

THIELY FONSECA DE ALMEIDA

FLUXOS DE ANOSOV E O GRUPO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

A447f
2017

Almeida, Thiely Fonseca de, 1988-
Fluxos de Anosov e o grupo fundamental / Thiely Fonseca
de Almeida. – Viçosa, MG, 2017.
vii, 47f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.46-47.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Universidade Federal
de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 515.39

THIELY FONSECA DE ALMEIDA

FLUXOS DE ANOSOV E O GRUPO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de julho de 2017.

Andrés Mauricio López Barragan

Alexandre Miranda Alves

Bulmer Mejía García
(Coorientador)

Enoch Humberto Apaza Calla
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Ely e Fátima.*

"A fé em Deus nos faz crer no
incrível, ver o invisível e realizar o
impossível".

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças e não ter me deixado desanimar diante dos desafios emocionais enfrentados nesses dois anos e pelas maravilhosas pessoas que colocou no meu caminho

Sou muitíssimo grata aos meus pais, Ely e Fátima, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são os maiores de todos os meus professores, a minha base, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Ao meu querido orientador Dr. Enoch Apaza, por toda paciência, tempo e sabedoria dedicados ao meu trabalho. Foi um grande prazer ser sua orientada. E a todos os professores que passaram no meu caminho e me despertaram o interesse em continuar estudando matemática. Ao meu coorientador, Bulmer, agradeço pela paciência e pelas contribuições ao longo do trabalho.

Agradeço aos meus irmãos, Thiago e Thaynara, pelo companheirismo, força e alegria. A minha sobrinha, Maria Valentina, motivação diária para ser exemplo. Ao meu querido avô, João Almeida, agradeço carinhosamente pelo apoio, por ser sempre presente em minha vida e por ser o melhor avô, do mundo.

Aos grandes e incríveis amigos que fiz durante o mestrado que me ajudaram nas disciplinas e no companheirismo de todos os dias, em especial à Rosângela, que me acompanha e incentiva em teorias sobre a vida, o universo e tudo mais.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Preliminares	2
1.1 Noções sobre Variedades Diferenciáveis	2
1.2 Fluxos Anosov	4
1.3 Noções de Topologia Algébrica	11
1.4 Crescimento Exponencial	24
1.5 Teorema de Haefliger	26
2 Teorema Principal	34
2.1 Prova do Teorema	37
Referências Bibliográficas	46

Resumo

ALMEIDA, Thiely Fonseca, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017.
Fluxos Anosov e o Grupo Fundamental. Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla. Coorientador: Bulmer Mejía García.

No presente trabalho, apresentamos o seguinte teorema: Se $\varphi_t : M \longrightarrow M$ é um fluxo Anosov de codimensão um então $\pi_1(M)$ tem crescimento exponencial. Este resultado foi provado por Margulis, G. A., no apêndice de [17] para 3-variedades. Aqui seguimos a prova feita por Plante e Thurston em [16] para n -variedades.

Abstract

ALMEIDA, Thiely Fonseca, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017.
Anosov flows and the fundamental group. Adviser: Enoch Humberto Apaza
Calla. Co-adviser: Bulmer Mejía García.

We will prove the following theorem: If $\varphi_t : M \longrightarrow M$ is an Anosov flow then $\pi_1(M)$ has exponential growth. This result was first proved by Margulis, G. A., in the appendix of [17] for 3-manifolds. We follow the proof of Plante and Thurston made in [16] for n -manifolds.

Introdução

Neste trabalho, M é uma variedade Riemanniana compacta, conexa, sem bordo, de dimensão $n \geq 3$. Seja $\varphi_t : M \rightarrow M$ um fluxo Anosov. Isto significa que o fibrado tangente TM em M se decompõe em três subfibrados E^s , E^u , E^X , invariantes pela derivada do fluxo, contraindo o subfibrado E^s e expandindo E^u . Os fibrados E^s , E^u são unicamente integráveis.[8, 9, 15]. Diremos que um fluxo Anosov tem **codimensão um** quando $\dim(E^s) = 1$ ou $\dim(E^u) = 1$.

Dado um grupo S finitamente gerado, a função $\Gamma(n)$ é o número de elementos do grupo de palavras de comprimento menor ou igual a n . A definição formal será dada em 1.84. Dizemos que S tem crescimento exponencial se dado um conjunto finito de geradores tem-se $\Gamma(n) \geq Ae^n$ para algumas constantes $A > 0$, $a > 0$.

E, $\pi_1(M)$ denota o grupo fundamental da variedade M .

Aqui provamos o seguinte teorema devido a Plante [16]:

Teorema : Se $\varphi_t : M \rightarrow M$ é um fluxo Anosov de codimensão um, então $\pi_1(M)$ tem crescimento exponencial.

Em particular, o teorema de Plante prova que não pode existir fluxos de Anosov na esfera S^3 , no toro T^3 . Mas por outro lado, existem exemplos clássicos de fluxos de Anosov numa 3-variedade. Um desses é a suspensão de um difeomorfismo Anosov.

Esta dissertação, está organizada como segue:

No Capítulo 1 serão introduzidas noções básicas sobre: variedades diferenciáveis e sobre estas estudamos alguns conceitos de sistemas dinâmicos, definimos fluxos de Anosov e faremos a construção de uma suspensão de fluxo Anosov. Além disso, estudamos grupos de homotopia, grupo fundamental, crescimento exponencial de grupos, com exemplos sobre os tipos de crescimento e por fim, falaremos em espaços de recobrimento. Daremos uma noção do conceito de folheações, holonomia e faremos um esboço da demonstração do teorema de Haefliger, as quais serão utilizadas em todo trabalho.

Finalmente, no Capítulo 2 usando as notações e definições do capítulo 1 mostramos o teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão introduzidos conceitos sobre variedades, campos de vetores, fluxos associados à campos de vetores numa variedade e finalmente os fluxos de Anosov. Tem-se como objetivo principal, ajudar o leitor a se familiarizar com conceitos e resultados básicos, que são utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Noções sobre Variedades Diferenciáveis

Nesta seção vamos definir conceitos e apresentar alguns resultados básicos sobre variedades diferenciáveis, os quais podem ser encontrados em [9], [11] e [12].

Definição 1.1. *Um **atlas** de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathcal{U}$ de sistemas de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U cobrem M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathcal{U}$ são chamados as vizinhanças coordenadas de $\mathcal{U}$.*

Definição 1.2. *Uma **variedade diferenciável**, de dimensão m e classe C^k , é um par ordenado $(M, \mathcal{U})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathcal{U}$ um atlas máximo de dimensão m e classe C^r sobre M .*

Definição 1.3. *Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou carta local em M é um homeomorfismo $x : U \longrightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que, m é a dimensão de $x : U \longrightarrow x(U)$. Para cada $p \in U$ tem-se $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamadas **as coordenadas do ponto** $p \in M$ no sistema x .*

Exemplo 1.4. *Coordenadas cartesianas*

Sejam $M = \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação de inclusão, $x(p) = p$. As coordenadas introduzidas em U pelo sistema x são denominadas coordenadas cartesianas.

Definição 1.5. Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma **variedade topológica** de dimensão m se, somente se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$

Definição 1.6. (Aplicações Diferenciáveis) Sejam M^m, N^n variedades de classe C^r ($r \geq 1$). Diz-se que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **diferenciável** no ponto $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$.

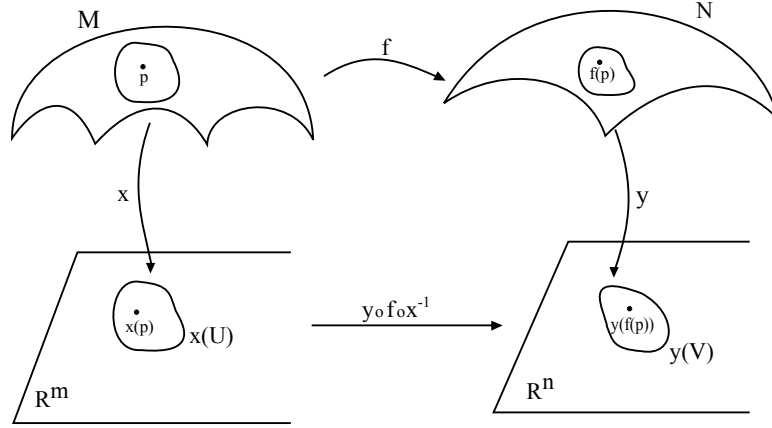


Figura 1.1: Aplicação Diferenciável $f : M \rightarrow N$ entre M e N .

A aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ é denominada a expressão de f nas coordenadas locais x, y . Observe que, em particular, $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$.

Observação 1.7. Como as mudanças de coordenadas em M e N são difeomorfismos de classe C^r , a definição de diferenciabilidade independe do sistema de coordenadas x, y , pois para quaisquer outro par de sistemas de coordenadas x', y' , temos $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M e $y' : V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U'$, $f(U') \subset V'$, a aplicação $f_{x'y'} = y' \circ f \circ (x')^{-1}$ será diferenciável no ponto $x'(p)$.

Definição 1.8. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos de M .

Definição 1.9. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k ($k \leq r$) se, para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$ é de classe C^k .

Segue-se da definição 1.9 que, uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k quando, existem um atlas $\mathcal{U}$ sobre M e um atlas $\mathcal{B}$ sobre N , tais que, para cada $y \in \mathcal{B}$ existe $x \in \mathcal{U}$ relativamente aos quais a expressão de f é de classe C^k . Isto implica que, para toda carta $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ do atlas máximo de M e para toda carta $y' : V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ do atlas máximo de N , com $f(U') \subset V'$, a expressão local

$f_{x',y'}$ será de classe C^k . Então $f_{x',y'} : x'(U \cap U') \rightarrow y'(V \cap V')$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f_{x',y'} &= y' \circ f \circ (x')^{-1} = y' \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ (x')^{-1} \\ &= (y' \circ y^{-1}) \circ f_{xy} \circ (x \circ (x')^{-1}) = \varphi_{yy'} \circ f_{xy} \circ \varphi_{xx'} \in C^k \end{aligned}$$

Quando dissermos que $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k admitiremos, ao menos implicitamente, que M e N são de classe $C^r, r \geq k$. A composta de duas aplicações $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ de classe C^k é também uma aplicação de classe C^r .

Definição 1.10. :Um **difeomorfismo** $f : M \rightarrow N$ é uma bijeção com f^{-1} diferenciável. Se ambas, f e f^{-1} são de classe C^k , dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k .

Definição 1.11. Seja M^m uma variedade diferenciável. Definimos o **fibrado tangente** de M como o conjunto:

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in TM_p\}$$

Definição 1.12. Seja M^m uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemanniana**) é uma lei que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ um produto interno em TM_p .

Seja g uma métrica Riemanniana, denotaremos por $g(p; u, v)$ ou $\langle u, v \rangle_p$ o produto interno dos vetores $u, v \in TM_p$.

Definição 1.13. O comprimento ou norma de um vetor $v \in TM_p$ pode ser definido como:

$$|v|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}.$$

Esta norma recebe o nome de **norma Riemanniana**.

Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica Riemanniana é denominada **variedade Riemanniana**.

Definição 1.14. Duas variedades V e W são **transversais** em M se para qualquer ponto $q \in V \cap W$ temos que os espaços tangentes de TV_q e TW_q geram TM_q .

1.2 Fluxos Anosov

Nesta seção vamos definir alguns conceitos e apresentar alguns resultados básicos sobre sistemas dinâmicos, os quais podem ser encontrados em [3], [9], [15] e [18].

Definição 1.15. Um **campo de vetores** de classe $C^r, r > 0$, em uma variedade M^m é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$, tal que a cada ponto $p \in M$ associa o vetor $X(p) \in TM_p$ e $X \in C^r$.

Definição 1.16. Um **fluxo** é uma aplicação, $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, tal que para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$ vale:

1. $\varphi(t + s, p) = \varphi(t, \varphi(s, p))$
2. $\varphi(0, p) = p$

Denotamos por φ_t o fluxo associado ao campo X , onde $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$.

Exemplo 1.17. Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem. Sejam $P_N = (0, 0, 1)$ e $P_S = (0, 0, -1)$, o pólo norte e o polo sul da esfera S^2 , respectivamente. Definimos o campo de vetores X de classe C^∞ em S^2 por,

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$$

E o fluxo pode ser observado em 1.2.

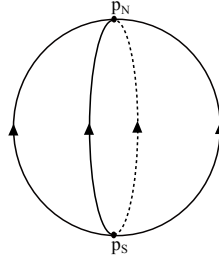


Figura 1.2: Fluxo em S^2

Definição 1.18. A **órbita** de um ponto $p \in M$ para um fluxo φ_t é o conjunto $O(p) = \{\varphi_t(p); t \in \mathbb{R}\}$

Definição 1.19. A **órbita positiva de um ponto** $p \in M$ para um fluxo φ é o conjunto $O_\varphi^+(p) = \{\varphi(p); t \geq 0\}$. E a **órbita negativa de** $p \in M$ para um fluxo φ_t é o conjunto $O_\varphi^-(p) = \{\varphi(p); t \leq 0\}$.

Definição 1.20. Se $X(p) = 0$ então dizemos que $p \in M$ é uma **singularidade** do campo X .

Definição 1.21. O conjunto **ω -limite** de um ponto $p \in M$ é dado por:

$$\omega(p) = \{x \in M; \exists t_n \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(p) = x\}.$$

Assim, $\omega(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de p . Definimos também o conjunto **α -limite** de um ponto $p \in M$ dado por

$$\alpha(p) = \{x \in M; \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(p) = x\}.$$

Então, o conjunto $\alpha(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de p .

Definição 1.22. Dizemos que x é **recorrente** se $x \in \omega(x)$.

Definição 1.23. Os conjuntos:

$$W^{ss}(p) = \{q \in M; d(\varphi_t(p), \varphi_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e

$$W^{uu}(p) = \{q \in M; d(\varphi_t(p), \varphi_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente **variedade estável** e **instável forte** do ponto p para o campo de vetores X . Onde d denota a métrica Riemanniana da variedade M .

Definição 1.24 (Conjunto Hiperbólico). Um conjunto compacto invariante $H \subset M$ é dito **hiperbólico** para X ou para φ_t se:

1. $TM_p = E_p^u \oplus E_p^X \oplus E_p^s$, para todo $p \in H$
2. $D(\varphi_t)_p E_p^* = E_{\varphi_t(p)}^*$, $*$ = s, X, u ($D\varphi_t$ - invariante);
3. E_p^s, E_p^u variam continuamente com p e existem constantes $\lambda, C > 0$, tais que, $\forall t \geq 0$,
 - a) $|D\varphi_t(p)v| \leq Ce^{-\lambda t}|v|, \forall v \in E_p^s$ e $\forall p \in H$
 - b) $|D\varphi_{-t}(p)(w)| \leq Ce^{-\lambda t}|w|, \forall w \in E_p^u$ e $\forall p \in H$

Em outras palavras, um subconjunto invariante $H \subset M$ para um fluxo φ_t é hiperbólico se existe uma decomposição contínua do espaço fibrado tangente $TM_p = E_p^u \oplus E_p^X \oplus E_p^s$ sobre H consistindo de um subfibrado contrátil E_p^s , um subfibrado expensor E_p^u e um subfibrado E_p^X gerado por X .

