JAVIER ESNEIDER MÉNDEZ ALFONSO

FUNÇÕES DE IGUSA-TODOROV

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

M538f
2017

Méndez Alfonso, Javier Esneider, 1992-
Funções de Igusa-Todorov / Javier Esneider Méndez Alfonso. – Viçosa, MG, 2017.
viii, 69f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Sônia Maria Fernandes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.68-69.

1. Álgebra. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 512

JAVIER ESNEIDER MÉNDEZ ALFONSO

FUNÇÕES DE IGUSA-TODOROV

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 08 de novembro de 2017.

Viktor Bekkert

Abílio Lemos Cardoso Júnior

Sônia Maria Fernandes
(Orientadora)

Dedico este trabalho a Sofia e Valentina,
meus dois amores eternos.

Tango del Algebrista
Algebrista te volviste
refinado hasta la esencia
oligarca de la ciencia
matemático bacán.

Hoy mirás a los que sudan
en las otras disciplinas
como dama a pobres minas
que laburan por el pan.

¿Te acordás que en otros tiempos
sin mayores pretensiones
mendigabas soluciones
a una mísera ecuación?

Hoy la vas de riguroso
revisás los postulados
y junás por todos lados
la mas vil definición.

Pero no engrupís a nadie
y es inútil que te embales
con anillos, con ideales
y con álgebras de Boole.

Todos saben que hace poco
resolviste hasta matrices
y rastreabas las raíces
con el método de Sturn.

Pero puede que algún día
con las vueltas de la vida
tanta cáscara aburrida
te llegue a cansar al fin.

Y añores tal vez el día
que sin álgebras abstractas
y con dos cifras exactas
te sentías tan feliz.

Enzo Romeo Gentile

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, por todas as bênçãos derramadas em minha vida e cada pessoa que põe no meu caminho.

Agradeço imensamente à minha orientadora, professora Sônia, por sua grande dedicação e paciência (muita paciência); sua orientação, conselhos e ensinamentos tem sido indispensáveis nesta etapa de grande aprendizado.

Agradeço a meu pai e minha mãe, Javier e Sandra, grandes exemplos de vida e responsáveis por toda a minha educação académica e pessoal. Sem dúvida são a minha maior motivação para seguir em frente, sem eles teria desistido há muito. Minha família em geral, pela força.

Agradeço às incalculáveis amizades que fiz desde que cheguei ao Brasil, sem dúvida foram importantes no meu crescimento como ser humano; por seus conselhos, momentos de descontração, viradas estudando, tardes e noites de conversas, amanhecidas de reflexão e meditação, ou simplesmente por cada momento vivido, por isso e mais agradeço especialmente a Vângellis, Andersiton, Maurito, Mari, Arthur, Thiely, Thamiles, Sarah, Tobias, Juanito, Elencita, Luis, Luana, Naíza, Genilson, Greice, Paloma, Marcela, Duda, Zé Bruno, Sebitas, Tais, Brenda, Carlitos, Paulinha, Leandro, Thamara, João, Verônica, Don Marcelino, e outros que desde a distância confiaram em mim desde que eu pôs um pé fora do meu país: Cristian Perdomo, Katecita, Mauricio, la paisa, tia Claudia, tia Marinela, tia Liliana.

Agradeço a todas as pessoas que me fazem bem todo dia, e me desejam sucesso; seria difícil menciona-las todas, mas tenho certeza que as suas preces e boas energias fizeram possível que eu chegasse até aqui.

Um agradecimento especial aos professores Jesús e Gustavo, pela disposição sensata em momentos de angustia e desespero.

Agradeço aos membros da banca, por aceitarem o convite.

Por último, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

MÉNDEZ ALFONSO, Javier Esneider, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2017. **Funções de Igusa-Todorov**. Orientadora: Sônia Maria Fernandes.

Neste trabalho, introduzimos as Funções de Igusa-Todorov ϕ e ψ, motivados pela Conjectura Finitista. O principal objetivo deste trabalho visa estudar o comportamento dessas funções sobre K-álgebras Artinianas de dimensão finita, sendo K um corpo algebricamente fechado. Conforme o artigo [12], demonstramos com detalhes o Teorema 4, que relaciona a dimensão projetiva com a função ψ. Em seguida, caracterizamos álgebras Artinianas autoinjetivas através dessas funções, veja [11]. No caso de álgebras de radical quadrado zero não autoinjetivas mostramos que é possível calcular a ϕ-dimensão dessas álgebras via os módulos simples, como no caso da dimensão global de álgebras Artinianas, veja [14].

Abstract

MÉNDEZ ALFONSO, Javier Esneider, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2017. **Igusa-Todorov functions**. Adviser: Sônia Maria Fernandes.

In this work, we introduce the Igusa-Todorov functions ϕ and ψ, motivated for the Finitistic Conjecture. The main objective this work aim at to study the behavior of these functions about the finite dimensional Artin K-algebras, being K algebraically closed field. According the article [12], we prove with details the Theorem 4, that relates the projective dimension with the function ψ. Finally we characterize self-injective Artinian algebras through these functions, to see [11]. For the case of radical square zero non-selfinjective algebra we show that is possible to compute the ϕ-dimension of algebra via the simple modules, as the case of global dimension of Artin algebras, to see [14].

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar as funções de Igusa-Todorov sob o ponto de vista homológico.

Uma álgebra Artiniana Λ é uma álgebra finitamente gerada como módulo sobre o seu centro que é um anel comutativo artiniano. Uma propriedade que tem as álgebras Artinianas e que as distingue dos anéis Artinianos é que o anel de endomorfismos de um módulo finitamente gerado sob uma álgebra Artiniana é uma álgebra Artiniana.

Em Teoria de Representações interessa, para uma álgebra Λ dada, obtermos informações sobre Λ a partir do conhecimento dos seus módulos. Um exemplo simples desta idéia é o seguinte: Todo módulo de Λ é simples se e somente se $\Lambda \cong \mathbb{M}_n(D)$ sendo D um anel com divisão.

A Teoria de Representações de álgebras tem utilizado "várias ferramentas", uma delas é a Teoria de Categorias. O fato histórico que marca esse uso é o Teorema de Gabriel que relaciona algumas álgebras Artinianas com grafo orientado.

Uma outra ferramenta utilizada em Representações de Álgebras é a Álgebra Homológica, que teve origem no final do século XIX através dos diversos trabalhos de *Riemann* em 1857. Nos trabalhos de Hilbert (1890) foi introduzido o conceito de *sizigia* como conhecemos atualmente e mostra-se um importante resultado: Para todo corpo K a dimensão global da K-álgebra $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é exatamente n, ver [10].

Seja $mod(\Lambda)$ a categoria dos módulos à direita finitamente gerados. Definimos:

$$gldim(\Lambda) = \sup \{dp(M) \mid M \in mod(\Lambda)\} \ \ e,$$

$$findim(\Lambda) = \sup \{dp(M) \mid dp(M) < \infty \text{ e } M \in mod(\Lambda)\}.$$

sendo $dp(M)$ a dimensão projetiva de M. É claro que $findim(\Lambda) \leq gldim(\Lambda)$. A *Conjectura Finitista* estabelece que $findim(\Lambda) < \infty$. Tal conjectura, ainda em aberto, foi mostrada em vários casos particulares como para álgebras monomiais ou álgebras com radical ao cubo zero. O que mais desperta interesse em resolver esta conjectura é que ela está fortemente relacionada com outras conjecturas homológicas. Por exemplo, se ela for resolvida, implica a veracidade da *conjectura de Nakayama*, ver [16].

A iniciativa de introduzir dimensões homológicas para "medir" a complexidade da categoria dos módulos de uma álgebra em termos das suas dimensões projetivas dos seus módulos e as álgebras em termos da sua dimensão global, em alguns casos foi eficaz. Sabemos por exemplo que:

- $gldim(\Lambda) = 0$ se e somente se a álgebra Λ é semisimples.
- $gldim(\Lambda) = 1$ se e somente se a álgebra Λ é hereditária.

Igusa e Todorov, no ano de 2005, definiram em [12] duas funções da categoria dos Λ-módulos finitamente gerados nos números naturais com o objetivo de dar solução (pelo menos em alguns casos) à Conjectura Finitista. Atualmente, essas funções são conhecidas como funções de Igusa-Todorov "ϕ" e "ψ" e "generalizam" a noção de dimensão projetiva. Em relação a essas funções, um dos seus melhores recursos é que são finitas para cada módulo. Denotamos as dimensões homológicas definidas por ϕ e ψ para a álgebra Λ por ϕdim e ψdim, respectivamente. Vemos que essas dimensões satisfazem a seguinte desigualdade:

$$findim(\Lambda) \leq \phi dim(\Lambda) \leq \psi dim(\Lambda) \leq gldim(\Lambda).$$

Essas medidas homológicas coincidem no caso das álgebras terem dimensão global finita.

Uma álgebra Λ é autoinjetiva se Λ vista como um Λ-módulo à direita é injetivo. Sabemos que, se Λ é autoinjetiva, então a dimensão projetiva de todo módulo é zero ou infinita. Porém, a afirmação inversa não é verdadeira, ou seja, a dimensão projetiva não é suficiente para classificar a álgebra. Em um trabalho de 2012, Huard e Lanzilotta caracterizaram as álgebras autoinjetivas através da ϕ-dimensão (ou equivalentemente através da ψ-dimensão), ver [11]. Esse resultado foi o primeiro a mostrar que ϕ poderia ser uma boa medida homológica.

Com o propósito de desenvolver essas ideias e apresentar um conteúdo coerente, dividimos este trabalho em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, exibimos as definições e conceitos fundamentais que são necessários e abordados ao longo do trabalho para uma melhor compreensão. Na primeira seção, fazemos uma revisão geral sobre *categorias* e *funtores*. Na segunda seção, definimos a categoria $mod(\Lambda)$ sendo Λ uma álgebra Artiniana de dimensão finita e fazemos um resumo sobre as principais propriedades e resultados dessa categoria. Na terceira seção, definimos *quivers*, *álgebras de caminhos*, *ideais admissíveis*, *representações*, *representações de quivers limitados*, *módulos simples, projetivos* e *injetivos*. A maioria dos resultados da segunda e terceira seção, assim como as notações, provêm de [3]. Sobre esses temas recomendamos [2], [4], [20] e [23].

No segundo capítulo, definimos as funções de Igusa-Todorov, e estudamos algumas das suas propriedades, ver [12]. A abordagem deste capítulo visa estudar com detalhes o resultado que relaciona a dimensão projetiva com a ψ-dimensão de módulos que aparecem em uma mesma sequência exata curta. Isso permite demonstrar que as álgebras com dimensão de representação menor ou igual a 3 satisfazem a Conjectura Finitista. Este último resultado é interessante, pois acreditava-se que a dimensão de representação de toda álgebra Artiniana de dimensão finita era limitada por 3, ver [5].

Já no terceiro capítulo, definimos as álgebras autoinjetivas e algumas das suas propriedades são apresentadas com o fim de classificá-las por meio das funções de Igusa-Todorov. Nos baseamos no trabalho de Huard e Lanzilotta para mostrar que álgebras Artinianas são autoinjetivas se e somente se a ϕ-dimensão (ou ψ-dimensão) é igual a zero (Teorema 3.4), ver [11].

Finalmente, no quarto capítulo, definimos as álgebras de radical quadrado zero. Mostramos, neste capítulo, que se Λ é uma álgebra de radical quadrado zero não autoinjetiva podemos calcular a sua ϕ-dimensão por meio dos seus módulos simples, ver [14].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas noções básicas de Teoria de Categorias, Álgebra Homológica, Representações de Álgebras, entre outras, que são necessárias para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Fixaremos as notações utilizadas ao longo do trabalho e várias demonstrações serão omitidas, mas deixaremos as referências dos textos onde poderão ser encontradas com maiores detalhes.

1.1 Categorias e funtores

Nesta seção, introduzimos algumas definições e resultados sobre Teoria de Categorias e Funtores. Mais detalhes podem ser encontrados em [3], [4], [8], [18], [20] e [23].

Definição 1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dada por uma classe $Obj(\mathcal{C})$, cujos elementos são chamados de objetos de $\mathcal{C}$; uma classe $Hom(\mathcal{C})$, cujos elementos são chamados de morfismos de $\mathcal{C}$; e uma operação parcial binária $\circ$ definida em $Hom(\mathcal{C})$, tal que:*

(a) a cada par ordenado de objetos A, $B \in Obj(\mathcal{C})$, associamos um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ com:

(i) $Hom(\mathcal{C}) = \bigcup\limits_{A,B \in Obj(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$; e

(ii) $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \bigcap Hom_{\mathcal{C}}(C,D) \neq \emptyset$ se e somente se $A = C$ e $B = D$.

(b) para cada tripla de objetos A, B, $C \in Obj(\mathcal{C})$ a operação:

$$\begin{array}{rccc} \circ: & Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ & (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

está bem definida e tem as seguintes propriedades:

(i) Se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(ii) *Para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$, existe $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$, $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $\forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$.*

A operação $\circ$ é chamada de composição de f e g. Ao longo do texto escrevemos por simplicidade gf, sendo a composição $g \circ f$ de morfismos de $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.2. *A seguir apresentamos alguns exemplos de categorias:*

1. *A categoria Sets: Os objetos de Sets são os conjuntos e os morfismos são às funções entre conjuntos.*

2. *A categoria Groups: Os objetos são os grupos e os morfismos são os homomorfismos entre grupos.*

3. *A categoria $Vect_K$: Os objetos são os K-espaços vetoriais e os morfismos são as transformações lineares.*

Uma categoria $\mathcal{C}'$ é chamada de **subcategoria** da categoria $\mathcal{C}$ se satisfaz as seguintes condições:

(a) $Obj(\mathcal{C}')$ é uma subclasse de $Obj(\mathcal{C})$,

(b) Para todo A, $B \in Obj(\mathcal{C}')$

$$Hom_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B),$$

(c) Para cada $A \in Obj(\mathcal{C}')$ o morfismo identidade id'_A em $Hom_{\mathcal{C}'}(A, A)$ coincide com o morfismo identidade id_A em $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$,

(d) A composição de morfismos em $\mathcal{C}'$ é a mesma de $\mathcal{C}$.

Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é chamada **plena** se $Hom_{\mathcal{C}'}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todos os objetos A, B em $\mathcal{C}'$.

A categoria $vect_K$, cujos objetos são K-espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos são transformações lineares, é uma subcategoria plena de $Vect_K$. A categoria Ab, que tem por objetos os grupos abelianos e morfismos os homomorfismos entre grupos, é uma subcategoria plena de $Groups$.

Sejam A, B dois objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Se $A = B$ dizemos que f é um **endomorfismo** de A e denotamos por $End_{\mathcal{C}}(A)$ ao conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$. Dizemos que f é um **monomorfismo** se para cada par de morfismos g_1, $g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$ tais que $fg_1 = fg_2$ implica que $g_1 = g_2$. Dizemos que f é um **epimorfismo** se para cada par de morfismos h_1, $h_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ tais que $h_1 f = h_2 f$ implica $h_1 = h_2$. Se existe $h \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $fh = id_B$ e $hf = id_A$ dizemos que f é um **isomorfismo** e chamamos h o inverso de f que denotamos por f^{-1}. Se f é um isomorfismo e endomorfismo de A, dizemos que é um **automorfismo** de A.

Quando existe um isomorfismo entre dois objetos A e B, dizemos que A e B são isomorfos e denotamos por $A \cong B$.

Seja $(M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma familia de objetos em $\mathcal{C}$. O **coproduto** $(M,(q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ dessa familia é um objeto $M \in Obj(\mathcal{C})$ e uma familia de morfismos $q_\gamma : M_\gamma \longrightarrow M$ tal que, se $(M',(q'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ é um par com $q'_\gamma : M_\gamma \longrightarrow M'$ então existe um único morfismo $f : M \longrightarrow M'$ com $fq_\gamma = q'_\gamma$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M_\gamma \arrow[r, "q_\gamma"] \arrow[dr, "q'_\gamma"'] & M \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

De maneira dual se define o **produto** da família $(M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é chamada de **Categoria Aditiva** se as seguintes condições são satisfeitas:

(A1) Para todo $A,\, B \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ é um grupo abeliano e a composição de morfismos é bilinear,

(A2) A categoria $\mathcal{C}$ contém um objeto zero, denotado por 0, que tem a seguinte propriedade: se $A \in Obj(\mathcal{C})$, os conjuntos $Hom_{\mathcal{C}}(A,0)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(0,A)$ tem só um elemento,

(A3) Para todo par de objetos $A,\, B \in Obj(\mathcal{C})$ existe o seu coproduto em $\mathcal{C}$.

As categorias $Groups$ e $Vect_K$ são exemplos de categorias aditivas.

O **Núcleo** de um morfismo $f : B \longrightarrow C$ é o objeto $ker(f)$ tal que o morfismo $k : ker(f) \longrightarrow B$ satisfaz:

(i) $fk = 0$,

(ii) Para todo $\xi : X \longrightarrow B$ com $f\xi = 0$ existe um único $\gamma : X \longrightarrow ker(f)$ tal que $\xi = k\gamma$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} ker(f) \arrow[r, "k"] & B \arrow[r, "f"] & C \\ & X \arrow[u, "\xi"] \arrow[ul, dashed, "\exists!\gamma"] \arrow[ur, bend right, "0"'] & \end{tikzcd}$$

O **Conúcleo** de um morfismo $g : B \longrightarrow C$ é o objeto $coker(g)$ tal que o morfismo $\pi : C \longrightarrow coker(g)$ satisfaz:

(i) $\pi g = 0$,

(ii) Para todo $\xi : C \longrightarrow X$ com $\xi g = 0$ existe um único $\sigma : coker(g) \longrightarrow X$ tal que $\xi = \pi\sigma$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, bend left, "0"'] & C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & coker(g) \arrow[dl, dashed, "\exists!\sigma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Observa-se que o morfismo k da definição do núcleo é um monomorfismo e o morfismo π da definição do conúcleo é um epimorfismo.

Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita uma **Categoria Abeliana** se todo morfismo tem núcleo e conúcleo. Além disso, o morfismo j indicado no seguinte diagrama é isomorfismo:

$$
\begin{tikzcd}
ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "\pi"] & coker(f) \\
& coker(k) \arrow[ur, "h"] \arrow[r, dashed, "j"'] & ker(\pi) \arrow[u, "v"'] &
\end{tikzcd}
$$

No diagrama anterior, $ker(\pi)$ é chamado a **Imagem** de f e é denotado por $Im(f)$.

