega \longrightarrow F$ contínua. Então existe $\hat{\phi} : E \longrightarrow F$ tal que $\hat{\phi}(E) \subset conv(\phi(\Omega))$ e $\hat{\phi}(E) = \phi(x)$, para todo $x \in \Omega$.

*Demonstração.* [10, p. 44]. □

**Teorema A.3.** Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado e $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $\psi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ de classe $C^\infty$ tal que

$$|\psi(x) - \phi(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

*Demonstração.* [10, p. 6]. □

**Teorema A.4** (Ponto Fixo de Banach)**.** Sejam $E$ um espaço de Banach, $\Omega \subset E$ fechado e $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ uma contração, isto é, $\| \phi(x) - \phi(y) \|_E \leq k \| x - y \|_E$ para algum $k \in (0, 1)$ e para todo $x, y \in \Omega$. Então $\phi$ tem um único ponto fixo $x_0 \in \Omega$.

*Demonstração.* [22]. □

**Definição A.1.** Seja $E$ um espaço de Banach e $G \subset E$ um subespaço fechado. Um subespaço $L \subset E$ é dito um complemento topológico, ou simplesmente, complemento de $G$ se

(i) $L$ é fechado;

(ii) $G \cap L = \{0\}$ e $G \bigoplus L = E$.

Dado um espaço de Banach, todo subespaço vetorial $G \subset E$ de dimensão finita admite um complemento topológico, o mesmo ocorre se $G$ é fechado e tem codimensão finita (veja Brezis, p.38), .

No que segue, dados $E$ e $F$ espaços de Banach, representaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço vetorial dos operadores lineares limitados (contínuos) $T : E \to F$ com norma

$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E = 1\}$. O dual de $E$, representado por $E^\star$, é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos de $E$, isto é,

$$E^\star = \{T : E \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ transformações lineares contínuas}\}.$$

Além disso, denotaremos por

$$Ker(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\} \text{ e } Rg(T) = \{T(x) \in F : x \in D(T)\}$$

o núcleo e a imagem de $T$, respectivamente.

**Teorema A.5.** Seja $F \subset E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe $f \in E^\star$, com $f \not\equiv 0$, tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$.

*Demonstração.* [6]. □

**Teorema A.6** (Teorema da Aplicação Aberta)**.** Sejam $E$ e $F$ dois espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo e sobrejetivo. Então existe uma constante c>0 tal que $B(0_F, c) \subset T(B(0_E, 1))$.

*Demonstração.* [6, p. 35] □

**Teorema A.7.** Sejam $E$ e $F$ dois espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo, isto é, injetivo e sobrejetivo. Então $T^{-1} : F \longrightarrow E$ é contínuo.

*Demonstração.* [6, p. 35] □

**Teorema A.8.** Sejam $E$ e $F$ dois espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo. Então existem constantes $c_1$ e $c_2$ tais que, para todo $x \in E$, obtemos

$$\| x \|_E c_1 \leq \| Tx \|_F \leq \| x \|_E c_2.$$

*Demonstração.* [6] □

**Teorema A.9.** Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se $cod(T)$ é finita, então $Rg(T)$ é fechada.

*Demonstração.* [10, p. 52]. □

**Definição A.2.** Seja $E$ um espaço vetorial munido do produto interno. O operador linear $T : E \longrightarrow E$ é dito simétrico se, para todo $u, v \in E$, vale que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$.

**Teorema A.10** (Critério de compacidade)**.** Sejam $E$, $F$ espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Então $T$ é compacto se, e somente se, para cada sequência limitada $(x_n)$ em $E$, a sequência $(T(x_n))$ em $F$ admite uma subsequência convergente.

*Demonstração.* [17, p. 407]. □

**Definição A.3.** Dado $T \in \mathcal{L}(E,E)$, o conjunto resolvente de $T$, denotado por $\rho(T)$, é definido por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) : E \longrightarrow E \text{ é uma bijeção}\}.$$

O espectro, denotado por $\sigma(T)$, é o complementar do resolvente, isto é, $\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$.

Dado $\lambda \in \rho(T)$, pelo Teorema A.7 temos que $(T - \lambda I)^{-1}$ é contínua. De modo análogo, se $\lambda \in \sigma(T)$, então $(T - \lambda I)$ não é invertível. Além disso, observe que $\lambda$ é um autovalor de $T$ se $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Logo, o conjunto dos autovalores de $T$, denotado por $EV(T)$, está contido no espectro de $T$.