Teorema 1.25. (Teorema da Variedade Estável para Fluxos). Seja $H \subset M$ um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo φ_t . Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada ponto $p \in H$ existem dois discos mergulhados $W_\epsilon^{ss}(p)$ e $W_\epsilon^{uu}(p)$ os quais são tangentes a E_p^s e E_p^u , respectivamente.

Demonstração. Ver [8] □

Definição 1.26. Um fluxo φ_t definido na variedade M é **Anosov** se M é um conjunto hiperbólico para φ_t .

Definição 1.27. Um fluxo Anosov em uma variedade M é dito de **codimensão um** se $\dim(E^s) = 1$ ou $\dim(E^u) = 1$.

Definição 1.28. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito Anosov se existe uma decomposição contínua $TM = E^u \oplus E^s$ tal que:

1. Ambos E^u e E^s são invariantes por Df , ou seja, $Df(p)(E_x^s) = E_{f(p)}^s$ e $Df(p)(E_p^u) = E_{f(p)}^u$, para todo $p \in M$.

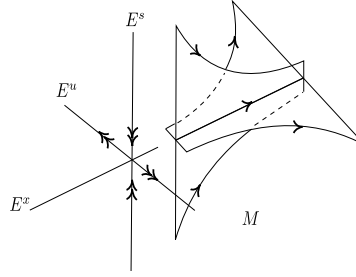


Figura 1.3: Aspecto local de um fluxo Anosov

2. Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $p \in M$

$$|Df^n(p)(v)| \leq C\lambda^n|v|, v \in E_p^s, n > 0$$

$$|Df^{-n}(p)(v)| \leq C\lambda^n|v|, v \in E_p^u, n > 0$$

Abaixo, temos um exemplo bem conhecido de difeomorfismo Anosov.

Exemplo 1.29. [3] (**Difeomorfismo Anosov**). Consideremos a aplicação $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante dessa matriz é um, $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. A expressão em coordenadas é $L_A(u, v) = (2u + v, u + v)$. Definimos a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$: $(u, v) \sim (u', v')$, se $(u - u', v - v') \in \mathbb{Z}^2$. Dessa forma, $L_A(u, v) \sim L_A(u', v')$. Isso define uma aplicação $\hat{L}_A : T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow T^2$, dada por $L_A(u, v) = (2u + v, u + v)$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{L}_A} & \mathbb{R}^2 \\ x \downarrow & & \downarrow x \\ T^2 & \xrightarrow{L_A} & T^2 \end{array}$$

Neste caso, L_A é um difeomorfismo Anosov.

Demonstração. Basta mostrar que L_A é um difeomorfismo Anosov. De fato, note que x é um difeomorfismo local, pois x é a aplicação projeção. Como as derivadas da matriz associada a L_A diferem apenas por isomorfismo, iremos determinar seus autovalores.

$$\lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \lambda_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ou seja, $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$. Seja E^s, E^u os subfibrados associados aos autovalores λ_s, λ_u , respectivamente.

Para todo $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos: $E_w^s = w \oplus E^s$ e $E_w^u = w \oplus E^u$.

Afirmção: A decomposição $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ é invariante pela derivada de $\hat{L}_A$.

De fato,

$$T\mathbb{R}_w^2 = E^s \oplus E^u$$

Para todo $w \in \mathbb{R}^2$. Como é linear,

$$DL_A(w)(E_w^s) = L_A(w + E^s) = L_A(w) + L_A(E^s) = L_A(w) + E^s = E_{L_A(w)}^s$$

Analogamente,

$$DL_A(w)(E_w^u) = L_A(w + E^u) = L_A(w) + L_A(E^u) = L_A(w) + E^u = E_{L_A(w)}^u$$

Portanto, $T\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ é invariante.

Por fim, fixe $v_w^s \in E_w^s$ então $v_w^s = w + v^s$, para todo $v^s \in E^s$ e $\|v_w^s\| = \|v^s\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma em $T\mathbb{R}_w^2$. Daí,

$$DL_A(w)(v_w^s) = L_A(w + v^s) = L_A(z) + L_A(v^s) = L_A(w) + \lambda_s \cdot v^s$$

Logo,

$$\|DL_A(w)(v_w^s)\|_{L_A(w)} = \lambda_s \|v^s\| = \lambda_s \|v_w^s\|_w$$

Analogamente, $v_w^u \in E_w^u$ então $v_w^u = w + v^u$, para todo $v^u \in E^u$ e $\|v_w^u\| = \|v^u\|$. Logo,

$$\|DL_A(w)(v_w^u)\|_{L_A(w)} = \lambda_u \|v^u\| = \lambda_u \|v_w^u\|_w$$

Provando que E^s contrai e E^u expande, desde que $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$.

□

Fluxo de Poincaré

Seja γ uma órbita periódica de um campo. Por um ponto $x_0 \in \gamma$ considere uma transversal ou seção transversal Σ ao campo X .

A órbita por x_0 volta intersectar Σ no tempo τ , onde τ é o período de γ . Pela continuidade do campo, a órbita por um ponto em Σ suficientemente próximo a x_0 também volta a intersectar Σ em um tempo próximo a τ .

Seja $V \subset \Sigma$ uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 , podemos definir a aplicação $P : V \rightarrow \Sigma$ que cada ponto $x \in V$ associa $P(x)$, sendo $P(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a intersectar Σ . Esta aplicação é denominada **transformação de Poincaré** ou **função de Primeiro Retorno de Poincaré** associada a órbita γ e à transversal Σ .

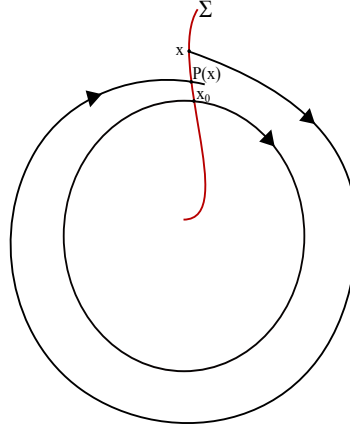


Figura 1.4: Transformação de Poincaré

Suspensão de difeomorfismo de Anosov

O fluxo *suspensão* é dado pelo difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Para construí-lo identificamos os pontos do bordo $M \times \mathbb{R}$ de tal forma que a relação de equivalência $(x, s+1) \sim (f(x), s)$ para $0 \leq s \leq 1$. Seja $M_f = M \times \mathbb{R} / \sim$ o espaço quociente e $x : M \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ a projeção natural. [18]

Proposição 1.30. *Se f é de classe C^r o quociente M_f é uma variedade que tem estrutura C^r . Considere a seguinte equação em $M \times \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x' = 0 \\ s' = 1 \end{cases}$$

Essa equação induz um fluxo φ^t em $M \times \mathbb{R}$ que por sua vez induz um fluxo φ_f^t em M_f , com campo associado a X_f . O fluxo satisfaz:

$$\varphi^1(x, 0) = (x, 1) \sim (f(x), 0)$$

Logo, f é a aplicação de Poincaré sobre a transversal global $M \times \{0\} \subset M_f$ para o fluxo φ_f^t .

Demonstração. Ver [12] detalhes sobre suspensão de um difeomorfismo, e a prova de que M_f é uma variedade com estrutura diferenciável. $\square$

Proposição 1.31. [3] (**Suspensão Anosov**). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo Anosov, a suspensão φ_f^t é um fluxo Anosov em M_f .*

Demonstração. Denotamos por $TM = \hat{E}^s \oplus \hat{E}^u$ a decomposição contínua associada a f . Precisamos construir uma decomposição:

$$TM_f = E^{ss} \oplus TX_f \oplus E^{uu}$$

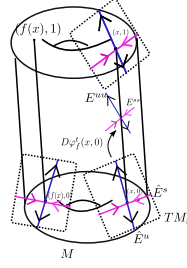


Figura 1.5: Suspensão de um Difeomorfismo Anosov

Para tal, definimos para $(x, 0) \in M \times 0$:

$$E_{(x,0)}^{ss} = \hat{E}_x^s, E_{(x,0)}^{uu} = \hat{E}_x^u$$

Quando $(x, t) \in M \times [0, 1]$, definimos:

$$E_{(x,t)}^{ss} = D\varphi_f^t(x, 0)(\hat{E}_x^s)$$

$$E_{(x,t)}^{uu} = D\varphi_f^t(x, 0)(\hat{E}_x^u)$$

Assim, temos a decomposição desejada $TM^f = E^{ss} \oplus TX_f \oplus E^{uu}$. Iremos mostrar agora que esta decomposição satisfaz as condições Anosov para φ_f^t . Vamos analisar $E_{(x,t_0)}^{ss}, t_0 \in \mathbb{R}$. Por definição, $E_{(x,t_0)}^{ss} = D\varphi_f^{t_0}(x, 0)(\hat{E}_x^s)$, assim $D\varphi_f^{-t_0}(x, t_0)(E_{(x,t_0)}^{ss}) = (\hat{E}_x^s)$. Fixe $t > 0$

$$D\varphi_f^t(x, t_0) = D\varphi_f^{t+t_0-t_0}(x, t_0) = D\varphi_f^{t+t_0}(0, x).D\varphi_f^{-t_0}(x, t_0). \text{ Logo,}$$

$$D\varphi_f^t(x, t_0)|_{E_{(x,t_0)}^{ss}} = D\varphi_f^{t+t_0}(x, 0)|_{\hat{E}_x^s}$$

Como a última expressão vale para qualquer $t > 0$, vamos analisar se satisfaz a condição Anosov em $M \times 0$, ou seja, num ponto da forma $(x, 0)$. Tomemos $t = [t] + r$ ($r \in [0, 1]$) e $[.]$ significa a parte inteira. Em $M \rightarrow 0$ por construção de φ_f^t temos que $\varphi_f^{[t]} = f^{[t]}$. Como $\varphi_f^t(x, 0) = \varphi_f^{[t]+r}(x, 0) = \varphi_f^{r+[t]}(x, 0) = \varphi_f^r(\varphi_f^{[t]}(x, 0))$. Usando a definição de fluxo, temos:

$$D\varphi_f^t(x, 0) = D\varphi_f^r(f^{[t]}(x)).Df^{[t]}(x),$$

Logo,

$$\begin{aligned} |D\varphi_f^t(x, 0)(v)| &\leq \|D\varphi_f^r(f^{[t]}(x))\| \cdot \|Df^{[t]}(x)(v)\| \\ &\leq K.C.\lambda^{[t]}|v|, v \in \hat{E}_x^s, \forall x \in M. \end{aligned}$$

Analogamente, o mesmo raciocínio vale para E^{uu} . Segue então, que φ_f^t é um fluxo de Anosov para M^f , como queríamos. $\square$

Proposição 1.32. (Teorema de Poincaré - Bendixson) Seja $\varphi_t(p)$ a órbita

futura de um ponto p para um fluxo $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Suponha que φ_t possui um número finito de singularidades. Sejam $p \in \mathbb{R}^2$ e $\omega(p)$ o conjunto ω – limite de p . Então, ocorre uma das alternativas:

1. Se $\omega(p)$ possui somente pontos periódicos, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.
2. $\omega(p)$ é uma órbita fechada.
3. Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

Demonstração. Ver [12]. □

1.3 Noções de Topologia Algébrica

O objetivo desta seção é definir o primeiro grupo de homotopia, conhecido como grupo fundamental. Para maiores detalhes indicamos as referências [10] e [21]

Grupos de Homotopia

Sejam X e Y **espaços topológicos**, $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas e $I = [0, 1]$.

Definição 1.33. Dizemos que $f, g : X \rightarrow Y$ são **homotópicas** se existe uma aplicação contínua

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = g(x)$$

para todo $x \in X$. A aplicação F é chamada de *homotopia* entre f e g . Escreve-se, neste caso, $F : f \simeq g$, ou simplesmente $f \simeq g$.

A homotopia é pensada como um processo de decomposição contínuo da aplicação f na aplicação g . O parâmetro t pode ser imaginado como sendo o tempo do processo de deformação.

Proposição 1.34. A relação de homotopia, $f \simeq g$, é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y .

Demonstração. 1) Reflexiva. Para toda $f : X \rightarrow Y$ contínua, a aplicação $F : X \times I \rightarrow Y$, dada por $F(x, t) = f(x)$, é uma homotopia entre f e f , portanto, $\simeq$ é uma relação reflexiva.

2) Simétrica. Definamos $H : M \times I \rightarrow N$ por $H(x, t) = F(x, 1 - t)$. obtemos uma homotopia entre f e g . Desta forma, $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$, isto é, a relação de homotopia é simétrica.

3) Transitiva. Se $F : f \simeq g$ e $H : g \simeq h$ então definamos, $K : X \times I \longrightarrow Y$ pondo $K(x, t) = F(x, 2t)$ se $0 \leq t \leq 1/2$ e $K(x, t) = H(x, 2t - 1)$ se $1/2 \leq t \leq 1$. A aplicação K é uma homotopia entre f e h . Logo, $f \simeq g$, $g \simeq h$, ou seja, a relação $\simeq$ é transitiva. $\square$

Definição 1.35. *As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são denominadas **classes de homotopia**. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma equivalência homotópica quando existe $g : Y \rightarrow X$ contínua tal que $g \circ f \cong id_X$ e $f \circ g \cong id_Y$. Diz-se então, que g é o inverso homotópico de f e que as variedades X e Y tem o mesmo tipo de homotopia. Escreve-se, nesse caso $f : X \equiv Y$ ou $X \equiv Y$.*

Exemplo 1.36. *A esfera unitária S^n tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.*

Definição 1.37. *Um espaço topológico X é dito **contrátil** quando tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.*

Proposição 1.38. *X é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade é homotópica a uma aplicação constante de X .*

Demonstração. Suponha que X é contrátil. Por definição, X é contrátil quando possui o mesmo tipo de homotopia de um ponto, isto é, $X \cong \{p\}$. Então, existem $f : X \longrightarrow \{p\}$ e $g : \{p\} \longrightarrow X$ inversas homotópicas, então $g \circ f \simeq id_X$ e $g \circ f = constante$.

Reciprocamente, suponha que, $id_X \simeq constante$ portanto id_X e a constante são inversas homotópicas. Logo, $X \cong \{p\}$. $\square$

Exemplo 1.39. $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$.