Sejam $f_1 : X_1 \longrightarrow X$ e $f_2 : X_2 \longrightarrow X$ morfismos de uma categoria $\mathcal{C}$. O **Pullback** de f_1 e f_2 é um objeto U e dois morfismos $p_1 : U \longrightarrow X_1$ e $p_2 : U \longrightarrow X_2$ tal que:

(i) $f_1p_1 = f_2p_2$,

(ii) se existe um objeto U' e dois morfismos $g_1 : U' \longrightarrow X_1$ e $g_2 : U' \longrightarrow X_2$ com $f_1g_1 = f_2g_2$, então existe um único morfismo $g : U' \longrightarrow U$ tal que $p_1g = g_1$ e $p_2g = g_2$.

$$
\begin{tikzcd}
U' \arrow[dr, dashed, "\exists! g"] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\
& U \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& X_1 \arrow[r, "f_1"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Sejam $f_1 : X \longrightarrow X_1$ e $f_2 : X \longrightarrow X_2$ morfismos de uma categoria $\mathcal{C}$. O **Pushout** de f_1 e f_2 é um objeto P e dois morfismos $p_1 : X_1 \longrightarrow P$ e $p_2 : X_2 \longrightarrow P$ tal que:

(i) $p_1f_1 = p_2f_2$,

(ii) se existe um objeto P' e dois morfismos $g_1 : X_1 \longrightarrow P'$ e $g_2 : X_2 \longrightarrow P'$ com $f_1g_1 = f_2g_2$, então existe um único morfismo $g : P \longrightarrow P'$ tal que $gp_1 = g_1$ e $gp_2 = g_2$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & P \arrow[dr, dashed, "\exists! g"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}
$$

As categorias abelianas tem Pullback e Pushout.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. Um **Funtor Covariante** $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}'$ consiste de:

(1) uma aplicação $A \longmapsto \mathcal{F}(A)$ de $Obj(\mathcal{C})$ em $Obj(\mathcal{C}')$,

(2) para todo par de objetos A e B em $Obj(\mathcal{C})$, uma aplicação $f \longmapsto \mathcal{F}(f)$ de $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ em $Hom_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ que também satisfaz as seguintes condições:

   (i) se gf está definida em $\mathcal{C}$, então $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$,

   (ii) $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$.

Analogamente, um **Funtor Contravariante** $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}'$ consiste de:

(1) uma aplicação $A \longmapsto \mathcal{F}(A)$ de $Obj(\mathcal{C})$ em $Obj(\mathcal{C}')$;

(2) para todo par de objetos A e B em $Obj(\mathcal{C})$, uma aplicação $f \longmapsto \mathcal{F}(f)$ de $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ em $Hom_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(A))$ que satisfaz as seguintes condições:

   (i) se gf está definida em $\mathcal{C}$, então $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$,

   (ii) $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$.

Vejamos alguns exemplos de funtores.

Exemplo 1.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.*

1. *O **Funtor Identidade** $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ está definido por $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ e $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo objeto A e todo morfismo f em $\mathcal{C}$.*

2. *Se fixamos um objeto A de $\mathcal{C}$. O funtor covariante $\boldsymbol{Hom_{\mathcal{C}}(A,-)} : \mathcal{C} \to Sets$ é definido por $Hom_{\mathcal{C}}(A,-)(X) = Hom_{\mathcal{C}}(A,X)$ para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$ e para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $Hom_{\mathcal{C}}(A,-)(f) = Hom_{\mathcal{C}}(A,f)$, sendo*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,f) : Hom_{\mathcal{C}}(A,X) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,Y)$$

   definido por $h \mapsto fh$, para todo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(A,X)$

3. *Analogamente, definimos o funtor contravariante $\boldsymbol{Hom_{\mathcal{C}}(-,A)} : \mathcal{C} \to Sets$, sendo $Hom_{\mathcal{C}}(-,A)(f) = Hom_{\mathcal{C}}(f,A)$ para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, onde*

$$Hom_{\mathcal{C}}(f,A) : Hom_{\mathcal{C}}(Y,A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,A)$$

   está definido por $h \mapsto hf$, para todo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,A)$.

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias aditivas, um funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é aditivo se para todo A, B em $\mathcal{C}$ e todo f, g em $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ temos:

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g),$$

isto é, a aplicação $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$, dada por $f \longmapsto \mathcal{F}(f)$ é um homomorfismo de grupos abelianos. Se $\mathcal{F}$ é um funtor aditivo então $\mathcal{F}(0) = 0$, onde 0 é o objeto zero.

Se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ e $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ são funtores, definimos a sua composição $\mathcal{GF} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ como segue. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, temos $\mathcal{GF}(A) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(A))$ e para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ em $\mathcal{C}$, temos $\mathcal{GF}(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$. Logo, $\mathcal{GF}$ assim definido resulta ser um funtor.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias e $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ dois funtores covariantes. Um **morfismo funtorial** ou **transformação natural** $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, é uma família $\varphi = \{\varphi_A\}_{A \in Obj(\mathcal{C})}$ de morfismos $\varphi_A : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A)$ tal que dado $f : A \longrightarrow B$ em $\mathcal{C}$ temos $\varphi_B \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f)\varphi_A$, isto é, o seguinte quadrado comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ B & \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

Sejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ funtores covariantes, com $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias. Se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ são morfismos funtoriais, $\psi\varphi$ é um morfismo funtorial. De fato, por serem morfismos funtoriais, os quadrados (1) e (2) do seguinte diagrama comutam:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathcal{H}(A) \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"] \\ B & \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[r, "\psi_B"'] & \mathcal{H}(B) \end{tikzcd}$$

Logo, para cada A, $B \in \mathcal{C}$ definimos

$$(\psi\varphi)_A := \psi_A\varphi_A : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{H}(A)$$

que satisfaz $(\mathcal{H}(f)\psi_A)\varphi_A = (\psi_B\varphi_B)\mathcal{F}(f)$, donde o quadrado maior comuta, isto é, $\mathcal{H}(f)(\psi\varphi)_A = (\psi\varphi)_B\mathcal{F}(f)$.

A aplicação $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ definida por $1_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$ é um morfismo funtorial. Dizemos que $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um **isomorfismo funtorial** ou **equivalência natural** de funtores se φ_A é um isomorfismo para todo objeto A de $\mathcal{C}$, isto é, para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$ existe $(\varphi_A)' : \mathcal{G}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$ tal que $(\varphi_A)'\varphi_A = 1_{\mathcal{F}(A)}$ e $\varphi_A(\varphi_A)' = 1_{\mathcal{G}(A)}$.

Um funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma **equivalência de categorias** se existe um funtor $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismo funtorial:

$$\phi :\ 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{GF} \quad \text{e} \quad \psi :\ 1_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\cong} \mathcal{FG}$$

onde $1_{\mathcal{C}}$ e $1_{\mathcal{C}'}$ são funtores identidade em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, respectivamente. Se existe uma equivalência $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são **categorias equivalentes**.

Um funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é chamado **denso** se, para todo objeto A em $\mathcal{C}'$, existe um objeto B em $\mathcal{C}$ e um isomorfismo $\mathcal{F}(B) \cong A$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **pleno** se a aplicação

$$\mathcal{F}_{AB} : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(\mathcal{B})),$$

dada por $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ é sobrejetora para todos os objetos A e B de $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{F}_{AB}$ é uma aplicação injetiva, para todo A, $B \in Obj(\mathcal{C})$, o funtor $\mathcal{F}$ é chamado **fiel**.

Teorema 1.4. *Um funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência de categorias se e somente se $\mathcal{F}$ é fiel, pleno e denso.*

Demonstração. Ver Teorema 2.5, Apéndice A em [3]. □

1.2 Categoria dos Módulos sobre uma álgebra

Nesta seção, introduzimos as notações, terminologias e noções principais sobre álgebras e módulos. Em particular, apresentamos a categoria dos módulos sobre uma álgebra Artiniana Λ e alguns resultados a serem usados ao longo do trabalho. Várias demonstrações são omitidas e podem ser encontradas principalmente em [3] e [4]. Alguns outros resultados sobre álgebras e módulos podem ser consultados em [1], [2], [18], [20], [23].

1.2.1 Álgebras

Seja K um corpo. Uma K-álgebra é um anel Λ com elemento identidade, que denotaremos por 1, tal que Λ tem uma estrutura de K-espaço vetorial com a multiplicação do anel compatível, isto é, para todo $\lambda \in K$ e todo a,$b \in \Lambda$ tem-se:

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b.$$

Diremos que Λ é uma álgebra de **dimensão finita**, se a dimensão do K-espaço vetorial Λ, $dim_k\Lambda$, é finita. Caso contrário, diremos que Λ é uma álgebra de dimensão infinita. Neste trabalho, a menos que seja dito o contrário, Λ denotará uma K-álgebra de dimensão finita.

Um K-subespaço vetorial Γ de uma K-álgebra Λ é uma K-subálgebra de Λ se a identidade de Λ pertence a Γ e $bb' \in \Gamma$ para todo b, $b' \in \Gamma$. Diremos que um K-subespaço vetorial I de uma K-álgebra Λ é um **ideal à direita** (ou **à esquerda**) de Λ se $xa \in I$ (ou $ax \in I$, respectivamente) para todo $x \in I$ e todo $a \in \Lambda$. Um ideal I é um **ideal bilateral**, ou simplesmente um **ideal**, se é ideal à direita e à esquerda de Λ.

Exemplo 1.5. *Alguns exemplos de álgebras são:*

(i) *O anel das matrizes* $\mathbb{M}_n(K)$ *é uma* K*-álgebra de dimensão* n^2*, com o produto por escalar usual.*

(ii) *O anel* $K[t]$ *de todos os polinômios na indeterminada* t *com coeficientes em* K *é uma* K*-álgebra de dimensão infinita. Seja* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *e* $\lambda \in K$*, o produto "compatível" é dado por* $\lambda p(x) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i$.

(iii) *O conjunto das matrizes triangulares superiores é uma* K*-subálgebra de* $\mathbb{M}_n(K)$.

(iv) *Seja* $(\Lambda, +, \cdot)$ *uma* K*-álgebra. A álgebra oposta de* Λ*, escrevemos* Λ^{op}*, é definida pela tripla* $(\Lambda^{op}, +, \bullet)$ *tal que* Λ^{op} *tem a mesma estrutura aditiva de* Λ *e*

$$\bullet : \Lambda^{op} \times \Lambda^{op} \longrightarrow \Lambda^{op}$$

é definida por $(a, b) \mapsto a \bullet b = b \cdot a$*, para todo* $(a, b) \in \Lambda^{op} \times \Lambda^{op}$.

Uma álgebra Λ não nula é simples se os únicos ideais de Λ são $\{0\}$ e o próprio Λ. Se I é um ideal bilateral e m é um inteiro positivo, o ideal bilateral I^m de Λ é formado por todas as somas finitas de elementos da forma $x_1 x_2 \dots x_m$ onde $x_1, x_2, \dots, x_m \in I$. Se $I^n = 0$ para algum inteiro positivo n, dizemos que I é um ideal nilpotente de Λ.

Um ideal I (à direita, à esquerda ou bilateral) próprio de Λ é dito maximal se a existência de um ideal I' de Λ tal que $I \subseteq I' \subseteq \Lambda$ implica $I' = I$ ou $I' = 0$. A interseção de todos os ideais à direita (ou à esquerda) maximais de Λ é chamado o **Radical de Jacoboson**, ou simplesmente **Radical** da K-álgebra Λ e será denotado por $rad(\Lambda)$. Pode-se mostrar que o $rad(\Lambda)$ é um ideal bilateral nilpotente de Λ e $\Lambda/rad(\Lambda)$ é uma K-álgebra.

1.2.2 Módulos

Definição 1.6. *Seja* Λ *uma* K*-álgebra. Um* Λ***-módulo*** *à direita, ou módulo à direita sobre* Λ*, é um par* $(M, \cdot)$*, onde* M *é um* K*-espaço vetorial e a operação externa* $\cdot : M \times \Lambda \longrightarrow M$*,* $(m, a) \mapsto \cdot(m, a) = ma$ *satisfaz as seguintes condições:*

(a) $(m + n)a = ma + na$,

(b) $m(a + b) = ma + mb$,

(c) $m(ab) = (ma)b$,

(d) $m1 = m$,

(e) $(m\lambda)a = m(a\lambda) = (ma)\lambda$,

para todo m*,* $n \in M$*,* a*,* $b \in \Lambda$ *e* $\lambda \in K$.

Analogamente, pode-se definir um Λ-módulo à esquerda se a operação externa $\cdot : \Lambda \times M \longrightarrow M$ definida por $\cdot(a, m) = am$ satisfaz o dual das propriedades anteriores ((a) até (e)). Note que todo Λ-módulo à direita M tem estrutura de Λ^{op}-módulo à esquerda, com a operação $* : \Lambda^{op} \times M \longrightarrow M$ definida por $a * m = ma$, para todo m em M e todo a em Λ.

Daqui em diante, vamos considerar Λ-módulos à direita. Todo resultado aqui apresentado é válido, com algumas adaptações, para Λ-módulos à esquerda. Escrevemos M ao invés de $(M, \cdot)$.

Um subgrupo abeliano N de M é dito **Λ-submódulo** se a multiplicação externa é fechada em N, isto é, se para todo $a \in \Lambda$ e todo $n \in N$ tem-se $na \in N$.

Exemplo 1.7. *1. Todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo.*

2. Os K-espaços vetoriais são K-módulos.

Dizemos que um Λ-módulo M é **gerado** pelos elementos $m_1, m_2, \ldots, m_t$ de M se todo elemento $m \in M$ tem a forma $m = m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_ta_t$ para alguns $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \Lambda$. Escrevemos $M = m_1\Lambda + m_2\Lambda + \cdots + m_t\Lambda$. Neste caso, M é **finitamente gerado** por um subconjunto finito de elementos de M.

Sejam M e N dois Λ-módulos. Uma aplicação K-linear $f : M \longrightarrow N$ é dita homomorfismo de Λ-módulos se $f(m_1a_1 + m_2a_2) = f(m_1)a_1 + f(m_2)a_2$ para todo m_1, m_2 em M e todo a_1, a_2 em Λ.

Sejam M_1 e M_2 dois submódulos não nulos de um módulo M. Dizemos que M é uma **soma direta** ou tem uma decomposição em somandos diretos M_1 e M_2 se $M = M_1 + M_2$ e $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Denotamos por $M = M_1 \oplus M_2$ quando M for soma direta de M_1 e M_2. Chamamos M_1 e M_2 somandos diretos de M e escrevemos $M_1 \,|M$ e $M_2 \,|M$. O módulo M é chamado **indecomponível** se não tem decomposição em somandos diretos não nulos.

Dizemos que um Λ-módulo S é **simples** se S é não zero e todo submódulo de S é zero ou S. Um Λ-módulo M é **semisimples** se é soma direta de módulos simples. Se o Λ-módulo M é simples, então é indecomponível. A recíproca não é sempre verdadeira, basta ver que para p um número primo, $\mathbb{Z}_{p^n}$ é indecomponível mas não é simples.

Mostramos agora uma classe especial de módulos e apresentamos os conceitos de base e posto para um módulo M.

Definição 1.8. *Um Λ-módulo F é **livre** se é isomorfo a uma soma direta de cópias do módulo Λ, isto é,*

$$F \cong \bigoplus_{i \in \mathfrak{F}} \Lambda_i,$$

*onde $\Lambda_i = \langle x_i \rangle \cong \Lambda$, para todo i em $\mathfrak{F}$, sendo $\mathfrak{F}$ uma família de índices. Chamamos $X = \{x_i \mid i \in \mathfrak{F}\}$ uma **base** de F.*

O número de elementos em uma base de F é chamado o **posto** de F e denotamos por $rk(F)$. Definamos agora os Λ-módulos Artinianos e Noetherianos.

Definição 1.9. *Um Λ-módulo M é chamado Artiniano ou de Artin se para toda familia $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M ordenada pela inclusão como segue,*

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$

satisfaz a condição de cadeia descendente, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ tem-se $M_n = M_{n_0}$.

Dualmente, se define Noetheriano como segue:

Definição 1.10. *Um Λ-módulo M é chamado de Noetheriano ou de Noether se para toda familia $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M ordenada pela inclusão como segue,*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

satisfaz a condição de cadeia ascendente, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ tem-se $M_n = M_{n_0}$.

Uma álgebra Λ é dita Artiniana à direita (Noetheriana à direita) se é um Λ-módulo Artiniano (Noetheriano) à direita. Ao longo deste trabalho, a menos que seja dito o contrário, Λ denotará uma K-álgebra Artiniana à direita de dimensão finita sendo K um corpo algebricamente fechado.

Denotamos por $\boldsymbol{Mod}(\Lambda)$ a categoria de todos os Λ-módulos à direita, cujos objetos são os Λ-módulos à direita e morfismos são homomorfismos de Λ-módulos. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Mais ainda, seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de Λ-módulos. Então:

- $ker(f) := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ e a inclusão de submódulos $\mu : ker(f) \hookrightarrow M$ é o núcleo de f;
- $coker(f) = N/Im(f)$ e a projeção canônica $p : N \to coker(f)$ é o conúcleo de f, onde $Im(f) := \{f(m) \mid m \in M\}$; e
- Como consequência do Teorema do Isomorfismo para Λ-módulos, o homomorfismo $\overline{f} : M/ker(f) \longrightarrow Im(f)$ é um isomorfismo.

Portanto, $Mod(\Lambda)$ é uma categoria abeliana.

Denotamos por $\boldsymbol{mod}(\Lambda)$ a subcategoria plena de $Mod(\Lambda)$ cujos objetos são os módulos finitamente gerados. Em geral, $mod(\Lambda)$ não é uma categoria abeliana. Isto ocorre porque o núcleo de homomorfismos entre módulos finitamente gerados não é em geral um módulo finitamente gerado. No entanto, é sabido que $mod(\Lambda)$ é uma categoria abeliana se e somente se Λ é uma álgebra Noetheriana. Em particular, se Λ é uma K-álgebra de dimensão finita, a categoria $mod(\Lambda)$ é abeliana.

Sejam M e N em $mod(\Lambda)$. O conjunto de todos os homomorfismo de M em N, $Hom_\Lambda(M, N)$, é um K-espaço vetorial com respeito a multiplicação por escalar $(f, \lambda) \mapsto \lambda f$ definida por $(\lambda f)(m) = f(m\lambda)$, para todo $f \in Hom_\Lambda(M, N)$, $\lambda \in K$ e $m \in M$. Mais, o K-espaço vetorial $End(M) = Hom(M, N)$ é uma K-álgebra com respeito à composição de homomorfismos.

Lema 1.11. *Seja Λ uma álgebra Artiniana de dimensão finita.*

(a) *M é um Λ-módulo semisimples se e somente se todo submódulo N de M é somando direto de M.*

(b) *Um submódulo de um módulo semisimples é semisimples.*

Demonstração. Ver Lema I.3.3. em [3]. □

Uma K-álgebra Λ de dimensão finita é semisimples se satisfaz alguma das condições equivalentes do seguinte teorema conhecido como Teorema de Wedderburn-Artin.

Teorema 1.12. *Para toda álgebra Λ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *O Λ-módulo Λ é semisimples.*

(b) *Todo Λ-módulo é semisimples.*

(c) $rad(\Lambda) = 0$.

