

PAULO HENRIQUE DE MOURA

UM ESTUDO DA QED_3 DE MASSA NULA VIA O MÉTODO DE EPSTEIN-GLASER

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

M939e
2018 Moura, Paulo Henrique de, 1991-
Um estudo da QED3 de massa nula via o método de
Epstein-Glaser / Paulo Henrique de Moura. – Viçosa, MG, 2018.
vii, 50 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 48-50.

1. Eletrodinâmica quântica. 2. Espaço e tempo.
3. Epstein-Glaser, Método de. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física
Aplicada. II. Título.

CDD 22. ed. 530.14

PAULO HENRIQUE DE MOURA

UM ESTUDO DA QED₃ DE MASSA NULA VIA MÉTODO DE EPSTEIN-GLASER

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física, para
obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

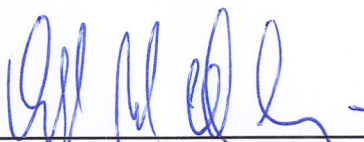
APROVADA: 23 de maio de 2018.



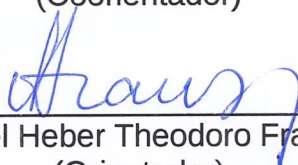
José Abdalla Helayël Neto



Olivier Piguet



Oswaldo Monteiro Del Cima
(Coorientador)



Daniel Heber Theodoro Franco
(Orientador)

*“ Quem passou pela vida em branca nuvem
E em plácido repouso adormeceu;
Quem não sentiu o fio da desgraça,
Quem passou pela vida e não sofreu,
Foi espectro de homem; não foi homem,
Só passou pela vida, não viveu. ”*

(Francisco Octaviano)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais (Rosângela e Anésio), às minhas irmãs (Ana e Grazielle) e à Lea Medeiros (minha segunda mãe) por todo apoio e incentivo.

Gostaria de agradecer a todos os professores que fizeram parte de minha vida acadêmica, em especial a:

- Daniel H. T. Franco, pelos vários anos de orientação e pelo esforço em transmitir seus conhecimentos.
- Oswaldo M. Del Cima, pela orientação, amizade, disposição e cuja ajuda foi essencial para a realização deste trabalho.
- Olivier Piguet, pela participação na banca avaliadora e por suas valiosas sugestões.
- José Abdalla Helayël-Neto, pela participação na banca avaliadora, pela motivação e valiosas sugestões.

Além disso, fica registrado aqui minha gratidão à todos os meus amigos que fizeram parte desta jornada e que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu chegasse até aqui, em especial a: Diogo (Patrik), Émerson, Ismael, Juliana, Marlon, Nathann, Ricardo e Warley.

Por fim, gostaria de agradecer à FAPEMIG e à CAPES pelo apoio financeiro, crucial para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	vii
Notações e convenções	1
1 Introdução	4
1.1 Simetrias contínuas e o Teorema de Noether	5
1.2 Anomalias em teoria quântica de campos	6
2 Método de renormalização de Epstein-Glaser	7
2.1 A matriz de espalhamento	7
2.1.1 Propriedades da matriz- S	8
2.1.2 Ordenamentos normal e cronológico de operadores de campos	10
2.1.2 (A) Ordenamento normal	10
2.1.2 (B) Ordenamento Cronológico	12
2.1.3 Construção da matriz- S	14
2.2 Renormalização: extensão do produto de distribuições para pontos coincidentes	15
2.2.1 Contagem de potência de singularidades	16
2.2.2 Classificação de teorias quanto à renormalizabilidade	18
3 Renormalização da QED₃ de massa nula a 1-loop	20
3.1 QED ₃ de massa nula	20
3.1.1 Cálculo dos propagadores	21
3.1.1 (A) Propagador de A_μ	21
3.1.1 (B) Propagador de ψ	23
3.1.2 Análise do espectro	24
3.1.2 (A) Espectro do propagador bosônico	24
3.1.2 (B) Espectro do propagador fermiônico	26
3.2 <i>Power-counting</i> de divergências	26
3.2.1 Cálculo da ordem singular dos propagadores de Feynman	26
3.2.2 Renormalizabilidade da QED ₃ de massa nula	28
3.3 Renormalização em segunda ordem da matriz- S	29
3.4 Análise dos gráficos divergentes a 1-loop	32
3.4.1 Polarização do vácuo	33
3.4.2 Autoenergia do elétron	34
3.4.3 Função de vértice de 3- γ	35
4 Conclusões e perspectivas	36

A	Rudimentos da Teoria das Distribuições	37
A.1	Motivação física	37
A.2	Definições básicas	37
A.3	Operações com distribuições	39
B	Simetrias discretas	41
B.1	Conjugação de carga	41
B.2	Paridade	42
B.3	Reversão temporal	44
C	Operadores de projeção	46
	Bibliografia	48

Resumo

MOURA, Paulo Henrique de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **Um estudo da QED_3 de massa nula via o método de Epstein-Glaser**. Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco. Coorientador: Oswaldo Monteiro Del Cima.

A Eletrodinâmica Quântica em um espaço-tempo de $(2 + 1)$ dimensões (QED_3) vem se mostrando de uma importância crucial para um completo entendimento do Efeito Hall Quântico (QHE) e da Supercondutividade de Alta Temperatura crítica. Entretanto, vários equívocos conceituais surgem quando se tenta realizar cálculos perturbativos. A quebra da simetria de paridade no nível quântico – que é conhecida como anomalia de paridade na literatura – é um destes. Nosso objetivo é estudar a renormalizabilidade da QED_3 de massa zero usando o esquema de renormalização de Epstein-Glaser para provar a ausência de anomalia de paridade. O esquema de renormalização de Epstein-Glaser é caracterizado pelo fato de que todos os cálculos são realizados no espaço de configuração e não há a necessidade de um tipo de regularização específico.

Abstract

MOURA, Paulo Henrique de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018. **A study of the massless QED₃ via the method of Epstein-Glaser.** Adviser: Daniel Heber Theodoro Franco. Co-adviser: Oswaldo Monteiro Del Cima.

Quantum Electrodynamics in $(2 + 1)$ space-time dimensions (QED₃) has been shown of crucial importance for a deeping understanding of the Quantum Hall Effect (*QHE*) and hight- T_c superconductivity. Nevertheless, a lot of conceptual misunderstanding arises when one tries to perform perturbative calculations. The breakdown of parity symmetry at the quantum level – which is called a parity anomaly in the literature – is one of those. Our aim is to study the renormalizability of massless QED₃ by using the Epstein-Glaser renormalization scheme to prove the absence of Parity Anomaly. The Epstein-Glaser renormalization escheme is characterized by the fact that all the calculations are performed in the configuration space and there is no need of any kind of regularization at all.

Notações e convenções

O sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = 1$, é usado nesta dissertação. Neste sistema:
 $[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}$

O tensor métrico é definido como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Os vetores *covariante* e *contravariante* são denotados, respectivamente, por:

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, -\mathbf{x}) \quad (2)$$

A *transposta*, o *complexo conjugado* e o *conjugado hermitiano* de uma matriz M são denotados, respectivamente, por:

$$M^T, M^*, M^\dagger = (M^*)^T \quad (3)$$

Tensor antissimétrico

$$\epsilon^{012} = 1 \quad (4a)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\beta\gamma\alpha} = \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\gamma - \delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\beta \quad (4b)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\mu\nu\alpha} = 6 \quad (4c)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\mu\nu\beta} = 2\delta_\alpha^\beta \quad (4d)$$

Notação de multi-índices

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! \quad (5)$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad (6)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad (7)$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (8)$$

Matrizes γ e suas propriedades em $d = 1 + 2$

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (10a)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha \quad (10b)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 3 \quad (10c)$$

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\nu = -\not{p} \quad (10d)$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (10e)$$

Traço das matrizes γ

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0 \quad (11a)$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2g^{\mu\nu} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= -i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma^\rho) \\ &= -2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - \epsilon^{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\rho\sigma\beta} \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) \\ &= 2(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (11d)$$

As contrações básicas são dadas por:

$$\overline{\psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2)} = i(\Delta_{\bar{\psi}\psi})_{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad (12a)$$

$$\overline{\bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2)} = -i(\Delta_{\bar{\psi}\psi})_{\beta\alpha}(x_2 - x_1) \quad (12b)$$

$$\overline{A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)} = i\Delta_{AA}^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \quad (12c)$$

Produto de campos e o Teorema de Wick

$$:\Phi(X): \stackrel{\text{def.}}{=} :\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_p): \quad (13)$$

Simetrias discretas

Conjugação de carga

$$\mathcal{C} A_\mu \mathcal{C}^{-1} = -A_\mu \quad (14a)$$

$$\mathcal{C} \psi \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^2 \bar{\psi}^T \quad (14b)$$

$$\mathcal{C} \bar{\psi} \mathcal{C}^{-1} = -\psi^T \gamma^2 \quad (14c)$$

Paridade

$$\mathcal{P} A^0(t, \mathbf{r}) \mathcal{P}^{-1} = A^0(t, \mathbf{r}') \quad (15a)$$

$$\mathcal{P} A^1(t, \mathbf{r}) \mathcal{P}^{-1} = -A^1(t, \mathbf{r}') \quad (15b)$$

$$\mathcal{P} A^2(t, \mathbf{r}) \mathcal{P}^{-1} = A^2(t, \mathbf{r}') \quad (15c)$$

$$\mathcal{P} \psi(t, \mathbf{r}) \mathcal{P}^{-1} = -i\gamma^1 \psi(t, \mathbf{r}') \quad (15d)$$

$$\mathcal{P} \bar{\psi}(t, \mathbf{r}) \mathcal{P}^{-1} = i\bar{\psi}(t, \mathbf{r}') \gamma^1 \quad (15e)$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{r}' = (-x, y) \quad (15f)$$

Reversão temporal

$$\mathcal{T} A^0(t, \mathbf{r}) \mathcal{T}^{-1} = A^0(-t, \mathbf{r}) \quad (16a)$$

$$\mathcal{T} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{A}(-t, \mathbf{r}) \quad (16b)$$

$$\mathcal{T} \psi(t, \mathbf{r}) \mathcal{T}^{-1} = -i\gamma^2 \psi^*(-t, \mathbf{r}) \quad (16c)$$

$$\mathcal{T} \bar{\psi}(t, \mathbf{r}) \mathcal{T}^{-1} = i\bar{\psi}^*(-t, \mathbf{r}) \gamma^2 \quad (16d)$$

Capítulo 1

Introdução

A Eletrodinâmica Quântica em um espaço-tempo de $(2 + 1)$ dimensões (QED_3) vem sendo de grande importância nos estudos de Física da Matéria Condensada cujos efeitos são resultantes de interações que se manifestam no plano bidimensional. Alguns exemplos onde a descrição de um sistema de matéria condensada envolve a QED_3 são: O *Efeito Hall Quântico* (EHQ), que se mostra macroscopicamente como efeito resultante de interações quânticas microscópicas planares [1], o *grafeno*, cuja estrutura bidimensional é formada por átomos de carbono dispostos em uma rede hexagonal, e tem como principal característica o fato de que os portadores de carga se comportam como férmions de massa nula [2] e a *Supercondutividade de alta temperatura crítica* (SAT_c) [3].

Apesar de todo seu potencial na descrição de fenômenos físicos que se mostraram de fundamental importância nos últimos anos, vários equívocos conceituais surgem quando se tenta realizar cálculos perturbativos, especialmente quando se considera campos de massa zero, gerando divergências do infravermelho. A quebra perturbativa da simetria de paridade no nível quântico – que é chamada de *anomalia de paridade* – comum na literatura, é um deles.

Enquanto se tratando da Teoria Quântica de Campos perturbativa, se uma anomalia de paridade devido a correções radiativas existe ou não, deve ser comprovada definitivamente usando um método de renormalização independente de qualquer esquema de regularização.

Esse problema já foi investigado em 2009 pelos autores de [4] no âmbito do método de renormalização BPHZL, adotando o esquema de subtração Lowenstein-Zimmermann. Lá, a contribuição da paridade a 1-loop para o tensor de polarização do vácuo é explicitamente calculada no âmbito do método de renormalização BPHZL.

É mostrado que um termo de Chern-Simons é gerado por essa ordem, induzido pelas subtrações infravermelhas - que violam a paridade. Na verdade, eles provaram que, o que é chamado de “anomalia de paridade” é, de fato, um contratermo ímpar sob paridade necessário para restaurar a paridade.

Mais tarde, em 2014, os autores de [5] mostraram que a QED_3 sem massa é perturbativa-

mente finita tanto no ultravioleta quanto no infravermelho, e livre de anomalia de paridade no infravermelho para todas as ordens na teoria de perturbação.

A proposta é dar a prova a 1-*loop* no espaço de coordenadas usando o método de Epstein-Glaser e Renormalização Diferencial, assim como foi dada a prova por BPHZL – que é no espaço dos momenta.

1.1 Simetrias contínuas e o Teorema de Noether

Dizer que um sistema possui uma certa simetria, em relação a uma dada transformação (ou, a um grupo de transformações), significa que suas características físicas permanecem inalteradas após tal transformação ser realizada. As simetrias podem ser classificadas como: espaço-temporais, como as translações, rotações e transformações de escala, por exemplo; internas – transformações efetuadas no espaço dos campos – como as transformações de calibre, por exemplo.

As simetrias desempenham um papel fundamental na física. Ao nos depararmos com um modelo em Teoria de Campos, e na Física em geral, uma das primeiras perguntas que devemos nos fazer é: quais são as *simetrias* que o modelo possui? O simples fato de conhecermos as simetrias de um modelo pode nos revelar propriedades extremamente úteis na descrição do mesmo. No caso particular de transformações *contínuas* de simetria, podemos identificar grandezas que são conservadas através do *Teorema de Noether*.

Teorema de Noether Se a ação possui um grupo *contínuo* de simetrias, então, há uma corrente associada a este grupo de simetria que é conservada, quando a equação de movimento é satisfeita.