Corolário 1.40. *Um espaço contrátil X é conexo por caminhos.*

Demonstração. Fixemos $p \in X$ e defina a homotopia $F : id_X \cong c$, como na proposição anterior. Assim, para cada $x \in X$, definimos:

$$\alpha_x : I \rightarrow X$$

$$t \longmapsto F(x, t)$$

um caminho que liga x a p e considere $X \rightarrow \{p\}$ a aplicação constante. Logo, X é conexo por caminhos. $\square$

Proposição 1.41. *Se X ou Y é contrátil então toda aplicação $f : X \rightarrow Y$ é homotópica a uma constante.*

Corolário 1.42. *Se X é contrátil e Y é conexo por caminhos então duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas. Se Y é contrátil, então qualquer que seja X , duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são sempre homotópicas.*

Demonstração. Vamos mostrar que se X é homotópico e Y é conexo por caminhos, então quaisquer duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas. Por hipótese, temos que X é contrátil, assim $F : id_X \cong c$, como na proposição anterior, defina a homotopia:

$$H : X \times Y \rightarrow Y$$

$$H(x, t) = f(F(x, t)) \Rightarrow H : f \cong c$$

$$K(x, t) = g(F(x, t)) \Rightarrow K : g \cong c_1$$

onde $c(x) = f(p)$ e $c_1(x) = g(p)$, para todo $x \in X$. Como, N é conexo por caminhos, existe α caminho constante ligando $f(p)$ a $g(p)$, defina:

$$G : Y \times I \rightarrow Y$$

$$(y, t) \mapsto \alpha(t)$$

Portanto, $c \cong c_1$ e $f \cong g$. Analogamente, para o outro caso segue o resultado. $\square$

Definição 1.43. Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas, diz-se que f é homotópica a g **relativamente** a um subespaço $A \subset X$, e escreve-se

$$f \simeq g \quad (\text{rel.} A)$$

quando existe uma homotopia $F : f \simeq g$ tal que $F(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Evidentemente, para que se tenha $f \simeq g(\text{rel.} A)$ é necessário antes de tudo, que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo 1.44. A aplicação identidade de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é homotópica a aplicação $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, tal que $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, relativamente ao subespaço S^{n-1} .

O Grupo Fundamental

Vamos, a partir de agora, considerar um caso particular do conceito geral de homotopia. Estudaremos homotopias de caminhos, isto é, de aplicações contínuas $\alpha : J \rightarrow X$, definidas num intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Dedicaremos atenção especial aos caminhos fechados: aqueles em que $\alpha(s_0) = \alpha(s_1)$. Salvo quando dito explicitamente o contrário, suporemos nossos caminhos definidos no intervalo unitário $I = [0, 1]$.

Como o intervalo I é contrátil, todo caminho $\alpha : I \rightarrow X$ é homotópico a uma constante. Exigiremos que, durante a homotopia, os extremos do caminho sejam mantidos fixos. Assim, consideraremos a fronteira $\partial I = \{0, 1\}$ do intervalo e as homotopias de caminhos serão todas relativas ao subespaço ∂I .

Definição 1.45. Diremos que, $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ são **caminhos homotópicos** quando tivermos $\alpha \simeq \beta \quad (\text{rel.} \partial I)$. Abreviaremos esta afirmação com a notação $\alpha \cong \beta$. Assim, uma homotopia $F : \alpha \cong \beta$ entre caminhos é uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que,

$$\begin{aligned}
F(s, 0) &= \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s), \\
F(0, t) &= \alpha(0) = \beta(0), \\
F(1, t) &= \alpha(1) = \beta(1), \\
\text{quaisquer } s, t &\in I.
\end{aligned}$$

Para que se tenha sentido afirmar que $\alpha \simeq \beta$, é necessário, antes de mais nada, que os caminhos α e β possuam as mesmas extremidades:

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \quad e \quad \alpha(1) = \beta(1) = x_1$$

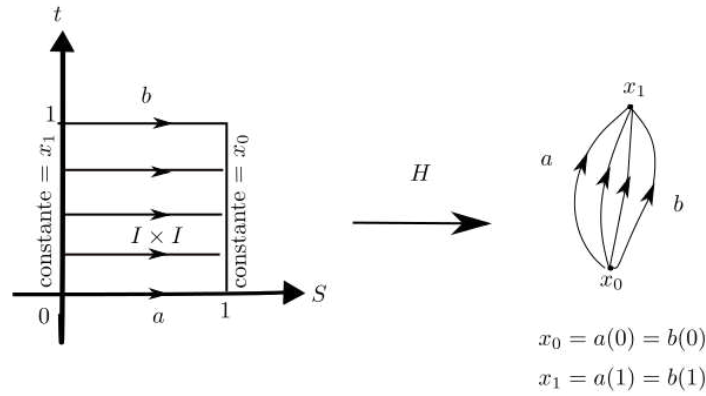


Figura 1.6: Homotopia entre caminhos

Os caminhos fechados $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ são homotópicos ($\alpha \simeq \beta$) quando existe uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que, pondo $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \in M$, tem-se

$$F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s), F(0, t) = F(1, t) = x_0$$

para quaisquer $s, t \in I$.

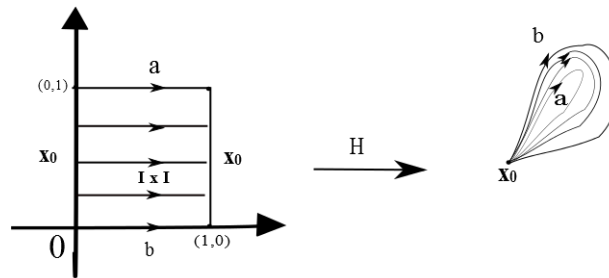


Figura 1.7: Caminhos Homotópicos

Definição 1.46. Dois caminhos fechados $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dizem-se **livremente homotópicos** quando existe uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s)$ e $F(0, t) = F(1, t)$ para quaisquer $s, t \in I$. A última igualdade significa que, para todo $t \in I$, o caminho $F_t : I \rightarrow X, F_t(s) = F(s, t)$, é fechado.

Observação 1.47. Indicaremos sempre, com $\alpha = [\alpha]$ **a classe de homotopia do caminho** $\alpha : I \longrightarrow X$, isto é, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que α e que são homotópicos a α com extremos fixos durante a homotopia.

Definição 1.48. Sejam $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ caminhos tais que o fim de α coincide com a origem de β . Definiremos o **produto** $\alpha * \beta$ como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro α e depois β . Como o tempo que dispomos para percorrer $\alpha\beta = 1$, isto nos obriga a dobrar a velocidade em α e em β . Assim, definiremos $\alpha\beta : I \longrightarrow X$ pondo:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \beta(2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Como $\alpha(1) = \beta(0)$, as regras acima bem definem uma aplicação $\alpha\beta : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha\beta \mid [0, 1/2]$ e $\alpha\beta \mid [1/2, 1]$ são contínuas. Seque-se que $\alpha\beta$ é contínua e portanto é um caminho, que começa em $\alpha(0)$ e termina em $\beta(1)$.

Definição 1.49. O **caminho inverso** de $\alpha : I \longrightarrow X$ é, por definição, o caminho $\alpha^{-1} : I \longrightarrow X$, dado por $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$, $0 \leq s \leq 1$.

Observação 1.50. Vemos que $\alpha^{-1}(s)$ começa onde α termina, e termina na origem de α .

Proposição 1.51. $\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta' \Rightarrow \alpha\beta \cong \alpha'\beta' \quad \text{e} \quad \alpha^{-1} \cong (\alpha')^{-1}$.

Demonstração. Se $F : \alpha \cong \alpha'$ e $G : \beta \cong \beta'$ são homotopias, definimos $H : I \times I \longrightarrow X$ pondo:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, t \in I \\ G(2s - 1, t), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1, t \in I \end{cases}$$

Como $F(1, t) = G(0, t) = \alpha(1) = \beta(0)$ para todo $t \in I$, vemos que H é bem definida. Como $H \mid ([0, 1/2] \times I)$ e $H \mid ([1/2, 1] \times I)$ são contínuas, seque que H é contínua. Daí: $H(s, 0) = F(2s, 0) = \alpha(s)$, $s \in [0, 1/2]$, $H(s, 0) = G(2s - 1, 0) = \beta(s)$, $s \in [0, 1/2]$. Portanto, $H(s, 0) = \alpha\beta(s)$. Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos $H(s, 1) = \alpha'\beta'(s)$. Além disso, $H(0, t) = F(0, t) = \alpha'(0) = \alpha(0) = \beta(0) = \beta'(0) = \alpha\beta(0) = \alpha'\beta'(0)$,

E,

$$H(1, t) = F(1, t) = \alpha'(1) = \alpha(1) = \beta(1) = \beta'(1) = \alpha\beta(1) = \alpha'\beta'(1).$$

Logo,

$$H(0, t) = \alpha\beta(0) = \alpha'\beta'(0)$$

$$H(1, t) = \alpha\beta(1) = \alpha'\beta'(1)$$

Desta forma, concluímos que H é uma homotopia entre $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$. Isto é, $\alpha\beta \cong \alpha'\beta'$. Considere $L : I \times I \longrightarrow M$, definida por $L(s, t) = F(1 - s, t)$. Então,

$$L(s, 0) = F(1 - s, 0) = \alpha^{-1}$$

$$L(s, 1) = F(1 - s, 1) = (\alpha')^{-1}$$

$$L(0, t) = F(1, t) = \alpha(1) = \alpha^{-1}(0) = (\alpha')^{-1}(0)$$

$$L(1, t) = F(0, t) = \alpha(0) = \alpha^{-1}(1) = (\alpha')^{-1}(1)$$

Sendo L contínua, segue então que $L : \alpha^{-1} \cong (\alpha')^{-1}$, como queríamos. $\square$

Definição 1.52. Em uma variedade X , sejam α uma classe de homotopia de caminhos que tem origem num ponto $x \in X$ e terminam num ponto $y \in X$, e β uma classe de homotopia de caminhos que começam em $y \in X$ e terminam em $z \in X$. Definiremos o **produto** $\alpha\beta$ tomando caminhos $a \in \alpha, b \in \beta$ e pondo

$$\alpha\beta = [ab]$$

Assim, por definição $[a][b] = [ab]$.

Definimos também, $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$, onde $a \in \alpha$.

Observação 1.53. A proposição 1.51 mostra que o produto $\alpha\beta$ não depende das escolhas dos caminhos $\gamma \in \alpha$ e $\rho \in \beta$, portanto está bem definido. E, a segunda parte da proposição anterior, mostra que a classe de homotopia $\alpha^{-1} = [\gamma^{-1}]$ é a mesma, seja qual for o caminho γ que escolhemos em α . A classe α^{-1} é chamada inversa de α .

Definição 1.54. Sejam $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho e $\varphi : I \rightarrow I$ uma parametrização de I , isto é, uma função contínua tal que $\varphi(\partial I) \subset \partial I$. O caminho $\beta = \alpha \circ \varphi : I \rightarrow X$ chama-se **reparametrização do caminho** α . A parametrização φ diz-se positiva quando $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$, se for negativa quando $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = 0$, e trivial quando $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Proposição 1.55. Seja $\beta = \alpha \circ \varphi$ uma reparametrização do caminho $\alpha : I \rightarrow X$. Se a parametrização φ for positiva, então $\beta \cong \alpha$; se for negativa, tem-se $\beta \cong \alpha^{-1}$; se for trivial então $\beta = \text{constante}$.

Demonstração. De fato, dois caminhos em I são homotópicos (com extremidades fixas) se, e somente se, têm a mesma origem e o mesmo fim. Sejam $i, j : I \rightarrow I$ dadas por $i(s) = s$ e $j(s) = 1 - s$. Tem-se portanto $\varphi \cong i, \varphi \cong j$ ou $\varphi \cong \text{constante}$, conforme seja φ uma reparametrização positiva, negativa ou trivial. Segue-se imediatamente que $\alpha \circ \varphi \cong \alpha \circ i = \alpha, \alpha \circ \varphi \cong \alpha \circ j = \alpha^{-1}$ ou $\alpha \circ \varphi \cong \text{constante}$, respectivamente. $\square$

Suponhamos que dados um caminho $\alpha : I \rightarrow X$ e pontos intermediários $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$, que determinam uma decomposição de I em k subintervalos justapostos $[s_{i-1}, s_i]$. Para cada $i = 1, 2, \dots, k$, obtemos um caminho $\alpha_i : I \rightarrow X$, definido por $\alpha_i = (\alpha \mid [s_{i-1}, s_i]) \circ \varphi_i$, onde $\varphi_i : I \rightarrow [s_{i-1}, s_i]$ é a única função linear tal que $\varphi_i(0) = s_{i-1}$ e $\varphi_i(1) = s_i$. Os caminhos α_i são portanto reparametrizações das restrições $\alpha \mid [s_{i-1}, s_i]$, a fim de lhes dar o domínio padrão I .

Proposição 1.56. ([10]) Sejam $\alpha, \beta, \mu : I \rightarrow X$ caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa. Sejam $\alpha = [\alpha], \beta = [\beta], \gamma = [\mu]$ suas classes de homotopia, $x = \alpha(0)$ a origem de α , $y = \alpha(1)$ seu fim, e_x, e_y os caminhos constantes sobre esses pontos e $\varepsilon_x = [e_x], \varepsilon_y = [e_y]$ as classes de homotopia dessas constantes. Tem-se então:

1. $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$
2. $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$
3. $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

Definição 1.57. *O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos numa variedade X , munido da lei de composição acima definida, chama-se o grupoide fundamental de X .*

Definição 1.58. *Consideraremos pares do tipo (X, x_0) , onde $x_0 \in X$ será chamado o **ponto básico** da variedade X . Os caminhos fechados $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ serão chamados caminhos fechados com base no ponto x_0 . As homotopias (salvos quando explicitamente mencionado o contrário) serão relativas a ∂I . O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ do grupoide fundamental, formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 constitui um grupo, chamado o grupo fundamental da variedade X com base no ponto x_0 . O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia $\varepsilon = \varepsilon_{x_0}$ do caminho constante no ponto x_0 .*

Quando M é conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$ dizemos que X é **simplesmente conexo**. A próxima proposição mostra que o grupo fundamental independe do ponto base escolhido. Portanto, podemos representar o grupo fundamental por $\pi_1(X)$, sem nenhuma referência explícita ao ponto base.

Exemplo 1.59. 1. *Se X é contrátil então X é simplesmente conexo.*

2. *Se $n > 1$, então S^n é simplesmente conexo. Ver [10].*

Observação 1.60. *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ satisfazem $g \circ f \cong id_X$ então f é injetiva e g sobrejetiva. Se $f \circ g \cong id_Y$ então g é injetiva e f é sobrejetiva.*

Proposição 1.61. *Seja X conexo por caminhos. Dados $x_0, x_1 \in X$ e $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, então existe um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$.*

Demonstração. Seja $\gamma : I \rightarrow X$ caminho tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Se α é uma curva fechada de x_0 então $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma$ é uma curva fechada de x_1 . Dado um elemento $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, aplicação acima induz um único elemento $[\alpha'] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \in \pi_1(X, x_1)$. Denotaremos essa aplicação por:

$$\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[\alpha'] = \eta([\alpha])$$

Vamos mostrar que η é um isomorfismo.

1) η é um homomorfismo.