(d) *Existem inteiros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_s$ e um isomorfismo de K-álgebras*

$$\Lambda \cong \mathbb{M}_{m_1}(K) \times \cdots \times \mathbb{M}_{m_s}(K).$$

Demonstração. Ver Teorema I.3.4 em [3]. □

Definição 1.13. *Seja M um Λ-módulo. Chamamos* **socle** *do módulo M, que denotamos por $soc(M)$, ao submódulo de M gerado por todos os submódulos simples de M.*

Note que $soc(M)$ é sempre um Λ-módulo semisimples.

Seja M em $mod(\Lambda)$, definimos o **radical de Jacobson** de M, que denotamos por $rad(M)$, como a interseção de todos os submódulos maximais de M.

Proposição 1.14. *Sejam M, N e L módulos em $mod(\Lambda)$.*

a) $rad(M \oplus N) = rad(M) \oplus rad(N)$.

b) *Se $f \in Hom_\Lambda(M, N)$ então $f(rad(M)) \subseteq rad(N)$.*

c) $Mrad(\Lambda) = rad(M)$.

Demonstração. Ver Proposição I.3.7. em [3]. □

Proposição 1.15. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um epimorfismo de Λ-módulos. Então $f(rad^i(M)) = rad^i(N)$ para todo $i \geq 0$.*

Demonstração. Ver Lema V.1.1. em [3]. □

Segue da Proposição 1.14, item (c), que $(M/rad(M))rad(\Lambda) = 0$. De modo que, chamamos **top** de M ao $\big(\Lambda/rad(\Lambda)\big)$-módulo à direita

$$top(M) = M/rad(M)$$

definido com a operação $(m + rad(M))(a + rad(\Lambda)) = ma + rad(M)$.

Corolário 1.16. *Seja M um módulo em $mod(\Lambda)$.*

(a) $top(M)$ é semisimples e é um módulo sobre a K-álgebra $\Lambda/rad(\Lambda)$.

(b) Se L é um submódulo de M tal que M/L é semisimples, então $rad(M) \subseteq L$.

Demonstração. Ver Corolário I.3.8. em [3]. □

Pelo item (b) na Proposição 1.14, o homomorfismo de Λ-módulos $f : M \longrightarrow N$ induz o homomorfismo $top(f) : top(M) \longrightarrow top(N)$ de $(\Lambda/rad(\Lambda))$-módulos à direita definido por $(top(f))(m + rad(M)) = f(m) + rad(N)$.

Corolário 1.17. *(a) Um homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ em $mod(\Lambda)$ é sobrejetor se e somente se o homomorfismo $top(f) : top(M) \longrightarrow top(N)$ é sobrejetor.*

(b) Se S é um Λ-módulo simples, então $Srad(\Lambda) = 0$ e S é um $\Lambda/rad(\Lambda)$-módulo simples.

(c) Um Λ-módulo M é semisimples se e somente se $rad(M) = 0$.

Demonstração. Ver Corolário I.3.9. em [3]. □

Proposição 1.18. *Seja Λ uma álgebra Artiniana de dimensão finita. Então*

(a) Existe somente um número finito de Λ-módulos simples não isomorfos,

(b) Λ é noetheriano.

Demonstração. Ver Proposição I.3.1. em [4]. □

Seja M um módulo não zero. Uma cadeia finita de $n + 1$ submódulos de M

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0$$

é chamada uma **série de composição de comprimento** n para M, se M_{i-1}/M_i é simples para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposição 1.19. *Um módulo não nulo M tem uma série de composição se e somente se M é Artiniano e Noetheriano.*

Demonstração. Ver Proposição 11.1. em [1]. □

Como estamos considerando Álgebra Artiniana de dimensão finita (logo Noetheriana) segue da Proposição 1.19 que todo módulo no presente trabalho tem uma série de composição de comprimento finito.

Pelo Teorema de Jordan-Holder, ver Teorema I.3.10 em [3], o comprimento da série de composição para um módulo M depende somente de M. Denotamos por $\ell(M)$ ao comprimento da série de composição. Diremos que um Λ-módulo M tem comprimento zero se $M = 0$ e comprimento n se tem série de composição de comprimento n.

Corolário 1.20. *Seja Λ uma álgebra Artiniana de dimensão finita. Então o radical de Λ é nilpotente e $rad^i(\Lambda)/rad^{i+1}(\Lambda)$ é um módulo semisimples finitamente gerado para todo $i \geq 0$.*

Seja $M \in mod(\Lambda)$, consideramos a sequência de submódulos de M dada por

$$M \supset rad(M) \supset rad^2(M) \supset \cdots \supset rad^i(M) \supset \cdots .$$

Esta sequência é chamada **Série Radical** ou **Série Descendente Loewy** de M. Como vemos, existe um menor inteiro positivo m tal que $rad^m(M) = 0$. Esse menor m é denotado por $r\ell(M)$ e chamado **tamanho da série radical**. A noção dual é a **Série Socle** ou **Série Ascendente Loewy** de M,

$$0 = soc^0(M) \subset soc(M) \subset soc^2(M) \subset \cdots \subset soc^i(M) \subset \cdots \subset M,$$

e o menor inteiro m tal que $soc^m(M) = M$ é chamado **tamanho da série socle**, que denotamos por $s\ell(M)$. Para mais detalhes consultar seção V.I. em [3].

Segue da definição que $r\ell(M)$ e $s\ell(M)$ são no máximo iguais ao tamanho de composição $\ell(M)$ de M, isto é, à dimensão de M como K-espaço vetorial.

Proposição 1.21. *Para todo Λ-módulo M, temos $r\ell(M) = s\ell(M)$.*

Demonstração. Ver Proposição V.1.3. em [3]. □

Definição 1.22. *O tamanho de Loewy de um Λ-módulo M, que denotamos por $\ell\ell(M)$, é o valor comum de $r\ell(M)$ e $s\ell(M)$.*

Observa-se que $\ell\ell(M) \leq \ell(M)$ para todo módulo M e se $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ então $\ell\ell(M) = máx\,\{\ell\ell(M_1), \ldots, \ell\ell(M_m)\}$. A prova do seguinte corolário pode ser encontrada em [2], Corolário VI.5.5.

Corolário 1.23. *Sejam $f : L \longrightarrow M$ um monoformismo e $g : M \longrightarrow N$ um epimorfismo tal que $Im(f) = ker(g)$. Então $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$.*

A seguir daremos algumas definições com o propósito de definir um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais de uma álgebra Λ, que desempenha um papel importante quando queremos definir e estudar álgebras básicas.

Um elemento $e \in \Lambda$ é **idempotente** se $e^2 = e$. O idempotente e é dito **central** se $ae = ea$ para todo $a \in \Lambda$. Dois idempotentes e_1 e e_2 são chamados de **ortogonais** se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.

Um idempotente e é dito **primitivo** se não pode ser escrito como uma soma $e = e_1 + e_2$, onde e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais não nulos de Λ. Se os únicos elementos centrais e idempotentes de uma álgebra Λ são 0 e 1, dizemos que Λ é conexa.

Se Λ é uma K-álgebra de dimensão finita, o Λ-módulo Λ admite uma decomposição em soma direta $\Lambda = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, onde P_1, P_2, $\ldots$, P_n são ideais à direita indecomponíveis de Λ. Segue que $P_1 = e_1\Lambda$, $P_2 = e_2\Lambda$, $\ldots$, $P_n = e_n\Lambda$ onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são idempotentes primitivos ortogonais de Λ tal que $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Reciprocamente todo conjunto de idempotentes com a propriedade anterior induz uma decomposição $\Lambda_\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ com ideais à direita indecomponíveis $P_1 = e_1\Lambda$, $\ldots$, $P_n = e_n\Lambda$.

Tal decomposição é chamada **decomposição indecomponível** de Λ e o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é chamado um **conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais** de Λ. Dizemos que o conjunto $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ é um **conjunto completo** quando a decomposição $\Lambda_\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ for uma decomposição indecomponível.

Seja Λ é uma álgebra e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais de Λ. A álgebra Λ é chamada **básica** se $e_i\Lambda \ncong e_j\Lambda$, para todo $i \neq j$.

Para terminar a seção enunciamos um teorema clássico da Teoria de módulos.

Teorema 1.24. *(Krull-Schmidt) Sejam Λ uma K-álgebra Artiniana de dimensão finita e M um Λ-módulo. Então M é soma direta de submódulos indecomponíveis. Mais ainda, se existem Λ-módulos M_1, M_2, $\ldots$, M_m e N_1, N_2, $\ldots$, N_m tais que*

$$\bigoplus_{j=1}^{m} M_j = M = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i.$$

Então $m = n$ e existe uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $M_j \cong N_{\sigma(j)}$

Demonstração. Ver Teorema I.4.10. em [3]. □

1.2.3 Módulos projetivos e injetivos

Uma sequência $\cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n+1} \longrightarrow \cdots$ tal que cada X_i é um Λ-módulo e cada d_n é um homomorfismo entre Λ-módulos é chamada **exata** se $ker(d_n) = Im(d_{n-1})$ para todo n. Em particular

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é chamada de **sequência exata curta** se f é um monomorfismo, g é um epimorfismo e $ker(g) = Im(f)$.

Dizemos que uma sequência exata curta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ em $mod(\Lambda)$ **cinde** ou é **cindida** se existe um isomorfismo $h : Y \longrightarrow X \oplus Z$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] & X \oplus Z \arrow[r, "\pi"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo $i(x) = (x, 0)$ e $\pi(x, z) = z$. As aplicações i e π assim definidas são conhecidas como injeção e projeção canônica, respectivamente.

Lema 1.25. *(Lema da Serpente - Lema* 3x3*). Suponha que o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "u'"] & M' \arrow[r, "v'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

em $mod(\Lambda)$ tem sequências exatas e é comutativo. Então existe um Λ-homomorfismo de conexão $\delta : ker(h) \longrightarrow coker(f)$ tal que a sequência induzida

$$0 \longrightarrow ker(f) \xrightarrow{u} ker(g) \xrightarrow{v} ker(h) \xrightarrow{\delta} coker(f) \xrightarrow{u'} coker(g) \xrightarrow{v'} coker(h) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Ver Corolário 6.12. em [20]. □

Definição 1.26. *(a) Dizemos que um Λ-módulo P é **projetivo** se, para qualquer epimorfismo $h : M \longrightarrow N$ de Λ-módulos, a aplicação induzida $Hom_\Lambda(P, h) : Hom_\Lambda(P, M) \longrightarrow Hom_\Lambda(P, N)$ é sobrejetora, isto é, para todo epimorfismo $h : M \longrightarrow N$ e para todo $f \in Hom_\Lambda(P, N)$, existe um $f' \in Hom_\Lambda(P, M)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "\exists f'"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

*(b) O dual do item anterior é o Λ-módulo à direita E chamado de **injetivo**, que satisfaz o seguinte: para todo monomorfismo $u : L \longrightarrow M$, a aplicação induzida $Hom_\Lambda(u, E) : Hom_\Lambda(M, E) \longrightarrow Hom_\Lambda(L, E)$ é sobrejetora, isto é, para todo monomorfismo $u : L \longrightarrow M$ e todo $g \in Hom_\Lambda(L, E)$, existe um $g' \in Hom_\Lambda(M, E)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists g'"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Os morfismos f' em (a) e g' em (b) da definição anterior não são únicos.

Sejam L um módulo livre e X uma base de L. Dado um homomorfismo $f : X \longrightarrow N$ em $mod(\Lambda)$, sempre é possível estender f a um único Λ-homomorfismo $\bar{f} : L \longrightarrow N$ tal que $\bar{f}$ restrita a X coincida com f. Pode-se mostrar assim que todo módulo livre L é um módulo projetivo. Este e outros resultados podem ser consultados no capítulo II de [18].

Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i^{l_i}$ uma decomposição em somandos diretos do Λ-módulo M. Dizemos que M é **básico** se $l_i = 1$ e M_i não é projetivo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lema 1.27. *Um Λ-módulo à direita P é projetivo se e somente se existe um Λ-módulo livre F tal que $P \oplus P' \cong F$ para algum Λ-módulo à direita P'.*

Demonstração. Ver Lema I.5.3. em [3]. □

Sejam M e N dois Λ-módulos. Um epimorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado um **epimorfismo essencial** se para todo homomorfismo $g : X \longrightarrow M$ tal que $fg : X \longrightarrow N$ é epimorfismo, g é epimorfismo.

Proposição 1.28. *Sejam M, $N \in mod(\Lambda)$ e $f : M \longrightarrow N$ um epimorfismo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) f é um epimorfismo essencial,

(b) $ker(f) \subseteq rad(M)$,

(c) O epimorfismo induzido $M/rad(M) \longrightarrow N/rad(N)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Ver Proposição I.3.6 em [4]. □

Se M é um Λ-módulo e $f : P_0(M) \longrightarrow M$ é um epimorfismo essencial com $P_0(M)$ um Λ-módulo projetivo, dizemos que f é uma **cobertura projetiva** de M. Quando não houver confusão diremos simplesmente que $P_0(M)$ é cobertura projetiva de M para referirmos à cobertura projetiva $f : P_0(M) \longrightarrow M$ de M. Usaremos o termo **sizigia** de um módulo M para denotar o kernel da cobertura projetiva de M e escrevemos $\Omega(M)$, isto é, $\Omega(M) = ker(f)$.

Proposição 1.29. *Sejam Λ um álgebra Artiniana de dimensão finita e M em $mod(\Lambda)$. Então M sempre admite uma cobertura projetiva $f : P_0(M) \longrightarrow M$. Em particular a cobertura projetiva P_0 é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Ver Teorema 4.2 em [4] e Proposição 1.9.5 em [23]. □

Proposição 1.30. *Um epimorfismo $f : P \longrightarrow M$ com P um Λ-módulo projetivo é uma cobertura projetiva se e somente se o epimorfismo induzido $\overline{f} : P/rad(P) \longrightarrow M/rad(M)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver Proposição 4.3 em [4]. □

Pode-se mostrar que os módulos projetivos de uma álgebra Λ definem uma subcategoria plena de $mod(\Lambda)$. Esta subcategoria é denotada por $\mathcal{P}(\Lambda)$.

Teorema 1.31. *(a) Para cada módulo projetivo P, o epimorfismo natural $P \longrightarrow P/rad(P)$ é uma cobertura projetiva.*

(b) Se P e Q são módulos projetivos, então $P \cong Q$ se e somente se $P/rad(P) \cong Q/rad(Q)$.

(c) O módulo projetivo P é indecomponível se e somente se $P/rad(P)$ é simples.

Demonstração. Ver Teorema I.4.4 em [4]. $\square$

Segue do Teorema 1.31 que se $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ é um conjunto completo de Λ-módulos simples não isomorfos então as suas respectivas coberturas projetivas $P_1, \dots, P_n$ formam um conjunto completo de Λ-módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos em Λ. O seguinte lema nos diz como são os projetivos indecomponíveis em Λ.

Lema 1.32. *Suponha que $\Lambda = e_1\Lambda \oplus \cdots \oplus e_n\Lambda$ é uma decomposição de Λ em submódulos indecomponíveis. Então cada Λ-módulo projetivo indecomponível é isomorfo a um dos módulos $e_i\Lambda$, com $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Ver Lema I.5.3 e Corolário I.5.17 em [3]. $\square$

Proposição 1.33. *Suponha que $\Lambda = e_1\Lambda \oplus \cdots \oplus e_n\Lambda$ é uma decomposição de Λ em submódulos indecomponíveis.*

(a) Todo Λ-módulo simples é isomorfo a um dos módulos

$$S(1) = top(e_1\Lambda), \dots, S(n) = top(e_n\Lambda).$$

(b) Todo Λ-módulo projetivo indecomponível é isomorfo a um dos módulos

$$P(1) = e_1\Lambda, P(2) = e_2\Lambda, \dots, P(n) = e_n\Lambda.$$

Mais ainda, $e_i\Lambda \cong e_j\Lambda$ se e somente se $S(i) \cong S(j)$.

Demonstração. Ver Corolário I.5.17 em [3]. $\square$

Proposição 1.34. *Seja Λ uma K-álgebra e P um Λ-módulo projetivo indecomponível finitamente gerado. Então P/M é um Λ-módulo indecomponível para cada submódulo M de P e $M \neq P$.*

Demonstração. Sejam P um módulo projetivo indecomponível, M um submódulo não nulo de P e $P \neq M$. Se $g : Q_0 \longrightarrow P/M$ é a cobertura projetiva de P/M, mostremos que P é isomorfo a Q_0.

De P ser projetivo existe $f : P \longrightarrow Q_0$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ Q_0 \arrow[r, "g"'] & P/M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sendo π a projeção canônica de P sobre M. Como g é um epimorfismo essencial e gf é um epimorfismo temos que f é epimorfismo. Consideremos a sequência exata curta $0 \longrightarrow ker(f) \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q_0 \longrightarrow 0$. Então $P \cong ker(f) \oplus Q_0$, logo $ker(f) = 0$, pois P é indecomponível. Portanto $P \cong Q_0$, isto é, P é cobertura projetiva de P/M. Pela Proposição 1.30 obtemos o isomorfismo induzido

$$P/rad(P) \cong P/M/rad(P/M).$$

O item (c) no Teorema 1.31 garante que P/M é indecomponível, pois caso contrário $P/rad(P)$ não é simples. □

Analogamente a epimorfismos essenciais e coberturas projetivas definimos monomorfismos essenciais e envolventes injetivas como segue.

Sejam M e N dois Λ-módulos. Um monomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é dito essencial se para todo homomorfismo $h : N \longrightarrow Y$ tal que hf é monomorfismo temos h um monomorfismo.

Se M é um Λ-módulo e $f : M \longrightarrow I_0(M)$ é um monomorfismo essencial com $I_0(M)$ um Λ-módulo injetivo, dizemos que f é uma **envolvente injetiva** de M. Quando não houver confusão diremos que $I_0(M)$ é a envolvente injetiva de M para referirmos à envolvente injetiva $f : M \longrightarrow I_0(M)$ de M. Usaremos o termo **cosizigia** de um módulo M para denotar o cokernel da envolvente injetiva de M e escrevemos $\Omega^{-1}(M)$, isto é, $\Omega^{-1}(M) = coker(f)$.

Proposição 1.35. *Se Λ é uma K-álgebra de dimensão finita, $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo em $mod(\Lambda)$ e $M \neq 0$. Então:*

a) O submódulo $soc(M)$ de M é um submódulo semisimples não zero de M e $f(soc(M)) \subseteq soc(N)$.

b) Se $f(soc(M)) \neq 0$, então $f \neq 0$.

c) O homomorfismo inclusão $soc(M) \subseteq M$ induz um isomorfismo de Λ-módulos $E(soc(M)) \xrightarrow{\cong} E(M)$ das envolventes injetivas $E(soc(M))$ e $E(M)$ de $soc(M)$ e M, respectivamente.

d) O módulo M é indecomponível se e somente se a envolvente injetiva $E(M)$ de M é indecomponível.

Proposição 1.36. *Seja $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i \in mod(\Lambda)$. Então:*

i) M é projetivo se e somente se cada M_i é projetivo.

ii) M é injetivo se e somente se cada M_i é injetivo.