Considerando que a ação clássica

$$S(\Phi) = \int dx \mathcal{L}(x), \quad (1.1)$$

onde $\mathcal{L}(x)$ é a densidade de Lagrangeano, seja invariante sob as transformações δx^μ e $\delta \Phi_i$, então, a corrente

$$J^\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i, \quad (1.2)$$

é conservada. Ou seja,

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.3)$$

1.2 Anomalias em teoria quântica de campos

Na passagem de uma abordagem clássica para uma versão quantizada de uma teoria, devemos nos perguntar sobre o que ocorre com as simetrias. Não é óbvio que as simetrias clássicas sejam preservadas durante o processo de quantização. De fato, isto nem sempre ocorre. Pode ocorrer que, independente do que fazemos, uma simetria clássica não sobreviva ao processo de quantização. Neste caso, dizemos que há uma *anomalia*, ou em outras palavras, que estamos lidando com uma *simetria anômala* [6].

Podemos classificar as anomalias em duas classes: as *anomalias covariantes* e as *anomalias consistentes* [7]. As anomalias covariantes consistem na quebra de simetrias não fundamentais, como simetrias globais e a invariância de escala, por exemplo. Elas podem levar a efeitos físicos observáveis tais como o decaimento do pión neutro em dois fótons ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$), a liberdade assintótica e o confinamento em QCD [8]. Por outro lado, a presença de uma anomalia consistente em uma teoria de gauge revela um conflito entre a renormalizabilidade e a unitariedade, ou seja, a teoria não é consistente, do ponto de vista perturbativo.

Um erro comum é a afirmação de que uma anomalia se deve a uma escolha inapropriada do método de regularização utilizado durante o processo de quantização. Reafirmando: uma anomalia ocorre quando uma simetria clássica não é preservada no nível quântico, independentemente das escolhas do processo de regularização.

Capítulo 2

Método de renormalização de Epstein-Glaser

2.1 A matriz de espalhamento

Uma das principais maneiras de se comparar resultados teóricos e experimentais em Física de Altas Energias é via processos de espalhamento. Desta forma, a matriz de espalhamento, matriz-S, é de fundamental importância na Teoria Quântica de Campos, ela contém toda a física contida em um processo de espalhamento.

Em um processo de espalhamento temos inicialmente ($t = -\infty$), partículas separadas de tal forma que possamos desprezar as interações. Essas partículas se aproximam e interagem durante um curto intervalo de tempo correspondente ao alcance efetivo das interações. As partículas remanescentes, então, se afastam cessando a interação. Em um instante de tempo final ($t = \infty$) essas são detectadas.

A matriz de espalhamento pode ser vista como um mapeamento dos estados assintóticos iniciais nos estados assintóticos finais. Tais estados assintóticos são descritos por operadores de campos livres, que são bem definidos.

A teoria de perturbação causal foi fundamentada pelo trabalhos de Stueckelberg [9], Bogoliubov e Shirkov [10]. Nesta formulação, cada termo de interação é acompanhado por uma função teste $g(x)$ pertencendo ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, $g(x)$ é uma função limitada cujos valores estão no intervalo $[0, 1]$ e desempenha o papel da constante de acoplamento, ligando e desligando a interação. Na região onde $g(x) = 0$, não há interação; para $0 < g(x) < 1$, a interação está parcialmente ligada, enquanto que é máxima para $g(x) = 1$.

$$g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]. \quad (2.1)$$

Segundo [10] a matriz-S é construída como uma série de potências formal em $g(x)$

$$S(g) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^3x_1 \dots d^3x_n S_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n), \quad (2.2)$$

onde os coeficientes S_n são distribuições com caráter de operadores atuando sobre o espaço de Fock que mapeiam um sistema inicial de campos assintoticamente livres em um sistema final de campos também assintoticamente livres.

No caso de teorias com interações de longo alcance, como é o caso da QED, por exemplo, nos deparamos com o *problema do infravermelho*. Trata-se de uma divergência no domínio de baixas energias, cuja origem é puramente física – devido ao fato de a partícula mediadora possuir massa nula. Entretanto, no método de Epstein-Glaser, a matriz- S dada pela Equação (2.2) é livre de tais divergências. Como $g(x)$ pertence ao espaço de Schwartz (vai a zero no infinito), funciona como um *cutoff* para a parte de longo alcance da interação. No final do processo, devemos tomar o limite de $g(x) \rightarrow 1$, conhecido como *limite adiabático*. Apenas nesta etapa nos deparamos com o problema do infravermelho, caso estejamos lidando com partículas de massa nula. O limite adiabático é dito ser no sentido *fraco* se todas as funções de Green existem no sentido de distribuições temperadas quando $g(x) \rightarrow 1$. Se após tomarmos o limite adiabático encontrarmos uma matriz- S que é um operador unitário, dizemos que o limite adiabático existe no sentido *forte*. A existência do limite adiabático no sentido fraco foi provada para teorias massivas [11], QED e para teorias do tipo $\lambda : \Phi^{2n}$: de massa nula [12]. Já a existência no sentido forte foi provado apenas para teorias massivas [13].

2.1.1 Propriedades da matriz- S

De acordo com [11], S_n pode ser determinada por umas poucas propriedades impostas sobre a matriz- S .

Condição inicial. Esta condição expressa a possibilidade de, em um processo de espalhamento, as partículas não interagirem, fazendo com que o sistema permaneça no estado inicial.

$$S(0) = \mathbb{1} \quad (2.3)$$

Unitariedade. A unitariedade da matriz- S é expressa pela seguinte equação:

$$S^\dagger(g)S(g) = S(g)S^\dagger(g) = \mathbb{1} \quad (2.4)$$

A unitariedade de S está intimamente relacionada com a conservação da probabilidade. Dado um estado inicial $|\alpha, \text{in}\rangle$, a probabilidade de se obter $|\beta, \text{out}\rangle$ é obtida do quadrado do módulo do elemento de matriz:

$$S_{\beta\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle \quad (2.5)$$

A unitariedade de S garante que a soma dessas probabilidades sobre todos os estados finais possíveis é igual a um.

Invariância de Poincaré. A Invariância de Poincaré pode ser separada em *Invariância Translacional* e *Invariância de Lorentz*.

$$U(a, \Lambda) S(g(x)) U^{-1}(a, \Lambda) = S(g(\Lambda^{-1}x - a)) \quad (2.6)$$

Invariância Translacional.

$$S(g(x - a)) = U(a) S(g(x)) U^{-1}(a) \quad (2.7)$$

Invariância de Lorentz. A invariância de Lorentz é opcional [11], desta forma, o método funciona perfeitamente para teorias com quebra de simetria de Lorentz.

$$S(g(\Lambda^{-1}x)) = U(0, \Lambda) S(g(x)) U^{-1}(0, \Lambda) \quad (2.8)$$

Causalidade. A causalidade é um dos princípios fundamentais da física. Ela estabelece uma relação entre a causa e seu efeito, requerindo que uma mudança na lei de interação em qualquer região do espaço-tempo pode influenciar a evolução do sistema apenas em tempos posteriores. Considere uma região G do espaço-tempo, onde $g(x)$ é diferente de zero, sendo formada por duas partes G_1 e G_2 , de forma que todo $x_1 \in G_1$ situa-se no passado em relação a um certo instante t e todo $x_2 \in G_2$ situa-se no futuro em relação a t . Podemos então representar $g(x)$ como uma soma de duas funções

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (2.9)$$

com $g_1(x)$ e $g_2(x)$ diferindo de zero apenas em G_1 e G_2 , respectivamente. Dito isso, a condição de causalidade pode ser expressa da seguinte forma [14]:

$$S(g_1(x) + g_2(x)) = S(g_1(x)) S(g_2(x)) \quad (2.10)$$

se $(\text{supp } g_2) \cap [(\text{supp } g_1) + \overline{V}_-] = \emptyset$ onde $\overline{V}_- = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \geq 0, x^0 \leq 0\}$ é o cone de luz do passado e $[(\text{supp } g_1) + \overline{V}_-]$ é o suporte da sombra causal de g_1 .

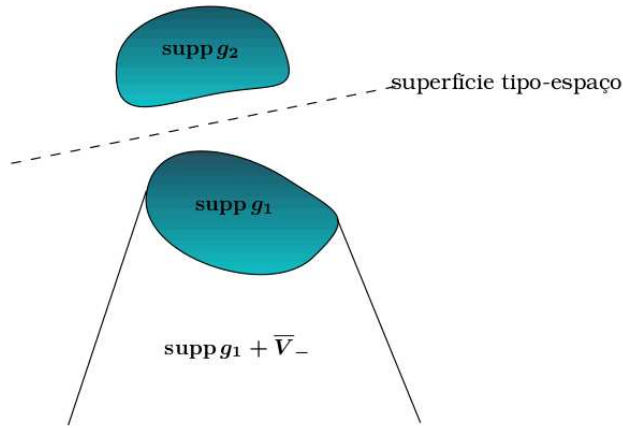


Figura 2.1: Separação causal entre domínios [14].

Como uma consequência da causalidade, temos a seguinte condição sobre $S_n(x_1, \dots, x_n)$ [15]:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = S_i(x_1, \dots, x_i) S_{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2.11)$$

para $\{x_1, \dots, x_i\} \gtrsim \{x_{i+1}, \dots, x_n\}$, onde $x \gtrsim y$ significa que y não pertence ao cone de luz do futuro de x .

2.1.2 Ordenamentos normal e cronológico de operadores de campos

O objetivo desta subseção é estudar os ordenamentos normal e cronológico de operadores de campo bem como sua expansão através dos Teoremas de Wick. Estes objetos serão necessários para se avaliar a estrutura dos elementos da matriz-S.

2.1.2 (A) Ordenamento normal

Definição 2.1 (Produto ordenado normal) *Sejam $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, n$, operadores lineares de campos descritos através de seus operadores de criação (Φ_i^+) e aniquilação (Φ_i^-). Define-se o produto ordenado normal de Wick, denotado por $:\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n:$, como sendo o produto dos operadores Φ_i arranjados de modo que todos os operadores de criação estejam à esquerda de todos os operadores de destruição. No caso de operadores fermiônicos, deve-se levar em consideração a anticomutatividade adicionando um fator $(-1)^P$, onde P é o número de permutações entre operadores fermiônicos vizinhos.*

Dada a definição acima, temos que o ordenamento normal de um único campo é

$$\Phi(x) = :\Phi(x): = \Phi^+(x) + \Phi^-(x). \quad (2.12)$$

Podemos expandir o produto de operadores de campos com base no produto ordenado normal. No caso de dois operadores de campos, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1)\Phi(x_2) &= (\Phi^+(x_1) + \Phi^-(x_1))(\Phi^+(x_2) + \Phi^-(x_2)) \\
&= \Phi^+(x_1)\Phi^+(x_2) + \Phi^+(x_1)\Phi^-(x_2) + \Phi^-(x_1)\Phi^+(x_2) + \Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2) \\
&= \Phi^+(x_1)\Phi^+(x_2) + \Phi^+(x_1)\Phi^-(x_2) + \Phi^+(x_2)\Phi^-(x_1) + \Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2) + [\Phi^-(x_1), \Phi^+(x_2)]_{\pm} \\
&=: \Phi(x_1)\Phi(x_2) : + \mathcal{W}_2(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $\mathcal{W}_2(x_1, x_2)$ é a contração do par $\Phi(x_1)$ e $\Phi(x_2)$, isto é:

$$\underbrace{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}_{\text{contração}} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{W}_2(x_1, x_2) = [\Phi^-(x_1), \Phi^+(x_2)]_{\pm} \tag{2.14}$$

e $[\cdot, \cdot]_{\pm}$ é o comutador (para campos bosônicos) ou o anticomutador (no caso fermiônico).

Podemos generalizar para o produto de n campos [14]

$$\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) = \sum_{\substack{I \cup J = 1, \dots, n \\ I \cap J = \emptyset \\ I = 1, \dots, r \\ J = 1, \dots, s}} \mathcal{W}_r(x_1, \dots, x_r) : \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_s) :, \tag{2.15}$$

com a soma sendo realizada sobre todos os subconjuntos J de X . O conjunto I é dado por $I = \{x | x \in X, x \notin J\}$. Além disso, temos

$$\mathcal{W}_r(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{\text{partição em} \\ \text{pares de } (1, \dots, r) \\ i_k < j_k, i_1, \dots, j_r \text{ distintos}}} \mathcal{W}_2(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots \mathcal{W}_2(x_{i_r}, x_{j_r}) \tag{2.16}$$

Vamos agora analisar o que ocorre quando temos um produto de vários produtos ordenados normalmente. De agora em diante, a seguinte notação será utilizada:

$$:\Phi(X): \stackrel{\text{def.}}{=} :\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_p):. \tag{2.17}$$

Neste caso, escrevemos todas as combinações de contrações possíveis entre campos pertencentes aos produtos normalmente ordenados distintos. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
:\Phi(x_1)\Phi(x_2): :\Phi(x_3)\Phi(x_4): &= :\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4): + \underbrace{:\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4):}_{\text{contração}} \\
&+ \underbrace{:\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4):}_{\text{contração}} + \underbrace{:\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4):}_{\text{contração}} \\
&+ \underbrace{:\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4):}_{\text{contração}} + \underbrace{:\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4):}_{\text{contração}} \\
&+ \underbrace{:\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4):}_{\text{contração}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde cada contração é dada por (2.14). Pode-se mostrar por indução que, para o produto de

n -produtos ordenados normalmente, a seguinte expressão é válida

$$:\Phi(X_1): \cdots :\Phi(X_n): = \sum_{\substack{I \cup J = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \\ I \cap J = \emptyset \\ I = 1, \dots, r \\ J = 1, \dots, s}} \mathcal{W}_r(x_1, \dots, x_r) : \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_s) : , \quad (2.19)$$

com a soma sendo realizada sobre todos os subconjuntos J de $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ formados por elementos pertencentes a X_i 's diferentes. Neste caso,

$$\mathcal{W}_r(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{\text{partição em} \\ \text{pares de } (1, \dots, r) \\ x_{i_k} < x_{j_k}; x_{i_k} \in X_i, x_{j_k} \in X_j \\ X_i \neq X_j}} \mathcal{W}_2(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots \mathcal{W}_2(x_{i_r}, x_{j_r}) \quad (2.20)$$

Um caso particular de (2.19) ocorre quando os elementos de $X = (x_1, \dots, x_p)$ coincidem, ou seja, os *monômios de Wick*. Nesse caso,

$$:\frac{\Phi^{r_1}(x_1)}{r_1!}: \cdots :\frac{\Phi^{r_n}(x_n)}{r_n!}: = \sum_{\substack{s_i = 0 \\ i = 1, \dots, n}}^{r_i} \mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) : \frac{\Phi^{s_1}(x_1)}{s_1!} \cdots \frac{\Phi^{s_n}(x_n)}{s_n!} : \quad (2.21)$$

Agora,

$$\mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\text{partição em} \\ \text{pares de } (1, \dots, r) \\ x_{i_k} < x_{j_k}; x_{i_k} \in X_i, x_{j_k} \in X_j \\ X_i \neq X_j}} [\mathcal{W}_2(x_{i_1}, x_{j_1})]^{k(x_{i_1}, x_{j_1})} \cdots [\mathcal{W}_2(x_{i_r}, x_{j_r})]^{k(x_{i_r}, x_{j_r})} \quad (2.22)$$

Onde $k(x_{i_k}, x_{j_k})$ corresponde ao número de vezes que os operadores $\Phi(x_{i_k})$ e $\Phi(x_{j_k})$, pertencentes a monômios de Wick diferentes, foram contraídos.