Com efeito, dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, temos:

$$\eta([\alpha] * [\beta]) = [\gamma^{-1} * [\alpha] * [\beta] * \gamma]$$

$$\begin{aligned}
&= [\gamma^{-1}] * [\alpha] * [\gamma] * [\gamma^{-1}] * [\beta] * [\gamma] \\
&= \eta([\alpha]) * \eta([\beta])
\end{aligned}$$

Assim, η é um homomorfismo.

2) η é bijetiva. Para mostrar que η é bijetiva, vamos introduzir a inversa de η . Seja:

$$\eta^{-1} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

tal que

$$\eta^{-1}([\alpha']) = [\gamma * \alpha' * \gamma^{-1}]$$

Afirmção: η^{-1} é a inversa de η .

De fato,

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}\eta([\alpha]) &= \eta^{-1}([\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]) \\
&= [\gamma * \gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1}] \\
&= [\alpha].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\eta^{-1}\eta = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

e por simetria

$$\eta\eta^{-1} = id_{\pi_1(X, x_1)}$$

Pela última observação η é injetiva e sobrejetiva. Segue então que η é um homomorfismo bijetor, portanto, um isomorfismo. Como queríamos. $\square$

Espaços de Recobrimento

Definição 1.62. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo local quando para cada ponto $x \in X$ existe um aberto U contendo x em X tal que $V = f(U)$ é aberto em Y e $f|_U$ é um **homeomorfismo** de U sobre V .*

Exemplo 1.63. *Considere a seguinte aplicação:*

$$\xi : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$$

$$t \longmapsto \exp(it) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$$

ξ é um homeomorfismo local.

Definição 1.64. *Sejam $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Um **levantamento** de g (relativamente a f) é uma aplicação contínua $\tilde{g} : Z \rightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{g} = g$.*

Definição 1.65. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma função contínua, $\tilde{X}$ e X espaços topológicos. Um aberto $V \subset X$ é dito **vizinhança distinguida** se:*

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha,$$

onde $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ é uma família de abertos de $\tilde{X}$, dois a dois disjuntos, tais que:

$$p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$$

é um homeomorfismo.

Definição 1.66. Uma aplicação de **recobrimento** (ou simplesmente um **recobrimento**) é uma função:

$$p : \tilde{X} \rightarrow X$$

contínua, sobrejetiva e tal que todo $x \in X$ possui uma vizinhança distinguida. O espaço $\tilde{X}$ chama-se um **espaço de recobrimento** de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se a **fibra** sobre x . Às vezes, X é chamado de **base** do recobrimento. Veja 1.8.

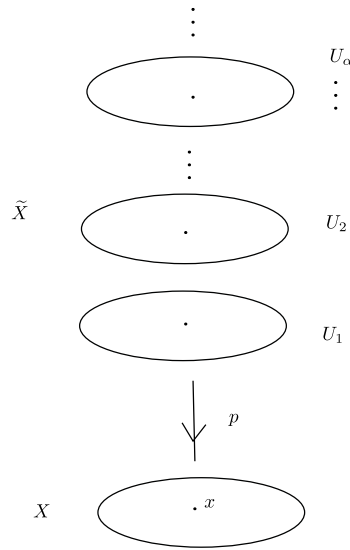


Figura 1.8: Aplicação Recobrimento

Exemplo 1.67. A aplicação $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por:

$$\exp(t) = e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

é um recobrimento.

Exemplo 1.68. $p : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ dada por:

$$p(z, t) = (z, \exp(t))$$

é um recobrimento do toro T^2 .

Exemplo 1.69. Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

$$p(x) = |x|$$

não é um recobrimento.

Definição 1.70. Dizemos que o recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um **recobrimento universal** se $\tilde{X}$ for simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos.

[4]

Proposição 1.71. *Sejam $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento e Z um espaço conexo. Dados dois levantamentos $\tilde{g}, \hat{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$ de $g : Z \rightarrow X$, ou seja, $p \circ \tilde{g} = p \circ \hat{g} = g$ então ou $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z), \forall z \in Z$ ou $\tilde{g} = \hat{g}$.*

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \tilde{g}, \hat{g} \nearrow & \downarrow p & \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Demonstração. 1) Se não existe $z \in Z$ tal que $\tilde{g}(z) = \hat{g}(z)$, então $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z), \forall z \in Z$, assim temos o resultado.

2) Se existe $z_0 \in Z$ tal que $\tilde{g}(z_0) = \hat{g}(z_0)$. Considere o conjunto:

$$A = \{z \in Z | \tilde{g}(z) = \hat{g}(z)\}$$

$A \neq \emptyset$, pois $z_0 \in A$.

2.1) A é aberto. De fato, seja $z \in A$ então $\tilde{g}(z) = \hat{g}(z)$. Sendo $p : \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento, então p é homeomorfismo local, assim existe $U \subset \tilde{X}$ aberto com $\tilde{g}(z) = \hat{g}(z) \in U$ tal que $p|_U$ é homeomorfismo sobre sua imagem, em particular, $p|_U$ é injetora.

Pela continuidade de $\tilde{g}$ e $\hat{g}$ existe um aberto $W \subset Z$, $z \in W$ tal que $\tilde{g}(W) \subset U$ e $\hat{g}(W) \subset U$. Então, para todo $z' \in W$ temos $p \circ \tilde{g}(z') = g(z') = p \circ \hat{g}(z')$. Como $p|_U$ é injetora e $\tilde{g}(W) \cup \hat{g}(W) \subset U$ segue que $\tilde{g}(z') = \hat{g}(z')$. Logo, $z' \in A$ e, consequentemente $z \in W \subset A$. Portanto, A é aberto.

2.2) A é fechado. Vamos mostrar que $Z - A$ é aberto, assim teremos que A é fechado. Seja $z \in Z - A$, então $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z)$ e, $p \circ \tilde{g}(z) = g(z) = p \circ \hat{g}(z)$, como $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento e $g(z) \in X$, segue que $g(z)$ possui uma vizinhança distinguida V , isto é,

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$$

onde $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ é uma família de abertos de $\tilde{X}$, dois a dois disjuntos, tais que $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$ é um homeomorfismo.

Temos que $\tilde{g}(z), \hat{g}(z) \in p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, então se $\tilde{g}(z), \hat{g}(z)$ pertencesse a um mesmo U_α , teríamos $p(\tilde{g}(z)) = p(\hat{g}(z))$ com $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z)$ assim $p|_{U_\alpha}$ não seria injetora, um absurdo, pois $p|_{U_\alpha}$ é um homeomorfismo sobre V . Assim, $\tilde{g}(z) \in U_\alpha$ e $\hat{g}(z) \in U_\beta$ com $\alpha \neq \beta$.

Como $\tilde{g}$ e $\hat{g}$ são contínuas segue que existe um aberto $W \subset Z$, com $z \in W$ tal que $\tilde{g}(W) \subset U_\alpha$ e $\hat{g}(W) \subset U_\beta$. Para cada $w \in W$ tem-se que $\tilde{g}(w) \neq \hat{g}(w)$, pois $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Logo, $z \in W \subset Z - A$ então $Z - A$ é aberto e, assim A é fechado.

Z é conexo e, A é um conjunto não-vazio aberto e fechado de Z portanto $A = Z$ e, $\tilde{g} = \hat{g}$ como queríamos. □

Proposição 1.72. *Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento então as fibras $p^{-1}(x)$ são discretas.*

Demonstração. Como p é um recobrimento então p é um homeomorfismo local, em particular, p é localmente injetora, assim para cada ponto $a \in p^{-1}(x)$ existe um aberto $U \subset \tilde{X}$, com $a \in U$ tal que $p|_U$ é localmente injetora, assim a é o único ponto de $p^{-1}(x)$ que pertence a U . Então,

$$U \cap p^{-1}(x) = \{a\}$$

Portanto, $a \in p^{-1}(x)$ é isolado e, assim $p^{-1}(x)$ é discreto. □

Corolário 1.73. *Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento tal que $\tilde{X}$ é compacto, X é conexo e de Hausdorff, então as fibras são finitas.*

Demonstração. Pela proposição 1.72 temos que $p^{-1}(x)$ é discreto, para cada $x \in X$. Suponha que $p^{-1}(x)$ é infinito. Como X é de Hausdorff temos que os pontos são conjuntos fechados e, como p é contínua segue que $p^{-1}(x)$ é fechado em $\tilde{X}$. $\tilde{X}$ é compacto então $p^{-1}(x)$ é compacto.

Por outro lado, temos que $p^{-1}(x)$ é um conjunto discreto, assim para cada $a \in p^{-1}(x)$ existe um aberto U_a ($a \in U_a$) tal que $U_a \cap p^{-1}(x) = \{a\}$.

Logo, $\bigcup_{a \in p^{-1}(x)} U_a$ é uma cobertura infinita de $p^{-1}(x)$ que não admite uma subcobertura finita, um absurdo pois $p^{-1}(x)$ é compacto.

Portanto, $p^{-1}(x)$ é finito. □

A cardinalidade de $p^{-1}(x)$ é chamada o número de folhas do recobrimento. Logo, um recobrimento com as hipóteses do corolário possui um número finito de folhas.

Exemplo 1.74. *A aplicação $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por:*

$$\exp(t) = e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

é um recobrimento de infinitas folhas, pois para cada ponto $x \in S^1$, pode ser escrito como $x = \exp(t_0)$ para algum $t_0 \in [0, 1]$ temos que:

$$\exp^{-1}(x) = \{t_0 + n \in \mathbb{R} | n \in \mathbb{Z}\}$$

Definição 1.75. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação contínua e sobrejetora $f : X \rightarrow Y$ satisfaz a **propriedade de levantamento de caminhos**, que abreviaremos por (**PLC**), quando dado arbitrariamente um caminho $\alpha : J \rightarrow Y$, $J = [s_0, s_1]$, e um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = \alpha(s_0)$, existir um caminho $\tilde{\alpha} : J \rightarrow X$ tal que $\tilde{\alpha}(s_0) = x$ e $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \tilde{\alpha} \nearrow & \downarrow f & \\ J & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

Exemplo 1.76. Nem todo homomorfismo local satisfaz a PLC:

Considere o homeomorfismo local $f : (0, 3\pi) \rightarrow S^1$ definido por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ e tome o caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ definido por $\alpha(t) = (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$. temos $\alpha(s_0) = \alpha(0) = (1, 0) = f(2\pi)$.

$$\begin{array}{ccc} & (0, 3\pi) & \\ & \downarrow f & \\ [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \end{array}$$

Para que f satisfaça a PLC, é necessário que exista um caminho $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow (0, 3\pi)$ que faça o diagrama comutar e que $\tilde{\alpha}(0) = 2\pi$. Para que o diagrama comute devemos ter

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : [0, 1] &\rightarrow (0, 3\pi) \\ x &\longmapsto 4\pi x, \end{aligned}$$

pois daí $f(\tilde{\alpha}(x)) = f(4\pi x) = (\cos 4\pi x, \sin 4\pi x) = \alpha(x)$. Mas nesse caso temos $\tilde{\alpha}(0) = 0 \neq 2\pi$. Portanto f não satisfaz a PLC.

Definição 1.77. Quando $f : X \rightarrow Y$ for sobrejetiva e, dados arbitrariamente um caminho $\alpha : J \rightarrow Y$ e $x \in X$ com $f(x) = \alpha(s_0)$, existir um único caminho $\tilde{\alpha} : J \rightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(s_0) = x$, diremos que f goza da **propriedade de levantamento único de caminhos (PLUC)**

Proposição 1.78. Todo espaço conexo, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo possui um **recobrimento universal**.

Demonstração. Ver [4] página 201. □

Se M é uma variedade Riemanniana e $\tilde{M}$ a base de uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{M} \rightarrow M$. Então é a única métrica Riemanniana sobre $\tilde{M}$ e p é uma isometria local. Quando M possui essa métrica, a cobertura será chamada de recobrimento Riemanniano. Os seguintes fatos são identificados a partir da definição. Veja [5].

1. p leva geodésica em geodésica.
2. Se M é completa então $\tilde{M}$ é completa.

3. A transformação das coberturas são isometrias em M .

Definição 1.79. *Seja M uma variedade compacta, sem bordo, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ a aplicação recobrimento universal. Um **domínio compacto fundamental** de $(p, \widetilde{M}, M)$ é um subconjunto compacto $K \subset \widetilde{M}$ tal que:*

1. A união de γK para todo $\gamma \in \pi_1(M)$ cobrem $\widetilde{M}$.
2. A coleção γK são dois a dois disjuntos.
3. $\pi(K) = M$ e a restrição $p|_K : K \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Ver [5].

Recobrimento duplo orientado

Definição 1.80. *Uma aplicação $p : X \rightarrow Y$ contínua induz um homomorfismo ($y_0 = p(x_0)$):*

$$p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

definido por:

$$p_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

p_* é chamado **homomorfismo induzido** pela aplicação p . Veja [10]

Definição 1.81. *Um **recobrimento duplo orientado** é uma aplicação $p : \widetilde{M} \rightarrow M$, de classe C^k , com as seguintes propriedades:*

1. M é uma variedade conexa, $\widetilde{M}$ é uma variedade orientada e p é um difeomorfismo local;
2. Para cada $y \in M$, a imagem inversa $p^{-1}(y)$ contém exatamente dois pontos;
3. Se $p(x_1) = p(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então o isomorfismo linear $p'(x_2)^{-1} : p'(x_1) : T_{x_1}\widetilde{M} \rightarrow T_{x_2}\widetilde{M}$ é negativo. Veja [10]

Exemplo 1.82. *Quando m é par, a aplicação quociente $\pi : S^m \rightarrow P^m$ é um recobrimento duplo orientado do espaço projetivo P^m . No caso de m ímpar, π não cumpre a terceira condição da definição 1.81.*

Proposição 1.83. *A aplicação $p_* : \pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$ induzida pela aplicação recobrimento $p : \pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$ é injetiva. A imagem do subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0))$ em $\pi_1(M, x_0)$ consiste nas classes de homotopia de caminhos distintos, fechados em M com ponto base em x_0*

Demonstração. Ver [7], página 61. □

1.4 Crescimento Exponencial

Nesta seção, definiremos crescimento exponencial para grupos finitamente gerados e veremos como o crescimento do grupo fundamental pode ter sentido geométrico dentro da variedade. E, por fim, veremos exemplos de grupos com distintos tipos de crescimento. Para maiores detalhes, [13], [21].

Definição 1.84. *Seja S um grupo, finitamente gerado por $G = \{g_1, \dots, g_m\}$. Se*

$$g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

onde $\varepsilon_j = \pm 1$ e $g_{i_j} \in G$. Definimos o comprimento de g em G . Como,

$$l_1(g) = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^$, definimos a função crescimento de S , por:*

$$\Gamma(n) = \#\{g \in S; l_1(g) \leq n\}$$

Veja [13]

Definição 1.85. *Dizemos que S tem **crescimento polinomial** se*

$$\Gamma(n) \geq p,$$

*onde p é um polinômio de grau n . e que S tem **crescimento exponencial** se existem constantes $A, a > 0$ tais que*

$$\Gamma(n) \geq Ae^{an},$$

com $n \geq 1$.