Demonstração. Ver Proposições IV.2.3. e IV.3.2. em [2]. □

O *Teorema de Morita*, que apresentamos a seguir, é uma importante ferramenta para caracterizarmos classes de equivalência de álgebras. Esse resultado nos garante que existe uma família de álgebras tais que as categorias de módulos são equivalentes.

Teorema 1.37. *(Morita) Seja Λ uma K-álgebra de dimensão finita. Então existe uma álgebra básica Γ tal que as suas respectivas categorias $mod(\Lambda)$ e $mod(\Gamma)$ são equivalentes.*

Outras versões do Teorema de Morita, mais gerais, podem ser encontradas em [1] (Seção 21), [2] (Capítulo VIII) e [20] (Teorema 5.55).

1.2.4 Resolução Projetiva

Seja $M \in mod(\Lambda)$. Uma resolução projetiva de M é uma sequência exata

$$\mathbf{P}_M := \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

na qual cada P_n é projetivo.

A partir da resolução projetiva do módulo M, definimos a sua **resolução projetiva apagada $\mathbf{P}^*_M$** sendo a sequência

$$\mathbf{P}^*_M = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

de Λ-módulos projetivos.

Proposição 1.38. *Todo Λ-módulo M tem uma resolução projetiva em $mod(\Lambda)$.*

Basta tomar a sua resolução projetiva livre, que é necessariamente projetiva.

Analogamente, podemos definir a resolução injetiva de um Λ-módulo como uma sequência exata

$$\mathbf{I}_M := 0 \longrightarrow M \xrightarrow{h_0} I_0 \xrightarrow{h_1} I_1 \xrightarrow{h_2} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} I_{n-1} \xrightarrow{h_n} I_n \longrightarrow \cdots$$

na qual cada I_n é um injetivo.

Seja M um Λ-módulo. A **Dimensão Projetiva** de M é o inteiro não negativo $dp(M) = n$ tal que existe uma resolução projetiva

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

de comprimento n, e tal que M não tem uma resolução projetiva de comprimento menor ou igual que $n-1$, se tal número n existir. Caso M não admita uma resolução projetiva de tamanho finito, dizemos que a dimensão projetiva de M é infinita e escrevemos $dp(M) = \infty$. Análogamente se define a dimensão injetiva de um Λ-módulo M, e é denotada por $di(M)$. Observe que para todo Λ-módulo projetivo P, $dp(P) = 0$, e para todo Λ-módulo injetivo I, $di(I) = 0$.

Sejam M um módulo de dimensão projetiva $n > 1$ e

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M. Temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow ker(d_0) \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e além disso $dp(\Omega(M)) = n - 1$. Analogamente, para uma resolução injetiva de M com $di(M) = n > 1$ temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow coker(h_0) \longrightarrow 0$$

e além disso $di(\Omega^{-1}(M)) = n - 1$.

Definimos a **Dimensão global** de uma álgebra Λ, que denotamos por $gldim(\Lambda)$, como o supremo das dimensões projetivas dos Λ-módulos finitamente gerados, isto é,

$$gldim(\Lambda) = sup\,\{dp(M) \mid M \in mod(\Lambda)\}\,.$$

Se este número existir, dizemos que Λ tem dimensão global finita, caso contrário dizemos que Λ tem dimensão global infinita.

A **Dimensão Finitista** da álgebra Λ, que denotamos por $findim(\Lambda)$, é definida como o supremo das dimensões projetivas dos Λ-módulos finitamente gerados que são finitas, isto é,

$$findim(\Lambda) = sup\,\{dp(M) \mid pd(M) < \infty \text{ } e \text{ } M \in mod(\Lambda)\}\,.$$

Note que $findim(\Lambda) \leq gldim(\Lambda)$. O seguinte teorema monstra que para calcular a dimensão global de uma álgebra Artiniana é suficiente calcular a dimensão projetiva dos seus módulos simples. Lembra-se que uma álgebra Artiniana de dimensão finita admite apenas um número finito de Λ-módulos simples não isomorfos, ver Proposição 1.18.

Teorema 1.39. *Seja Λ uma K-álgebra Artiniana. Então*

$$gldim\Lambda = \text{máx}\,\{dp(S) \mid S \text{ é um } \Lambda\text{-módulo simples }\}\,.$$

Demonstração. Ver Teorema X.2.8 em [2]. □

Uma resolução projetiva de M

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

diz-se ser **minimal** se, P_0 é uma cobertura projetiva de M e, para cada $i \geq 1$, P_i é uma cobertura projetiva de $ker(d_{i-1})$. Denotaremos por $\Omega^0(M) = M$ e para cada $n \geq 1$, chamamos n-ésima **sizigia** de M ao $ker(d_{n-1})$ que denotamos por $\Omega^n(M)$, isto é, $\Omega^n = ker(d_{n-1})$ sendo $\Omega^1(M) = \Omega(M)$.

Analogamente, uma resolução injetiva de M

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h_0} I_0 \xrightarrow{h_1} I_1 \xrightarrow{h_2} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} I_{n-1} \xrightarrow{h_n} I_n \longrightarrow \cdots$$

diz-se ser **minimal** se, $I_0(M)$ é uma envolvente injetiva de M e, para cada $i \geq 1$, I_i é uma envolvente injetiva de $coker(h_{i-1})$. Para cada $n \geq 1$, chamamos n-ésima **cosizigia** de M ao $coker(h_{n-1})$ que denotamos por $\Omega^{-n}(M)$, isto é, $\Omega^{-n}(M) = coker(h_{n-1})$.

Lema 1.40. *Sejam Λ uma álgebra Artiniana e M em $mod(\Lambda)$. Se*

$$\boldsymbol{P} = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

e

$$\boldsymbol{P'} = \cdots \longrightarrow P'_2 \longrightarrow P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M \longrightarrow 0.$$

são duas resoluções projetivas de M, com $\boldsymbol{P}$ minimal, existe uma familia $\{f_i : P'_i \longrightarrow P_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ de homomorfismos de Λ-módulos que resulta de 1_M, com cada f_i uma retração, ou seja, existem $g_i : P_i \longrightarrow P'_i$ tal que $f_i g_i = 0_{P_i}$. Se além disso, $\boldsymbol{P'}$ é também minimal, tem-se $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P'}$ isomorfos.

Demonstração. Ver Lema X.1.13 em [2]. □

Fixamos as notações para resolução projetiva minimal e sua respectiva resolução projetiva apagada por $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}_0^*$. Igualmente, para resolução injetiva minimal e sua respectiva resolução injetiva apagada por $\mathbf{I}_0$ e $\mathbf{I}_0^*$.

Teorema 1.41. *Sejam $M \in mod(\Lambda)$ e*

$$\boldsymbol{P}_0 = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de M. Então $dp(M) = n$ se e somente se $P_n \neq 0$ e $P_i = 0$ para todo $i > n$.

Demonstração. Ver Teorema X.1.14 em [2]. □

O seguinte resultado segue como Corolário da Proposição II.2.5. em [4].

Proposição 1.42. *Suponha que $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ é um conjunto completo de Λ-módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos. Sejam $P = \bigoplus_{i=n}^{n} P_i$ e $\Gamma = End_\Lambda(P)^{op}$. Então $Hom_\Lambda(P, -) : \mathcal{P}(\Lambda) \longrightarrow mod(\Gamma)$ é uma equivalência de categorias.*

Encerramos esta seção com dois resultados usados ao longo do trabalho.

Lema 1.43. *(Lema de Schanuel) Dadas as sequências exatas curtas*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde P e P' são Λ-módulos projetivos, então existe um isomorfismo

$$K \oplus P' \cong K' \oplus P.$$

Demonstração. Veja Proposição 3.12 em [20]. □

Sejam M e N em $mod(\Lambda)$ e $P_0(M)$, $P_0(N)$ as suas respectivas coberturas projetivas. Segue do Teorema de Krull-Schmidt 1.24 e do Lema de Schanuel 1.43 que $\Omega(M \oplus N) \cong \Omega(M) \oplus \Omega(N)$.

Lema 1.44. *(Lema da ferradura). Considere o seguinte diagrama em $mod(\Lambda)$*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P_1' \arrow[d] & & P_1'' \arrow[d] & \\
 & P_0' \arrow[d] & & P_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "q"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde as colunas são resoluções projetivas e a sequência horizontal é exata. Então existe uma resolução projetiva de M e uma cadeia de aplicações tal que o diagrama a seguir tem linhas e colunas exatas e é comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "q_0"] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Ver Proposição 6.24 em [20]. □

1.2.5 Funtores Hom e Ext

Lembremos que para cada A em $mod(\Lambda)$, o funtor contravariante $Hom_\Lambda(-, A) : mod(\Lambda) \longrightarrow Ab$ foi definido como segue. Dado M em $mod(\Lambda)$, $Hom_\Lambda(M, A)$ é o grupo abeliano dos homomorfismos de M em A, e para $f \in Hom_\Lambda(M, N)$ em $mod(\Lambda)$, temos $Hom_\Lambda(f, A) : Hom_\Lambda(N, A) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, A)$ definido por $Hom_\Lambda(f, A)(g) = f^*(g) = gf$, para todo $g \in Hom_\Lambda(N, A)$.

A seguinte proposição mostra que o funtor Hom é exato à esquerda.

Proposição 1.45. *Seja* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em* $mod(\Lambda)$ *e* A *um* Λ*-módulo dado. A seguinte sequência é uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(N, A) \xrightarrow{g^*} Hom_\Lambda(L, A) \xrightarrow{f^*} Hom_\Lambda(M, A).$$

Demonstração. Ver Proposição V.I.3 em [18]. □

Corolário 1.46. *Seja* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em* $mod(\Lambda)$. *Então* $f^* : Hom(N, A) \longrightarrow Hom(L, A)$ *é sobrejetora se e somente se o módulo* A *é injetivo.*

Considere $\mathbf{P}_M = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$ a resolução projetiva minimal de $M \in mod(\Lambda)$ e $\mathbf{P}_M^*$ a sua resolução apagada. Ao aplicarmos o funtor $Hom_\Lambda(-, A)$ à resolução apagada de M, $\mathbf{P}_M^*$, obtemos

$$Hom_\Lambda(\mathbf{P}_M^*, A) = 0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P_0, A) \xrightarrow{d_1^*} Hom_\Lambda(P_1, A) \xrightarrow{d_2^*} Hom_\Lambda(P_2, A) \longrightarrow \cdots.$$

Assim, a *n-ésima cohomologia* de $Hom_\Lambda(\mathbf{P}_M^*, A)$ está dada por

$$H^n(Hom_\Lambda(\mathbf{P}_M^*, A)) = ker(d_n^*)/Im(d_{n-1}^*)$$

para todo $n \geq 1$. Pode-se provar que $H^n(Hom_\Lambda(\mathbf{P}_M^*, A))$ está na categoria Ab. Definimos o funtor $Ext^n(-, A) : mod(\Lambda) \longrightarrow Ab$ como segue. Seja M em $mod(\Lambda)$ então $Ext^n_\Lambda(-, A)(M) = Ext^n_\Lambda(M, A) = H^n(Hom_\Lambda(\mathbf{P}_M^*, A))$. Sejam M e N em $mod(\Lambda)$ e $f \in Hom_\Lambda(M, N)$. Então

$$Ext^n(f) : H^n(Hom_\Lambda(\mathbf{P}_N^*, A)) \longrightarrow H^n(Hom_\Lambda(\mathbf{P}_N^*, A))$$

é definido por $Ext^n(f)(\alpha_n + Im(q_{n-1}^*)) = f_n^*(\alpha_n) + Im(d_{n-1}^*) = \alpha_n f_n + Im(d_{n-1}^*)$ para todo α_n em $ker(q_n^*)$.

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Teorema 6.61 em [20] e para uma melhor compreensão recomendamos uma leitura das Seções 6.1 e 6.2, Capitulo 6 em [20]. Em particular, a definição da *n-ésima homologia* de um complexo (pag. 329 em [20]) e as Proposições 6.8, 6.9 e 6.10 em que se define o *homomorfismo conector* ∂_n.

Proposição 1.47. *Seja* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em* $mod(\Lambda)$. *Então, para todo* A *em* $mod(\Lambda)$, *a seguinte sequência de* Ab *é exata*

$$0 \longrightarrow Ext^0(N, A) \xrightarrow{Ext^0(g,A)} Ext^0(L, A) \xrightarrow{Ext^0(f,A)} Ext^0(M, A) \xrightarrow{\partial_0} Ext^1(N, A) \xrightarrow{Ext^1(g,A)} \cdots$$

com $Ext^0_\Lambda(-, A) \cong Hom_\Lambda(-, A)$ *e* ∂_n *o homomorfismo conector.*

Vejamos alguns resultados sobre o funtor Ext.

Lema 1.48. *Sejam* $\boldsymbol{P}_M = \cdots \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ *a resolução projetiva minimal de* M *e* M, N *em* $mod(\Lambda)$. *Então temos os seguintes* *isomorfismos funtoriais:*

$$Ext^{n+1}(M,N) \cong Ext^{n}(\Omega(M),N) \cong \cdots \cong Ext^{1}(\Omega^{n}(M),N).$$

Teorema 1.49. *Sejam Λ uma K-álgebra, M um Λ-módulo e $n \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes.*

(a) $dp(M) \leq n$.

(b) $Ext^{k}_{\Lambda}(M,-) = 0$ *para todo* $k > n$.

(c) $Ext^{n+1}_{\Lambda}(M,-) = 0$.

(d) Para toda sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega^{n}(M) \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

com P_i's projetivos, $\Omega^{n}(M)$ é projetivo.

Demonstração. Ver Teorema X.1.2. em [2]. □

Segue do Teorema 1.49 que $dp(M) = sup\,\{n \mid Ext^{n}_{\Lambda}(M,-) \neq 0\}$. O seguinte Corolário é também uma consequência imediata desse Teorema.

Corolário 1.50. *Seja $(M_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de Λ-módulos, então:*

$$dp\Big(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}(M_i)\Big) = sup\,\{dp(M_i) \mid i \in \mathcal{I}\}\,.$$

O dual do Teorema 1.49 se define através do funtor contravariante Ext e a dimensão injetiva como segue.

Teorema 1.51. *Sejam Λ uma K-álgebra, N um Λ-módulo e $n \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes.*

(a) $di(N) \leq n$.

(b) $Ext^{k}_{\Lambda}(-,N) = 0$ *para todo* $k > n$.

(c) $Ext^{n+1}_{\Lambda}(-,N) = 0$.

(d) Para toda sequência exata

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow \Omega^{-n}(N) \longrightarrow 0$$

com I_i's injetivos, $\Omega^{-n}(N)$ é injetivo.

Do Teorema 1.51 tem-se analagoamente $di(M) = sup\,\{n \mid Ext^{n}_{\Lambda}(-,N) \neq 0\}$.

O seguinte resultado segue diretamente do fato do funtor $Ext^{i}(-,A)$ ser um funtor aditivo (ver Proposição 6.8 e o Teorema 6.52 em [20]).

Proposição 1.52. *Seja β um morfismo em $mod(\Lambda)$. Se β é nilpotente, isto é, existe n tal que $\beta^{n} = 0$ então $Ext(\beta,M)$ é nilpotente.*

1.3 Quivers e álgebras de caminhos

Esta seção é dedicada a introduzir uma estrutura gráfica conhecida como quiver e dotá-la de uma estrutura de K-álgebra para mostrarmos depois a passagem entre a categoria dos módulos de uma álgebra Artiniana de dimensão finita Λ e a categoria das representações do seu quiver associado $(Q, \mathcal{I})$. Aqui o Teorema de Morita e Teorema de Gabriel são fortemente usados. Nos baseamos nas Seções II e III de [3].

1.3.1 Quiver

Definição 1.53. *Um **quiver** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é uma quadrupla consistindo de dois conjuntos: Q_0, no qual os elementos são chamados de vértices, e Q_1, no qual os elementos são chamados de flechas; e duas aplicações $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ as quais associam a cada flecha $\alpha \in Q_1$ seu **inicio** $s(\alpha) \in Q_0$ e o seu **final** $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente.*

Uma flecha $\alpha \in Q_1$ de inicio $a = s(\alpha)$ e final $b = t(\alpha)$ é usualmente denotada por $\alpha : a \to b$. Denotaremos o quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ por $Q = (Q_0, Q_1)$ ou apenas por Q quando não houver confusão.

Alguns exemplos de quivers são:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \circ & & & \\ & \circ \arrow[ul] \arrow[r] & \circ & \circ \arrow[l] \\ \circ \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \circ & \circ \arrow[l] \arrow[r, shift left] & \circ \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \circ \arrow[loop right] \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} \circ \arrow[loop left] \arrow[loop right] \end{tikzcd} \quad .$$

Um **subquiver** Q' de um quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é um quiver definido por $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ tal que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ e as restrições $s|_{Q'_1}$, $t|_{Q'_1}$ de s, t a Q'_1 são respectivamente iguais a s', t' (isto é, se $\alpha : a \to b$ é uma flecha em Q_1 tal que $\alpha \in Q'_1$ e a, $b \in Q'_0$, então $s'(\alpha) = a$ e $t'(\alpha) = b$); o subquiver Q' é chamado pleno se Q'_1 é igual ao conjunto de todas as flechas em Q_1 as quais os inicios e finais pertencem ao Q'_0, isto é,

$$Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in Q'_0 \text{ e } t(\alpha) \in Q'_0\}$$

Em particular, um subquiver pleno é determinado unicamente pelo seu conjunto de vértices.

Um quiver Q diz-se **finito** se Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos e é dito **conexo** se o grafo associado obtido pelo "esquecimento" da orientação é conexo. Note que se umas das funções s ou t é sobrejetora, o quiver é conexo.

Daqui em diante, $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ denotará um quiver finito e conexo, a menos que seja dito o contrário. Sejam a, $b \in Q_0$. Um **caminho** w de comprimento $\ell \geq 1$ com início em a e final em b, ou quando não houver confusão, de a a b, é uma sequência de flechas

$$w = (a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \mid b)$$

onde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $1 \leq k \leq \ell$, $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para cada $1 \leq k < \ell$ e finalmente $t(\alpha_\ell) = b$. O caminho w é denotado por $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\ell$ e pode ser visualizado como segue

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \longrightarrow a_{\ell-1} \xrightarrow{\alpha_\ell} a_\ell = b.$$

Denotamos por Q_ℓ o conjunto de todos os caminhos em Q de comprimento ℓ. Também associamos a cada vértice $a \in Q_0$ um caminho de comprimento $\ell = 0$ chamado de **caminho trivial** ou **estacionario** a a, que denotamos por $\varepsilon_a = (a \mid \mid a)$, ou seja, tem início e final no vértice a. Note que os caminhos de comprimentos 0 e 1 são correspondências bijetivas com elementos de Q_0 e Q_1, respectivamente.

Um caminho de comprimento $\ell \geq 1$ é chamado de **ciclo** quando o seu inicio e final coincidem. Um ciclo de comprimento 1 é chamado de **loop**. Se um quiver não contém ciclos, é chamado de **acíclico**.