2.1.2 (B) Ordenamento Cronológico

Definição 2.2 (Produto ordenado temporalmente) *O produto ordenado temporalmente (ou produto cronológico) de n operadores lineares de campos, denotado por*

$$T(\Phi_1(x_1) \cdots \Phi_n(x_n)), \quad (2.23)$$

é definido como sendo seu produto ordinário em ordem cronológica, ou seja,

$$T(\Phi_1(x_1) \cdots \Phi_n(x_n)) = \epsilon^P \Phi_1(x_{j_1}) \cdots \Phi_n(x_{j_n}), \quad x_{j_1}^0 \geq x_{j_2}^0 \geq \cdots \geq x_{j_n}^0, \quad (2.24)$$

onde ϵ^P indica o sinal da permutação dos operadores fermiônicos envolvidos na passagem da ordem $(1, 2, \dots, n)$ para $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

A prescrição para tais produtos é dada pelo Teorema de Wick de forma análoga ao produto

ordinário. Para entendermos a diferença entre os dois casos, vamos considerar o produto ordenado temporalmente de dois operadores de campos

$$T(\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)) = \begin{cases} \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2) & x_1^0 > x_2^0 \\ \epsilon\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1) & x_2^0 > x_1^0 \end{cases}, \quad (2.25)$$

onde ϵ leva em consideração a troca de sinal, caso estejamos nos referindo a operadores de campos fermiônicos.

De acordo com a definição de ordenamento normal,

$$\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2) = :\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2): + \overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)} \quad (2.26)$$

Levando a expressão acima na Equação (2.25), temos

$$T(\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)) = \begin{cases} :\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2): + \overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)} & x_1^0 > x_2^0 \\ \epsilon :\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1): + \epsilon \overbrace{\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)} & x_2^0 > x_1^0 \\ = :\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2): + \epsilon \overbrace{\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)} & \end{cases}, \quad (2.27)$$

Desta forma, podemos escrever o produto cronológico de dois operadores de campos da seguinte forma

$$T(\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)) = :\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2): + \overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)}, \quad (2.28)$$

onde

$$\overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)} = \begin{cases} \overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)} & x_1^0 > x_2^0 \\ \epsilon \overbrace{\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)} & x_2^0 > x_1^0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

é chamado de contração cronológica dos operadores de campos.

Tomando-se o valor esperado do vácuo da Equação (2.28), temos

$$\langle 0 | T(\Phi(x_1)\Phi(x_2)) | 0 \rangle = \overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)}, \quad (2.30)$$

uma vez que o valor esperado do vácuo de operadores de campos ordenados normalmente é zero.

Desta forma, identificamos as contrações cronológicas de operadores de campos com o valor esperado do vácuo do produto cronológico destes operadores, ou seja, os propagadores de Feynman.

$$\overbrace{\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)} = \Delta_F(x_1 - x_2). \quad (2.31)$$

No caso da QED, as seguintes contrações ocorrem

$$\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} = \langle 0| T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)) |0\rangle = i(\Delta_{\bar{\psi}\psi})_{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad (2.32a)$$

$$\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = \langle 0| T(\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)) |0\rangle = -i(\Delta_{\bar{\psi}\psi})_{\beta\alpha}(x_2 - x_1) \quad (2.32b)$$

$$\overbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} = \langle 0| T(A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)) |0\rangle = i\Delta_{AA}^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \quad (2.32c)$$

Os casos estudados anteriormente para o produto normal se aplicam ao ordenamento cronológico de forma análoga, com a ressalva de que $\mathcal{W}$ deve ser substituída por Δ_F , os propagadores de Feynman. Dessa forma, o produto cronológico de n operadores de campos pode ser expresso como

$$T_n(\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)) = \sum_{\substack{I \cup J = 1, \dots, n \\ I \cap J = \emptyset \\ I = 1, \dots, r \\ J = 1, \dots, s}} \Delta_r(x_1, \dots, x_r) : \Phi(x_1)\cdots\Phi(x_s) :, \quad (2.33)$$

onde

$$\Delta_r(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{\text{partição em} \\ \text{pares de } (1, \dots, r) \\ i_k < j_k, i_1, \dots, j_r \text{ distintos}}} \Delta_F(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots \Delta_F(x_{i_r}, x_{j_r}) \quad (2.34)$$

são distribuições numéricas, chamadas de *amplitude de Feynman* ou *funções de Green de r -pontos*.

$$T_{\{r\}}(X) \stackrel{\text{def.}}{=} T_{\{r\}}\left(: \frac{\Phi^{r_1}(x_1)}{r_1!} : \dots : \frac{\Phi^{r_n}(x_n)}{r_n!} :\right), \quad (2.35)$$

onde os Φ 's são campos genéricos.

2.1.3 Construção da matriz- S

Para prosseguirmos com a construção causal da matriz- S , identificamos $S_n(x_1, \dots, x_n)$ com produtos ordenados temporalmente.

$$S_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def.}}{=} T_n(\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)) \quad (2.36)$$

O primeiro termo da série perturbativa, $T_1(\Phi(x))$, é dado pela lagrangiana de interação, $\mathcal{L}_{\text{int}}$ [10].

$$T_1(\Phi(x)) = \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (2.37)$$

A lagrangiana de interação é construída a partir de um conjunto linearmente independente de operadores de campos livres ordenados normalmente, os monômios de Wick, e suas derivadas $(: \mathcal{M}(\Phi, \partial\Phi) : (x))$ operando sobre o espaço de Fock. Além disso, $\mathcal{L}_{\text{int}}$ deve satisfazer as seguintes condições: causalidade, hermiticidade, localidade e invariância de Poincaré.

Assumindo-se a existência de $T_{n-1}(\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_{n-1}))$ como uma soma de produtos de

uma distribuição numérica e um monômio de Wick de operadores de campos, a passagem de $n - 1$ para n é garantida pelo axioma da causalidade – a menos de um polinômio local representando as ambiguidades inerentes a esse processo. Assim, temos:

$$T(x_1, \dots, x_n) = T \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n) + \text{ambiguidades locais} \quad (2.38)$$

Tais ambiguidades são polinômios de Wick cujos coeficientes são polinômios de derivadas aplicados a produtos de distribuições δ .

$$\Delta T(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}(\partial) \delta(x_1 - x_n) \cdots \delta(x_{n-1} - x_n) : \prod_{i=1}^n \frac{\Phi^{r_j}(x_i)}{r_j!} : \quad (2.39)$$

O grau de $\mathcal{P}(\partial)$ é dado pelo *power counting*. Vemos também que estas ambiguidades possuem como suporte a diagonal total $D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{nd} | x_1 = \dots = x_n\}$. Estas ambiguidades (os *contratermos* locais do modelo) podem ser absorvidas em uma redefinição de $\mathcal{L}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} S(g) &= 1 + i \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) g(x) - \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2)) g(x_1) g(x_2) + \\ &\quad + i \int d^3x_1 d^3x_2 \Delta T(x_1, x_2) g(x_1) g(x_2) + \dots \\ &= 1 + i \int d^3x \mathcal{L}^{\text{Ren}} - \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 T(\mathcal{L}^{\text{Ren}}(x_1) \mathcal{L}^{\text{Ren}}(x_2)) g(x_1) g(x_2) + \dots, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde

$$\mathcal{L}^{\text{Ren}}(x) = \mathcal{L}_{\text{int}}(x) + \int d^3x_2 \Delta T(x_1, x_2) g(x_1) g(x_2) \quad (2.41)$$

Caso a lagrangiana do modelo possua algum conjunto de simetrias que são preservadas pelo processo de renormalização, os contratermos devem satisfazê-las. Assim, as simetrias do modelo nos permite selecionar os contratermos que serão adicionados à lagrangiana original. As constantes livres associadas aos contratermos remanescentes, caso haja algum, devem ser fixadas por condições físicas.

2.2 Renormalização: extensão do produto de distribuições para pontos coincidentes

Como vimos, a matriz- S pode ser expandida em termos de produtos cronológicos de monômios de Wick. Tais produtos são bem definidos como distribuições com caráter de operadores sobre um espaço composto por funções teste f com o suporte dado por $\text{supp } f \subset (\mathbb{R}^{3n} \setminus D_n)$, onde

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n} | x_1 = \dots = x_n\}. \quad (2.42)$$

No método de Epstein-Glaser, o problema da renormalização se traduz no problema da extensão de distribuições em pontos coincidentes. Tais extensões podem não ser únicas, neste caso, diferem de uma solução particular por um polinômio local arbitrário dado pela Equação (2.39) cujo grau é dado pela ordem singular da distribuição, a ser definida nesta seção.

2.2.1 Contagem de potência de singularidades

No espaço dos momentos, o fato de que o produto dos propagadores de Feynman não são bem definidos corresponde às divergências do ultravioleta. Os termos divergentes são encontrados via *power counting*. O grau superficial de divergência de um diagrama corresponde, no espaço das posições, à ordem singular da distribuição numérica correspondente sobre a diagonal total. Para se definir a ordem singular de uma distribuição, faz-se necessário definir o grau de escala.

Definição 2.1 (Grau de escala.) O grau de escala de uma distribuição numérica, $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{nd})$ é dado por:

$$\mathbf{s.d.}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \inf \left\{ \omega \in \mathbb{Z} \mid \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\omega+\epsilon} t(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = 0; 0 < \epsilon < 1 \right\}. \quad (2.43)$$

É importante lembrar que a definição de grau de escala não é única, há, por exemplo, a definição de *semi-norma* [11] e a de *quase assíntota* [15]. A utilizada acima é devido à [16].

Propriedades do grau de escala:

PGE.1 $\mathbf{s.d.}(u) \in (-\infty, \infty)$;

PGE.2 Para distribuições regulares (definidas através de funções localmente integráveis), $\mathbf{s.d.}(u) < 0$;

PGE.3 $\mathbf{s.d.}(\partial^\alpha u) \leq \mathbf{s.d.}(u) + |\alpha|$;

PGE.4 $\mathbf{s.d.}(x^\alpha u) \leq \mathbf{s.d.}(u) - |\alpha|$, onde $x^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$;

PGE.5 $\mathbf{s.d.}(u_1 + u_2) = \max\{\mathbf{s.d.}(u_1), \mathbf{s.d.}(u_2)\}$;

PGE.6 $\mathbf{s.d.}(u_1 \otimes u_2) \leq \mathbf{s.d.}(u_1) + \mathbf{s.d.}(u_2)$, para $u_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, 2, \dots$

Finalmente, temos a seguinte

Definição 2.2 (Ordem singular.) A ordem singular de uma distribuição numérica $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{nd})$ é definida por

$$\mathbf{sing. ord.}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{s.d.}(t) - nd, \quad (2.44)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo.

Proposição 2.2.1 *Se $t_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{dn} \setminus D_n)$ tem ordem singular, ω , negativa sobre a superfície D_n ; então existe um único $t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{dn})$ de mesma ordem singular sobre a superfície D_n , tal que $t(\phi) = t_0(\phi)$, com $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn} \setminus D_n)$. Caso contrário, se ω é positivo, $t(\phi)$ não é único e só é determinado a menos de uma soma de termos locais dados por (2.39), onde o grau máximo do polinômio é dado por ω .*

No estudo perturbativo de uma teoria quântica de campos, nos deparamos com potências de propagadores de Feynman, $\Delta_F(x - y)$. Produtos de propagadores de Feynman não são bem definidos para o caso de pontos coincidentes, $x = y$. O grau superficial de divergência corresponde à ordem singular sobre a diagonal total, desta forma, devemos encontrar uma expressão para a ordem singular de potências de propagadores de Feynman.

De acordo com a propriedade (PGE.6), temos

$$\mathbf{s.d.}((\Delta_F)^k) = \underbrace{\mathbf{s.d.}(\Delta_F) + \cdots + \mathbf{s.d.}(\Delta_F)}_{k \text{ vezes}} = k \cdot \mathbf{s.d.}(\Delta_F) \quad (2.45)$$

Da definição de ordem singular, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{sing.ord.}((\Delta_F)^k) &= \mathbf{s.d.}((\Delta_F)^k) - d \\ &= k \cdot \mathbf{s.d.}(\Delta_F) - d \end{aligned} \quad (2.46)$$

Se $t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})$ é uma distribuição numérica de n pontos¹, formada pelo produto de propagadores de Feynman $\Delta_F(x_i - x_{i+1})$, podemos usar o fato de que o propagador só depende das coordenadas relativas $y_i = x_i - x_{i+1}$, com $i = 1, \dots, n-1$, para redefinirmos a ordem singular do produto de propagadores de Feynman como sendo:

$$\mathbf{sing.ord.}(t) = \mathbf{s.d.}(t) - (n-1)d, \quad (2.47)$$

ou, em função do grau de escala do propagador,

$$\mathbf{sing.ord.}(t) = k \cdot \mathbf{s.d.}(\Delta_F) - (n-1)d. \quad (2.48)$$

Consideremos, por exemplo, uma distribuição de três pontos dada pela seguinte combinação

¹Relacionaremos o número de pontos, n , com a ordem da perturbação da matriz-S no próximo capítulo.

de produtos de propagadores de Feynman

$$\begin{aligned} t(x, y, z) &= (\Delta_F(x - y))^2 (\Delta_F(y - z))^2 (\Delta_F(x - z)) \\ &= (\Delta_F(u))^2 (\Delta_F(v))^2 (\Delta_F(u + v)). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Neste caso, vemos que apenas duas variáveis são necessárias para descrever t após a utilização das coordenadas relativas.