Observação 1.86. *O crescimento exponencial da função independe do conjunto de geradores.*

Veja [13].

Definição 1.87. *Quando $S = \pi_1(M)$. Definimos para $\bar{\alpha} \in \pi_1(M)$,*

$$l_2(\bar{\alpha}) = \inf\{|\alpha|; \alpha \in \bar{\alpha}\}$$

onde $|\alpha|$ é o comprimento de arco da curva α . Para cada $r \in \mathbb{R}^+$, definimos a função,

$$P(r) = \#\{\bar{\alpha} \in \pi_1(M); l_2(\bar{\alpha}) \leq r\}$$

Provaremos no Lema 2.1 que o grupo fundamental tem crescimento exponencial se, e somente se, P tem crescimento exponencial, isto é, existem constantes $B > 0$, $b > 0$ tal que $P(r) \geq Be^{br}$.

Exemplo 1.88. *Considerando $M = S^1 \times D^2$ o Toro Sólido, o grupo fundamental é $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. O crescimento de $\pi_1(M)$ é **polinomial**.*

Demonstração. Podemos observar que, $\Gamma(1) = 3$, $\Gamma(2) = 5$, $\Gamma(3) = 7$, ..., $\Gamma(n) = 2n + 1$. É fácil ver que, formamos uma sequência de números ímpares. Portanto, o Toro Sólido tem crescimento polinomial. $\square$

Exemplo 1.89. Considerando $M = S^1 \times S^1$ o Toro, o grupo fundamental é $\pi_1(M) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. O crescimento de $\pi_1(M)$ é polinomial.

De fato, observamos que $\Gamma(1) = 5$, $\Gamma(2) = 13$, $\Gamma(3) = 25$, $\Gamma(4) = 41$, $\Gamma(n) = 2n^2 + 2n + 1$.

Logo, a função crescimento do grupo fundamental do Toro é polinomial.

Definição 1.90. Seja S um grupo e $\{\alpha \in \Gamma\}$ uma família de subgrupos que geram S . $S_\alpha \cap S_\beta = \{e\}$ se $\alpha \neq \beta$. Dizemos que, S é o **produto livre** gerado pelos S_α , se para cada $s \in S$ existe uma única palavra reduzida em S_α que representa a s . Em tal caso escrevemos:

$$S = \prod_{\alpha}^* S_{\alpha}$$

No caso finito, escrevemos:

$$S = S_1 * S_2 * \dots * S_j$$

onde, $j = 1, \dots, n$.

S é o produto livre sobre o conjunto das palavras reduzidas. Em resumo, o grupo S é definido como o conjunto das expressões formais:

$$s = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \dots s_j^{\varepsilon_j}$$

Onde cada $s_j^{\varepsilon_j}$ pertence a algum S_i diferente da identidade e tal que os elementos adjacentes a $s_j^{\varepsilon_j}$ pertencem a diferentes S_α .

Exemplo 1.91. Seja M o bitoro sólido sabemos que o grupo fundamental é dado por $\pi_1(M) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. O crescimento de $\pi_1(M)$ é **exponencial**.

De fato, Fixemos $\gamma(n)$ como sendo as palavras de comprimento iguais a n e $\Gamma(n)$ as palavras de comprimento menores ou iguais à n . Considere o gráfico de Caley 1.9,

Pelo gráfico 1.9, temos que as palavras distintas de comprimento 1, são: $0, a, b, a^{-1}, b^{-1}$ Assim, $\gamma(1) = 5$ e $\gamma(2) = 12$. Logo,

$$\Gamma(2) = \gamma(1) + \gamma(2) = 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1 = 17.$$

Assim, $\gamma(3) = 36$. Logo,

$$\Gamma(3) = \gamma(1) + \gamma(2) + \gamma(3) = 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1 = 53.$$

Portanto, $\Gamma(n)$, é: $\Gamma(n) = 4 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-3} + \dots + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1$
 $\Gamma(n) \geq 4 \cdot 3^{n-1} = (3+1)3^{n-1} = 3^n + 3^{n-1} \geq 3^n$ Logo, $\Gamma(n) \geq 3^n$, como queríamos.

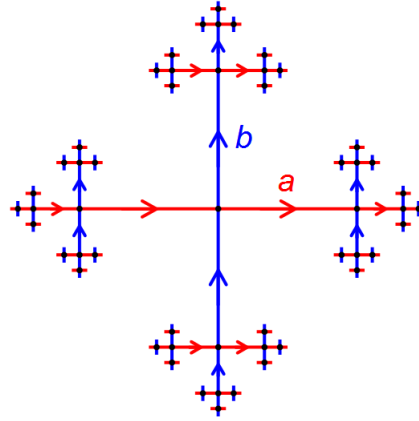


Figura 1.9: Gráfico de Caley

Observação 1.92. *A folheação pode ser considerada orientável, caso contrário, basta observar o recobrimento duplo e mostrar que o mesmo tem crescimento exponencial. Então, a própria variedade também tem e pode ser considerada orientável.*

1.5 Teorema de Haefliger

Nesta seção abordaremos conceitos introdutórios sobre folheações de uma variedade, alguns conceitos e resultados sobre holonomia e posteriormente, faremos o esboço da demonstração do teorema de Haefliger.

Folheações

A ideia intuitiva de **folheação** corresponde a decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão, das quais se acumulam localmente como folhas de um livro. os quais podem ser encontrados em [4].

Definição 1.93. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ . Uma **folheação** de classe C^r e dimensão m de M , é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M , satisfazendo:*

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$$

onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbf{R}^n$ e de $\mathbf{R}^{m-n}$ respectivamente.

2. Se (U, φ) e $(V, \Psi) \in \mathcal{F}$ são tais que

$$U \cap V \neq \emptyset$$

então a mudança de coordenadas

$$\Psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \Psi(U \cap V)$$

é dada por

$$\Psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

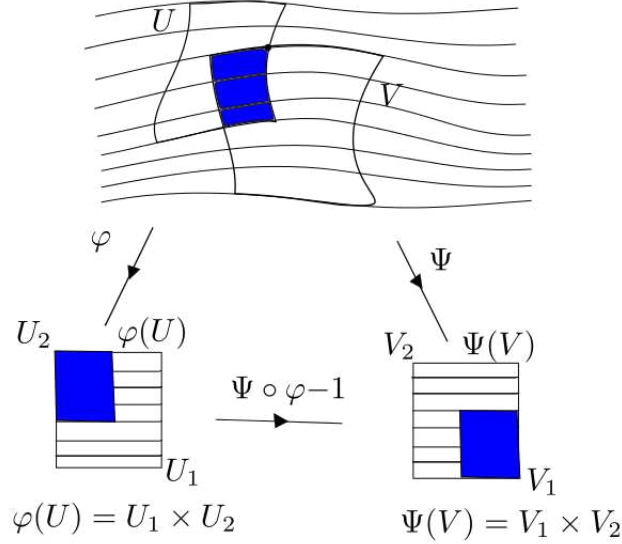


Figura 1.10: Folheações

Neste caso, dizemos que M é folheada por $\mathcal{F}$, ou ainda que $\mathcal{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M .

Definição 1.94. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r de dimensão n , $0 < n < m$, de M^m e (U, φ) uma **carta local** de $\mathcal{F}$ tal que

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}.$$

Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados *placas* de U , ou *placas* de $\mathcal{F}$.

Fixando $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{(U_1 \times \{c\})} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é uma subvariedade conexa de dimensão n e de classe C^r de M . Portanto, se α e β são placas de U então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Definição 1.95. Um caminho de **placas** de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Dado que a variedade M é coberta por placas de $\mathcal{F}$, podemos definir em M uma relação de equivalência: " pRq se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$ ". Esta classe de equivalência da relação R são chamadas **folhas** de $\mathcal{F}$. Por definição, segue-se que as folhas de $\mathcal{F}$ são subconjuntos de M conexos por caminhos.

Definição 1.96. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de uma variedade M , então um subconjunto $S \subset M$ é dito ser $\mathcal{F}$ - **saturado** ou simplesmente **saturado** se é uma união de folhas de $\mathcal{F}$.

Observação 1.97. Seja $E^u \oplus E^x \oplus E^s$ a decomposição do fibrado tangente. Sabe-se que os subfibrados $E^u \oplus E^x$, $E^s \oplus E^x$, E^u , E^s são unicamente integráveis e que as variedades integráveis são de classe C^r . As variedades integráveis determinam folheações de M as quais são denotadas por $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^{uu}$, $\mathcal{F}^{ss}$, respectivamente. Se $x \in M$ então as respectivas folhas dessa folheação contendo x são $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W^{uu}(x)$, $W^{ss}(x)$, respectivamente. [17]

Definição 1.98. Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de grupos. Um subconjunto de M é invariante (por φ) se ele é união de órbitas de φ .

Definição 1.99. Um **conjunto minimal** de φ_t é um subconjunto $N \subset M$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Não vazio
2. fechado
3. Invariante, isto é, $\varphi_t(N) = N$.

E tal que nenhum subconjunto propriamente contido em N possui essas três propriedades.

Definição 1.100. Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão s e classe C^r , $r \geq 1$ de M está definida por uma coleção máxima de pares (U_i, f_i) , $i \in I$ onde os U_i são abertos em M e as $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$ são submersões satisfazendo:

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$
2. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe um difeomorfismo local g_{ij} de classe C^r de $\mathbb{R}^s$ tal que $f_i = g_{ij} \circ f_j$ em $U_i \cap U_j$.

As f_i são chamadas **aplicações distinguidas** de $\mathcal{F}$.

Nesta definição as placas de $\mathcal{F}$ em U_i são as componentes conexas dos conjuntos $f_i^{-1}, c \in \mathbb{R}^s$.

Lema 1.101. (Aplicações Distinguidas). Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade M . Existe uma cobertura $C = \{U_i/i \in I\}$ de M por domínios de cartas locais de $\mathcal{F}$ tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ está contido no domínio de uma carta local de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Ver [4] capítulo II, página 31. □

Definição 1.102. Sejam N, S variedades. Dizemos que estas variedades são transversais num ponto p se, somente se, $S \cap N \neq \emptyset$ ou $T_p N + T_p S = T_p M$.

Definição 1.103. Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r ($r \geq 1$) é orientável se o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ é orientável. Similar a $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável. Denotaremos o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ por $T\mathcal{F}$

Holonomia

Nesta seção $\mathcal{F}$ denota uma folheação de codimensão n e classe $C^r, r \geq 1$, de uma variedade M^m . O nosso objetivo é estudar o comportamento das folhas vizinhas a uma folha compacta F fixada a priori. Pela uniformidade transversal de $\mathcal{F}$ é suficiente estudar os retornos das folhas a uma pequena seção transversal Σ de dimensão n passando por um ponto $p \in F$. Para cada caminho γ fechado em F passando por p , estes retornos podem se expressar por um difeomorfismo local de Σ de classe $C^r, f_\gamma, f_\gamma(p) = p$, onde para $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de $p, f_\gamma(x)$ é o primeiro retorno "sobre γ " da folha de $\mathcal{F}$ que passa por x . Resulta que se γ' é outro caminho em F fechado em p e homotópico a γ (com extremos mantidos fixos) então $f_{\gamma'}$ e f_γ coincidem numa vizinhança comum de $p \in \Sigma$, isto é, $f_{\gamma'}$ e f_γ têm o mesmo germe em $p \in \Sigma$. Daí, segue-se que a aplicação $\gamma \longmapsto f_\gamma$ induz um homomorfismo

$$\pi_1(F, p) \rightarrow G(\Sigma, p)$$

entre o grupo fundamental de F em p (grupo de classes de homotopia de caminhos fechados) e o grupo de germes de difeomorfismos C^r de Σ em p . Esta representação é chamada **holonomia** de F em p . Esta noção, foi introduzida por Ehresmann.

É claro que quanto menor for $\pi_1(F, p)$ menor será a recorrência das folhas vizinhas a F . O **Teorema da Estabilidade Local** expressa isso da maneira seguinte: se F é uma folha compacta de $\mathcal{F}$ com grupo fundamental finito, então existe uma vizinhança V de F , saturada pelas folhas de $\mathcal{F}$, tal que toda folha em V é compacta com grupo fundamental finito.

O *Teorema da Estabilidade Completa* oferece a seguinte versão global:

Se $\text{cod}\mathcal{F} = 1$, M é compacta e conexa, existe uma folha compacta com grupo fundamental finito então todas as folhas são compactas e têm grupo fundamental finito.

Estes teoremas são devidos à G. Reeb.

Holonomia de uma Folha

Durante esta seção $\mathcal{F}$ será uma folheação de codimensão n e M uma variedade diferenciável. O objetivo desta seção é definir e dar uma noção sobre holonomia de uma folha F de $\mathcal{F}$. Para maiores detalhes veja o Capítulo IV de [4].

Sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo e Σ_0, Σ_1 pequenas seções transversais a $\mathcal{F}$ de dimensão n passando por $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$, respectivamente. Definiremos uma transformação local entre Σ_0 e Σ_1 "ao longo" das folhas de $\mathcal{F}$, "sobre" o caminho γ levando p_0 em p_1 .

Segue do Lema 1.101 que existem uma sequência de cartas locais $(U_i)_{i=0}^k$ e uma partição de $[0, 1], 0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$ tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$

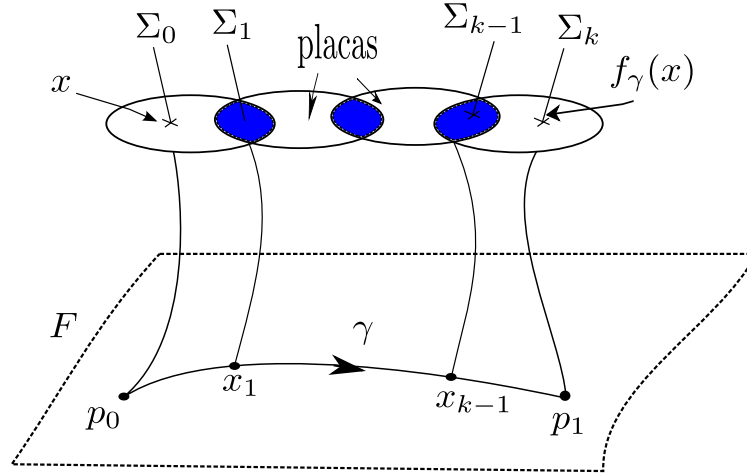


Figura 1.11: Holonomia

está contido numa carta local de $\mathcal{F}$ e $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo $0 \leq i \leq k$. Dizemos então que existe uma **cadeia subordinada a γ** ou, por simplicidade, que $(U_i)_{i=0}^k$ é uma cadeia subordinada a γ .

Para cada $0 < i < k+1$ fixemos uma seção transversal a $\mathcal{F}$, $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$ homeomorfa a um disco de dimensão n passando por $\gamma(t_i)$. Coloquemos também $D(0) = \Sigma_0$ e $D(1) = \Sigma_1$. Então para cada $x \in D(t_i)$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$ a placa de U_i que passa por x e intercepta $D(t_{i+1})$ num único ponto $f_i(x)$.