Dizemos que $a \in Q_0$ é um **predecessor** de $b \in Q_0$ se existe $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = a$ e $t(\alpha) = b$, e $c \in Q_0$ é um **sucessor** de $b \in Q_0$ se existe $\beta \in Q_1$ tal que $t(\beta) = c$ e $s(\beta) = b$.

Quando um vértice b não tiver predecessores dizemos que b é **fonte** e quando não tiver sucessores dizemos que é b **poço**.

1.3.2 Álgebra de Caminhos

Uma **álgebra de caminhos** KQ de um quiver Q é a K-álgebra à qual associamos o K-espaço vetorial que tem como base o conjunto de todos os caminhos $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|b)$ de comprimento $\ell \geq 0$ em Q e tal que o produto de dois vetores da base $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|b)$ e $(c|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d)$ é definido por

- 0 se $b \neq c$,
- $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \mid b)$ caso contrário.

Logo, um elemento da K-álgebra KQ é uma combinação linear de caminhos em Q com coeficientes em K. Note que o K-espaço vetorial KQ assim definido, podemos reescrevê-lo como uma decomposição em soma direta,

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

onde, para cada $\ell \geq 0$, KQ_ℓ é o subespaço de KQ gerado pelo conjunto Q_ℓ de todos os caminhos de comprimento ℓ.

Por exemplo, considere o quiver

$$Q : \underset{1}{\cdot} \circlearrowright \alpha \, .$$

A base que define a álgebra de caminhos KQ é

$$\{\varepsilon_1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^\ell, \ldots\}$$

e a multiplicação dos vetores da base está dada por

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1\alpha^\ell = \alpha^\ell\varepsilon_1 = \alpha^\ell & \text{para todo } \ell \geq 0, \text{ e} \\ \alpha^\ell\alpha^k = \alpha^{\ell+k} & \text{para todo } \ell, k \geq 0, \end{array}$$

onde $\alpha^0 = \varepsilon_1$. Assim, KQ é isomorfa à álgebra $K[t]$ dos polinômios em uma indeterminada t, o isomorfismo sendo induzido pela aplicação K-linear tal que

$$\varepsilon_1 \longmapsto 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha \longmapsto t.$$

Lema 1.54. *Seja Q um quiver e KQ a sua álgebra de caminhos. Então:*

a) KQ é uma álgebra associativa,

b) KQ tem um elemento identidade se e só se Q_0 é finito, e

c) KQ é de dimensão finita se e só se Q é finito e acíclico.

Demonstração. Ver Lema II.1.4. em [3]. □

Seja Q um quiver finito. A álgebra de caminhos KQ é conexa se e somente se o quiver Q é conexo.

Seja Q um quiver finito e conexo. Um ideal bilateral (um ideal à esquerda e à direita) de uma álgebra de caminhos KQ gerado (como um ideal) pelas flechas de Q é chamado de **ideal de flechas** de KQ e é denotado por $\mathcal{R}_Q$, ou simplesmente por $\mathcal{R}$, quando não houver confusão.

Observação 1.55. *Note que existe uma decomposição em soma direta*

$$\mathcal{R}_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

do K-espaço vetorial $\mathcal{R}_Q$, onde KQ_ℓ é o subespaço de KQ gerado pelo conjunto Q_ℓ de todos os caminhos de comprimento ℓ. Denotaremos por $\mathcal{R}_Q^\ell$ o ideal de KQ, gerado como um K-espaço vetorial por todos os caminhos de comprimento maior ou igual a ℓ.

Se Q é acíclico, então $rad(KQ) = \mathcal{R}$. Note por exemplo que, para o quiver cíclico

$$Q : \underset{1}{\cdot} \circlearrowright \alpha \, .$$

temos $KQ = K[t]$, logo $rad(KQ) = 0$. Enquanto $\mathcal{R}_Q = \bigoplus_{t>0} K_{\alpha^\ell}$ como K-espaço vetorial é não nulo.

1.3.3 Ideais admissíveis e quociente de álgebras de caminhos

Definição 1.56. *Seja Q um quiver finito e $\mathcal{R}$ o ideal de flechas da álgebra de caminhos KQ. Um ideal bilateral $\mathcal{I}$ de KQ é dito **admissível** se existe um $m \geq 2$ tal que*

$$\mathcal{R}^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}^2.$$

Se $\mathcal{I}$ é um ideal admissível de KQ, o par $(Q, \mathcal{I})$ é chamado **quiver limitado**. A álgebra quociente $KQ/\mathcal{I}$ é dita álgebra do quiver limitado $(Q, \mathcal{I})$.

Observação 1.57. *Se em particular, Q é acíclico, qualquer ideal contido em $\mathcal{R}^2$ é admissível.*

Exemplo 1.58. *a) Para qualquer quiver finito Q e qualquer $m \geq 2$, o ideal $\mathcal{R}^m$ é admissível. Basta ver que o ideal de flechas satisfaz*

$$\cdots \subseteq \mathcal{R}^m \subset \cdots \subset \mathcal{R}^3 \subset \mathcal{R}^2$$

b) O ideal zero é admissível em KQ se e somente se Q é acíclico. Se o ideal zero é admissível, existe um $m \geq 2$ tal que $\mathcal{R}^m = 0$, isto é, qualquer produto de m flechas em KQ é zero, o que acontece se e somente se Q é acíclico.

c) Seja Q o quiver

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{2}{\cdot} \arrow[dl, "\beta"'] & \\
\underset{1}{\cdot} & & \underset{4}{\cdot} \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & \underset{3}{\cdot} \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd},$$

o ideal $\mathcal{I}_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ da K-álgebra KQ é admissível, pois Q é acíclico e $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{R}^2$. Se considerarmos, porém, o ideal $\mathcal{I}_2 = \langle \beta\alpha - \lambda \rangle$, temos que $\mathcal{I}_2$ não é admissível. Suponha que o é, temos então que $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{R}^2$. Como $\beta\alpha - \lambda \in \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{R}^2$ então $(\beta\alpha - \lambda) - \beta\alpha = -\lambda \in \mathcal{R}^2$, o qual é uma contradição. Logo, $\mathcal{I}_2$ é não admissível.

Definição 1.59. *Seja Q um quiver. Uma **relação** em Q com coeficientes em K é uma combinação K-linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2, tendo o mesmo começo e final.*

Assim, uma relação ρ é um elemento de KQ da seguinte forma

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

onde os λ_i são escalares (não todos zero) e os w_i são caminhos em Q de comprimento maior ou igual a 2, tal que, se $i \neq j$, então o começo (ou final, respectivamente) de w_i coincide com o de w_j.

Se $m = 1$, a relação anterior chama-se **relação monomial** ou simplesmente **relação zero**. Se é da forma $w_1 - w_2$ (onde w_1, w_2 são dois caminhos) é chamada de **relação comutativa**.

Lema 1.60. *Seja Q um quiver finito e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de KQ. A álgebra de quiver limitada $KQ/\mathcal{I}$ é conexa se e só se Q é um quiver conexo.*

Demonstração. Ver Lema II.2.5. em [3]. □

Proposição 1.61. *Seja Q um quiver finito e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de KQ. A álgebra de quiver limitada $KQ/\mathcal{I}$ é de dimensão finita.*

Demonstração. Ver Proposição II.2.6. em [3]. □

1.3.4 O quiver de uma álgebra de dimensão finita

Vejamos agora que de maneira natural podemos associar a uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita, um quiver finito e conexo. Em particular, as álgebras básicas são isomorfas a álgebras do tipo $KQ/\mathcal{I}$ com Q um quiver finito e conexo, e um ideal admissível $\mathcal{I}$. Este resultado é conhecido como o **Teorema de Gabriel**. Note que do Teorema de Morita 1.37, a hipótese de ser básica resulta não ser uma restrição muito forte para os nossos objetos de estudo.

Definição 1.62. *Sejam Λ uma K-álgebra básica, conexa e de dimensão finita e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo de ortogonais idempotentes primitivos. O **quiver ordinário** associado a Λ, denotado por Q_Λ, está definido como segue:*

(a) *Os vértices de Q_Λ são números $1, 2, \ldots, n$, os quais estão em correspondência biunívoca com os idempotentes $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

(b) *Dados dois vértices a e b de Q_Λ. As flechas $\alpha : a \to b$ estão em correspondência biunívoca com os vetores em uma base do K-espaço vetorial $e_a(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_b$.*

Como estamos considerando Λ de dimensão finita, o espaço vetorial $e_a(rad(\Lambda)/rad^2(\Lambda))e_b$ é de dimensão finita, logo Q_Λ é finito. Na Seção II.3 em [3], mostra-se com detalhes que o quiver Q_Λ não depende da escolha do conjunto completo de ortogonais idempotentes de Λ que temos escolhido, assim como outros resultados sobre o quiver ordinário Q_Λ que podem ser consultados, como o quiver Q_Λ ser conexo sempre que Λ seja básica, conexa e de dimensão finita.

Lema 1.63. *Sejam Q um quiver finito conexo, $\mathcal{I}$ um ideal admissível de KQ e $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$. Então $Q_\Lambda = Q$.*

Demonstração. Ver Lema II.3.6 em [3]. □

O seguinte teorema nos fornece uma maneira de estudar as representações de álgebras associativas conexas de dimensão finita através das representações de suas álgebras de caminhos de quivers limitadas, de quivers finitos e conexos.

Teorema 1.64. ***Teorema de Gabriel***

Seja K um corpo algebricamente fechado. Toda K-álgebra Λ de dimensão finita básica e conexa é isomorfa a uma álgebra $KQ/\mathcal{I}$, com Q um quiver finito e $\mathcal{I}$ um ideal admissível.

Demonstração. Ver Teorema II.3.7 em [3]. □

1.3.5 Representações

Como já vimos, os quivers oferecem um caminho conveniente para visualizar as álgebras de dimensão finita. Desta vez, explicaremos como os quivers podem ser usados para visualizar alguns tipos de módulos.

1.3.6 Representações de quivers limitados

Definição 1.65. *Seja Q um quiver finito. Uma* ***representação K-linear****, ou, mais resumidamente, uma* ***representação*** *M de Q é definida pela seguinte informação:*

a) A cada vértice a em Q_0 é associado um K-espaço vetorial M_a.

b) A cada flecha $\alpha : a \to b$ em Q_1 é associada uma aplicação K-linear $\varphi_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$.

Tal representação é denotada como $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$, ou simplesmente $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. A representação $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ é chamada de **dimensão finita** se cada espaço vetorial M_a é de dimensão finita.

Sejam $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ e $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ duas representações de Q. Um **morfismo** (de representações) $f : M \longrightarrow M'$ é uma familia $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ de aplicações K-lineares $(f_a : M_a \longrightarrow M'_a)_{a\in Q_0}$ que são compatíveis com a estrutura das aplicações φ_α, isto é, para cada flecha $\alpha : a \to b$, temos $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ ou equivalentemente, que o seguinte quadrado é comutativo

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"'] & M'_b \end{tikzcd}$$

Sejam $f : M \longrightarrow M'$ e $g : M' \longrightarrow M''$ dois morfismos de representações de Q, onde $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ e $g = (g_a)_{a\in Q_0}$. A sua composição está definida pela família $gf = (g_a f_a)_{a\in Q_0}$, que a sua vez é um morfismo de M em M''.

Temos assim à categoria de representações K-lineares de Q, que denotamos por $Rep(Q)$. Denotamos por $rep(Q)$ a subcategoria plena de $Rep(Q)$ consistindo das representações de dimensão finita, ou seja, se cada M_a é um K-espaço vetorial de dimensão finita.

Exemplo 1.66. *Seja Q o quiver (de Kronecker)*

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\cdot} & \underset{2}{\cdot} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

Uma representação M de Q está dada por:

$$\begin{tikzcd} K^2 & K \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] \end{tikzcd}$$

Uma outra representação M' de Q está dada por:

$$\begin{tikzcd} K^2 & K^2 \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"] \end{tikzcd}$$

As duas representações são de dimensão finita.
Temos um morfismo de $M \longrightarrow M'$ definido por:

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[d, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] & K \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"] \\ K^2 & K^2 \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"] \end{tikzcd}$$

pois $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Definimos a soma direta de duas representações pontualmente, em cada vértice. Uma representação é dita indecomponível se é não nula e para cada decomposição $M = M' \oplus M''$ temos $M' = 0$ ou $M'' = 0$, caso contrário dizemos que M é decomponível.

Observação 1.67. *As K-categorias $Rep_K(Q)$ e $rep_K(Q)$ são abelianas. Pode-se encontrar uma demonstração com detalhes em [3] (Lema* III.1.3. *em [3]).*

Definição 1.68. *Seja Q um quiver finito e $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ uma representação de Q. Para qualquer caminho não trivial $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ de a a b em Q, definimos a* ***avaliação*** *de M sobre o caminho w a aplicação K-linear de M_a a M_b definida por:*

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_l}\varphi_{\alpha_{l-1}}\cdots\varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}$$

A definição de **avaliação** pode ser estendida a combinações K-lineares de caminhos com um começo comum, e um final comum; assim, seja

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

tal combinação, onde $\lambda_i \in K$ e w_i é um caminho em Q, para cada i, então

$$\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}.$$

Podemos agora definir uma noção de representação de um quiver limitado. Seja Q um quiver finito e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de KQ. Uma representação $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q é dita que **satisfaz as relações** em $\mathcal{I}$, ou limitada por $\mathcal{I}$, se temos

$$\varphi_\rho = 0 \ \text{ para todas as relações } \rho \in \mathcal{I}.$$

Denotamos $Rep_K(Q,\mathcal{I})$ e $rep_K(Q,\mathcal{I})$ as subcategorias plenas de $Rep_K(Q)$ e $rep_K(Q)$, respectivamente, cujas representações de Q satisfazem as relações em $\mathcal{I}$.

Exemplo 1.69. *Seja Q o quiver*

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{3}{\cdot} \arrow[dl, "\beta"'] & \\
\underset{1}{\cdot} & \underset{2}{\cdot} \arrow[l, "\lambda"'] & & \underset{5}{\cdot} \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & & \underset{4}{\cdot} \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

com a relação comutativa $\beta\alpha = \delta\gamma$.
Consideremos as representações M e N de Q dadas por:

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] & \\
K & K^2 \arrow[l, "{[1\ 1]}"'] & & 0, \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & K \arrow[ul, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "1"'] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

respectivamente. Podemos ver que M e N satisfazem a relação $\beta\alpha = \delta\gamma$. Por outro lado, um exemplo de uma representação de Q que não satisfaz a relação $\beta\alpha = \delta\gamma$ é

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dl] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K. \arrow[ul] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

O seguinte teorema nos permite e facilita estudar a categoria $mod(\Lambda)$ dos

Λ-módulos à direita de uma álgebra associativa Λ de dimensão finita através da categoria $rep(Q, \mathcal{I})$ de representações de um quiver finito e conexo Q, sendo $\mathcal{I}$ um ideal admissível.

Teorema 1.70. *Seja $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$, onde Q é um quiver finito conexo e $\mathcal{I}$ é um ideal admissível de KQ. Existe uma equivalência de categorias*

$$\mathcal{F} : \ Mod(\Lambda) \xrightarrow{\cong} Rep_K(Q, \mathcal{I})$$

que se restringe a uma equivalência de categorias $\mathcal{F} : \ mod(\Lambda) \xrightarrow{\cong} rep_K(Q, \mathcal{I})$.

Demonstração. Ver Teorema III.1.6 em [3]. □

1.3.7 Os módulos simples, projetivos e injetivos

Tendo $(Q, \mathcal{I})$ um quiver conexo finito com $\#(Q_0) = n$ e $\mathcal{I}$ um ideal admissível. Seja $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ uma K-álgebra básica conexa de dimensão finita com identidade e tendo $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ como radical, com $\mathcal{R}$ o ideal de flechas de KQ e $\{e_a | a \in Q_0\}$ como conjunto completo de ortogonais idempotentes primitivos.

Seja $a \in Q_0$; denotamos por $S(a)$ a representação $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q definida como segue

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad b \neq a \\ K & \text{se} \quad b = a \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \qquad \text{para todo} \quad \alpha \in Q_1$$

Note que $S(a)$ é uma representação limitada de $(Q, \mathcal{I})$ para qualquer ideal admissível $\mathcal{I}$. Dizemos que Λ-módulo simples $S(a)$ é o Λ-módulo simples correspondente ao vértice $a \in Q_0$.

Lema 1.71. *Seja $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ a álgebra de quiver limitada de $(Q, \mathcal{I})$.*

(a) Para qualquer $a \in Q_0$, $S(a)$ visto como um Λ-módulo é isomorfo ao top do Λ-módulo projetivo indecomponível $e_a\Lambda$.

(b) O conjunto $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo dos Λ-módulos simples.

Demonstração. Ver Lema III.2.1 em [3]. □

Em contraste ao item (b) de 1.71, observe por exemplo que para a álgebra KQ definida pelo quiver $Q = \underset{1}{\cdot} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \underset{2}{\cdot}$, os KQ-módulos $S(1)$, $S(2)$ e $S_\lambda = (\ K \underset{\lambda}{\overset{1}{\rightleftarrows}} K\ )$ são simples com $\lambda \in K$. Pode-se ver que $S_\lambda \ncong S_\mu$ quando $\lambda \neq \mu$. Ou seja, toda álgebra de caminhos KQ de um quiver finito Q com ciclos orientados tem infinitos módulos simples não isomorfos de dimensão finita.

Seja $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ. A decomposição $\Lambda_\Lambda = \bigoplus_{a \in Q_0} e_a\Lambda$ é uma decomposição de Λ_Λ em soma direta de Λ-módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois. A seguir descrevemos os módulos projetivos e injetivos de Λ.

Lema 1.72. *Seja $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ a álgebra de quiver limitada de $(Q, \mathcal{I})$. Os projetivos $P(a) = e_a\Lambda$ estão dados pelas representações $(P(a)_b, \varphi_\alpha)_{b \in Q_0, \varphi \in Q_1}$ as quais estão definidas como segue:*

- *Para cada $a \in Q_0$, $P(a)_b$ é o K-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de a para b , isto é, $P(a)_b = K\{w + \mathcal{I} \mid w : a \to b\}$.*
- *Para cada caminho $\alpha : b \to c$, a aplicação K-linear $\varphi_\alpha : P(a)_b \longrightarrow P(a)_c$ está dada pela multiplicação à direita por $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$.*

Dizemos que $P(a)$ é o Λ-módulo projetivo indecomponível correspondente ao vértice a. Encerramos descrevendo os Λ-módulos injetivos indecomponíveis.

Lema 1.73. *Seja $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ a álgebra de quiver limitada de $(Q, \mathcal{I})$. Então os Λ-módulos injetivos indecomponíveis $I(a)$ estão dadas pelas representações $(I(a)_b, \varphi_\beta)_{b \in Q_0, \varphi \in Q_1}$ definidas como segue:*

- *Para cada $a \in Q_0$, $I(a)_b$ é o K-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de b para a, isto é, $I(a)_b = K\{w + \mathcal{I} \mid w : b \to a\}$.*
- *Para cada caminho $\beta : b \to c$, a aplicação K-linear $\varphi_\beta : P(a)_c \to P(a)_b$ está dada pela multiplicação à esquerda de $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$.*

Dizemos que $I(a)$ é o Λ-módulo injetivo indecomponível correspondente ao vértice a. Segue da forma em que estamos construindo os módulos injetivos que $soc(S(a)) \cong I(a)$, para cada $a \in Q_0$.