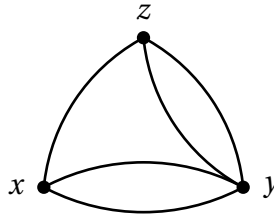


Figura 2.2: Representação gráfica para uma distribuição de três pontos.

Na QED, encontraremos o produto de potências de propagadores bosônicos, $\Delta_{AA}(x - y)$, e fermiônicos, $\Delta_{\bar{\psi}\psi}(x - y)$. Neste caso, temos que,

$$\text{sing. ord.} \left((\Delta_{AA})^{k_b} (\Delta_{\bar{\psi}\psi})^{k_f} \right) = k_b \cdot \mathbf{s.d.}(\Delta_{AA}) + k_f \cdot \mathbf{s.d.}(\Delta_{\bar{\psi}\psi}) - (n - 1)d \quad (2.50)$$

A partir desta expressão, somos capazes de identificar todos os gráficos divergentes possíveis do modelo, bem como a estrutura de contratermos gerados no processo de renormalização. Vale notar que o grau superficial de divergência, assim como a ordem singular, é um critério preliminar para a análise do caráter do modelo no que diz respeito à propriedade de renormalizabilidade, entretanto, não leva em conta as simetrias, que podem contribuir para a redução do número de contratermos [17].

2.2.2 Classificação de teorias quanto à renormalizabilidade

De acordo com seu comportamento no ultravioleta, uma teoria pode ser de três tipos:

Superrenormalizável. Neste caso, temos que apenas um número finito de diagramas de Feynman é superficialmente divergente. À medida que aumentamos a ordem na teoria perturbativa, este número diminui. Desta forma, temos que o número de constantes a serem fixadas por condições físicas é finito.

Renormalizável. Uma teoria é dita renormalizável quando apenas um número finito de amplitudes são superficialmente divergentes, entretanto, estas divergências ocorrem em todas as ordens na teoria de perturbação. Um exemplo de teoria renormalizável é a QED em um espaço-tempo 4-dimensional. Neste caso, temos apenas três gráficos de Feynman divergente, a saber: o referente à altoenergia do elétron, polarização do vácuo e o diagrama de vértice. Porém, estes gráficos divergem em todas as ordens.

Não renormalizável. Uma teoria é não renormalizável quando o número de gráficos de Feynman que são superficialmente divergentes aumenta com a ordem da teoria de perturbação. Uma implicação direta deste fato é que, à medida que aumentamos a ordem, a fim de refinarmos os resultados, precisamos de cada vez mais condições físicas para fixarmos as constantes arbitrárias oriundas do processo de renormalização.

Uma outra maneira de inferirmos sobre a renormalizabilidade de uma teoria é olhado para a dimensão de massa da constante de acoplamento. Assim, uma teoria é superrenormalizável se a constante de acoplamento possui dimensão de massa positiva. Caso a constante de acoplamento seja adimensional, a teoria é renormalizável. Por fim, se a constante de acoplamento possuir dimensão de massa negativa, a teoria é dita não renormalizável.

Capítulo 3

Renormalização da QED₃ de massa nula a 1-loop

3.1 QED₃ de massa nula

O modelo considerado nesta dissertação é o de uma Eletrodinâmica Quântica em um espaço-tempo tridimensional onde todas as partículas possuem massa nula. A ação que o descreve é a seguinte

$$\Sigma_{m=0}^{QED_3} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) \right\}; \quad \mathcal{D}\psi = (\not{\partial} + ieA)\psi, \quad (3.1)$$

que é invariante de Lorentz por construção. Pode-se ainda verificar que tal modelo é invariante de *gauge*, ou seja, a ação (3.1) é invariante sob o seguinte conjunto de transformações:

$$\psi' = e^{i\alpha(x)} \psi \longrightarrow \delta\psi = i\alpha(x)\psi \quad (3.2)$$

$$\bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi} \longrightarrow \delta\bar{\psi} = -i\alpha(x)\bar{\psi} \quad (3.3)$$

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \longrightarrow \delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (3.4)$$

Além das simetrias de Lorentz e de *gauge*, que são simetrias contínuas, o modelo também apresenta algumas simetrias discretas. Simetrias discretas são tais que os parâmetros de transformação assumem apenas valores discretos. É o caso da *conjugação de carga*, *paridade* e *reversão temporal*, os quais mantêm (3.1) invariante. A conjugação de carga leva uma partícula de carga positiva em sua antipartícula, de carga negativa, e *vice-versa*. As simetrias discretas em 2 + 1 dimensões diferem do caso em 3 + 1 dimensões. Desta forma, o Apêndice B traz uma discussão um pouco mais detalhada sobre o assunto.

Podemos adicionar um termo de *gauge-fixing*, que será necessário para o cálculo do

propagador de A_μ , à ação (3.1) e reescrevê-la na seguinte forma:

$$\Sigma_{m=0}^{QED_3} = \Sigma_M + \Sigma_{\bar{\psi}\psi} + \Sigma_{gf} + \Sigma_{int}, \quad (3.5)$$

onde

$$\Sigma_M = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}, \quad (3.6a)$$

$$\Sigma_{\bar{\psi}\psi} = \int d^3x \{ i\bar{\psi} \not{\partial} \psi \}, \quad (3.6b)$$

$$\Sigma_{gf} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\}, \quad (3.6c)$$

$$\Sigma_{int} = \int d^3x \{ -e\bar{\psi} \not{A} \psi \}, \quad (3.6d)$$

são as ações de Maxwell, fermiônica, de *gauge-fixing* e de interação, respectivamente.

3.1.1 Cálculo dos propagadores

Partimos da ação livre para um campo genérico Φ

$$\Sigma_{free} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Phi(x) \hat{O}(\partial) \Phi(x) + J(x) \Phi(x) \right], \quad (3.7)$$

onde $\hat{O}(\partial)$ é um operador diferencial chamado *operador de onda*, do qual espera-se a existência do inverso e $J(x)$ é uma fonte acoplada ao campo. A equação de campo assume a seguinte forma

$$\hat{O}(\partial) \Phi(x) = -J(x). \quad (3.8)$$

A função de Green, por definição, é a solução da equação

$$\hat{O}(\partial) \Delta(x-y) = i\delta^3(x-y), \quad (3.9)$$

assim, podemos escrever

$$\Delta(x-y) = i\hat{O}^{-1}(\partial) \delta^3(x-y) \quad (3.10)$$

3.1.1 (A) Propagador de A_μ

Para o cálculo do propagador bosônico, vamos considerar a ação de Maxwell juntamente com a de *gauge-fixing*, Equações (3.6a) e (3.6c). Esta última é necessária para que o operador

de onda resultante, $\hat{O}^{\mu\nu}$, seja inversível.

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{M+gf}} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu) \right\}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Fazendo uma integração por partes, temos¹:

$$\Sigma_{\text{M+gf}} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \square \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu \right) + \frac{1}{2\alpha} \left(A_\mu \square \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu \right) \right\} \quad (3.12)$$

Podemos introduzir o chamado operador de projeção transversal, $\Theta^{\mu\nu}$, e o operador de projeção longitudinal, $\Omega^{\mu\nu}$, onde²

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (3.13a)$$

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (3.13b)$$

para reescrever (3.12) como

$$\Sigma_{\text{M+gf}} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \underbrace{\left(\square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \Omega^{\mu\nu} \right)}_{\hat{O}^{\mu\nu}} A_\nu \right\}. \quad (3.14)$$

Aqui vemos a importância do termo de *gauge-fixing*, sem ele, o operador de onda seria expresso apenas em função do operador transversal, não possuindo assim, um inverso.

O propagador de Feynman é dado por

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(x-y) = i(\hat{O}^{\mu\nu})^{-1} \delta^3(x-y). \quad (3.15)$$

Assim, temos

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(\partial) \equiv i \left(\frac{1}{\square} \Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square} \Omega^{\mu\nu} \right) \delta^3(x-y) \quad (3.16)$$

O propagador de Feynman no espaço dos momenta, $\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k)$, é dado por

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) = -i \left[\frac{1}{k^2} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (3.17)$$

¹Uma vez que estamos considerando que os campos se anulam no infinito, os termos de superfície são nulos, já que estamos integrando sob o espaço todo.

²Para mais detalhes, veja o Apêndice C.

3.1.1 (B) Propagador de ψ

Partimos da ação para o campo fermiônico (3.6b), onde temos

$$\Sigma_{\bar{\psi}\psi} = \int d^3x \left\{ \bar{\psi} \underbrace{[i\gamma^\mu \partial_\mu]}_{\hat{O}} \psi \right\} \quad (3.18)$$

Queremos encontrar $\hat{O}^{-1}$, tal que

$$\hat{O}^{-1} \hat{O} = 1 \quad (3.19)$$

Assim,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) \hat{O} = 1 \quad (3.20)$$

Multiplicando ambos os lados por $(\gamma^\nu \partial_\nu)$, temos

$$(\gamma^\nu \partial_\nu)(i\gamma^\mu \partial_\mu) \hat{O}^{-1} = (\gamma^\nu \partial_\nu) \quad (3.21)$$

Temos a seguinte propriedade das matrizes gama

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha \quad (3.22)$$

Levando na expressão anterior, temos

$$(\eta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha) \partial_\mu \partial_\nu \hat{O}^{-1} = -i\gamma^\mu \partial_\mu \quad (3.23)$$

como $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$ é antissimétrico e $\partial_\mu \partial_\nu$ é simétrico na troca dos índices, temos

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \hat{O}^{-1} &= -i\gamma^\mu \partial_\mu \\ \square \hat{O}^{-1} &= -i\gamma^\mu \partial_\mu \\ \hat{O}^{-1} &= -i \frac{\not{\partial}}{\square} \end{aligned} \quad (3.24)$$

De acordo com a Equação (3.10), temos

$$\Delta_{\bar{\psi}\psi}(\partial) = \frac{\not{\partial}}{\square} \delta^3(x-y) \quad (3.25)$$

O propagador de Feynman fermiônico no espaço dos momenta é dado por

$$\Delta_{\bar{\psi}\psi}(k) = i \frac{\not{k}}{k^2} \quad (3.26)$$

3.1.2 Análise do espectro

Um modelo para ser fisicamente consistente, deve satisfazer algumas condições: *Invariância de Lorentz, causalidade, unitariedade e renormalizabilidade*. No que se segue, faremos uma breve discussão sobre a causalidade e a unitariedade a *tree-level* do modelo em questão. A renormalizabilidade, objetivo principal deste capítulo, será discutida com detalhes nas seções subsequentes.

Os polos dos propagadores, no espaço dos momentos, são interpretados como partículas estáveis mediadoras das interações. Através de uma análise dos polos, podemos verificar se o modelo é ou não causal. A causalidade é garantida se tivermos polos simples e positivos, ou seja, $k^2 \geq 0$.

A unitariedade da matriz- S , como vimos, está associada ao princípio da conservação da probabilidade – em outras palavras, significa que o espectro do modelo não possui estados de 1-partícula com norma negativa. Podemos extrair as condições necessárias para a unitariedade do modelo, pelo menos a *tree-level*, através de um estudo da amplitude de transição corrente-corrente, $\mathcal{A}$. Tal amplitude é obtida acoplando-se os propagadores a correntes externas, J , que devem ser compatíveis com as simetrias do modelo. A parte imaginária dos resíduos da amplitude nos polos deve ser positiva, como consequência da unitariedade da matriz- S . Assim, devemos ter

$$\text{Im} \left\{ \text{Res} \left(\mathcal{A}_{AA} \Big|_{\text{polos}} \right) \right\} \geq 0, \quad \text{onde} \quad \mathcal{A}_{AA} = J_\mu^* \Delta_{AA}^{\mu\nu} J_\nu \quad (3.27)$$

$$\text{Im} \left\{ \text{Res} \left(\mathcal{A}_{\psi\psi} \Big|_{\text{polos}} \right) \right\} \geq 0, \quad \text{onde} \quad \mathcal{A}_{\psi\psi} = \bar{J} \Delta_{\psi\psi} J \quad (3.28)$$

É importante salientar que tais condições são necessárias porém não suficientes para se garantir a unitariedade a *tree-level*. Faz-se ainda necessário um estudo do comportamento da seção de choque no limite de altas energias do centro de massa. Tal estudo é feito analisando-se o *limite de Froissart-Martin* [18–22].

3.1.2 (A) Espectro do propagador bosônico

Inicialmente faremos um estudo para o caso bosônico. O propagador, neste caso, é dado pela seguinte equação

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) = -i \left[\frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2} + (\alpha - 1) \frac{1}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (3.29)$$

Como o polo do setor transversal é simples, $k^2 = 0$, a causalidade é verificada a *tree-level*.