**Teorema A.11.** Sejam $E$ um espaço vetorial de dimensão infinita e $T \in \mathcal{L}(E,E)$ compacto. Então

(1) $0 \in \sigma(T)$,

(2) $\sigma(T)\backslash\{0\} = EV(T)\backslash\{0\}$,

(3) vale apenas uma das seguintes afirmações:

 (i) $\sigma(T) = \{0\}$;

 (ii) $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é finito;

 (iii) $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é uma sequência convergindo para zero.

*Demonstração.* [6, p.164] □

**Teorema A.12.** Sejam $E$ um espaço normado e $T : E \longrightarrow E$ um operador linear compacto. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $n = 0, 1, \cdots$, temos que o núcleo de $(T - \lambda I)^n$, isto é, $Ker(T - \lambda I)^n$, possui dimensão finita e existe $m \geq 0$ tal que

$$\{0\} \subset Ker(T - \lambda I)^1 \subsetneq Ker(T - \lambda I)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(T - \lambda I)^m = Ker(T - \lambda I)^{m+1} = \cdots .$$

Nesse caso, chamamos $Ker(T - \lambda I)^m$ de autoespaço generalizado associado a $\lambda$ e $m$ multiplicidade algébrica de $\lambda$.

*Demonstração.* [17, p.423]. □

**Teorema A.13.** Sejam $E$ um espaço normado e $T : E \longrightarrow E$ um operador linear compacto. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $n = 0, 1, \cdots$, temos que a imagem de $(T - \lambda I)^n$, isto é, $Rg(T - \lambda I)^n$, é fechada. Além disso, existe $m \geq 0$ tal que

$$E = Rg(T - \lambda I)^0 \supsetneq Rg(T - \lambda I)^1 \supsetneq \cdots \supsetneq Rg(T - \lambda I)^m = Rg(T - \lambda I)^{m+1} = \cdots .$$

*Demonstração.* [17, p. 427] □

**Teorema A.14.** Sejam $E$ um espaço normado, $T : E \longrightarrow E$ um operador linear compacto e $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então, existe um menor inteiro $k \geq 0$, dependendo de $\lambda$, tal que

$$Ker(T - \lambda I)^k = Ker(T - \lambda I)^{k+1} = Ker(T - \lambda I)^{k+2} = \cdots$$

e

$$Rg(T - \lambda I)^k = Rg(T - \lambda I)^{k+1} = Rg(T - \lambda I)^{k+2} = \cdots .$$

*Demonstração.* [17, p. 431] □

**Teorema A.15.** Sejam $E$ um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, E)$ compacto, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $k$ dado pelo Teorema A.14. Então

1. $E = Ker(T - \lambda I)^k \bigoplus Rg(T - \lambda I)^k$, em que $Ker(T - \lambda I)^k$ tem dimensão finita e $Rg(T - \lambda I)^k$ é fechado.
2. $Rg(T - \lambda I)^k$ e $Ker(T - \lambda I)^k$ são invariantes por $T$.
3. $Ker(T - \lambda_0 I)^k \subset Rg(T - \lambda_1 I)^k$ para quaisquer $\lambda_0, \lambda_1 \in EV(L)$, com $\lambda_0 \neq \lambda_1$.

*Demonstração.* [10, p. 63] □

**Definição A.4.** O inteiro $k$ que satisfaz o item 1 do Teorema A.15 é a multiplicidade algébrica de $\lambda$. Quando a multiplicidade é igual a 1, dizemos que o autovalor é simples.

**Teorema A.16** (Alternativa de Fredholm)**.** Seja $T \in \mathcal{L}(E, E)$ compacto. Então:

1. $Ker(I - T)$ tem dimensão finita,
2. $Rg(I - T)$ é fechado e $Rg(I - T) = Ker(I - T^*)^{\perp}$,
3. $Ker(I - T) = 0 \Leftrightarrow Rg(I - T) = E$,
4. $dim(Ker(I - T)) = dim(Ker(I - T^*))$.

*Demonstração.* [6, p. 160]. □

## A.2 Cálculo diferencial em espaços de Banach

**Definição A.5.** Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $\Omega \subset E$ aberto. Dizemos que $\phi : \Omega \subset E \longrightarrow F$ é Fréchet diferenciável em $x \in \Omega$ se existe $\phi'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\phi(x + h) = \phi(x) + \phi'(u)h + o(\| h \|_E), \text{ onde } \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{o(\| h \|_E)}{\| h \|_E} = 0.$$

**Definição A.6.** Sejam $\phi : \Omega \subset E \longrightarrow F$, $h \in E \backslash \{0\}$ e $x$ um vetor de $E$. A diferencial de Gateaux $d_h\phi$ é definida por

$$d_h\phi(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}.$$

**Teorema A.17.** (Função Implícita) Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $U \times V \subset \mathbb{R} \times E$ um aberto. Suponha que $F \in C^1(U \times V, F)$ satisfaz

i) $F(\lambda_0, u_0) = 0$ para algum $(\lambda_0, u_0) \in U \times V$,

ii) $D_uF$ é contínua em uma vizinhança de $(\lambda_0, u_0)$,

iii) $D_uF$ é não singular (tem inversa limitada) em $(\lambda_0, u_0)$, ou equivalentemente, $D_uF(\lambda_0, u_0)$ é contínua e bijetiva.