Capítulo 2

Funções de Igusa-Todorov

Neste capítulo introduzimos as funções de Igusa-Todorov denotadas por ϕ e ψ, assim como as dimensões homológicas definidas por elas que chamaremos ϕdim e ψdim, respectivamente. Daqui em diante, Λ denota uma K-álgebra Artiniana de dimensão finita. Nos baseamos em [11], [12] e [14].

2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentamos dois resultados importantes para definir as funções de Igusa-Todorov e familiarizarmos com as notações que serão utilizadas ao longo do trabalho.

O seguinte lema é usado por Igusa e Todorov em [12] para definir a função ϕ.

Lema 2.1. *(Lema de Fitting) Sejam M um módulo sobre uma álgebra Noetheriana Λ, $f : M \longrightarrow M$ um endomorfismo de M e X um submódulo de M finitamente gerado. Então:*

a) Existe um inteiro n tal que $f^m(X)$ é isomorfo a $f^{m+1}(X)$, para todo $m \geq n$. Esse menor n denota-se por $\eta_f(X)$.

b) Se Y é um submódulo de X então $\eta_f(Y) \leq \eta_f(X)$.

c) Se Λ é uma álgebra Artiniana e $X = M$ existe uma decomposição em soma direta $X = Y \oplus Z$ tal que $Z = ker(f^m)$ e $Y = Im(f^m)$ para todo $m \geq \eta_f(X)$.

Demonstração. (a) Seja $f \in End(M)$. Consideremos a restrição de f sobre X

$$(*)\ X \xrightarrow{f|_X} f(X) \xrightarrow{f|_{f(X)}} f^2(X) \xrightarrow{f|_{f^2(X)}} \cdots \longrightarrow f^m(X) \xrightarrow{f|_{f^m(X)}} f^{m+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Temos assim a cadeia ascendente de submódulos de X:

$$(**)\ ker(f|_X) \subseteq ker(f|_{f(X)}) \subseteq \cdots \subseteq ker(f|_{f^m(X)}) \subseteq ker(f|_{f^{m+1}(X)}) \subseteq \cdots \subseteq X.$$

Como Λ é uma álgebra Noetheriana e X é f.g., então X é Noetheriano. Logo a cadeia ascendente de submódulos de X, $(**)$, estaciona, isto é, existe um menor inteiro positivo $n_f(X)$ tal que $ker(f\big|_{f^m(X)}) = ker(f\big|_{f^{m+1}(X)})$ para todo $m \geq n_f(X)$. Seja $\eta_f = \eta_f(X)$ provemos agora que:

$$ker(f|_{f^{\eta_f}(X)}) = kerf \cap f^{\eta_f}(X) = 0.$$

Seja $x \in kerf \cap f^{\eta_f}(X)$. Então $f(x) = 0$ e $x = f^{\eta_f}(y)$, para algum $y \in X$. Daí, $0 = f(x) = f(f^{\eta_f}(y)) = f^{\eta_f+1}(y)$, logo $y \in ker(f^{\eta_f+1}|_X) = ker(f^{\eta_f}|_X)$. Portanto, $f^{\eta_f}(y) = 0$ implicando $x = 0$. Então a aplicação:

$$f\big|_{f^{\eta_f}(X)} : f^{\eta_f}(X) \longrightarrow f^{\eta_f+1}(X),$$

é um isomorfismo e assim $f^m(X) \cong f^{m+1}(X)$, $\forall m \geq \eta_f(X)$.

b) Sejam Y um submódulo de X e $\eta_f(X)$ tal que $f^m(X) \cong f^{m+1}(X)$ para todo $m \geq \eta_f(X)$. Então $f^m(Y) \cong f^{m+1}(Y)$ para todo $m \geq \eta_f(X)$. Como

$$\eta_f(Y) = min\left\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid f^m(Y) \cong f^{m+1}(Y)\right\},$$

temos $\eta_f(Y) \leq \eta_f(X)$.

c) Suponhamos que Λ seja uma álgebra Artiniana. Então X é Artiniano e daí existe n tal que $Im(f^k) = Im(f^{k+1})$ para todo $k \geq n$. Note que $n \leq \eta_f(X)$. Temos também $ker(f^k) = ker(f^{k+1})$ para todo $k \geq n_f$. Vejamos que $ker(f^m) \cap Im(f^m) = 0$ para todo $m \geq n_f$.
Seja $x \in ker(f^m) \cap Im(f^m)$ com $m \geq n_f$ então $f^m(x) = 0$ e $m = f^k(y)$ para algum $y \in X$. Assim:

$$f^{2m}(y) = f^m(f^m(y)) = f^m(x) = 0,$$

donde $y \in ker(f^{2m}) = ker(f^m)$ ou seja $x = f^m(y) = 0$.

Basta mostrar então que todo elemento $c \in X$ é da forma $x + y$ com $x \in ker(f^m)$ e $y \in Im(f^m)$, e $m \geq n_f$.

Seja $c \in X$. Então $f^m(c) \in Im(f^m) = Im(f^{2m})$ logo $f^m(c) = f^{2m}(x)$ para algum $x \in X$. Assim:

$$f^m(c - f^m(x)) = f^m(c) - f^{2m}(x) = 0,$$

o que implica $c - f^m(x) \in ker(f^m)$. Portanto, $M = ker(f^m) \oplus Im(f^m)$ para todo $m \geq n_f(X)$.

□

Teorema 2.2. *Sejam Λ um domínio de ideais principais e M um Λ-módulo livre de posto finito r. Então todo submódulo de M é livre de posto menor ou igual a r.*

Demonstração. Seja Λ um domínio de ideais principais, isto é, todo ideal de Λ é principal. Faremos a demonstração por indução sobre r, ou seja, se M é um módulo livre de posto r então todo submódulo de M é livre e tem posto menor ou igual a r.

Para $r = 1$ temos $M \cong \Lambda$. Seja N um submódulo de M, como N é ideal existe $a \in N$ tal que $N = a\Lambda$, donde $N = 0$ ou $N \cong \Lambda$.

Suponhamos o resultado válido para todo módulo M com posto $k < r$. Seja M um módulo de posto r. Então podemos decompor M em uma soma direta como segue:

$$M \cong M_{r-k} \oplus M_k,$$

sendo $M_{r-k} = \underbrace{\Lambda \oplus \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda}_{(r-k)-vezes}$ e $M_k = \underbrace{\Lambda \oplus \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda}_{k-vezes}$, com $k > 0$. Seja N um submódulo de M, obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_k \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "\pi"] & M_{r-k} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker(\overline{\pi}) \arrow[r] \arrow[u] & N \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[u, hook] & \pi(N) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0.
\end{tikzcd}$$

Note que $ker(\overline{\pi}) = N \cap M_k$ e $\pi(N)$ são submódulos de M_k e M_{r-k}, respectivamente. Aplicando a hipótese de indução sobre M_k e M_{r-k}, segue que $N \cap M_k$ e $\pi(N)$ são submódulos livres de posto menor ou igual que k e $r - k$, respectivamente. Como $\pi(N)$ é livre, ele é projetivo logo a sequência inferior do diagrama cinde, ou seja,

$$N \cong (N \cap M_k) \oplus \pi(N).$$

Portanto, N é submódulo livre e de posto menor ou igual que $(r - k) + k = r$. $\square$

O seguinte corolário encontra-se comumente na literatura como *Teorema de Nielsen-Schreier*. Sua demonstração é uma aplicação imediata do Teorema 2.2, pois todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo.

Corolário 2.3. *Todo subgrupo de um grupo abeliano livre de posto finito também é livre de posto finito.*

Veremos que esse resultado (Teorema de Nielsen-Schreier) nos possibilita definir a função ϕ sem utlizar o Lema de Fitting como feito em [12].

2.2 Funções de Igusa-Todorov

Apresentamos a seguir, duas formas de definir as funções de Igusa-Todorov. Algumas das suas propriedades são estudadas com o intuito de demonstrar com detalhe o teorema que relaciona a dimensão projetiva com a ψ-dimensão de um módulo.

Seja K_0 o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos $[M]$, com $M \in mod(\Lambda)$, módulo as relações:

a) $[M] = [N] + [L]$ se $M \cong N \oplus L$,

b) $[P] = 0$ se P é projetivo.

Assim, um elemento de K_0 é da forma $\lambda_1[M_1] + \lambda_2[M_2] + \cdots + \lambda_t[M_t]$, sendo $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ e M_i módulo finitamente gerado não projetivo e indecomponível tal que $M_i \ncong M_j$ com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j$.

Consideramos a aplicação $L : K_0 \longrightarrow K_0$ tal que para cada $[M] \in K_0$, $L([M]) = [\Omega(M)]$, onde $\Omega(M)$ é a primeira sizigia de M. Como Ω comuta com somas diretas e leva módulos projetivos no zero, temos que L é um homomorfismo de grupos.

Para todo M em $mod(\Lambda)$, denotamos por $\langle add(M)\rangle$ o subgrupo de K_0 gerado por todos os somandos diretos indecomponíveis de M.

Definimos a primeira **Função de Igusa-Todorov** $\phi : mod(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ utilizando as notações do Lema de Fitting 2.1. Seja M em $mod(\Lambda)$, então $\phi(M) = \eta_L(\langle add(M)\rangle)$, onde $\Omega^n(\langle addM\rangle) \cong \Omega^{n+1}(\langle addM\rangle)$ para todo $n \geq \eta_L$ (ver [12]).

A seguir, daremos uma definição da função ϕ utilizando o Teorema de Nielsen-Schreier e o princípio de boa ordenação. É possível observar na demonstração do Lema de Fitting que essa definição que veremos a seguir é equivalente à definição anterior. Consideremos o homomorfismo L restringido ao subgrupo $\langle add(M)\rangle$ e para cada $i \geq 1$, seja L^i o homomorfismo que leva o subgrupo $\langle add(M)\rangle$ no subgrupo $L^i(\langle add(M)\rangle)$ que resulta de aplicar i-vezes o homomorfismo L, isto é

$$\langle add(M)\rangle \xrightarrow{L} L(\langle add(M)\rangle) \xrightarrow{L} \cdots \xrightarrow{L} L^i(\langle add(M)\rangle) \longrightarrow \cdots .$$

Como estamos considerando Λ uma álgebra Artiniana de dimensão finita, o Teorema de Krull-Schmidt 1.24 garante que o Λ-módulo M se escreve de forma única (a menos de isomorfismo) como uma soma direta de um número finito de módulos indecomponíveis, logo $\langle add(M)\rangle$ é finitamente gerado e portanto tem posto finito. Pelo Teorema de Nielsen-Schereier 2.3 temos:

$$rk(\langle add(M)\rangle) \geq rk(L\langle add(M)\rangle) \geq rk(L^2\langle add(M)\rangle) \geq \cdots ,$$

pois $L(\langle add(M)\rangle)$ é subgrupo de $\langle add(M)\rangle$ e $L^{i+1}\langle add(M)\rangle$ é subgrupo de $L^i(\langle add(M)\rangle)$ para todo $i \geq 1$. Segue do princípio de boa ordenação que existe um inteiro não negativo n tal que:

$$rk(L^n\langle add(M)\rangle) = rk(L^i\langle add(M)\rangle) \quad \forall i \geq n.$$

Assim, o menor n coincide com a função ϕ. Ou seja, a primeira Função de Igusa-Todorov, $\phi : mod(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, associa a cada módulo M o menor inteiro não negativo $\phi(M)$, a partir do qual o posto de $L^i\langle add(M)\rangle$ estabiliza, isto é:

$$rk(L^{\phi(M)}\langle add(M)\rangle) = rk(L^i\langle add(M)\rangle) \quad \forall i \geq \phi(M).$$

Definição 2.4. *Definimos o posto do módulo M, $rk(M)$, como o posto do subgrupo de K_0, gerado por $\langle add(M)\rangle$.*

O seguinte Lema mostra que de certa forma, $\phi(M)$ é uma "medida mais fina" que a dimensão projetiva.

Lema 2.5. *a) Se M tem dimensão projetiva finita, então $\phi(M) = dp(M)$;*

b) Se M é indecomponível e $dp(M) = \infty$ então $\phi(M) = 0$;

c) $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$;

d) $\phi(kM) = \phi(M)$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração. a) Suponha $M \in mod(\Lambda)$ tal que $dp(M) = m > 0$. Então existe uma resolução projetiva minimal da forma

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Como $P_m \cong \Omega^m(M)$, temos $[\Omega^i(M)] = 0$ para todo $i \geq m$, logo $\phi(M) \leq m$. Se $\phi(M) = t < m$ teríamos $[\Omega^t(M)] = 0$, ou seja, $\Omega^t(M)$ seria um módulo projetivo o qual é um absurdo, pois $dp(M) = m$. Portanto, $\phi(M) = dp(M) = m$.

b) Se M é um Λ-módulo indecomponível com $dp(M) = \infty$ temos $rk(M) = 1$. Logo, para cada $i \in \mathbb{N}$, $rk(\Omega^i(M)) \leq 1$. Se existir algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $rk(\Omega^k(M)) = 0$ então $dp(M) < \infty$ e assim $rk(\Omega^k(M)) = 1$ para todo k. Portanto, $\phi(M) = 0$.

c) Segue do item (b) no Lema de Fitting 2.1, pois $\langle add(M) \rangle$ é subgrupo de $\langle add(M \oplus N) \rangle$.

d) Observe que $\langle add(M) \rangle = \langle add(kM) \rangle$ então $\phi(kM) = \phi(M)$, se $k \geq 1$.

□

Lema 2.6. *Para todo Λ-módulo M tem-se $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$.*

Demonstração. Seja $M \in mod(\Lambda)$. Se $\phi(M) = 0$ então $\phi(\Omega(M)) = 0$, logo $\phi(M) < \phi(\Omega(M)) + 1$. Se $\phi(M) = r > 0$ temos $[\Omega^r(M)] = [\Omega^i(M)]$ para todo $i \geq r$. Logo, $[\Omega^{r-1}(\Omega(M))] = [\Omega^{i-1}(\Omega(M))]$ para todo $i - 1 \geq r - 1$. Portanto, $\phi(\Omega(M)) = r - 1$, ou seja, $\phi(M) = \phi(\Omega(M)) + 1$.

□

Exemplo 2.7. *Seja Λ a álgebra dada por um vértice com um loop tal que $rad^2(\Lambda) = 0$. Isto é, Λ é isomorfa a $KQ/\langle \alpha^2 \rangle$, com*

$$Q : \underset{1}{\cdot} \circlearrowleft \alpha$$

e a representação do módulo projetivo $P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Temos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[rr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0, \\
& & & S_1 \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

$dp(S_1) = \infty$ e S_1 é indecomponível. Temos então:

$$\begin{aligned} L : K_0 &\longrightarrow K_0 \\ [S_1] &\longmapsto [S_1] \end{aligned}$$

e assim

$$\phi(S_1) = \eta_L(\langle add(S_1)\rangle) = \eta_L(\langle S_1\rangle) = 0.$$

Exemplo 2.8. *Seja $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ a álgebra definida pelo quiver:*

$$Q: \begin{tikzcd} \underset{4}{\circ} & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\epsilon"'] & \underset{1}{\circ} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[loop above, "\beta"] & \underset{2}{\circ} \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

e as relações $\alpha^2 = \beta^2 = \delta\beta = \gamma\beta = \epsilon\delta = 0$. As representações dos módulos projetivos estão dadas por:

$$P_1 = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & 2 & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix}; \quad P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}; \quad P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}; \quad P_4 = S_4 = 4.$$

Seja $M = \left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \oplus 2\right)$. Calculando a resolução projetiva do módulo M obtemos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & P_2 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & (P_2 \oplus P_3) \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0. \\ & & S_2 \oplus S_2 \arrow[ur] & & (S_4 \oplus S_2) \oplus S_2 \arrow[ur] & & (S_2 \oplus S_3) \oplus S_2 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Observe que $rk(M) = 2$, $rk(\Omega(M)) = 2$ porém $rk(\Omega^2(M)) = 1$ pois S_4 é um módulo projetivo. Como $dp(S_2)$ é infinita temos $rk(\Omega^i(M)) = 1\ \forall i \geq 2$. Portanto $\phi(M) = \phi\left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \oplus 2\right) = 2$.

Agora vamos definir a segunda função de Igusa-Todorov $\psi : mod(\Lambda) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ como segue.

Definição 2.9. *Seja $M \in mod(\Lambda)$. Definimos:*

$$\psi(M) := \phi(M) + sup\left\{dp(X) \mid dp(X) < \infty,\ X\ |\Omega^{\phi(M)}(M)\right\}.$$

$X\ |\Omega^{\phi(M)}(M)$ significa que X é somando direto de $\Omega^{\phi(M)}(M)$.

Lema 2.10. *a) Se M tem dimensão projetiva finita então $\psi(M) = dp(M)$,*

b) $\psi(kM) = \psi(M)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$,

c) Se Z é somando de $\Omega^n(M)$, com $n \leq \phi(M)$, e $dp(Z) < \infty$, então $dp(Z) + n \leq \psi(M)$,

d) $\psi(M) \leq \psi(M \oplus N)$.

Demonstração. a) Se $dp(M) < \infty$, $\Omega^{\phi(M)}(M)$ é um módulo projetivo e assim $sup\left\{dp(X) \mid dp(X) < \infty \text{ e } X\ |\Omega^{\phi(M)}(M)\right\} = 0$, logo $\psi(M) = dp(M)$.

b) Pelo item $d)$ do Lema 2.5 temos $\phi(kM) = \phi(M)$ para $k \in \mathbb{Z}^+$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi(kM) &= \phi(kM) + sup\left\{dp(X) \mid dp(X) < \infty \text{ e } X\ |\Omega^{\phi(kM)}(kM)\right\} \\ &= \phi(M) + sup\left\{dp(X) \mid dp(X) < \infty \text{ e } X\ |\Omega^{\phi(M)}(M)\right\} \\ &= \psi(M). \end{aligned}$$

c) Sejam $Z \in mod(\Lambda)$ um somando direto de $\Omega^n(M)$ com $n \leq \phi(M)$ e $k = \phi(M) - n \geq 0$. Por hipótese existe $Y \in mod(\Lambda)$ tal que $\Omega^n(M) = Z \oplus Y$. Logo,

$$\begin{aligned} \Omega^k(\Omega^n(M)) &= \Omega^k(Z \oplus Y) \\ \Omega^{k+n}(M) &= \Omega^k(Z) \oplus \Omega^k(Y) \\ \Omega^{\phi(M)}(M) &= \Omega^k(Z) \oplus \Omega^k(Y). \end{aligned}$$

Como $\Omega^k(Z)$ é somando de $\Omega^{\phi(M)}(M)$ segue da definição da ψ que:

$$\psi(M) \geq \phi(M) + dp(\Omega^k(Z)). \quad (*)$$

E de $dp(Z) - k = dp(\Omega^k(Z))$ decorre:

$$\begin{aligned} dp(Z) + n &= dp(Z) + \phi(M) - k \\ &= (dp(Z) - k) + \phi(M) \\ &= dp(\Omega^k(Z)) + \phi(M) \\ &\leq \psi(M) \qquad \text{por } (*) \end{aligned}$$

d) Pelo item $c)$ do Lema 2.5 temos $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$. Se Z é somando de $\Omega^{\phi(M)}(M \oplus N)$ e $dp(Z) < \infty$ segue do item $c)$ Lema 2.10

$$dp(Z) + \phi(M) \leq \psi(M \oplus N).$$

Portanto, $\psi(M) \leq \psi(M \oplus N)$, pois $\{dp(Z) \mid dp(Z) < \infty \text{ e } Z \mid \Omega^{\phi(M)}(M)\}$ é limitado por $\psi(M \oplus N) - \phi(M)$.