Para uma análise da unitariedade, devemos estudar a amplitude corrente-corrente. Podemos decompor as correntes vetoriais em uma base completa no espaço dos momenta da

seguinte forma:

$$J^\mu = Ak^\mu + B\tilde{k}^\mu + C\varepsilon^\mu, \quad (3.30)$$

onde $k^\mu = (k^0, k^1, k^2)$, $\tilde{k}^\mu = (k^0, -k^1, -k^2)$ e $\varepsilon^\mu = (0, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ obedecem aos vínculos covariantes

$$\begin{cases} k^\mu \varepsilon_\mu = 0 \\ k^\mu \tilde{k}_\mu = 0 \\ \varepsilon^\mu \varepsilon_\mu = -1 \end{cases} \quad (3.31)$$

No caso de um polo não-massivo, temos

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad (3.32)$$

de forma que podemos supor

$$k = (m, 0, m). \quad (3.33)$$

Levando (3.33) em (3.31), temos

$$\begin{aligned} k^\mu \varepsilon_\mu &= 0 \rightarrow \varepsilon^2 = 0 \\ \varepsilon^\mu \varepsilon_\mu &= -1 \rightarrow \varepsilon^1 = 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Desta forma, uma base completa no espaço dos momenta, para o caso não-massivo, é dada pelos seguintes vetores

$$\begin{aligned} k^\mu &= (m, 0, m) \\ \tilde{k}^\mu &= (m, 0, -m) \\ \varepsilon^\mu &= (0, 1, 0) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Assim, a corrente J^μ , dada pela Equação (3.30), pode ser escrita da seguinte forma:

$$J^\mu = (m(A + B), C, m(A - B)). \quad (3.36)$$

Levando-se em consideração a conservação da corrente, $k^\mu J_\mu = 0$, temos que $B = 0$ na expressão anterior. Além disso, apenas os graus de liberdade do setor transversal irão se propagar. Os graus de liberdade do setor longitudinal, provenientes do termo de fixação de calibre, se desacoplam do modelo, como era de se esperar, uma vez que a física não pode depender de uma escolha arbitrária de calibre. Assim, ficamos com uma amplitude dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AA} &= -i J_\mu \left(\frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2} \right) J_\nu = -i \frac{J^\mu J_\mu}{k^2} \\ &= -\frac{i}{k^2} (A^2 m^2 - C^2 - A^2 m^2) \\ &= i \frac{C^2}{k^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Assim, temos

$$\text{Res}(\mathcal{A}_{AA}|_{k^2=0}) = iC^2 \quad (3.38)$$

cujas partes imaginária é positiva, verificando-se assim a unitariedade a *tree-level* do modelo no setor bosônico.

3.1.2 (B) Espectro do propagador fermiônico

O propagador fermiônico, dado pela Equação (3.26) possui um polo simples em $k^2 = 0$, de modo que a causalidade é verificada.

Para inferirmos sobre a unitariedade, analisaremos a parte imaginária do resíduo de $\mathcal{A}_{\bar{\psi}\psi}$ no polo $k = 0$. Para isso, escrevemos a corrente da seguinte forma

$$J = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \quad \bar{J} = J^\dagger \gamma_0 \quad (3.39)$$

Podemos escrever $k^\mu = (\mu, 0, \mu)$, assim

$$\begin{aligned} \text{Res}(\mathcal{A}_{\bar{\psi}\psi}|_{k^2=0}) &= i(j_1^* \quad j_2^*) \gamma^0 \gamma^\mu k_\mu \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \\ &= i(j_1^* \quad -j_2^*) (\gamma_0 k_0 - \gamma_2 k_2) \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \\ &= i(j_1^* \quad -j_2^*) \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} \\ &= i\mu(j_1^* \quad -j_2^*) \begin{pmatrix} j_1 - j_2 \\ j_1 - j_2 \end{pmatrix} \\ &= i\mu|j_1 - j_2|^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

De modo que

$$\text{Im}\{\text{Res}(\mathcal{A}_{\bar{\psi}\psi}|_{k^2=0})\} = \mu|z|^2 > 0, \quad (3.41)$$

onde $z = j_1 - j_2$. Desta forma, a unitariedade está garantida a *tree-level*.

3.2 Power-counting de divergências

3.2.1 Cálculo da ordem singular dos propagadores de Feynman

Antes de prosseguirmos com o estudo das divergências do modelo, é necessário o cálculo da ordem singular dos propagadores de Feynman dos campos vetorial e fermiônico.

Ordem singular do propagador fermiônico. O propagador para o campo fermiônico, no espaço de configuração, é dado pela seguinte expressão:

$$\Delta_{\bar{\psi}\psi}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (3.42)$$

Inicialmente, notamos que,

$$\Delta_{\bar{\psi}\psi}(\lambda(x-y)) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot \lambda(x-y)} \quad (3.43)$$

fazendo a mudança de variáveis $p = \lambda k$, $d^3p = \lambda^3 d^3k$

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{\psi}\psi}(\lambda(x-y)) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \lambda^{-3} \frac{\lambda \mathbf{p}}{p^2 + i\epsilon \lambda^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \lambda^{-2} \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x-y) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim, de acordo com a definição de grau de escala, temos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3x d^3y \lambda^{\omega+\epsilon} \Delta_{\bar{\psi}\psi}(\lambda(x-y)) f(x) g(y) = 0 \quad (3.45)$$

usando a Equação (3.44), temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3x d^3y \lambda^{\omega+\epsilon-2} \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x-y) f(x) g(y) = 0, \quad (3.46)$$

de onde tiramos que

$$\mathbf{s.d.}(\Delta_{\bar{\psi}\psi}) = 2. \quad (3.47)$$

Logo, a ordem singular do propagador de Feynman fermiônico é:

$$\mathbf{sing. ord.}(\Delta_{\bar{\psi}\psi}) = -1 \quad (3.48)$$

Ordem singular do propagador bosônico. O propagador para o campo bosônico, no espaço de configuração, é dado por:

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \alpha \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (3.49)$$

De forma análoga ao caso fermiônico, iniciamos calculando o grau de escala para o propagador acima.

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(\lambda(x-y)) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \alpha \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] e^{-ik \cdot \lambda(x-y)} \quad (3.50)$$

Novamente, fazemos a mudança de variável $p = \lambda k$, de onde temos $d^3 k = \lambda^{-3} d^3 p$, assim

$$\begin{aligned}\Delta_{AA}^{\mu\nu}(\lambda(x-y)) &= -i \frac{\lambda^{-1}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{1}{p^2} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \alpha \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \lambda^{-1} \Delta_{AA}^{\mu\nu}(\lambda(x-y))\end{aligned}\quad (3.51)$$

Usando a definição de grau de escala, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3 x d^3 y \lambda^{\omega+\epsilon} \Delta_{AA}^{\mu\nu}(\lambda(x-y)) f(x) g(y) = 0 \quad (3.52)$$

usando a Equação (3.51), temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3 x d^3 y \lambda^{\omega+\epsilon-1} \Delta_{AA}^{\mu\nu}(x-y) f(x) g(y) = 0, \quad (3.53)$$

de modo que o grau de escala é dado por:

$$\mathbf{s. d.}(\Delta_{AA}^{\mu\nu}) = 1. \quad (3.54)$$

Da definição de ordem singular, temos o seguinte resultado:

$$\mathbf{sing. ord.}(\Delta_{AA}) = -2 \quad (3.55)$$

Na expansão perturbativa de ordem n , temos que

$$\omega = \mathbf{sing. ord.} \left((\Delta_{AA})^{k_b} (\Delta_{\bar{\psi}\psi})^{k_f} \right) = 2k_f + k_b - 3(n-1) \quad (3.56)$$

3.2.2 Renormalizabilidade da QED₃ de massa nula

Para estudarmos a renormalizabilidade da QED₃ de massa nula, vamos considerar um gráfico genérico da seguinte forma:

$$T_n^g(x_1, \dots, x_n) =: \prod_{i=1}^{f/2} \bar{\psi}(x_{k_i}) t(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{f/2} \psi(x_{n_i}) :: \prod_{i=1}^b A(x_{m_i}) : \quad (3.57)$$

Nesta expressão, f é o número total de linhas externas de férmions, b é o número total de linhas externas de fótons e $t(x_1, \dots, x_n)$ é a distribuição de n -pontos, que envolve o produto de propagadores de Feynman de $\Delta_{\bar{\psi}\psi}$ e Δ_{AA} .

Tendo em mãos a ordem singular para o produto de propagadores de Feynman, Equação (3.56), vamos expressá-la em função das linhas externas.

No modelo de QED₃ de massa nula, o termo de interação é dado por

$$T_1 = -e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x), \quad (3.58)$$

desta forma, sendo n a ordem na teoria de perturbação, temos $2n$ férmions e n bósons. Como cada propagador fermiônico contrai um par de férmions, um gráfico com f linhas externas fermiônicas é tal que

$$2n - 2k_f = f \rightarrow k_f = n - \frac{f}{2}, \quad (3.59)$$

onde k_f é o expoente do propagador de ψ . Analogamente, para bósons, temos

$$n - 2k_b = b \rightarrow k_b = \frac{n}{2} - \frac{b}{2} \quad (3.60)$$

Substituindo (3.59) e (3.60) em (3.56), temos a ordem singular, ω , de um gráfico em função de suas linhas externas, o que facilita a análise da renormalizabilidade da teoria via gráficos de Feynman.

$$\omega = 3 - f - \frac{b}{2} - \frac{n}{2} \quad (3.61)$$

A Equação (3.61) nos diz que o modelo em questão é super renormalizável: a ordem singular decresce com a ordem da perturbação, de forma que temos um número finito de termos divergentes. Isto não ocorre, por exemplo, com a QED em 3 + 1 dimensões, que é renormalizável [23]. Desta forma, podemos listar todos os possíveis termos divergentes da expansão perturbativa. A tabela abaixo mostra os valores de n em função das linhas externas bosônicas e fermiônicas para os quais o gráfico é divergente.

b	f	valores de n para os quais o gráfico é divergente
2	0	$n \leq 4$
0	2	$n \leq 2$
1	2	$n \leq 2$
0	4	$\emptyset$
3	0	$n \leq 3$
2	2	$\emptyset$
4	0	$\emptyset$

Tabela 3.1: Renormalizabilidade do modelo. Para os casos em que $b = 0$ e $f = 4$ e para $b = f = 2$, os gráficos convergem $\forall n > 0$. Se tivermos $b = 4$ e $f = 0$, os gráficos convergem para $n \geq 3$ e, como não é possível ter um gráfico deste tipo com $n < 4$, concluímos que todos os gráficos desta classe são finitos.

3.3 Renormalização em segunda ordem da matriz-S

Da análise feita anteriormente, vimos que, em segunda ordem na expansão da matriz de espalhamento, os termos correspondentes à altoenergia do elétron e à polarização do vácuo são divergentes no ultravioleta. Nesta seção, construiremos a matriz-S em segunda ordem na constante de acoplamento, bem como a representação diagramática de seus termos e analisaremos os possíveis contratermos oriundos do processo de extensão do produto das distribuições que a compõe.

Em segunda ordem, temos que

$$\begin{aligned} S(g) &= \frac{i^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 S_2(x_1, x_2) g(x_1) g(x_2) \\ &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 T_2 \left(: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2) : \right) g(x_1) g(x_2) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Podemos usar o teorema de Wick para o produto cronológico de operadores de campos e, assim, obtemos a matriz-S em segunda ordem na constante de acoplamento:

$$\begin{aligned} S^{(2)}(g) &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 T \left[: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2) : \right] g(x_1) g(x_2) \\ &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2) : \right] g(x_1) g(x_2) \end{aligned} \quad (3.63-1)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \overline{A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2)} : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-2)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \overline{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2) : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-3)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \overline{\psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2)} : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-4)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \overline{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2)} : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-5)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \overline{\psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2)} : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-6)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \overline{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2)} : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-7)$$

$$+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left[: \overline{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2)} : \right] g(x_1) g(x_2) \quad (3.63-8)$$

As contrações são dadas por (2.32). Para simplificar, vamos escrever $S^{(2)}(g)$ da seguinte forma

$$S^{(2)}(g) = \frac{(-ie)^2}{2!} \left\{ I_1^{(2)}(g) + I_2^{(2)}(g) + I_3^{(2)}(g) + I_4^{(2)}(g) + I_5^{(2)}(g) + I_6^{(2)}(g) + I_7^{(2)}(g) + I_8^{(2)}(g) \right\} \quad (3.64)$$

Podemos representar cada integral graficamente de acordo com a Figura (3.1).

A solução geral do termo de segunda ordem renormalizado, $S_2^{\text{Ren}}(g)$, depende de um polinômio local arbitrário cujo grau máximo é determinado pelo *power-counting*. De acordo com a análise feita na seção anterior e com a Figura (3.1), vemos que as únicas integrais que necessitam ser renormalizadas são: $I_5^{(2)}$ e $I_6^{(2)}$, que são equivalentes – Figura (3.1(e)) – e $I_7^{(2)}$ – Figura (3.1(f)).