Então, existem um intervalo aberto $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, uma bola $B(u_0, \delta) \subset V$ e uma curva contínua $u = u(\lambda)$ definida em $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ tal que

$$u(\lambda_0) = u_0 \text{ e } F(\lambda, u(\lambda)) = 0, \quad \forall \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon).$$

Além disso, estas são as únicas soluções de $F(\lambda, u) = 0$ em $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \times B(u_0, \delta)$. Por fim, se $F \in C^k(U \times V, F)$, então $\lambda \mapsto u(\lambda)$ é de classe $C^k$ em $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, para $k \geq 1$.

*Demonstração.* [10, p. 148]. □

**Teorema A.18.** Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega u \Delta v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} u dS.$$

*Demonstração.* [11, p. 628]. □

## A.3 Espaços de funções

### A.3.1 Espaços $L^p$

Para $p \geq 1$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach composto por funções mensuráveis definidas em $\Omega$ que são $p$-integráveis, onde assumimos que $f = g$ se $f$ coincide com $g$, a menos de um conjunto de medida nula. Definiremos a norma em $L^p(\Omega)$ por

$$\| u \|_{L^p} = \left( \int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach das funções essencialmente limitadas definidas em $\Omega$ com norma

$$\| u \|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u|.$$

Para $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega uvdx.$$

**Teorema A.19.** (Convergência Dominada) Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ q.t.p. e assuma que existe $g \in L^1(\Omega)$ não negativa de modo que para todo $n$ vale $|f_n| < g$, q.t.p. em $\Omega$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

*Demonstração.* [13, p. 54] □

### A.3.2 Espaços de Hölder

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $0 < \gamma \leq 1$. Dizemos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\gamma$ se

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\gamma,$$

para todo $x, y \in \Omega$ e alguma constante $c > 0$. Observe que $u$ é Hölder contínua com expoente $\gamma = 1$ se, e somente se, $u$ é lipchitiziana.

**Definição A.7.** O espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach composto pelas funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ cujas derivadas parciais até a ordem $k$ são Hölder contínuas com expoente $\gamma$, munido da norma

$$\| u \|_{C^{k,\gamma}} = \| u \|_{C^k} + \max_{1\leq|\alpha|\leq k} [D^\alpha u]_{C^{k,\gamma}},$$

onde

$$[u]_{C^{k,\gamma}} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega,\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

**Teorema A.20.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $k$ um inteiro não negativo ($k \in \mathbb{N}$) e $0 < m < \gamma < 1$. Então as seguintes imersões valem

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \quad C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \quad C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k,m}(\overline{\Omega}).$$

Se $\Omega$ é convexo ou $\partial\Omega$ é regular, então temos as seguintes imersões

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad C^{k+1,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

*Demonstração.* [1, p. 11]. □

## A.3.3 Espaços de Sobolev

Antes de introduzirmos os espaços de Sobolev, é necessário definirmos o conceito de derivada fraca. A menos de menção contrária, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado.

**Definição A.8.** Seja $\alpha = (\alpha_, \ldots, \alpha_N)$, onde $\alpha_i$ é um inteiro não negativo, isto é, $\alpha \in \mathbb{N}^N$. O vetor $\alpha$ é dito um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

**Definição A.9.** (Derivada fraca) Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha$ um multi-índice. Então $v$ é dita a $\alpha$-ésima derivada fraca de $u$, e denotamos por $D^\alpha u = v$, se

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\omega v\varphi,$$

para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Agora definiremos o espaço de Sobolev.

**Definição A.10.** Considere $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k \right\}.$$

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\| u \|_{W^{k,p}} = \left( \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso particular em que $p = 2$, denotamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, que é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Finalmente, denotaremos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

**Teorema A.21.** (Imersões de Sobolev) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado e suave, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. As seguintes imersões são válidas:

1. Se $mp < N$, então
$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q \in [1, Np/(N - mp)].$$

2. Se $mp = N$, então
$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q \in [1, +\infty).$$

3. Se $mp > N$, então
$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m-\left[\frac{N}{p}\right]-1}(\overline{\Omega}),$$
em que $\left[\frac{N}{p}\right]$ é o maior inteiro menor ou igual a $N/p$.