O domínio da aplicação f_i contém um disco $D'_i \subset D(t_i)$ contendo $\gamma(t_i)$.

Daí, é claro que a composição

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0$$

Está bem definida numa vizinhança de $p_0 \in \Sigma_0$. Chamaremos f_γ de **aplicação de holonomia** associada a γ .

Definição 1.104. *Sejam X, Y espaços topológicos e $x \in X$. No conjunto das aplicações $X \supset V \rightarrow Y$, onde V é uma vizinhança de x , introduzimos a relação de equivalência $R : fRg$ se existe uma vizinhança W de x tal que $f|_W = g|_W$.*

*A classe de equivalência de f é denominada **germe** de f em x .*

Quando $X = Y$, o conjunto $G(X, x)$ de germes de homeomorfismos locais que deixam fixo x é um grupo com a multiplicação germe $(f) \circ \text{germe}(g) = \text{germe}(f \circ g)$, sendo que o domínio de $f \circ g$ é a interseção do domínio de g com g^{-1} (domínio de f).

Proposição 1.105. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ caminhos contidos em uma folha F de $\mathcal{F}$ tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = p_1$. Sejam Σ_0, Σ_1 seções transversais a F com $p_0 \in \Sigma_0$ e $p_1 \in \Sigma_1$. Sejam $f_{\gamma_1} : D_1 \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ e $f_{\gamma_2} : D_2 \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ aplicações de holonomia associadas a f_{γ_1} e f_{γ_2} e*

sejam $\text{germ}(f_{\gamma_1})$ e $\text{germ}(f_{\gamma_2})$ os germes de holonomia em p_0 de f_{γ_1} e f_{γ_2} , respectivamente. Assim,

1. Se γ_0 e γ_1 são homotópicos com extremos fixos dentro de F então $\text{germ}(f_{\gamma_1}) = \text{germ}(f_{\gamma_2})$.
2. Se $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, então a transformação $\gamma \longmapsto \text{germ}(f_{\gamma^{-1}})$ induz um homomorfismo

$$\Phi : \phi_1(F, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0), \quad \Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}}$$

do grupo fundamental de F em p_0 no grupo de germes de difeomorfismos C^r de Σ_0 que deixam p_0 fixo.

Demonstração. Ver [4] página 65, capítulo IV. □

Definição 1.106. O subgrupo $\text{Hol}(F, p_0) = \Phi(\phi_1(F, p_0))$ de $G(\Sigma_0, p_0)$ é chamado **grupo de holonomia** de F em p_0 . Dados $p_0, p_1 \in F$, quaisquer caminho $\alpha : I \rightarrow F$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$ induz um isomorfismo

$$\vartheta : \text{Hol}(F, p_0) \rightarrow \text{Hol}(F, p_1)$$

$$\text{pondo } \vartheta(\Phi[\mu]) = \varphi_\alpha \circ \Phi[\mu] \circ \varphi_{\alpha^{-1}}.$$

Desta maneira podemos falar do **grupo de holonomia** de F como sendo qualquer grupo isomorfo a $\text{Hol}(F, p_0)$. Para simplificar notação, às vezes confundiremos um elemento da holonomia com um dos seus representantes.

A seguir, definiremos holonomia na folheação estável e instável em um fluxo Anosov. Tal definição é muito importante e será usada no Lema 2.3.

Definição 1.107. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um na variedade M . Dizemos que, $F \in \mathcal{F}$ tem **holonomia trivial** se $\text{Hol}(F)$ é um grupo trivial, para toda curva fechada $\gamma \in F$ corresponde a aplicação de holonomia que é a identidade em alguma seção transversal a γ e F , isto é, $f_\gamma = \text{Id}$. Dizemos que, γ é uma curva fechada em F tem **holonomia expansiva** se a aplicação de holonomia f_γ é um homeomorfismo local expansivo em alguma seção transversal J transversal a γ . Uma vez que as aplicações de holonomia definidas em seções transversais distintas são conjugadas por um homeomorfismo, assim para que uma curva γ fechada tenha holonomia expansiva independe do segmento transversal que se considere. Analogamente, definimos quando uma curva fechada tem **holonomia contrativa**.

Observação 1.108. Pelo Teorema da variedade estável 1.25 as folhas de uma folheação instável (ou estável, respectivamente) de um fluxo Anosov sobre uma variedade riemanniana compacta M é homeomorfo a $\mathbb{R}^{u+1}$, (onde u é a dimensão da folheação instável) ou que não seja homeomorfa a $\mathbb{R}^{u+1}$. Desta forma, o grupo fundamental da folha fica gerado por uma única órbita periódica do fluxo. Note que, o fluxo induz uma orientação a todas curvas não homotopicamente nulas dentro da folha.

Teorema de Haefliger

Enunciaremos o Teorema de Haefliger nesta seção para folheações de codimensão um e faremos o roteiro desta demonstração. Para maiores detalhes [4].

Teorema 1.109 (Teorema de Haefliger). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um de classe C^2 em uma variedade diferenciável M . Suponhamos que existe uma curva fechada transversal a $\mathcal{F}$ homotópica a um ponto. Então existem uma folha F de $\mathcal{F}$ e uma curva fechada $\Gamma \subset F$ cujo germe de holonomia num segmento J transversal a $\mathcal{F}$, com $p = J \cap \Gamma$, é a identidade em uma das componentes de $J - \{p\}$ mas difere da identidade em qualquer vizinhança de p em J .*

Faremos o esboço da demonstração do Teorema de Haefliger baseados em [4].

Seja $\alpha : S^1 \rightarrow M$ uma curva transversal a $\mathcal{F}$ homotópica a um ponto. Isto significa que, existe uma extensão de α a uma aplicação $A : D^2 \rightarrow M$. Esta aplicação é contínua, mas pelo teorema de aproximação de Stone- Weierstrass podemos supor que A é de classe C^∞ . A aplicação A é a seguir aproximada por uma aplicação $g : D^2 \rightarrow M$ transversal a $\mathcal{F}$, exceto num número finito de pontos $\{q_1, \dots, q_l\}$ onde a tangência de g com as folhas de $\mathcal{F}$ é não degenerada, ou seja, de um dos dois tipos seguintes:

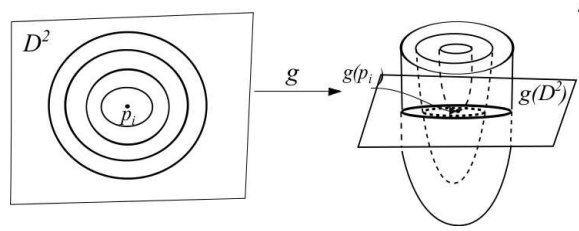


Figura 1.12: Tangência tipo centro

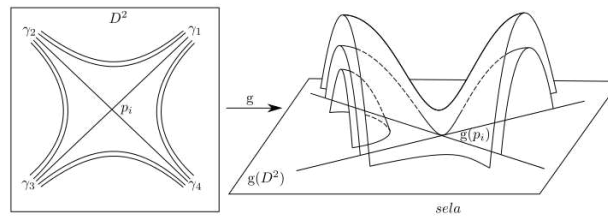


Figura 1.13: Tangência tipo Sela

Desta forma obtemos uma folheação com singularidades de D^2 , $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$, transversal ao bordo e cujo domínio singular $\{q_1, \dots, q_l\}$ é constituído de centros e selas.

Quando q_i é uma sela de $\mathcal{F}^*$, se nos restringirmos a uma pequena vizinhança V de q_i como na figura 1, $\mathcal{F}^*|V$ possui quatro variedades integrais $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ que se acumulam em q_i . Essas folhas são denominadas separatrizes locais de q_i .

Se γ é uma folha de $\mathcal{F}^*$ tal $\gamma \cap V$ contém uma separatriz local de q_i , dizemos que γ é uma separatriz de q_i , e se $\gamma \cap V$ contém duas separatrizes locais de q_i , γ é uma *auto-ligação de selas*. Quando γ é separatriz de duas selas distintas, dizemos que γ é uma *ligação de selas* e que se duas selas são ligadas. Na fase final da demonstração do teorema usaremos que é possível obter g de tal forma que duas selas distintas de $\mathcal{F}^*$ não sejam ligadas. Observe que, se q_i e q_j são duas selas ligadas de $\mathcal{F}^*$, então $g(q_i)$ e $g(q_j)$ estão contidas numa mesma folha de $\mathcal{F}$. Quando isso ocorre, podemos modificar g , para obter uma função $\tilde{g} : D^2 \rightarrow M$, próxima de g de tal forma que $\tilde{g}(\tilde{q}_i)$ e $\tilde{g}(\tilde{q}_j)$ estão em folhas distintas de $\mathcal{F}$ sempre que $\tilde{q}_i \neq \tilde{q}_j$ são selas de $\tilde{g}^*(\mathcal{F})$. Podemos então supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{F}^*$ não possui selas distintas ligadas, podendo possuir no entanto auto- ligações de selas (que são indestrutíveis por pequenas perturbações). Na figura (vou colocar a referencia da figura aqui, ainda estou desenhando), ilustramos um exemplo do que pode ocorrer:

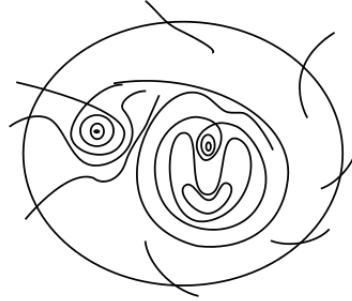


Figura 1.14: Folheações orientáveis no círculo

Observe que a folheação $\mathcal{F}^*$ é localmente orientável (mesmo numa vizinhança de uma singularidade). Como D^2 é simplesmente conexo existe um campo de vetores Y em D^2 , com singularidades $\{q_1, \dots, q_l\}$, cujas órbitas regulares são as folhas de $\mathcal{F}^*$. Aplicando-se a teoria de Poincaré- Bendixson ao campo Y , mostra-se que existem uma curva fechada Γ , invariante por Y , e um segmento J , transversal a Y de tal forma que é possível definir-se uma transformação de primeiro retorno f , numa vizinhança de $p = \Gamma \cap J$ em J , seguindo-se as órbitas positivas de Y , a qual é a identidade e uma das componentes de $J - \{p\}$, mas não é a identidade em nenhuma vizinhança de p em J . A imagem de Γ por g define uma curva fechada $g(\Gamma)$ numa folha de $\mathcal{F}$ cuja holonomia é conjugada a f . Isto conclui o esboço da demonstração.

Capítulo 2

Teorema Principal

Neste capítulo temos como objetivo apresentar a demonstração do teorema que motivou este estudo. Para isto, utilizaremos os resultados e conceitos apresentados no capítulo anterior [16].

Inicialmente, provaremos que a função Γ tem crescimento exponencial se, somente se, a função P tem crescimento exponencial.

Lema 2.1. *Seja $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ um conjunto finito de geradores do $\pi_1(M)$. Então, existe k_1, k_2 tal que para cada $\bar{\alpha} \neq e$,*

$$k_1 \leq \frac{l_2(\bar{\alpha})}{l_1(\bar{\alpha})} \leq k_2$$

Demonstração. Usando a definição 1.84 e 2.1, se $\bar{\alpha} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$ temos $l_1(\bar{\alpha}) = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|$. Por outro lado, usando a definição, $l_2(\bar{\alpha}) \leq l_2(g_{i_1}) + l_2(g_{i_2}) + \dots + l_2(g_{i_n})$. Como G é finito tomemos

$$k_2 = \max\{l_2(g_1), l_2(g_2), \dots, l_2(g_m)\}.$$

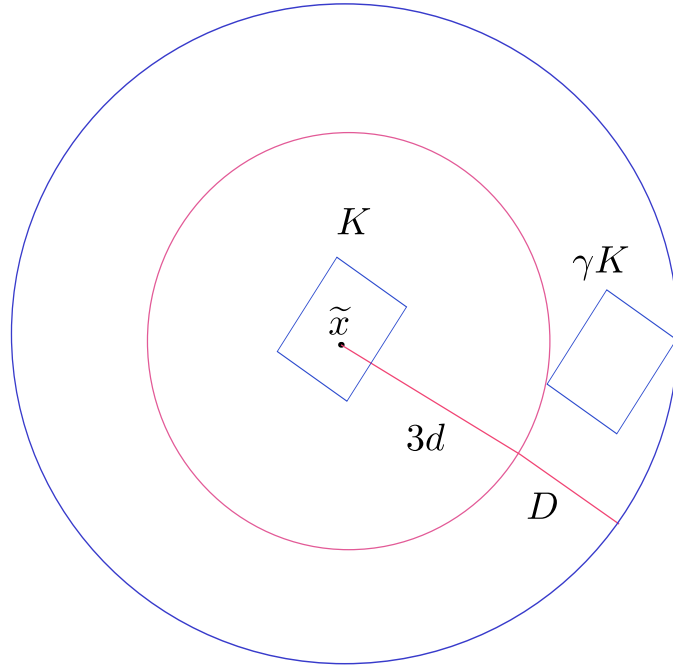
Daí,

$$\frac{l_2(\bar{\alpha})}{l_1(\bar{\alpha})} \leq \frac{l_2(g_{i_1}) + l_2(g_{i_2}) + \dots + l_2(g_{i_n})}{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|} \leq \frac{k_2 + k_2 + \dots + k_2}{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|} = \frac{nk_2}{n} \leq k_2.$$

Para obtermos k_1 , consideraremos o recobrimento universal da variedade M . Se $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ a aplicação recobrimento, fixemos $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ tal que $p(\tilde{x}) = x_0$. Seja K um domínio fundamental compacto com diâmetro D e d o diâmetro de M . Considere a bola em $\widetilde{M}$ de centro $\tilde{x}$ e raio $3d + D$

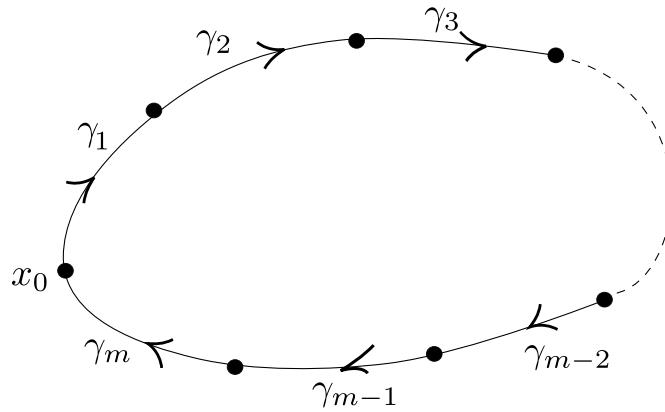
$$B(\tilde{x}, 3d + D)$$

Observe que, se pra algum $\gamma \in \pi_1(\widetilde{M})$ tem-se que γK intersecta a bola de centro $\tilde{x}$ e raio $3d$ $B(\tilde{x}, 3d)$ então γK está contida na bola $B(\tilde{x}, 3d + D)$

Figura 2.1: $B(\tilde{x}, 3d + D)$

Notemos que $\{\bar{\alpha} \in \pi_1(M) : l_2(\bar{\alpha}) \leq 3d\}$ é um conjunto finito. De fato, como $p^{-1}\{x_0\}$ é discreto temos que $p^{-1}\{x_0\} \cap B(\tilde{x}, 3d)$ é finito, logo o conjunto de classes homotópicas de comprimento menor ou igual a $3d$ que ligam $\tilde{x}$ com algum ponto em $p^{-1}\{x_0\} \cap B(\tilde{x}, 3d)$ é também finito. Assim as suas projeções por p formam um conjunto finito em M . Isto é, $\{\bar{\alpha} \in \pi_1(M) : l_2(\bar{\alpha}) \leq 3d\}$ é um conjunto finito. Seja $k = \max\{l_1(\bar{\alpha}) : \bar{\alpha} \in \{\bar{\alpha} \in \pi_1(M) : l_2(\bar{\alpha}) \leq 3d\}\}$

Dado um caminho α podemos particioná-lo na forma $\alpha = \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_m$ onde $|\gamma_i| = d, i = 1, \dots, m-1$ e $0 \leq |\gamma_m| < d$, veja a Figura 2.2.