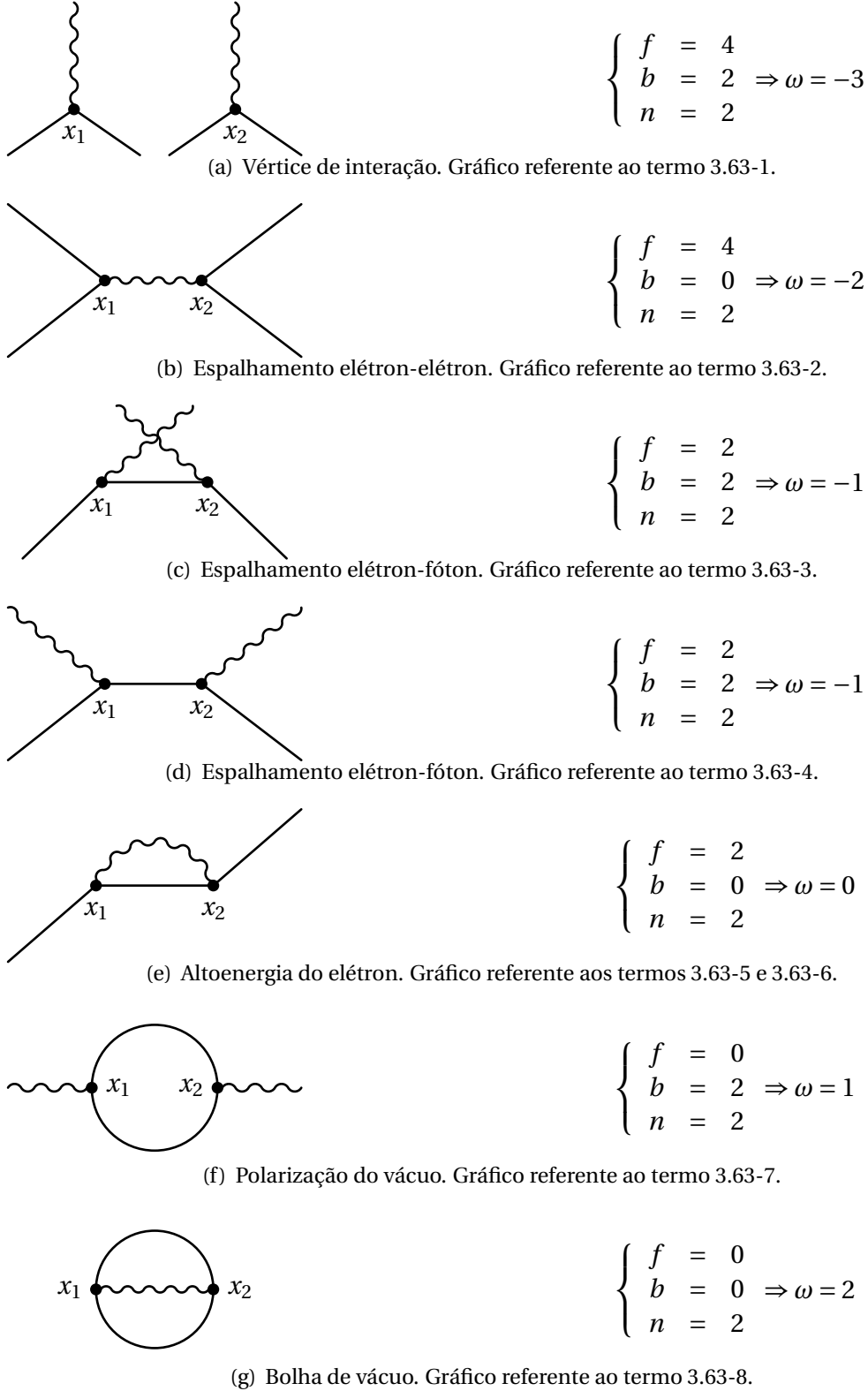


Figura 3.1: Gráficos referentes à expansão da matriz-S em segunda ordem na constante de acoplamento.

Desta forma, em segunda ordem, a matriz-S é dada por:

$$S_2(g) = S_2^{\text{Ren}}(g) + I_{5\text{PLocal}}^{(2)}(g) + I_{6\text{PLocal}}^{(2)}(g) + I_{7\text{PLocal}}^{(2)}(g) \quad (3.65)$$

onde

$$S_2^{\text{Ren}}(g) = \frac{(-ie)^2}{2!} \left\{ I_1^{(2)}(g) + I_2^{(2)}(g) + I_3^{(2)}(g) + I_4^{(2)}(g) + I_{5\text{Ren}}^{(2)}(g) + I_{6\text{Ren}}^{(2)}(g) + I_{7\text{Ren}}^{(2)}(g) + I_8^{(2)}(g) \right\} \quad (3.66)$$

Na próxima seção, faremos a análise dos contratermos correspondentes aos termos $I_{5\text{PLocal}}^{(2)}(g)$, $I_{6\text{PLocal}}^{(2)}(g)$ e $I_{7\text{PLocal}}^{(2)}(g)$.

É importante notar que nem todos os gráficos listados na Figura (3.1) contribuem para a matriz- S . O gráfico 3.1(a), composto por dois vértices de interação desconexos, viola a conservação de energia-momento³. A contribuição do gráfico 3.1(g), conhecido como *bolha de vácuo*, por sua vez, desaparece no limite adiabático [15]

$$\lim_{g \rightarrow 1} \langle 0 | S(g) | 0 \rangle = 1, \quad (3.67)$$

refletindo assim a estabilidade do vácuo livre, ou seja, o vácuo não é modificado pela interação. Desta forma pode ser desconsiderado no processo de renormalização.

3.4 Análise dos gráficos divergentes a 1-*loop*

Nesta seção faremos a análise dos gráficos divergentes do modelo que consistirá no estudo dos possíveis contratermos que surgem devido ao processo de extensão de distribuições. Antes de iniciarmos, devemos lembrar que tais contratermos devem possuir as mesmas simetrias da lagrangiana de partida, caso o processo de renormalização as preserve. Desta forma, deve-se verificar quais as simetrias da lagrangiana de partida são preservadas pelo método de Epstein-Glaser para que possamos usá-las no processo de determinação dos contratermos.

Neste ponto, recorreremos ao método de renormalização diferencial [24]. Tal método consiste em escrever as amplitudes no espaço de coordenadas, localizar os termos cuja singularidade a pequenas distâncias impossibilita a transformada de Fourier e reescrevê-los como derivadas de expressões menos singulares. Este processo nos fornece expressões finitas correspondendo às amplitudes renormalizadas. O cálculo explícito das amplitudes via renormalização diferencial se dá de forma mais simples do que via Epstein-Glaser. Uma vez que há uma equivalência entre ambos os métodos [25], apresentaremos os resultados obtidos via renormalização diferencial.

³No referencial do centro de massa, o momento inicial é nulo, enquanto o momento final é não nulo, devido ao fato de o fóton possuir $v = c$ em todos os referenciais inerciais.

3.4.1 Polarização do vácuo

O gráfico correspondente à polarização do vácuo é mostrado na Figura 3.1(f)

$$S_{VP}^{(2)} = \frac{1}{2!} \int d^3 x_1 d^3 x_2 \Pi_2^{\mu\nu}(x_1, x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : g(x_1) g(x_2), \quad (3.68)$$

onde

$$\Pi_2^{\mu\nu}(x_1, x_2) = -e^2 \text{Tr} \left(\gamma^\mu \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x_1 - x_2) \gamma^\nu \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x_2 - x_1) \right). \quad (3.69)$$

No caso da polarização do vácuo, a ordem singular é $\omega = 1$, e os contratermos tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} I_{7\text{PLocal}}^{(2)}(g) &= \int d^3 x_1 d^3 x_2 \left[\sum_{\alpha \leq 1} c_\alpha \partial^\alpha \delta^3(x_1 - x_2) \right]^{\mu\nu} : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : g(x_1) g(x_2) \\ &= \int d^3 x_1 d^3 x_2 \left[(a_0^{\mu\nu} + b_0 \eta^{\mu\nu}) \delta^3(x_1 - x_2) + c_1^{\sigma\mu\nu} \partial_\sigma \delta^3(x_1 - x_2) + \right. \\ &\quad \left. + c_2^\mu \partial^\nu \delta^3(x_1 - x_2) \right] : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : g(x_1) g(x_2) \\ &= \int d^3 x \left\{ (a_0^{\mu\nu} + b_0 \eta^{\mu\nu}) : A_\mu(x) A_\nu(x) : g^2(x) - c_1^{\sigma\mu\nu} \partial_\sigma [: A_\mu(x) A_\nu(x) : g^2(x)] + \right. \\ &\quad \left. - c_2^\mu \partial^\nu [: A_\mu(x) A_\nu(x) : g^2(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Prosseguindo com sucessivas integrações por partes e levando o limite adiabático em consideração, vemos que os dois últimos termos na equação acima são identicamente nulos. Assim, ficamos com

$$I_{7\text{PLocal}}^{(2)}(g) = \int d^3 x [a_0^{\mu\nu} + b_0 \eta^{\mu\nu}] : A_\mu(x) A_\nu(x) : g^2(x). \quad (3.71)$$

O próximo passo é a análise das simetrias dos possíveis contratermos. Antes de prosseguirmos com tal análise, vamos fazer um estudo do termo de polarização do vácuo regularizado a 1-*loop* via renormalização diferencial.

A polarização do vácuo a 1-*loop*, no espaço euclidiano, é

$$\Pi_{ij}(x) = -(-ie)^2 \text{Tr} [\gamma_i \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x) \gamma_j \Delta_{\bar{\psi}\psi}(-x)] \quad (3.72)$$

Explicitamente,

$$\Pi_{ij}(x) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left(2 \frac{x_i x_j}{x^2} - \delta_{ij} \right) \frac{1}{x^4}. \quad (3.73)$$

Usando o método de renormalização diferencial, a polarização do vácuo é dada por [26]

$$\Pi_{ij}(x) = -\frac{e^2}{32\pi^2} (\partial_i \partial_j - \square \delta_{ij}) \frac{1}{x^2}. \quad (3.74)$$

Desta última expressão, vemos que o grau de divergência foi reduzido em duas unidades. Além disso, notamos que a invariância de *gauge* é satisfeita, ou seja,

$$\partial_i \Pi_{ij}(x) = 0. \quad (3.75)$$

Como o termo regularizado é invariante de *gauge*, concluímos que o método de renormalização diferencial e Epstein-Glaser preservam a invariância de *gauge*.

Agora, temos que analisar as simetrias dos contratermos. Começando pelas contínuas, vemos que o primeiro termo viola a simetria de Lorentz, enquanto o segundo termo não é invariante de *gauge*. Desta forma, devemos ter $a_0 = b_0 = 0$. Assim, não temos contratermos para a polarização do vácuo a 1-*loop* para QED₃ de massa nula.

3.4.2 Autoenergia do elétron

O gráfico correspondente à autoenergia do elétron é mostrado na Figura 3.1(e). O termo correspondente é:

$$S_{SE}^{(2)} = \frac{1}{2!2!} \int d^3 x_1 d^3 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \Sigma_2(x_1, x_2) \psi(x_2) : g(x_1) g(x_2), \quad (3.76)$$

onde

$$\Sigma_2(x_1, x_2) = -e^2 \gamma_\mu \Delta_{AA}^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x_1 - x_2) \gamma_\nu \quad (3.77)$$

O termo renormalizado para a autoenergia do elétron no espaço euclidiano, via renormalização diferencial é dado por [26]

$$\Sigma(x) = -\frac{e^2}{32\pi^2} \not{\partial} \left(\frac{1}{x^2} \right), \quad (3.78)$$

cuja contribuição para a matriz-S, a 1-*loop*, preserva a paridade. Como o termo renormalizado é invariante por paridade, o método de renormalização também a preserva (pelo menos a 1-*loop*), desta forma, os possíveis contratermos devem ser invariantes por paridade.

Uma vez que a ordem singular do gráfico é $\omega = 0$, temos que a estrutura dos contratermos correspondentes é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} I_{(5-6)_{\text{PLocal}}}^{(2)}(g) &= \int d^3 x_1 d^3 x_2 : \bar{\psi}(x_1) [(a_0 \mathbb{1} + \mathbf{b}_0) \delta^3(x_1 - x_2)] \psi(x_2) : g(x_1) g(x_2) \\ &= \int d^3 x : \bar{\psi}(x) [(a_0 \mathbb{1} + \mathbf{b}_0)] \psi(x) : g^2(x), \end{aligned} \quad (3.79)$$

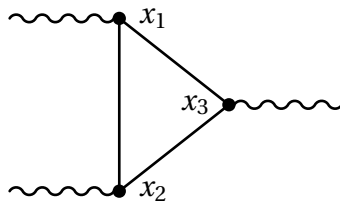
onde uma matriz geral foi escrita como a soma de uma matriz diagonal e uma matriz não-diagonal, $\mathbf{b}_0$.

O próximo passo é verificar as simetrias dos contratermos, que devem ser as mesmas da ação de partida. O primeiro termo, $: \bar{\psi}(x) a_0 \mathbb{1} \psi(x) :$, é invariante de Lorentz e invariante de

gauge, entretanto, viola duas simetrias discretas, a saber, a paridade e a reversão temporal. Assim, devemos tomar $a_0 = 0$. O segundo termo, $:\bar{\psi}(x)\mathbf{b}_0\psi(x):$, não é invariante de Lorentz, de modo que devemos ter $\mathbf{b}_0 = 0$.

3.4.3 Função de vértice de 3- γ

Até agora analisamos apenas os gráficos a 1-*loop* advindos da segunda ordem da expansão perturbativa da matriz-S na constante de acoplamento. Entretanto, de acordo com a Tabela 3.1, temos um gráfico de 1-*loop* possivelmente divergente na terceira ordem na constante de acoplamento cuja representação é mostrada na Figura 3.2.



$$\begin{cases} f &= 0 \\ b &= 3 \\ n &= 3 \end{cases} \Rightarrow \omega = 0$$

Figura 3.2: Gráfico divergente em terceira ordem na constante de acoplamento.

Este gráfico contribui para a matriz-S com o seguinte termo

$$S_{\gamma\gamma\gamma}^{(3)} = \frac{(-ie)^3}{3!} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 t^{\mu\nu\rho}(x_1, x_2, x_3) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) : g(x_1) g(x_2) g(x_3), \quad (3.80)$$

onde

$$t^{\mu\nu\rho}(x_1, x_2, x_3) = \text{Tr}(\gamma^\mu \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x_1 - x_2) \gamma^\nu \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x_1 - x_3) \gamma^\rho \Delta_{\bar{\psi}\psi}(x_2 - x_3)) \quad (3.81)$$

Temos então a seguinte estrutura para os possíveis contratermos

$$\begin{aligned} I_{\text{PLocal}}^{(3)} &= \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 [c^{\mu\nu\rho} \delta^3(x_1 - x_2) \delta^3(x_1 - x_3) \delta^3(x_2 - x_3)] : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) : \times \\ &\quad \times g(x_1) g(x_2) g(x_3) \\ &= \int d^3x_2 d^3x_3 c^{\mu\nu\rho} [\delta^3(x_2 - x_3)]^2 : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) : g^2(x_2) g(x_3) \\ &= \int d^3x_2 d^3x_3 \tilde{c}^{\mu\nu\rho} \delta^3(x_2 - x_3) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) : g^2(x_2) g(x_3) \\ &= \int d^3x \tilde{c}^{\mu\nu\rho} : A_\mu(x) A_\nu(x) A_\rho(x) : g^3(x) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Levando-se as simetrias contínuas em consideração, vemos que este termo não é invariante de Lorentz nem de *gauge*, assim, devemos ter $\tilde{c}^{\mu\nu\rho} = 0$. Novamente, não há contratermos.