*Demonstração.* [1, p.97] □

## A.4 Equações Diferenciais Parciais

**Teorema A.22.** (Brezis-Oswald) Sejam $u$ e $v$ sub e supersoluções positivas de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Assuma que $f : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory e satisfaz as seguintes condições:

i) $x \mapsto f(x,u) \in L^\infty(\Omega)$, para todo $u \geq 0$.

ii) $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{u}$ é decrescente em $(0,\infty)$.

Então, $u \leq v$ em $\Omega$.

*Demonstração.* [7]. □

**Teorema A.23.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $h \in C(\overline{\Omega})$ uma função não negativa e $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $p > N$. Então, as afirmações abaixo são equivalências.

i) O operador Laplaciano satisfaz o *princípio do máximo forte*, isto é, se

$$\begin{cases} -\Delta u + h(x)u \geq 0, & \text{em } \Omega \\ u \geq 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que pelo menos uma das desigualdades é estrita, então $u \in \dot{P}$.

ii) O operador Laplaciano satisfaz o *princípio do máximo*, isto é, se

$$\begin{cases} -\Delta u + h(x)u \geq 0, & \text{em } \Omega \\ u \geq 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \geq 0$.

*Demonstração.* [21, p. 216]. □

# Referências


[1] Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 118 e 119.

[2] Ricardo L. Alves, *Multiplicidade global de soluções positivas de um sistema elíptico semilinear via métodos topológicos*, Master's thesis, Universidade de Brasília, 2014. Citado na página 16.

[3] Herbert Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered banach spaces*, SIAM review **18** (1976), 620–709. Citado na página 96.

[4] Antonio Ambrosetti and David Arcoya, *An introduction to nonlinear functional analysis and elliptic problems*, vol. 82, Birkhäuser, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 72.

[5] Antonio Ambrosetti and Andrea Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 16, 67 e 89.

[6] Haim Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, vol. 2, Springer, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 114, 115 e 116.

[7] Haim Brezis and Luc Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **10** (1986), no. 1, 55–64. Citado na página 120.

[8] Francisco J. Correa, Manuel Delgado, and Antonio Suárez, *Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term*, Advances in Differential Equations (2011), 623 – 641. Citado na página 89.

[9] Michael G. Crandall and Paul H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, Journal of Functional Analysis **8** (1971), 321–340. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 85.

[10] Klaus Deimling, *Nonlinear functional analysis*, no. 1, Springer, 1985. Citado 8 vezes nas páginas 11, 12, 16, 67, 113, 114, 116 e 117.

[11] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, 2 ed., vol. 19, American Mathematical Society, 2010. Citado na página 117.

[12] Tarcyana S. Figueiredo-Sousa, Cristian Rodrigo-Morales, and Antonio Suárez, *The influence of a metasolution on the behaviour of the logistic equation with nonlocal*

*diffusion coefficient*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **57** (2018), 1–26. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 86.

[13] Gerald B. Folland, *Real analysis: Modern techniques and their applications*, 2 ed., John Wiley & Sons, 1999. Citado na página 118.

[14] Irene Fonseca and Wilfrid Gangbo, *Degree theory in analysis and applications*, no. 2, Oxford Science Publications, New York, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 16, 28 e 45.

[15] José M. Fraile, Pablo K. Medina, Julián López-Gómez, and Sandro Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation*, Journal of Differential Equations **127** (1996), no. 1, 295–319. Citado na página 88.

[16] J García-Melián, R Gómez-Reñasco, Julián López-Gómez, and JC Sabina de Lis, *Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **145** (1998), 261–289. Citado na página 88.

[17] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, vol. 17, John Wiley & Sons, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.

[18] Elon L. Lima, *Curso de análise vol. 2*, IMPA, 2020. Citado na página 113.

[19] Julián López-Gómez, *The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems*, Journal of Differential Equations **127** (1996), no. 1, 263–294. Citado na página 88.

[20] Julián López-Gómez, *Spectral theory and nonlinear functional analysis*, Chapman and Hall/CRC, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 94.

[21] Julián López-Gómez, *Linear second order elliptic operators*, World Scientific Publishing Company, 2013. Citado na página 120.

[22] César R. Oliveira, *Introdução à análise funcional*, 2 ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2018. Citado na página 113.

[23] Tiancheng Ouyang, *On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u+\lambda u-hu^p=0$ on the compact manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **331** (1992), no. 2, 503–527. Citado na página 88.

[24] Paul H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, Journal of Functional Analysis **7** (1971), 487–513. Citado na página 13.