Figura 2.2: $0 \leq |\gamma_m| < d$

Logo, $|\alpha| = |\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + \dots + |\gamma_{m-1}| + |\gamma_m| \geq |\gamma_1| + \dots + |\gamma_{m-1}| = (m-1) \cdot d$
 Portanto, $\frac{|\alpha|}{d} \geq m-1$ ou

$$m \leq \frac{|\alpha|}{d} + 1 \quad (*)$$

Além disso, podemos encontrar caminhos β_i com $|\beta_i| \leq d$, tal que $\alpha = (\gamma_1 * \beta_1^{-1}) * (\beta_1 * \gamma_2 * \beta_2^{-1}) * \dots * (\beta_{m-2} * \gamma_{m-1} * \beta_{m-1}^{-1}) * (\beta_{m-1} * \gamma_m)$. Veja Figura 2.3.

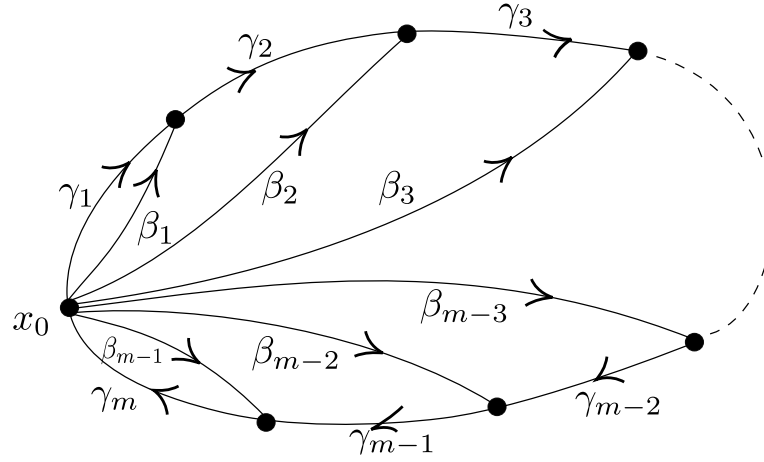


Figura 2.3: $|\alpha_i| \leq 3d$

Assim, se $\alpha_1 = (\gamma_1 * \beta_1^{-1})$, $\alpha_2 = (\beta_1 * \gamma_2 * \beta_2^{-1})$, $\alpha_3 = (\beta_2 * \gamma_3 * \beta_3^{-1})$, ..., $\alpha_m = (\beta_{m-1} * \gamma_m)$.

$$\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_m$$

Observe que, $|\alpha_1| = |\gamma_1| + |\beta_1^{-1}| = 2d \leq 3d$, $|\alpha_2| = |\beta_1| + |\gamma_2| + |\beta_2^{-1}| \leq 3d$, ..., $|\alpha_m| \leq |\beta_{m-1}| + |\gamma_m| \leq 3d$. Portanto, $l_2(\overline{\alpha_i}) \leq 3d$.

Agora,

$$l_1(\overline{\alpha}) \leq l_1(\overline{\alpha_1}) + l_1(\overline{\alpha_2}) + \dots + l_1(\overline{\alpha_m})$$

$$l_1(\overline{\alpha}) \leq k + k + k + \dots + k \leq mk$$

Por (*) temos

$$l_1(\alpha) \leq \left(\frac{|\alpha|}{d} + 1\right) \cdot k \quad (**)$$

Seja $d_0 = \inf\{|\beta|; \beta \neq 0\}$, observe que, $d_0 > 0$. Caso contrário se existiria $\beta \neq 0$ e $|\beta| = 0$ logo teríamos que β estaria contido numa bola, assim seria homotópica a um ponto. Absurdo.

Afirmamos que $|\alpha| + d \leq (1 + \frac{d}{d_0})|\alpha|$. De fato, para $\alpha \neq 0$, $|\alpha| \leq d_0$. Então, $d \leq \frac{|\alpha|}{d_0}d$, pois $d \geq 0$ e $d_0 > 0$

$$|\alpha| + d \leq |\alpha| + \frac{|\alpha|}{d_0}d$$

$$|\alpha| + d \leq \left(1 + \frac{d}{d_0}\right)|\alpha|.$$

isto prova a afirmação.

Por (**), temos:

$$\begin{aligned}
 l_1(\bar{\alpha}) &\leq \left(\frac{|\alpha|}{d} + 1\right)k \\
 &= \left(\frac{|\alpha| + d}{d}\right)k \\
 &\leq \frac{(1 + \frac{d}{d_0})|\alpha|k}{d} \\
 &= \frac{(d_0 + d)|\alpha|k}{dd_0}
 \end{aligned}$$

para qualquer $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 l_1(\bar{\alpha}) &\leq \inf_{\alpha \in \bar{\alpha}} \left\{ \frac{d_0 + d}{dd_0} k |\alpha| \right\} \\
 &\leq \frac{d_0 + d}{dd_0} k \cdot \inf_{\alpha \in \bar{\alpha}} \{|\alpha|\}
 \end{aligned}$$

Defina $k_1 = \frac{dd_0}{k(d+d_0)}$,

logo,

$$\frac{l_2(\bar{\alpha})}{l_1(\bar{\alpha})} \geq \frac{dd_0}{k(d+d_0)} \geq k_1$$

□

2.1 Prova do Teorema

Como o fluxo é de codimensão um, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\dim(E^s) = 1$ (caso contrário, invertemos o sentido do fluxo). Lembremos que se $x \in M$ então $W^{ss}(x)$ é a variedade tangente à E^s no ponto x e $W^u(x)$ denota a variedade instável fraca de x .

Como a folheação estável pode definir um campo de vetores não nulo, podemos definir um campo de vetores unitário em M , veja 1.92. Assim seja η_t o fluxo contínuo associado a esse campo de vetores em M . O comprimento de um segmento de órbita é dado pelo tempo. Considere $N \subset M$ um conjunto minimal para η_t e tome $x_0 \in N$. Seja $D \subset W^u(x_0)$ um disco diferenciável fechado e mergulhado com x_0 ponto interior à D .

Note que, η_t tem velocidade um em todo ponto. Seja V um aberto tal que $V = \bigcup_{-\delta \leq t \leq \delta} \eta_t(D)$ para $\delta > 0$ pequeno.

Observe que, a órbita futura de x_0 por η_t dá várias voltas, porém sempre retorna dentro de V , isso se deve ao fato de $x_0 \in N$ ser um ponto recorrente de η_t , como V está definido por uma "caixa de fluxos" de η_t , vemos que essas órbitas

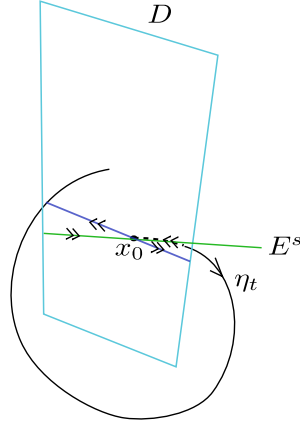


Figura 2.4: disco diferenciável fechado e mergulhado em M

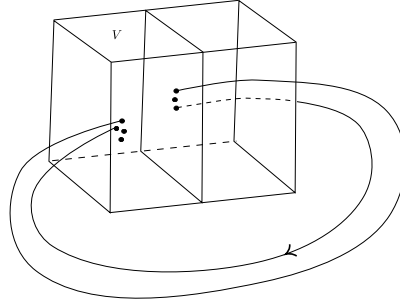
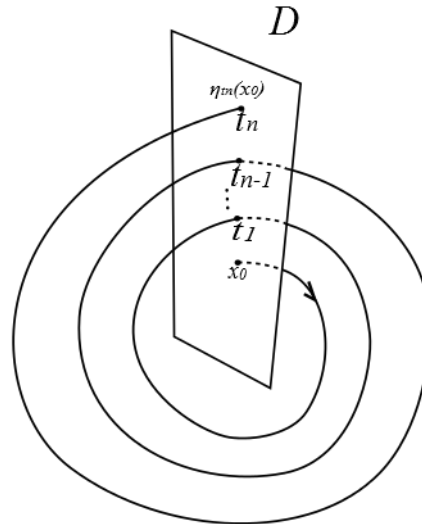


Figura 2.5: Caixa de Fluxo V

também cortam D , infinitas vezes. Assim, podemos definir tempos sucessivos na órbita de x_0 que está ainda volta a cortar D . Existe um número menor positivo t_1 tal que $\eta_{t_1}(x_0) \in D$. Indutivamente, dado t_{n-1} , defina t_n como o menor $t > t_{n-1}$ de tal modo que $\eta_{t_n}(x_0) \in D$.



$t_n - t_{n-1}$ é o tempo entre $\eta_{t_{n-1}}(x_0)$ e $\eta_{t_n}(x_0)$.

Lema 2.2. *Existe $L > 0$ tal que $t_n - t_{n-1} < L$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Demonstração. Faremos a prova por absurdo. Suponha que para todo $L > 0$ existe $n_L \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_{n_L} - t_{n_L-1} \geq L$ (*).

Assim, para $L = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_{n_1} - t_{n_1-1} > 1$. Para $L = 2$ afirmamos que existe $n_2 > n_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_{n_2} - t_{n_2-1} > 2$. Caso contrário, para todo $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_2 > n_1$,

$$t_{n_2} - t_{n_2-1} \leq 2$$

Se tomarmos $\bar{L} = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n_1\}$ e $\tilde{L} = \max\{\bar{L}, 2\}$, teríamos para todo $i \in \mathbb{Z}$, $t_i - t_{i-1} \leq \tilde{L}$ uma contradição a (*). Dessa forma, podemos encontrar, números inteiros n_k tais que $n_k > n_{k-1} > \dots > n_2 > n_1$. E,

$$t_{n_k} - t_{n_k-1} > k \quad (**)$$

Note que, $\{\eta_{t_{n_k}}(x_0)\} \in D \cap N$. Existe um ponto de acumulação y de $\{\eta_{t_{n_k}}(x_0)\}$. Como $D \cap N$ é fechado, temos que, $y \in D \cap N$. Pela continuidade de η_t , dado $\epsilon > 0$, existe L_1 tal que para todo $x \in B(y, \epsilon)$, temos que, $\{\eta_t(x) : 0 \leq t \leq L_1\} \cap V \neq \emptyset$, onde $V = \bigcup_{-\delta \leq t \leq \delta} \eta_t(D)$.

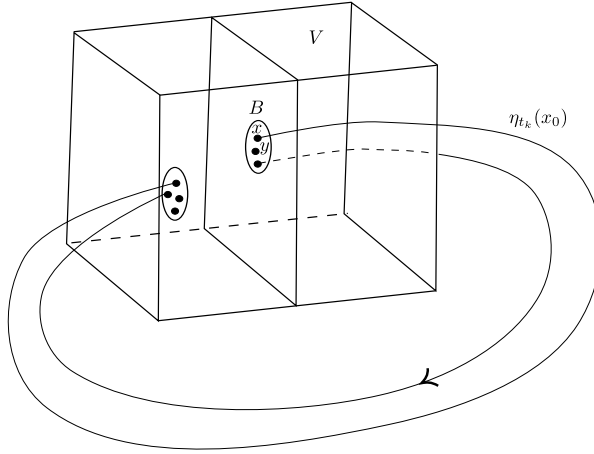


Figura 2.6: Caixa de Fluxos

Assim, $\{\eta_{L_1+t}(x)t \in [0, 2\delta]\} \cap D \neq \emptyset$ para todo $x \in B(y, \epsilon)$. Em particular, se $x \in B(y, \epsilon) \cap D$ o tempo de retorno de x é menor ou igual a $L_1 + 2\delta$. Como y é ponto de acumulação então $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_{t_{n_k}}(x_0) = y$. Portanto, existe $k > L_1 + 2\delta$ tal que $\eta_{t_{n_k}-1}(x_0) \in B(y, \epsilon) \cap D$. Logo, o tempo de retorno de $\eta_{t_{n_k}-1}(x_0) \leq L_1 + 2\delta$. Isto é, $t_{n_k} - t_{n_k-1} \leq L_1 + 2\delta$, uma contradição à (**). $\square$

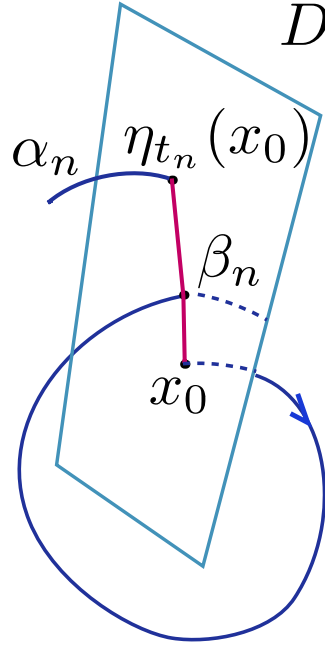
Lema 2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana e considere $\varphi_t : M \rightarrow M$ um fluxo Anosov. Então, não pode existir uma curva γ contínua, fechada, homotopicamente nula e transversal para todo ponto da folheação instável ou estável.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que existe γ contínua, fechada, homotopicamente nula e transversal a folheação instável. Pelo teorema de Haefliger 1.109 existe uma folha F da folheação instável e uma curva γ em F

cujo germe de holonomia em um segmento J é transversal a $\mathcal{F}$, com $p = J \cap \gamma$, é a identidade em uma das componentes de $J - \{p\}$ mas difere da identidade em qualquer vizinhança de p em J . Assim, temos dois casos a considerar:

Suponhamos que F seja homeomorfa a $\mathbb{R}^{u+1}$, onde u é a dimensão da folheação instável. Então, toda curva fechada $\gamma \subset F$ é homotopicamente nula em F e a aplicação de holonomia correspondente a γ é $f_\gamma = Id$, mas isso contradiz o Teorema de Haefliger, pois existe uma folha F da folheação instável e uma curva γ em F cujo germe de holonomia em um segmento J é transversal a $\mathcal{F}$, com $p = J \cap \gamma$, é a identidade em uma das componentes de $J - \{p\}$ mas difere da identidade em qualquer vizinhança de p em J . Agora suponhamos que F não seja homeomorfa a $\mathbb{R}^{u+1}$. Portanto, γ contém uma órbita periódica γ' a qual é não homotopicamente nula em F . Tomando J um segmento transversal a folheação $\mathcal{F}$ em $p \in J \cap \gamma'$, neste caso temos que a aplicação de holonomia será expansiva em ambas componentes conexas de $J - \{p\}$, mas isso não pode acontecer pois pelo Teorema, existe uma folha F da folheação instável e uma curva γ em F cujo germe de holonomia em um segmento J é transversal a $\mathcal{F}$, com $p = J \cap \gamma$, é a identidade em uma das componentes de $J - \{p\}$ mas difere da identidade em qualquer vizinhança de p em J . Logo, segue o resultado. $\square$

Defina o caminho $\gamma_n = \alpha_n * \beta_n$, onde α_n vai de x_0 a $\eta_{t_n}(x_0)$ ao longo da órbita e imagem de β_n encontra-se em D e vai de $\eta_{t_n}(x_0)$ até x_0 .