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Tivemos como objetivo um estudo da renormalizabilidade de um modelo para a Eletrodinâmica Quântica em um espaço-tempo tridimensional onde todas as partículas possuem massa nula. Tal estudo foi baseado no método de Epstein-Glaser, caracterizado pelo fato de os cálculos serem realizados no espaço das coordenadas.

Vimos que, para o modelo considerado, a ordem singular das distribuições numéricas presentes na expansão da matriz- S (equivalentemente, o grau superficial de divergência) diminui à medida em que aumentamos a ordem da expansão. Isso implica a superrenormalizabilidade do modelo, ou seja, o número de coeficientes livres – que devemos fixar com condições físicas – decresce com a ordem perturbativa até desaparecer.

A análise da ordem singular, escrita em função das linhas externas e da ordem perturbativa, nos mostrou que, a *1-loop*, os possíveis termos divergentes são dados pela autoenergia do elétron, polarização do vácuo e por um termo de terceira ordem possuindo três linhas externas bosônicas. Além destes termos, uma possível divergência pode aparecer a *2-loops* devido à correção a quarta ordem na constante de acoplamento para a polarização do vácuo.

Ao se estudar a estrutura de contratermos, levamos em consideração as simetrias apresentadas no modelo. Neste ponto, fizemos uso da equivalência entre o método de renormalização diferencial e o de Epstein-Glaser para verificar que este último preserva a simetria de *gauge* e a paridade. Vimos que para as contribuições a *1-loop* – levando-se em conta a existência do limite adiabático – o conjunto dos contratermos é vazio. Desta forma, não é gerado termos que violam a simetria de paridade – não havendo assim, uma anomalia de paridade.

O fato de que o conjunto dos contratermos ser vazio nos diz que o modelo considerado é finito a *1-loop*.

Como perspectiva ficam a análise a *2-loops* – neste caso, o termo de polarização do vácuo a quarta ordem na constante de acoplamento – e o estudo do limite adiabático.

Apêndice A

Rudimentos da Teoria das Distribuições

A.1 Motivação física

Termos como “partícula de massa m ”, “carga pontual”, etc são comuns na física. Mas o que, de fato, significam estes termos? Obviamente são apenas idealizações humanas, não existem tais objetos. Ao se tentar descrever tais objetos idealizados, somos obrigados a lançar mão de objetos matemáticos que nem sempre são bem definidos. Um exemplo clássico é a “função δ de Dirac”, comumente definida como sendo “igual a zero em toda reta, exceto na origem, onde é infinita” [27]. O fato da não existência de objetos pontuais ou, de que em um processo de medida, o que se mede é uma pequena região do espaço, levou ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas apropriadas – as *distribuições*.

Neste apêndice apresentaremos uma breve introdução ao estudo das distribuições, ou *funções generalizadas*. Apresentaremos apenas o necessário para a compreensão do texto, de forma que toda e qualquer demonstração será omitida. Para maiores detalhes, sugerimos as referências [14, 28–30].

A.2 Definições básicas

Definição A.1 (Suporte de uma função) Para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, o seu suporte, denotado por $\text{supp } f$, é o menor conjunto fechado fora do qual $f \equiv 0$. Equivalentemente, $\text{supp } f$ é o fecho do conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ para os quais $f(x) \neq 0$.

É importante salientar que, apesar de uma função ser zero fora de seu suporte, ela pode ser nula em pontos isolados de seu suporte, devido à condição de fechamento na definição

acima. Um exemplo é a função cosseno, cujo suporte é $\mathbb{R}$, apesar de $\cos((n + 1/2)\pi) = 0$.

Definição A.2 (Função teste) *Seja $n \geq 1$. O espaço teste, denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, é o espaço vetorial de funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, que são de classe $\mathcal{C}^\infty$ e tem suporte limitado. Uma função teste é qualquer função $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Definição A.3 (Distribuição, ou função generalizada) *As distribuições são definidas como funcionais lineares sobre um espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ das funções teste. Ou seja, uma distribuição $T(f)$ atua sobre uma função teste (pertencente a $\mathcal{D}$) e a leva em um número (complexo).*

$$\begin{aligned} T(f) : \mathcal{K} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow T(f) = \int d^n x T(x) f(x) \end{aligned}$$

As distribuições formam um espaço vetorial chamado dual topológico de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, também chamado de espaço das distribuições e denotado por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição A.4 *Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um ponto regular de T se, e somente se, existe uma vizinhança U de x e uma função g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sobre U , tal que a integral*

$$T(f) = \int dx T(x) f(x) \tag{A.1}$$

é bem definida para todo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. O complemento dos pontos regulares de T é chamado suporte singular de T .

Definição A.5 *Uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é localmente integrável se f é absolutamente integrável em qualquer subconjunto compacto K de Ω . O espaço das funções localmente integráveis em $\mathbb{R}^n$ é denotado por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Funções que não são integráveis mas são *localmente integráveis* são tais que possuem problemas de integrabilidade no infinito. Qualquer função localmente integrável define uma distribuição.

Definição A.6 (Distribuições regulares) *Para qualquer função localmente integrável f há uma distribuição denotada por T_f , definido por*

$$T_f(\varphi) \stackrel{\text{def.}}{=} \int dx f(x) \varphi(x). \tag{A.2}$$

*Tal distribuição é chamada distribuição **regular** associada à função localmente integrável f . Todas as outras distribuições são **singulares**.*

Classes diferentes de distribuições exigem classes diferentes de funções para que a integral do tipo $\int dx T(x) f(x)$ seja bem definida. Uma classe mais ampla de funções teste, simbolizada por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é formada por funções $f(x)$ que, ao invés de serem identicamente nulas fora de uma região limitada, decaem rapidamente a zero quando $x \rightarrow \infty$. Os correspondentes funcionais são chamados de distribuições temperadas.

Definição A.7 (Espaço de Schwartz) *O espaço de Schwartz é composto pela totalidade de funções infinitamente diferenciáveis que, juntamente com todas as suas derivadas, vão mais rápido a zero, quando $|x| \rightarrow \infty$, do que qualquer potência inversa de x . Em outras palavras, para funções $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com $x = (x_1, \dots, x_n)$ tem-se*

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq C, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \quad (\text{A.3})$$

onde a constante $C = C(\alpha, \beta)$ depende, em geral, da função f e de α e β . Tais funções são chamadas de funções de decaimento rápido.

Definição A.8 *Diz-se que uma distribuição $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um funcional linear contínuo sobre o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se o seguinte acontece:*

1. $T(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha T(f_1) + \beta T(f_2); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} |T(f_n) - T(f)| = 0$, para toda sequência $\{f_n\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A.3 Operações com distribuições

Queremos definir certas operações em distribuições, tais como soma, multiplicação por função, derivação e assim por diante. Para este fim, consideramos como estas operações são definidas para uma função localmente integrável; escrevemos em linguagem de distribuições, para a distribuição regular associada, então generalizamos para uma distribuição arbitrária qualquer.

Soma de Distribuições A soma de distribuições é dada por:

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(f) &= \int dx (T_1(x) + T_2(x)) f(x) \\ &= \int dx T_1(x) f(x) + \int dx T_2(x) f(x) \\ &= T_1(f) + T_2(f) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Multiplicação por funções Podemos multiplicar uma distribuição por uma função contínua e infinitamente diferenciável da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(gT)(f) &= \int dx (gT)(x) f(x) \\ &= \int dx T(x)(gf)(x) \\ &= T(gf)\end{aligned}\tag{A.5}$$

Derivada de distribuições Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A derivada $D^\alpha T$, com $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, é dada por:

$$(D^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f(x)).\tag{A.6}$$

Translação A translação de uma distribuição T por a , denotada por T_a é definida por

$$\begin{aligned}T_a(f) &= \int dx T(x+a) f(x) \\ &= \int dy T(y) f(y-a) \stackrel{\text{def.}}{=} T(f_{-a})\end{aligned}\tag{A.7}$$

Apêndice B

Simetrias discretas

Devido à grande importância das simetrias no estudo da renormalizabilidade do modelo, faremos uma breve discussão da forma assumida pelas transformações de Lorentz discretas em $2+1$ dimensões (as transformações contínuas são semelhantes ao caso em $3+1$ dimensões, por isso não serão abordadas).

B.1 Conjugação de carga

A fim de chegarmos à forma com a qual o espinor se transforma via conjugação de carga em $2+1$ dimensões, seguiremos o procedimento de [23] para o caso em $3+1$ dimensões.

Partindo-se da Equação de Dirac,

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (\text{B.1})$$

O espinor conjugado deve satisfazer a Equação de Dirac com a carga de sinal oposto.

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi^c = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde ψ^c é o espinor conjugado de carga de ψ . Podemos tomar o conjugado hermitiano de (B.1) e multiplicar por γ^0 pela direita para obter

$$\psi^\dagger [(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 (-i\partial - eA_\mu) - m\gamma^0] = 0 \quad (\text{B.3})$$

usando a relação (10e), obtemos

$$\bar{\psi} [-\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m] = 0 \quad (\text{B.4})$$

Tomando a transposta da equação anterior e multiplicando por uma matriz C pela esquerda,

temos

$$[-C\gamma^{\mu T}C^{-1}(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]C\bar{\psi}^T = 0 \quad (\text{B.5})$$

Caso exista uma matriz C tal que

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu, \quad (\text{B.6})$$

podemos identificar ψ^c com $C\bar{\psi}^T$. Devemos, então, encontrar tal matriz C que satisfaça (B.6). No nosso caso, usando a representação (9) para as matrizes gama, temos que

$$C = -i\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^2 \quad (\text{B.7})$$

satisfaz (B.6). Assim, temos

$$C^{-1} = \gamma^2 \quad (\text{B.8})$$

A matriz C possui as seguintes propriedades:

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^T = -C^\dagger, \quad (\text{B.9})$$

de forma que os espinores se transformam da seguinte maneira:

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1} \quad (\text{B.11})$$

Além disso, o campo A^μ deve se transformar como

$$A_\mu^c = -A_\mu. \quad (\text{B.12})$$

B.2 Paridade

Em um espaço-tempo (3+1)-dimensional, a paridade é obtida levando-se $\mathbf{x}$ em $-\mathbf{x}$. Entretanto, em 2+1 dimensões, tal transformação teria determinante +1 e corresponderia a uma rotação de πrad . Contornamos este problema trocando-se o sinal de apenas uma das coordenadas espaciais, no nosso caso,

$$x \xrightarrow{P} x^P = (x^0, -x^1, x^2) \quad (\text{B.13})$$

O espinor de Dirac se transforma da seguinte forma

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi'(t', \vec{x}') = P\psi(t, \vec{x}) \quad (\text{B.14})$$

onde P é uma matriz que representa a transformação de paridade no espaço dos espinores. Para encontrarmos a forma explícita de P , assim como no caso da conjugação de carga, partimos da Equação de Dirac.

$$[i(\gamma^\mu \partial_\mu + ieA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (\text{B.15})$$

Escrevendo a Equação de Dirac em um referencial S' , temos que a mesma deve ser válida em um referencial S .

$$[i(\gamma_0 \partial'_0 + \gamma_1 \partial'_1 + \gamma_2 \partial'_2) - e(\gamma_0 A'_0 - \gamma_1 A'_1 - \gamma_2 A'_2) - m]\psi' = 0, \quad (\text{B.16})$$

que, de acordo com as convenções de paridade adotada, temos:

$$[i(\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) - e(\gamma_0 A'_0 - \gamma_1 A'_1 - \gamma_2 A'_2) - m]\psi' = 0 \quad (\text{B.17})$$

Usando B.14 e multiplicando pela esquerda por P^{-1} e, como $\psi' = P\psi$, temos

$$[iP^{-1}(\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2)P - eP^{-1}(\gamma_0 A'_0 - \gamma_1 A'_1 - \gamma_2 A'_2)P - P^{-1}mP]\psi = 0 \quad (\text{B.18})$$

De onde temos que, para que B.16 seja válida em S , a matriz P deve satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{cases} P^{-1}\gamma_0 P = \gamma_0 & \implies \gamma_0 P = P\gamma_0 \\ P^{-1}\gamma_1 P = -\gamma_1 & \implies \gamma_1 P = -P\gamma_1 \\ P^{-1}\gamma_2 P = \gamma_2 & \implies \gamma_2 P = P\gamma_2 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

De forma que o campo A_μ deve se transformar como

$$\begin{cases} A'_0 &= A_0 \\ A'_1 &= -A_1 \\ A'_2 &= A_2 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Porém não é possível, usando a álgebra das matrizes gama (10), construir uma matriz P satisfazendo (B.19). Isto ocorre devido ao termo de massa na Equação de Dirac [31]. Como estamos interessados no modelo de QED₃ de massa nula, daremos continuidade à discussão da paridade para o caso não massivo. Neste caso, podemos fatorar um sinal de menos sem alterar a equação. Buscamos assim pelas novas condições a serem satisfeitas pelas matrizes gama e pelo campo A_μ de forma a manter a covariância da Equação de Dirac para uma transformação de paridade.

$$[iP^{-1}(-\gamma_0 \partial_0 + \gamma_1 \partial_1 - \gamma_2 \partial_2)P - eP^{-1}(-\gamma_0 A'_0 + \gamma_1 A'_1 + \gamma_2 A'_2)P]\psi = 0 \quad (\text{B.21})$$

As novas condições sobre as matrizes gama são:

$$\begin{cases} P^{-1}\gamma_0 P = -\gamma_0 & \implies \gamma_0 P = -P\gamma_0 \\ P^{-1}\gamma_1 P = \gamma_1 & \implies \gamma_1 P = P\gamma_1 \\ P^{-1}\gamma_2 P = -\gamma_2 & \implies \gamma_2 P = -P\gamma_2 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Levando estas condições à Equação (B.21), vemos que o campo A_μ deve se transformar como em (B.20).