$\square$

Exemplo 2.11. *Considere a álgebra $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ definida pelo quiver: Q*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, shift left, "\gamma"] & & 3 \arrow[ll, shift left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

e as relações $\gamma\delta\beta = \delta\gamma = \alpha\delta = \delta\beta\alpha = 0$. Seja $M = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \oplus 1\right)$.

As representações dos seus Λ-módulos projetivos, estão dadas por:

$$P_1 = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 3 & & \end{smallmatrix}; \quad P_2 = \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}; \quad P_3 = \begin{smallmatrix}3\\1\\3\end{smallmatrix}.$$

As resoluções projetivas de S_1, S_3, $X_1 = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$, $X_2 = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$, $X_3 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ são respectivamente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & (P_2 \oplus P_3) \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1^2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \oplus P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0 \\ & & (X_2 \oplus S_3) \oplus X_2 \arrow[ur] & & S_1 \oplus X_1 = \Omega^2(S_1) \arrow[ur] & & X_2 \oplus S_3 = \Omega(S_1) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] & 0 \\
& & S_1 = \Omega^3(S_3) \arrow[ur] & & X_2 = \Omega^2(S_3) \arrow[ur] & & X_1 = \Omega(S_3) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \oplus P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & 0 \\
& & X_2 \oplus S_3 = \Omega^3(X_1) \arrow[ur] & & S_1 = \Omega^2(X_1) \arrow[ur] & & X_2 = \Omega(X_1) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1^2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \oplus P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & 0 \\
& & S_1 \oplus X_1 = \Omega^3(X_2) \arrow[ur] & & X_2 \oplus S_3 = \Omega^2(X_2) \arrow[ur] & & S_1 = \Omega(X_2) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[r] & X_3 \arrow[r] & 0. \\
& & X_2 = \Omega(X_3) \arrow[ur] & & X_1 = \Omega^2(X_3) \arrow[ur] & & S_3 = \Omega(X_3) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Donde $[\Omega(M)] = [X_2 \oplus S_3]$, *pois*

$$
\begin{aligned}
\Omega(M) &= \Omega(X_3) \oplus \Omega(X_1) \oplus \Omega(S_1) \\
&= S_3 \oplus X_2 \oplus (X_2 \oplus S_3).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que $\phi(M) = 1$, *ou seja, para todo* n, $\Omega^n(M)$ *tem sempre posto 2, notemos que:*

$$
\begin{aligned}
\Omega^3(M) &= \Omega^2(X_2 \oplus S_3) \\
&= X_2 \oplus (X_2 \oplus S_3) \\
\Omega^5(M) &= \Omega^2(X_2 \oplus (X_2 \oplus S_3)) \\
&= X_2 \oplus S_3 \oplus (2X_2 \oplus S_3) \\
\Omega^7(M) &= \Omega^2(X_2 \oplus S_3 \oplus (2X_2 \oplus S_3)) \\
&= (2X_2 \oplus S_3) \oplus (3X_2 \oplus 2S_3) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

se continuarmos o processo, temos:

$$
\Omega^{2n+1}(M) = (\lambda_n X_2 \oplus \lambda_{n-1} S_3) \oplus (\lambda_{n+1} X_2 \oplus \lambda_n S_3),
$$

sendo λ_n *o n-ésimo número de Fibonacci, isto é, o n-ésimo número da sequência* $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$.

Suponhamos que $\{(\lambda_n X_2 \oplus \lambda_{n-1} S_3), (\lambda_{n+1} X_2 \oplus \lambda_n S_3)\}$ *seja um conjunto* *linearmente dependente, ou seja,*

$$\lambda_n X_2 \oplus \lambda_{n-1} S_3 = \mu(\lambda_{n+1} X_2 \oplus \lambda_n S_3) \text{ para algum } \mu \in \mathbb{Z}$$

isto implica que:

$$\begin{cases} \mu\lambda_n &= \lambda_{n-1} \\ \mu\lambda_{n+1} &= \lambda_n, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \mu\lambda_n &= \lambda_{n-1} \\ \mu(\lambda_n + \lambda_{n-1}) &= \lambda_n, \end{cases}$$

segue que $\lambda_n(\mu^2 + \mu - 1) = 0$.

Como $\lambda_n \neq 0$, *temos* $\mu = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *o que é absurdo, pois* $\mu = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ *para todo* $n \geq 2$ *com* $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, *logo* $\{(\lambda_n X_2 \oplus \lambda_{n-1} S_3), (\lambda_{n+1} X_2 \oplus \lambda_n S_3)\}$ *é linearmente independente. Assim, o posto de* $\Omega^{2n+1}(M)$ *é 2 para todo* $n \geq 0$. *Portanto,* $\phi(M) = 1$.

Para calcular $\psi(M)$, *note que se* $Z \in mod(\Lambda)$ *é somando direto de* $\Omega^{\phi(M)}(M) = \Omega(M) = 2X_2 \oplus 2S_3$, *então* Z *é* X_2 *ou* S_3, *os quais tem dimensão projetiva infinita. Segue da definição da* ψ *que* $\psi(M) = \phi(M) = 1$.

Lema 2.12. *Seja*

$$0 \longrightarrow A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & \delta \\ \sigma & \gamma \end{smallmatrix}\right)} A \oplus C \xrightarrow{(h_1\ h_2)} D \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta em $mod(\Lambda)$ *e* f *um automorfismo de* A. *Então*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{-\sigma f^{-1}\delta + \gamma} C \xrightarrow{h_2} D \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.

Demonstração. De fato, considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f & \delta \\ \sigma & \gamma \end{smallmatrix}\right)"] & A \oplus C \arrow[r, "(h_1\ h_2)"] & D \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus B \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \sigma f^{-1} & \gamma \end{smallmatrix}\right)"'] & A \oplus C \arrow[u, equal] \arrow[r, "(h_1\ h_2)"'] & D \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde obtemos um outro diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f & \delta \\ \sigma & \gamma \end{smallmatrix}\right)"] & A \oplus C \arrow[r, "(h_1\ h_2)"] & D \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus B \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} f^{-1} & -f^{-1}\delta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \sigma f^{-1} & -\sigma f^{-1}\delta + \gamma \end{smallmatrix}\right)"'] & A \oplus C \arrow[u, equal] \arrow[r, "(h_1\ h_2)"'] & D \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que a sequência

$$(*) \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{-\sigma f^{-1}\delta+\gamma} C \xrightarrow{\quad h_2 \quad} D \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.
É claro que $h_2\big((-\sigma f^{-1}\delta + \gamma)(b)\big) = 0$ para todo $b \in B$. Seja $x \in C$ tal que $h_2(x) = 0$ então $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \sigma f^{-1} & \gamma \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ para algum $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ em $A \oplus B$. Logo,

$$\begin{cases} a + \delta(b) = 0 \\ \sigma f^{-1}(a) + \gamma(b) = x \end{cases}$$

e de $a = -\delta(b)$ obtemos $(-\sigma f^{-1}\delta + \gamma)(b) = x$. Portanto $(*)$ é uma sequência exata curta, como queríamos mostrar. $\square$

Embora a *conjectura finitista* esteja em aberto, sabemos que ela é verdadeira para certas álgebras. O seguinte teorema, provado por Igusa e Todorov em [12], é o principal resultado deste capítulo e permite provar a conjectura finitista para algumas classes de álgebras. Esse teorema é um dos principais resultados em [12].

Teorema 2.13. *Suponha que* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *é uma sequência exata curta de* Λ*-módulos finitamente gerados tal que* C *tem dimensão projetiva finita. Então* $dp(C) \leq \psi(A \oplus B) + 1$.

Demonstração. Seja $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta e $dp(C) = r$. Tomando cada uma das resoluções projetivas minimais obtemos as sequências exatas curtas

$$\begin{array}{c} \Omega : 0 \longrightarrow \Omega(A) \longrightarrow \Omega(B) \longrightarrow \Omega(C) \longrightarrow 0 \\ \\ \Omega^2 : 0 \longrightarrow \Omega^2(A) \longrightarrow \Omega^2(B) \longrightarrow \Omega^2(C) \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ \Omega^k : 0 \longrightarrow \Omega^k(A) \longrightarrow \Omega^k(B) \longrightarrow \Omega^k(C) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como $dp(C) = r$, temos no nível r a sequência exata curta

$$\Omega^r : 0 \longrightarrow \Omega^r(A) \longrightarrow \Omega^r(B) \longrightarrow \Omega^r(C) \longrightarrow 0$$

com $\Omega^r(C)$ projetivo, logo $\Omega^r(C) \oplus \Omega^r(A) \cong \Omega^r(B)$ e assim $[\Omega^r(A)] = [\Omega^r(B)]$. Temos então $[\Omega^m(A)] = [\Omega^m(B)]$ para todo $m \geq r$.

Considere n o menor inteiro positivo tal que $[\Omega^n(A)] = [\Omega^n(B)]$, isto é,

$$n = min\left\{j \in \mathbb{N} : \left[\Omega^j(A)\right] = \left[\Omega^j(B)\right]\right\}$$

então $n \leq dp(C)$.

Se $\phi(A \oplus B) < n$ então $\phi(A)$, $\phi(B) < n$, logo teríamos $[\Omega^{n-1}(A)] = [\Omega^{n-1}(B)]$ o que contradiz a escolha de n ser o mínimo. Portanto $n \leq \phi(A \oplus B)$.

Considere a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \Omega^n(A) \longrightarrow \Omega^n(B) \longrightarrow \Omega^n(C) \longrightarrow 0\,,$$

como $[\Omega^n(A)] = [\Omega^n(B)]$ ocorre $[\Omega^n(A)] - [\Omega^n(B)] = 0$, ou seja, a diferença é soma de projetivos. Aplicando o Teorema de Krull-Schmidt, ver Teorema 1.24, temos $\Omega^n(A) \cong X \oplus P$ e $\Omega^n(B) \cong X \oplus Q$, com P e Q projetivos, donde obtemos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \oplus P \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & g \\ h & \delta \end{smallmatrix}\right)} X \oplus Q \longrightarrow \Omega^n(C) \longrightarrow 0\,,$$

com $f : X \longrightarrow X$ o endomorfismo de X. Pelo Lema de Fitting, ver Lema 2.1, temos $X = Y \oplus Z$ com $f|_Y = \alpha : Y \longrightarrow Y$ um automorfismo de Y e $f|_Z = \beta : Z \longrightarrow Z$ um endomorfismo nilpotente de Z. Então

$$0 \longrightarrow Y \oplus (Z \oplus P) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & t_1 \\ 0 & \beta & t_2 \\ t_3 & t_4 & t_5 \end{smallmatrix}\right)} Y \oplus (Z \oplus Q) \xrightarrow{(h_1\ \ h_2)} \Omega^n(C) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta em $mod(\Lambda)$. Pelo Lema 2.12, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow Z \oplus P \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \beta & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)} Z \oplus Q \xrightarrow{h_2} \Omega^n(C) \longrightarrow 0,$$

pois

$$-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t_3 \end{smallmatrix}\right)\alpha^{-1}(0\ t_1) + \left(\begin{smallmatrix} \beta & t_2 \\ t_4 & t_5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t_3\alpha^{-1}t_1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \beta & t_2 \\ t_4 & t_5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \beta & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right).$$

Seja $M \in mod(\Lambda)$. Ao aplicarmos o funtor contravariante $Hom_\Lambda(-, M)$ à sequência exata curta $(*)$, obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow Ext_\Lambda^{k-1}(Z \oplus P, M) \xrightarrow{\lambda_{k-1}} Ext_\Lambda^k(\Omega^n(C), M) \xrightarrow{Ext_\Lambda^k(h_2, M)} Ext_\Lambda^k(Z \oplus Q, M)$$

$$\xrightarrow{Ext_\Lambda^k\left(\left(\begin{smallmatrix} \beta & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right), M\right)} Ext_\Lambda^k(Z \oplus P, M) \xrightarrow{\lambda_k} Ext_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), M) \longrightarrow \cdots$$

Como $Ext(-, M)$ é um funtor aditivo e P, Q são projetivos, temos as seguintes igualdades para todo inteiro k (ver também Teorema 1.49):

$$Ext_\Lambda^k(Z \oplus P, M) = Ext_\Lambda^k(Z, M) \oplus Ext_\Lambda^k(P, M) = Ext_\Lambda^k(Z, M)$$

$$Ext_\Lambda^k(Z \oplus Q, M) = Ext_\Lambda^k(Z, M) \oplus Ext_\Lambda^k(Q, M) = Ext_\Lambda^k(Z, M).$$

Donde obtemos a sequência exata longa

$$(**) \cdots \longrightarrow Ext_\Lambda^{k-1}(Z, M) \xrightarrow{\lambda_{k-1}} Ext_\Lambda^k(\Omega^n(C), M) \xrightarrow{Ext_\Lambda^k(h_2, M)} Ext_\Lambda^k(Z, M)$$

$$\xrightarrow{Ext_\Lambda^k(\beta, M)} Ext_\Lambda^k(Z, M) \xrightarrow{\lambda_k} Ext_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), M) \longrightarrow \cdots.$$

Afirmação 2.14. $dp(Z) \leq r - n$.

De fato, como $dp(C) = r$ *e* $dp(\Omega^n(C)) = r - n$ *temos* $Ext^j_\Lambda(\Omega^n(C), M) = 0$ *para todo* $j \geq (r - n) + 1$*, ver Teorema 1.51. Da sequência exata longa (**) temos:*

$$Ext^{j-1}_\Lambda(\beta, M) : Ext^{j-1}_\Lambda(Z, M) \longrightarrow Ext^{j-1}_\Lambda(Z, M)$$

é um epimorfismo para todo $j \geq (r-n)+1$*, ou seja,* $Ext^j_\Lambda(\beta, M)$ *é um epimorfismo para todo* $j \geq r - n$*. Mais ainda, como* β *é nilpotente então* $Ext^j_\Lambda(\beta, M)$ *também é nilpotente, (este fato segue diretamente do fato de* $Ext_\Lambda(-, M)$ *ser um funtor aditivo), e de* $Ext^j_\Lambda(\beta, M)$ *ser epimorfismo a partir de* $j \geq r - n$ *temos* $Ext^j_\Lambda(\beta, M) = 0$ *logo* $Ext^j_\Lambda(Z, M) = 0$ *para todo* $j \geq r - n$*. Assim*

$$dp(Z) \leq r - n.$$

Afirmação 2.15. $dp(\Omega^n(C)) \leq dp(Z) + 1$.

Seja $dp(Z) = k$*. Pela Proposição 1.49,* $Ext^{j+1}(Z, M) = 0$ *para todo* $j \geq k$*. Assim, da sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow Ext^{k+1}(Z, M) \xrightarrow{\lambda_{k+1}} Ext^{k+2}(\Omega^n(C), M) \xrightarrow{Ext^{k+2}(h_2, M)} Ext^{k+2}(Z, M) \xrightarrow{Ext^{k+2}(\beta, M)} \cdots,$$

obtemos $Ext^{k+2}(\Omega^n(C), -) = 0$*, pois* $Ext^{k+1}(Z, M) = Ext^{k+2}(Z, M) = 0$ *para todo* $M \in mod(\Lambda)$*. Pela proposição 1.49, temos* $dp(\Omega^n(C)) \leq k + 1$*. Portanto,*

$$dp(\Omega^n(C)) \leq dp(Z) + 1.$$

Aplicando o item c) do Lema 2.10 para Z *temos* $dp(Z) + n \leq \psi(A \oplus B)$*. Assim,*

$$\begin{aligned} dp(C) &= (r - n) + n \\ &= dp(\Omega^n(C)) + n \\ &\leq dp(Z) + 1 + n \qquad \text{(Afirmação 2.15)} \\ &= (dp(Z) + n) + 1 \\ &\leq \psi(A \oplus B) + 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$dp(C) \leq \psi(A \oplus B) + 1.$$

□

Observação 2.16. *Suponha que* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *seja uma sequência exata curta de* Λ*-módulos finitamente gerados. Não podemos trocar a dimensão projetiva de* C *por* $\phi(C)$ *no Teorema 2.13. Veja o seguinte exemplo.*

Exemplo 2.17. *Seja* $\Lambda = KQ/\mathcal{I}$ *a álgebra definida pelo quiver:*

$$Q : \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\alpha_3} 4 \circlearrowleft \alpha_4$$

e o ideal $\mathcal{I} = \langle R^2 \rangle$*. As representações dos seus* Λ*-módulos projetivos estão dadas por:*

$$P_1 = {}^{1}_{2}; \quad P_2 = {}^{2}_{3}; \quad P_3 = {}^{3}_{4}; \quad P_4 = {}^{4}_{4}.$$

A resolução projetiva do módulo simples S_1 é:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0, \\
& S_4 \arrow[ur] & & S_4 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $dp(S_1) = \infty$, logo $\phi(S_1) = 0$.

A resolução projetiva de S_2,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & 0, \\
& S_4 \arrow[ur] & & S_4 \arrow[ur] & & S_4 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $dp(S_2) = \infty$, logo $\phi(S_2) = 0$.

A resolução projetiva de $S_1 \oplus S_2$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \oplus P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \oplus P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & S_1 \oplus S_2 \arrow[r] & 0, \\
& S_4 \oplus S_4 \arrow[ur] & & S_3 \oplus S_4 \arrow[ur] & & S_2 \oplus S_3 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $dp(S_1 \oplus S_2) = \infty$ e $\phi(S_1 \oplus S_2) = 3$.

Considerando as sequências exatas

$$0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0, \qquad e \qquad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0,$$

obtemos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow P_1 \oplus S_2 \longrightarrow S_1 \oplus S_2 \longrightarrow 0,$$

mas $dp(S_1 \oplus S_2) = \infty$, logo não podemos aplicar o teorema. Mas, $\phi(S_1 \oplus S_2) = 3$. Por outro lado,

$$\psi(S_2 \oplus P_1 \oplus S_2) = \psi(S_2) = 0.$$

Assim, $\psi(S_2 \oplus P_1 \oplus S_2) + 1 < 3 = \phi(S_1 \oplus S_2)$.
Donde, podemos dizer que para a função ϕ, o teorema não é válido, ou seja, nem sempre é verdade que $\phi(C) \leq \psi(A \oplus B) + 1$.