Lema 2.4. $\gamma_n \cong \gamma_m$ se, e somente se, $n = m$.

Demonstração. Se $n = m$, segue que, $\gamma_n \cong \gamma_m$. Reciprocamente, suponhamos por absurdo que $n > m$. Por hipótese, $\gamma_n \cong \gamma_m$, isto significa que, $\alpha_n * \beta_n \simeq \alpha_m * \beta_m$. Multiplicando ambos os membros por α_m^{-1} e por β_m^{-1} , respectivamente, temos:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n & \simeq & \alpha_m^{-1} * \alpha_m * \beta_m \\ \beta_m^{-1}, \quad \beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n & \simeq & \beta_m^{-1} * \beta_m \end{array}$$

Isto é,

$$\beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n \simeq 0 \quad (*)$$

Vamos mostrar agora que $\alpha_m^{-1} * \alpha_n$ (com extremos mantidos fixos) é homotópico à curva $\alpha_{n,m}$ a qual é um segmento de órbita de η_t que começa em $\eta_{t_m}(x_0)$ vai até $\eta_{t_n}(x_0)$.

$\alpha_{n,m}(0) = \eta_{t_n}(x_0)$, $\alpha_{n,m}(1) = \eta_{t_m}(x_0)$. Assim,

$$\alpha_m^{-1} * \alpha_n \simeq \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \alpha_{n,m}$$

Veja figura 2.7 e 2.8.

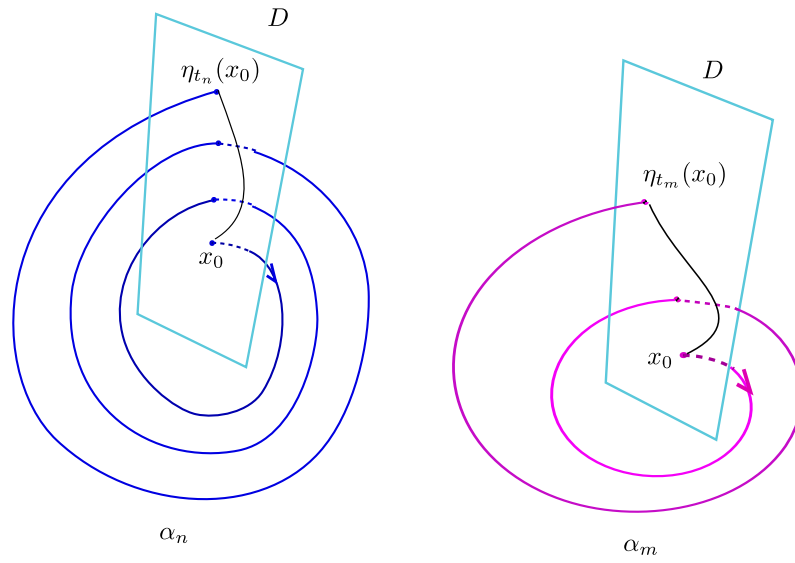


Figura 2.7: $\alpha_m^{-1} * \alpha_n \simeq \alpha_{n,m}$

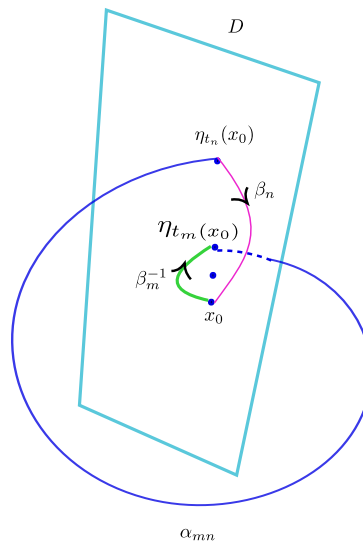


Figura 2.8: $\beta_m^{-1} * \alpha_{n,m} * \beta_n \sim 0$

Segue que, $\alpha_m^{-1} * \alpha_n \simeq \alpha_{n,m}$. Reescrevendo (*), obtemos:

$$0 \simeq \beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n \simeq \beta_m^{-1} * \alpha_{n,m} * \beta_n$$

Portanto, $\beta_m^{-1} * \alpha_m^{-1} * \alpha_n * \beta_n$, veja a figura 2.8 é homotopicamente nula e podemos perturbá-la ligeiramente em torno de x_0 para que está seja transversal em todo ponto da folheação instável. Dessa forma, construímos uma curva fechada homotopicamente nula e transversal a folheação instável, o qual contradiz o Lema 2.3.

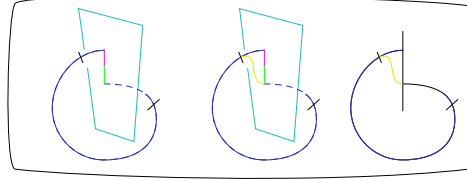


Figura 2.9: Curva transversal em todo ponto à folheação instável

□

Lema 2.5. Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ representa qualquer segmento da órbita η_t . Então α é homotópico (com extremos mantidos fixos) a um caminho α' tal que

$$|\alpha'| \leq C + 2(\sigma/\lambda) \ln|\alpha|$$

Demonstração. Para cada $x \in M$ e $t \neq 0$, considere o seguinte caminho: $\delta_{x,t} : [0, 1] \rightarrow M$ dado por $s \mapsto \delta_{x,t}(s) = \varphi_{st}(x)$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \delta_{x,t}(0) &= \varphi_{0,t}(x) = \varphi_0(x) = x \\ \delta_{x,t}(1) &= \varphi_t(x) \\ \delta_{\alpha_0,t}(0) &= \varphi_{0,t}(\alpha_1) = \varphi_t \alpha(1) \\ \delta_{\alpha_1,t}(1) &= \varphi_{1,t}(\alpha_1) = \varphi_t(\alpha(0)) \end{aligned}$$

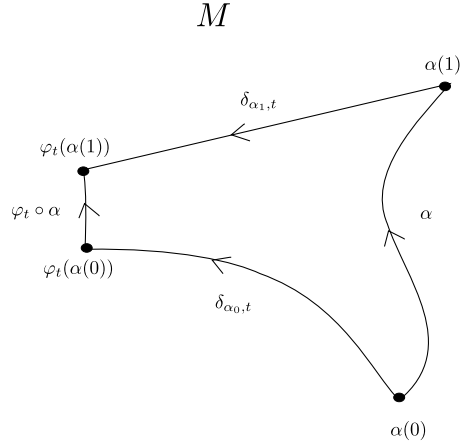
Considere o caminho α' , dado por:

$$\alpha' = \delta_{\alpha_0,t} * \varphi_t \circ \alpha * \delta_{\alpha_1,t}^{-1}$$

Note que, pelo Corolário 1.42, $\alpha \cong \alpha'$.

O comprimento de α' é dado por:

$$\begin{aligned} |\alpha'| &= |\delta_{\alpha_0,t}| + |\varphi_t \circ \alpha| + |\delta_{\alpha_1,t}| \\ &= \int_0^1 \left| \frac{\partial \delta_{\alpha_0,t}}{\partial s}(s) \right| ds + \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi_t \circ \alpha(s)}{\partial s} \right| ds + \int_0^1 \left| \frac{\partial \delta_{\alpha_1,t}}{\partial s}(s) \right| ds \quad (*) \end{aligned}$$



Como M é uma variedade compacta e $D\varphi_t$ é contínua, fixamos $\sigma = \sup_{x \in M} |D\varphi_t(p)|$.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial \delta_{\alpha_0, t}(s)}{\partial s} \right| &= \left| \frac{\partial \varphi_{s, t}(\alpha_0)}{\partial s} \right| \\
 &= \left| \frac{\partial \varphi(st, \alpha_0)}{\partial s} \right| \\
 &= |D\varphi(st, \alpha_0) \cdot t| \leq |D\varphi(st, \alpha_0)| |t| \\
 &\leq |D\varphi_{st}(\alpha_0)| |t| \\
 &\leq \sigma |t|
 \end{aligned}$$

Analogamente, $\left| \frac{\partial \delta_{\alpha_1, t}(s)}{\partial s} \right| \leq \sigma |t|$. E,

$\left| \frac{\partial \varphi_t(\alpha(s))}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial \varphi(t, \alpha(s))}{\partial s} \right| = |D\varphi_{st}(\alpha_0)| \cdot \left| \frac{\partial \alpha(s)}{\partial s} \right|$. Por outro lado, como α é um segmento de $W^{ss}(x_0)$, $\frac{\partial \alpha(s)}{\partial s}$ é um vetor em E^s . Pela inequação,

$$|D\varphi_t(p) \cdot v_p| \leq C e^{-\lambda t} |v_p|$$

Seque que,

$$\left| \partial \varphi_{st} \frac{(\alpha(s))}{\partial s} \right| \leq C e^{-\lambda t} \left| \frac{\partial \alpha(s)}{\partial s} \right|$$

Portanto,

$$|D\varphi_{st}(\alpha(s))| \leq C e^{-\lambda t} \left| \frac{\partial \alpha(s)}{\partial s} \right|$$

Substituindo em (*), temos:

$$\begin{aligned}
 |\alpha'| &\leq \int_0^1 \sigma |t| ds + \int_0^1 C e^{-\lambda t} \left| \frac{\partial \alpha(s)}{\partial s} \right| ds + \int_0^1 \sigma |t| ds \\
 &= 2\sigma |t| + C e^{-\lambda t} |\alpha|
 \end{aligned}$$

Se definimos $t = \frac{1}{\lambda} \ln|\alpha|$, temos,

$$\begin{aligned} |\alpha'| &\leq 2\frac{\sigma}{\lambda} \ln|\alpha| + Ce^{-\ln|\alpha|}|\alpha| \\ |\alpha'| &\leq \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|\alpha| + c. \end{aligned}$$

□

Prova do teorema principal: Como cada α_n está parametrizada pelo comprimento de arco e pelo Lema 2.2,

$$|\alpha_n| \leq n.L$$

Pelo Lema 2.4 e Lema 2.5, existe $\alpha'_n \simeq \alpha_n$ (com extremos mantidos fixos) tal que:

$$\begin{aligned} |\alpha'| &\leq \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|\alpha_n| + C \\ |\alpha'| &\leq \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|n.L| + C \end{aligned}$$

Daí, se

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|n.L| + C \\ e^z &= A.e^{\ln(n.L)(\frac{2\sigma}{\lambda})} \\ e^{z(\frac{\lambda}{2\sigma})} &= B.nL \\ n &= B.e^{(\frac{\lambda z}{2\sigma})} \quad (*) \end{aligned}$$

Como o disco é compacto, $|\beta_n| \leq C_0$, para todo n . Assim, $|\gamma_n| = |\alpha_n| + C_0$. Além disso, $|\alpha_n| = nL$. Daí,

$$\begin{aligned} l_2(\overline{\gamma_n}) &\leq C_0 + |\alpha'_n| \\ &\leq C_0 + \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|n.L| + C \\ &\leq \overline{C} + \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|n.L| \end{aligned}$$

Se $r = \overline{C} + \frac{2\sigma}{\lambda} \ln|n.L|$, temos que, $l_2(\overline{\gamma_n}) \leq r$. Como $l_2(\overline{\gamma_1}) \leq l_2(\overline{\gamma_2}) \leq \dots \leq l_2(\overline{\gamma_n}) \leq r$. Segue que, existem pelo menos n elementos de $\pi_1(M)$. Portanto,

$$\#\{\overline{\alpha} \in \pi_1(M); l_2(\overline{\alpha}) \leq r\} \geq n$$

Isto é, $P(r) \geq n$, por (*),

$$P(r) \geq B.e^{(\frac{\lambda z}{2\sigma})}$$

Agora, ajustando a constante B , fazemos esta desigualdade para todo r . Isso

conclui a prova do teorema para todo fluxo Anosov de codimensão um.

Referências Bibliográficas

- [1] Anosov, D. V. *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 90 (1967) (A. M. S. translation, 1969)
- [2] Anosov, D. V. e Sinai, G., *Some smooth ergodic systems*. Uspekhi Math. Nauk 22 (1967). 107 - 172, Russian Math. Surveys 22 (1967), 103 - 168.
- [3] Bautista, S.; Morales C. *Lectures on sectional Anosov*. Disponível em: http://www.preprintimpa.br/Shadows/SERIE_D/2011/86.html. Último acesso em: 5 de julho de 2017.
- [4] Camacho, C., Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações*. Primeira edição. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [5] Gallot, Sylvestre; Hulin, Dominique e Lafontaine, Jacques, *Riemannian Geometry*. Terceira edição. Springer.
- [6] Haefliger, A. *Variétés feuilletées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. (3)16 (1962), pp. 367-397.
- [7] Hatcher, A. *Basic Topology of 3-Manifolds*. Preprint available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [8] Hirsch, M. W.; Pugh, C. C.; Shub, M. *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [9] Katok, A.; Hasselblatt B. *A Moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos*. Cambridge University Press(1999).
- [10] Lima, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [11] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [12] Melo, W. *Topologia das Variedades*. Disponível em: w3.impa.br/~demelo/topologiadiferencial2011. Último acesso em: 10 de janeiro de 2017.
- [13] Anosov, D. V. *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, 1967.

- [14] Novikov, S. P., *Topology of Foliations*. Trans Moscow Math. Soc 14 (1963) 268- 305.
- [15] Palis, J. e Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1978.
- [16] Plante, J. F.; Thurston, W. P. *Anosov flows and the fundamental group*. Topology 11 (1972), 147-150.
- [17] Plante, J., *Anosov Flows*. Am. Journal of Mathematics, 94(1972), 361 - 372.
- [18] Robinson, C. *Dynamical System. Stability, Symbolic Dynamics, and chaos*. Second edition. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [19] Smale, S. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 73 1967 747–817.
- [20] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA (1979).
- [21] Vilches, M. A. *Introdução à Topologia Algébrica*, Departamento de Análise - IME, UERJ. Rio de Janeiro.