Uma possível representação para P , satisfazendo (B.22) é a seguinte

$$P = -i\gamma_1 \quad (\text{B.23})$$

Com isso, temos a transformação do espinor sob paridade

$$\psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \psi'(t', \vec{x}') = -i\gamma_1 \psi(t', \vec{x}') \quad (\text{B.24})$$

Segue também que

$$\bar{\psi}' = (-i\gamma_1 \psi)^\dagger \gamma_0 = i\psi^\dagger \gamma_1^\dagger \gamma_0 = -i\psi^\dagger \gamma_1 \gamma_0 = i\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_1 = i\bar{\psi} \gamma_1 \quad (\text{B.25})$$

B.3 Reversão temporal

A reversão temporal é uma transformação de Lorentz discreta e antiunitária. Partimos, novamente da Equação de Dirac em um referencial S e exigimos que seja covariante sobre reversão temporal, ou seja, passando a um referencial S' com $t' = -t$ e $\vec{x}' = \vec{x}$, a equação não muda.

$$[i(\gamma_0 \partial_0 + \gamma_i \partial_i) - e(\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i) - m] \psi = 0 \quad (\text{B.26})$$

Tomando o conjugado da equação acima, temos:

$$[-i(\gamma_0^* \partial_0 + \gamma_i^* \partial_i) - e(\gamma_0^* A_0 - \gamma_i^* A_i) - m] \psi^* = 0 \quad (\text{B.27})$$

Devido à antilinearidade da transformação de reversão temporal, esperamos que o espinor se transforme da seguinte forma:

$$\psi'(t' = -t, \vec{x}' = \vec{x}) = T\psi^*(t, \vec{x}), \quad (\text{B.28})$$

onde T é uma matriz que representa a operação de inversão temporal no espaço dos espinores.

Para levarmos a Equação (B.27) ao referencial S' devemos multiplicá-la pela esquerda por T , assim

$$[-i(T\gamma_0^* T^{-1} \partial_0 + T\gamma_i^* T^{-1} \partial_i) - e(T\gamma_0^* T^{-1} A_0 - T\gamma_i^* T^{-1} A_i) - m] T\psi^* = 0 \quad (\text{B.29})$$

Mas, como $\partial'_0 = -\partial_0$, $\partial'_i = \partial_i$ e $\psi' = T\psi^*$, temos

$$[i(T\gamma_0^* T^{-1} \partial'_0 - T\gamma_i^* T^{-1} \partial'_i) - e(T\gamma_0^* T^{-1} A'_0 - T\gamma_i^* T^{-1} A'_i) - m] \psi' = 0 \quad (\text{B.30})$$

Desta forma, as matrizes gama devem satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{cases} T\gamma_0^* T^{-1} = \gamma_0 \\ T\gamma_1^* T^{-1} = -\gamma_1 \\ T\gamma_2^* T^{-1} = -\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\gamma_0 T^{-1} = \gamma_0 \Rightarrow T\gamma_0 = \gamma_0 T \\ T\gamma_1 T^{-1} = \gamma_1 \Rightarrow T\gamma_1 = \gamma_1 T \\ T\gamma_2 T^{-1} = -\gamma_2 \Rightarrow T\gamma_2 = -\gamma_2 T \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Entretanto, não é possível encontrar uma matriz que satisfaça as relações (B.31). Tal impossibilidade vem do fato de que o termo de massa violar a reversão temporal, assim como ocorre no caso da paridade. Caso não haja um termo de massa, podemos fatorar um sinal de menos e inverter tais condições de modo a ser possível uma representação da matriz T , com base na álgebra das matrizes gama, deixando a equação invariante.

Vamos considerar novamente o caso de massa nula. A Equação (B.30) se torna:

$$[i(-T\gamma_0^* T^{-1} \partial'_0 + T\gamma_i^* T^{-1} \partial'_i) - e(-T\gamma_0^* T^{-1} A'_0 + T\gamma_i^* T^{-1} A'_i)] \psi' = 0, \quad (\text{B.32})$$

de forma que as novas condições, são:

$$\begin{cases} T\gamma_0^* T^{-1} = -\gamma_0 \\ T\gamma_1^* T^{-1} = \gamma_1 \\ T\gamma_2^* T^{-1} = \gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\gamma_0 T^{-1} = -\gamma_0 \Rightarrow T\gamma_0 = -\gamma_0 T \\ T\gamma_1 T^{-1} = -\gamma_1 \Rightarrow T\gamma_1 = -\gamma_1 T \\ T\gamma_2 T^{-1} = \gamma_2 \Rightarrow T\gamma_2 = \gamma_2 T \end{cases}, \quad (\text{B.33})$$

ou seja, T deve comutar com γ_2 e anticomutar com γ_0 e γ_1 . Uma possível representação para a matriz T é, então,

$$T = -i\gamma_2, \quad (\text{B.34})$$

onde o fator $-i$ foi introduzido por conveniência. Assim, o espinor se transforma do seguinte modo

$$\psi' = -i\gamma_2 \psi^* \quad (\text{B.35})$$

e, para $\bar{\psi}$, temos

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger} \gamma_0 = (-i\gamma_2 \psi^*)^{\dagger} \gamma_0 = i\psi^{*\dagger} \gamma_2^{\dagger} \gamma_0 = -i\psi^{*\dagger} \gamma_2 \gamma_0 = i\psi^{\dagger*} \gamma_0 \gamma_2 = i(\psi^{\dagger} \gamma_0)^* \gamma_2 = i\bar{\psi}^* \gamma_2 \quad (\text{B.36})$$

As relações (B.33) implicam que o campo A_{μ} deve se transformar da seguinte forma:

$$A'_0 = A_0 \quad A'_i = -A_i \quad (\text{B.37})$$

Apêndice C

Operadores de projeção

Neste apêndice será mostrado algumas propriedades dos operadores de projeção $\Theta^{\mu\nu}$ e $\Omega^{\mu\nu}$, que são definidos da seguinte forma:

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (\text{C.1a})$$

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (\text{C.1b})$$

Vamos analisar o produto entre estes operadores;

Produto $\Theta^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu}$

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} &= \left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \right) \left(\eta_{\alpha\nu} - \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \right) \\ &= \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} - \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} - \eta_{\alpha\nu} \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} + \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \\ &= \delta^\mu_\nu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} + \frac{\partial^\mu \square \partial_\nu}{\square \square} \\ &= \delta^\mu_\nu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} \\ &= \Theta^\mu_\nu \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Produto $\Omega^{\mu\alpha} \Omega_{\alpha\nu}$

$$\begin{aligned} \Omega^{\mu\alpha} \Omega_{\alpha\nu} &= \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \\ &= \frac{\partial^\mu \square \partial_\nu}{\square \square} \\ &= \Omega^\mu_\nu \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Produto $\Theta^{\mu\alpha}\Omega_{\alpha\nu}$

$$\begin{aligned}
 \Theta^{\mu\alpha}\Omega_{\alpha\nu} &= \left(\eta^{\mu\alpha} - \frac{\partial^\mu \partial^\alpha}{\square} \right) \left(\frac{\partial_\alpha \partial_\nu}{\square} \right) \\
 &= \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\square} - \frac{\partial^\mu \square \partial_\nu}{\square \square} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Podemos construir uma tabela multiplicativa destes operadores, resumindo os resultados acima.

	Θ	Ω
Θ	Θ	0
Ω	0	Ω

Tabela C.1: Álgebra dos operadores de projeção.

Dado um operador

$$X_{\mu\nu} = \alpha \Theta_{\mu\nu} + \beta \Omega_{\mu\nu}, \tag{C.5}$$

podemos utilizar a tabela (C.1) para encontrar seu inverso

$$X_{\mu\nu}^{-1} = A \Theta_{\mu\nu} + B \Omega_{\mu\nu} \tag{C.6}$$

Como $X^{\mu\sigma} X_{\sigma\nu}^{-1} = \delta_\nu^\mu$, e recorrendo-se à tabela (C.1), temos que $A = \alpha^{-1}$ e $B = \beta^{-1}$, ou seja,

$$X_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta} \Omega_{\mu\nu} \tag{C.7}$$

Bibliografia

- [1] R. Acharya, P. Swamy, and Narayana, “Relativistic QED in (2+1)-Dimensional Space: the Integer and Fractional Quantized Hall Effects,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 09, no. 06, pp. 861–872, 1994. [\[Citado na página 4.\]](#)
- [2] M. Katsnelson and K. Novoselov, “Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics,” *Solid State Communications*, vol. 143, no. 1, pp. 3 – 13, 2007. [\[Citado na página 4.\]](#)
- [3] N. Dorey and N. Mavromatos, “QED₃ and two-dimensional superconductivity without parity violation,” *Nuclear Physics B*, vol. 386, no. 3, pp. 614 – 680, 1992. [\[Citado na página 4.\]](#)
- [4] O. M. Del Cima, D. H. T. Franco, O. Piguet, and M. Schweda, “No parity anomaly in massless QED₃: A BPHZL approach,” *Physics Letters B*, vol. 680, no. 1, pp. 108 – 110, 2009. [\[Citado na página 4.\]](#)
- [5] O. M. Del Cima, D. H. T. Franco, and O. Piguet, “Ultraviolet and infrared perturbative finiteness of massless QED₃,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 065001, Mar 2014. [\[Citado na página 4.\]](#)
- [6] L. Alvarez-Gaumé, “An introduction to anomalies,” in *Fundamental Problems of Gauge Field Theory* (G. Velo and A. S. Wightman, eds.), NATO ASI Series 141, pp. 93–206, Springer US, 1 ed., 1986. [\[Citado na página 6.\]](#)
- [7] D. H. T. Franco and O. Piguet, “Algebraic renormalization,” *Scholarpedia*, vol. 8, no. 11, p. 8336, 2013. revision #140792. [\[Citado na página 6.\]](#)
- [8] L. Alvarez-Gaumé and M. Vázquez-Mozo, *An Invitation to Quantum Field Theory*. Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2011. [\[Citado na página 6.\]](#)
- [9] E. C. V. Stueckelberg and D. Rivier, “Causalité et structure de la Matrice S,” *Helv. Phys. Acta*, vol. 23, p. 215, 1950. [\[Citado na página 7.\]](#)
- [10] N. Bogoliubov and D. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*. John Wiley & Sons, 3rd ed., 1980. [\[Citado nas páginas 7, 14.\]](#)
- [11] H. Epstein and V. Glaser, “The Role of locality in perturbation theory,” *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, vol. A19, pp. 211–295, 1973. [\[Citado nas páginas 8, 9 e 16.\]](#)

- [12] P. Blanchard and R. Seneor, “Green’s Functions for Theories with Massless Particles (In Perturbation Theory),” *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, vol. 23, pp. 147–209, 1975. [\[Citado na página 8.\]](#)
- [13] H. Epstein and V. Glaser, “Adiabatic limit in perturbation theory,” in *Renormalization Theory* (G. Velo and A. S. Wightman, eds.), (Dordrecht), pp. 193–254, Springer Netherlands, 1976. [\[Citado na página 8.\]](#)
- [14] D. H. T. Franco, *Métodos Matemáticos Avançados em Física: Tópicos de Análise Funcional e Aplicações na Teoria Quântica*. Notas de aula, 2017. [\[Citado nas páginas 9, 10, 11 e 37.\]](#)
- [15] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 ed., 1995. [\[Citado nas páginas 10, 16 e 32.\]](#)
- [16] O. Steinmann, *Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory*. Lecture Notes in Physics 11, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 ed., 1971. [\[Citado na página 16.\]](#)
- [17] O. Piguet and S. Sorella, *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies*. Lecture Notes in Physics Monographs, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. [\[Citado na página 18.\]](#)
- [18] M. Chaichian, J. Fischer, and Y. Vernov, “Generalization of the froissart-martin bounds to scattering in a space-time of general dimension,” *Nuclear Physics B*, vol. 383, no. 1, pp. 151 – 172, 1992. [\[Citado na página 24.\]](#)
- [19] M. Chaichian and J. Fischer, “Higher-dimensional space-time and unitary bound on the scattering amplitude,” *Nuclear Physics B*, vol. 303, no. 3, pp. 557 – 568, 1988. [\[Citado na página 24.\]](#)
- [20] M. Froissart, “Asymptotic behavior and subtractions in the mandelstam representation,” *Phys. Rev.*, vol. 123, pp. 1053–1057, Aug 1961. [\[Citado na página 24.\]](#)
- [21] A. Martin, “Unitarity and high-energy behavior of scattering amplitudes,” *Phys. Rev.*, vol. 129, pp. 1432–1436, Feb 1963. [\[Citado na página 24.\]](#)
- [22] O. M. Del Cima, “Probing the froissart bound for models with charged vector fields in $d=3$,” *Modern Physics Letters A*, vol. 09, no. 18, pp. 1695–1700, 1994. [\[Citado na página 24.\]](#)
- [23] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory*. Dover Publications, 2nd ed., 2006. [\[Citado nas páginas 29, 41.\]](#)
- [24] D. Z. Freedman, K. Johnson, and J. I. Latorre, “Differential regularization and renormalization: a new method of calculation in quantum field theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 371, no. 1, pp. 353 – 414, 1992. [\[Citado na página 32.\]](#)

- [25] D. Prange, “Epstein-Glaser renormalization and differential renormalization,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 32, no. 11, pp. 2225–2238, 1999. [\[Citado na página 32.\]](#)
- [26] R. Muñoz-Tapia, “Differential renormalization of lower dimensional gauge theories,” *Physics Letters B*, vol. 295, no. 1, pp. 95 – 98, 1992. [\[Citado nas páginas 33, 34.\]](#)
- [27] G. Arfken, H. Weber, and F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*. Mathematical Methods for Physicists, Elsevier, 2005. [\[Citado na página 37.\]](#)
- [28] N. Lemos, *Convite à Física Matemática*. Livraria da Física, 2013. [\[Citado na página 37.\]](#)
- [29] V. S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Generalized Functions*. Analytical Methods and Special Functions, CRC Press, 1 ed., 2002. [\[Citado na página 37.\]](#)
- [30] G. Eskin, *Lectures on Linear Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011. [\[Citado na página 37.\]](#)
- [31] E. Sadurní, E. Rivera-Mociños, and A. Rosado, “Discrete symmetry in graphene: the Dirac equation and beyond,” *Revista mexicana de física*, vol. 61, pp. 170 – 181, 06 2015. [\[Citado na página 43.\]](#)