A partir das funções de Igusa-Todorov e inspirados na dimensão global de uma K-álgebra Λ, temos as definições de ϕ-dimensão e ψ-dimensão de Λ como segue:

- A **ϕ-dimensão** de Λ como $\phi dim(\Lambda) = sup\{\phi(M) \mid M \in mod(\Lambda)\}$ e,
- A **ψ-dimensão** de Λ como $\psi dim(\Lambda) = sup\{\psi(M) \mid M \in mod(\Lambda)\}$.

Estes dois novos conceitos estão relacionados com as dimensões já conhecidas da seguinte forma:

$$findim(\Lambda) \leq \phi dim(\Lambda) \leq \psi dim(\Lambda) \leq gldim(\Lambda),$$

e satisfazem a igualdade no caso em que a dimensão global da álgebra é finita.

Corolário 2.18. *Seja $M \in mod(\Lambda)$ com tamanho Loewy 2 e dimensão projetiva finita. Então:*

$$dp(M) \leq \psi(\Lambda/rad(\Lambda) \oplus \Lambda/rad^2(\Lambda)) + 1.$$

Demonstração. Sejam $M \in mod(\Lambda)$ e $f : P_0(M) \longrightarrow M$ a sua cobertura projetiva. Segue da Proposiçao 1.15 que $f(rad^2(P_0(M))) = rad^2(M)$ e como $\ell\ell(M) = 2$ a sequência exata curta $0 \longrightarrow ker(f) \longrightarrow P_0(M) \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ induz a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow P_0(M)/rad^2(P_0(M)) \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

Como $dp(M) < \infty$, segue do Teorema 2.13 que:

$$(*) \quad dp(M) \leq \psi\big(ker(g) \oplus P_0(M)/rad^2(P_0(M))\big) + 1.$$

Note que A é um submódulo de $rad(P_0(M))/rad^2(P_0(M))$, pois se $x \in A$ então x é da forma $m + rad^2(P_0(M))$ com $m \in P_0(M)$ logo $m \in ker(f) \subseteq rad(P_0(M))$ (ver Proposição 1.28).

Sabemos pelo Corolário 1.20 que $rad(P_0(M))/rad^2(P_0(M))$ é semisimples. Segue do Lema 1.11 que A é semisimples. Assim, podemos supor que, a menos de isomorfismo, A é um submódulo de $\Lambda/rad(\Lambda)$. Pela Proposição 2.10 e da desigualdade $(*)$ obtemos:

$$dp(M) \leq \psi\big(\Lambda/rad(\Lambda) \oplus \Lambda/rad^2(\Lambda)\big) + 1.$$

□

Corolário 2.19. *Suponha que Λ é uma álgebra Artiniana de dimensão finita com $rad^3(\Lambda) = 0$. Então*

$$findim(\Lambda) \leq \psi(\Lambda/rad(\Lambda) \oplus \Lambda/(rad^2(\Lambda)) + 2.$$

Demonstração. Seja $M \in mod(\Lambda)$ com $dp(M) < \infty$. Como $rad^3(\Lambda) = 0$ segue que $\Omega(M)$ tem tamanho Loewy menor ou igual que 2, ver item (b) da Proposição 1.28. Pelo Corolário 2.18 temos:

$$dp(\Omega(M)) \leq \psi(\Lambda/rad(\Lambda) \oplus \Lambda/rad^2(\Lambda)) + 1,$$

logo

$$dp(M) \leq dp(\Omega(M)) + 1 \leq \psi(\Lambda/rad(\Lambda) \oplus \Lambda/rad^2(\Lambda)) + 2.$$

Portanto,

$$findim(\Lambda) \leq \psi(\Lambda/rad(\Lambda) \oplus \Lambda/rad^2(\Lambda)) + 2.$$

□

Corolário 2.20. *Seja $\Lambda = End_\Gamma(P)^{op}$, onde P é um módulo projetivo sobre uma álgebra Artiniana Γ com $gldim(\Gamma) \leq 3$. Então*

$$findim(\Lambda) \leq \psi(Hom_\Gamma(P, \Gamma)) + 3$$

sendo $Hom_\Gamma(P,\Gamma)$ um Λ-módulo.

Demonstração. Note que há uma equivalência entre a categoria $mod(\Gamma)$ e a subcategoria $\mathcal{P}(\Lambda)$ de $mod(\Lambda)$, ver Proposição 1.42. Sejam $X \in mod(\Lambda)$ e $\mathbf{P}_0$ a sua resolução projetiva minimal, então a resolução apagada $\mathbf{P}_0^*$ está em $\mathcal{P}(\Lambda)$ e tem comprimento menor ou igual que 3 pois $gldim(\Gamma) \leq 3$. Mais ainda, $\mathbf{P}_0^*$ é da forma:

$$0 \longrightarrow Hom_\Gamma(P,P_3) \longrightarrow Hom_\Gamma(P,P_2) \longrightarrow Hom_\Gamma(P,P_1) \longrightarrow Hom_\Gamma(P,P_0).$$

Donde temos a sequência exata curta

$$0 \to Hom_\Gamma(P,P_3) \to Hom_\Gamma(P,P_2) \to coker\big(Hom_\Gamma(P,P_3) \to Hom_\Gamma(P,P_2)\big) \to 0.$$

Como $dp(\Omega^2(X)) = dp\big(coker\big(Hom_\Gamma(P,P_3) \to Hom_\Gamma(P,P_2)\big)\big)$ temos:

$$\begin{aligned} dp(X) &\leq dp\big(coker\big(Hom_\Gamma(P,P_3) \to Hom_\Gamma(P,P_2)\big)\big) + 2 \\ &\leq \psi(Hom_\Gamma(P,P_3) \oplus Hom_\Gamma(P,P_2)) + 3 \\ &= \psi(Hom_\Gamma(P,P_3 \oplus P_2)) + 3 \end{aligned}$$

a segunda desigualdade segue do Teorema 2.13. Pelo Teorema de Morita 1.37 podemos supor Γ uma álgebra básica logo Γ é igual à soma de todos os seus módulos projetivos. Então $P_2 \oplus P_3 \mid \Gamma$. Segue do Lema 2.10 e de $Hom(P,-)$ ser um funtor aditivo que $\psi(Hom(P,P_2 \oplus P_3)) \leq \psi(Hom(P,\Gamma))$. Assim

$$dp(X) \leq \psi(Hom(P,\Gamma)) + 3.$$

□

Um Λ-módulo M é um **gerador-cogerador** de Λ se qualquer Λ-módulo projetivo ou injetivo é um somando direto de M.

Definição 2.21. *Seja Λ uma K-álgebra Artiniana. A dimensão de representação da álgebra Λ, que denotamos por $repdim(\Lambda)$, é a dimensão global mínima possível do anel de endomorfismo de um gerador-cogerador.*

Segue da Definição 2.21 que $repdim(\Lambda) \leq n$ se existe um módulo finitamente gerado X tal que $gldim(End_\Lambda(X)^{op}) \leq n$ e $add(X)$ contem todos os Λ-módulos projetivos e injetivos.

Corolário 2.22. *Se $repdim(\Lambda) \leq 3$ então $findim(\Lambda) < \infty$.*

A noção de dimensão de representação foi introduzida por Auslander em [5]. Esse último Corolário 2.22 é uma consequência relevante do Teorema principal 2.13, pois afirma (e com isto prova) a conjectura da dimensão finitista para álgebras de dimensão de representação menor ou igual a 3, $repdim(\Lambda) \leq 3$.

Capítulo 3

A ϕ-dimensão de álgebra autoinjetiva

Uma álgebra Artiniana Λ é dita **autoinjetiva** se $\Lambda \in mod(\Lambda)$ é injetivo. Há exemplos que mostram que a dimensão projetiva não é suficiente para determinar quando uma álgebra é autoinjetiva. Nosso interesse neste capítulo é caraterizar estas álgebras por meio das funções Igusa-Todorov. Mostramos então algumas propriedades e resultados importantes que, ao menos nesses casos, as funções ϕdim, $\psi dim : mod(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{N}$ resultam ser um invariante mais preciso.

Apresentaremos no que segue, as *categorias estáveis*, os *funtores sizigia e cosizigia* para, em seguida, introduzirmos aos estudos das álgebras autoinjetivas através das funções de Igusa-Todorov. Sobre a Categoria Estável e o Funtor Sizigia podem ser consultados as seções IV.3 em [4] e Capitulo 5 em [23].

3.1 Categoria Estável e Funtor Sizigia

Sejam M, N em $mod(\Lambda)$. Considere o submódulo $\mathcal{P}(M,N)$ de $Hom_\Lambda(M,N)$ definido por todos os homomorfismos de M em N que se fatoram por um Λ-módulo projetivo, isto é, existem P em $\mathcal{P}(\Lambda)$, $g : M \longrightarrow P$ e $h : P \longrightarrow N$ tal que $f = hg$,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Pode-se mostrar que $\{\mathcal{P}(M,N) \mid M,N \in mod(\Lambda)\} = \bigcup_{M,N \in mod(\Lambda)} \mathcal{P}(M,N)$ define um ideal $\mathcal{P}$ na categoria $mod(\Lambda)$. Assim, fica bem definida a categoria quociente $\underline{mod}(\Lambda) := mod(\Lambda)/\mathcal{P}$. Essa categoria é chamada de **Categoria Projetivamente Estável**. Os objetos de $\underline{mod}(\Lambda)$ são os mesmos de $mod(\Lambda)$ e os morfismos de M em N, que denotaremos por $\underline{Hom}_\Lambda(M,N)$, para todo M, N em $\underline{mod}(\Lambda)$ é definido pelo quociente $\underline{Hom}_\Lambda(M,N) = Hom_\Lambda(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$ e a composição de morfismos é a composição induzida em $mod(\Lambda)$.

Dualmente, podemos definir a categoria $\overline{mod}(\Lambda) := mod(\Lambda)/\mathcal{I}$, sendo $\mathcal{I}(M,N)$ o submódulo de $Hom_\Lambda(M,N)$ de todos os homomorfismos de M em N que se fatoram por um Λ-módulo injetivo e $\mathcal{I} = \bigcup_{M,N \in mod(\Lambda)} \mathcal{I}(M,N)$. Essa categoria é conhecida como **Categoria Injetivamente Estável**.

Seja Λ uma álgebra Artiniana. Definimos $\mathbf{\Omega} : \underline{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}(\Lambda)$ como segue. Para cada M em $mod(\Lambda)$, fixe uma cobertura projetiva $P_0(M) \xrightarrow{p_0} M$ e defina $\mathbf{\Omega}(M)$ sendo a primeira sizigia de M, $\mathbf{\Omega}(M) = ker(p_0)$. Suponha agora que $f : M \longrightarrow N$ está em $mod(\Lambda)$. Então existe o seguinte diagrama comutativo exato:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & P_0(M) \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r] & P_0(N) \arrow[r, "q_0"'] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

O morfismo $h : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(N)$ escolhido dessa forma depende particularmente da escolha de g. Pode-se mostrar que, se trocarmos g por $g' : P_0(M) \longrightarrow P_0(N)$, obtemos um novo morfismo $h' : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(N)$ e o morfismo $h - h'$ está em $\mathcal{P}(\Omega(M), \Omega(N))$. Nesse sentido obtemos um morfismo $Hom_\Lambda(M,N) \longrightarrow \underline{Hom}_\Lambda(\Omega(M), \Omega(N))$. Se f está em $\mathcal{P}(M,N)$, temos $h \in \mathcal{P}(\Omega(M), \Omega(N))$ e obtemos o morfismo $\mathbf{\Omega} : \underline{Hom}_\Lambda(M,N) \longrightarrow \underline{Hom}_\Lambda(\mathbf{\Omega}(M), \mathbf{\Omega}(N))$.

Pode-se provar que $\mathbf{\Omega} : \underline{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}(\Lambda)$ assim definido é um funtor. Esse funtor é conhecido como **funtor sizigia**. Dualmente, podemos definir o **funtor cosizigia** $\mathbf{\Omega}^{-1} : \overline{mod}(\Lambda) \longrightarrow \overline{mod}(\Lambda)$.

Funtores sizigia e cosizigia são importantes para o estudo de álgebras Artinianas. O leitor pode consultar com mais detalhes sobre funtores sizigia e cosizigia na Seção IV.3 em [4].

3.2 Álgebras Autoinjetivas

Apresentamos a seguir alguns resultados para as álgebras Artinianas que são autoinjetivas.

O seguinte lema mostra que para uma álgebra Artiniana autoinjetiva Λ, os Λ-módulos projetivos e injetivos coincidem, isto é, $\mathcal{P}(M,N) = \mathcal{I}(M,N)$. Donde obtemos $\underline{mod}(\Lambda) = \overline{mod}(\Lambda)$.

Lema 3.1. *Uma álgebra Λ é autoinjetiva se e somente se todo Λ-módulo projetivo é injetivo e viceversa.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que Λ seja uma álgebra autoinjetiva. Se M é um Λ-módulo projetivo então M é um somando direto de um módulo livre Λ^n. Por hipótese, Λ é injetivo, logo Λ^n também o é e assim M é injetivo, ver Proposição 1.36. Como o número de projetivos e de injetivos indecomponíveis é o número de vértices da álgebra e acabamos de mostrar que todo projetivo é injetivo, segue que todo Λ-módulo injetivo é projetivo.

($\Leftarrow$) Suponha que todo módulo projetivo é injetivo. Como Λ é um módulo livre então Λ é projetivo e assim injetivo. Portanto, Λ é autoinjetiva.

$\square$

Assim, podemos considerar o funtor cosizigia $\mathbf{\Omega}^{-1}$ da categoria $\underline{mod}(\Lambda)$ em $\underline{mod}(\Lambda)$ e enunciarmos a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *Seja Λ uma álgebra Artiniana autoinjetiva. Então os funtores $\mathbf{\Omega} : \underline{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}(\Lambda)$ e $\mathbf{\Omega}^{-1} : \underline{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}(\Lambda)$ são equivalências inversas.*

Esse resultado é usado ao longo do capítulo porém não o demonstramos. Como foi dito anteriormente o leitor pode encontrar mais detalhes na seção IV.3 em [4].

Definimos o funtor $\mathbf{\Omega}^i : \underline{mod}(\Lambda) \longrightarrow \underline{mod}(\Lambda)$ como é feito em [4]. Para $i = 0$, $\mathbf{\Omega}^0 = 1_{\underline{mod}(\Lambda)}$ e $\mathbf{\Omega}^{i+1} = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^i$ para todo $i \geq 0$. Similarmente definimos $\mathbf{\Omega}^{-i}$ para todo $i \geq 0$.

Lema 3.3. *Todo módulo indecomponível sobre uma álgebra autoinjetiva é projetivo ou tem dimensão projetiva infinita.*

Demonstração. Seja M um Λ-módulo indecomponível, sendo Λ uma álgebra autoinjetiva. Se $dp(M) = \infty$, nada há fazer. Suponha então $dp(M) = n < \infty$, e $n \neq 0$. Seja

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de M. Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow coker(d_n) \longrightarrow 0,$$

Como Λ é autoinjetiva, então o módulo projetivo P_n também é injetivo. Logo, $P_n \oplus coker(d_n) \cong P_{n-1}$. Assim, $coker(d_n)$ é projetivo (ver Proposição 1.36), pois P_{n-1} o é, o qual é uma contradição pois teríamos a seguinte resolução projetiva

$$0 \longrightarrow coker(d_n) \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de comprimento $n-1$. Portanto, $n = 0$, isto é, M é um módulo projetivo. $\square$

Podemos agora afirmar e provar nosso principal resultado deste capítulo, que caracteriza as álgebras autoinjetivas, ver [11].

Teorema 3.4. *Seja Λ uma álgebra Artiniana. As seguintes afirmações são equivalentes,*

a) $\phi dim(\Lambda) = 0$

b) $\psi dim(\Lambda) = 0$

c) *Λ é uma álgebra autoinjetiva.*

Demonstração. $b) \Rightarrow a)$ Segue diretamente das definições da $\phi dim(\Lambda)$ e da $\psi dim(\Lambda)$.

a)$\Rightarrow$ b) Se $\phi dim(\Lambda) = 0$ então para todo $M \in mod(\Lambda)$ tem-se $\phi(M) = 0$. Seja $M \in mod(\Lambda)$, para cada $X \mid M$ com $dp(X) < \infty$, pelos itens (a) e (c) no Lema 2.5 tem-se $dp(X) = \phi(X) \leq \phi(M) = 0$. Portanto, $\psi dim(\Lambda) = 0$.

a) $\Rightarrow$ c) Suponha que $\phi dim(\Lambda) = 0$. Vamos provar que Λ é uma álgebra autoinjetiva, isto é, todo Λ-módulo projetivo (indecomponível) é injetivo. Primeiro vejamos que todo Λ-módulo projetivo indecomponível tem socle simples. De fato, se P tem dois Λ-módulos simples S_1 e S_2 não isomorfos no seu socle, temos as seguintes sequências exatas curtas:

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow P \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow P \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S_1 \oplus S_2 \longrightarrow P \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

com M_1, M_2 e M_3 Λ-módulos indecomponíveis, ver Proposição 1.34.

Se $M_i \cong M_j$ com $i, j \in \{1, 2, 3\}$, então $rk(M_i \oplus M_j) = 1$ pois M_1 e M_2 são indecomponíveis, logo $rk(\Omega(M_1 \oplus M_2)) \leq 1$. Tem-se por hipótese que $\phi(M_i \oplus M_j) = 0$, então $rk(\Omega(M_1 \oplus M_2)) = rk(S_1 \oplus S_2) = 1$, o qual é um absurdo, pois S_1 e S_2 são simples não isomorfos. Logo $rk(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3) = 3$, enquanto $rk\big(\Omega(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)\big) = 2$ implicando $\phi(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3) \geq 1$, o que é um absurdo, pois $\phi dim(\Lambda) = 0$.

Suponha agora que P tem dois Λ-módulos simples isomorfos no seu socle. Seja S esse simples, temos as sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S \oplus S \longrightarrow P \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

com M_1 e M_2 módulos indecomponíveis não isomorfos, ver Proposição 1.34. Assim $rk(M_1 \oplus M_2) = 2$, enquanto $rk\big(\Omega(M_1 \oplus M_2)\big) = 1$ implicando $\phi(M_1 \oplus M_2) \geq 1$, que é novamente uma contradição. Em todos os casos, provamos que todo Λ-módulo projetivo indecomponível tem socle simples.

Dado um Λ-módulo projetivo indecomponível $P \in mod(\Lambda)$, seja $I = I(P)$ a sua envolvente injetiva. Pela Proposição 1.35 item (d) temos que I é indecomponível.

Mostraremos que P é injetivo. Suponha que P não seja injetivo, então o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $C = I/P \neq 0$, S é um Λ-módulo simples no socles de C, e a sequência superior é obtida do Pullback da sequência inferior ao longo do monomorfismo $S \longrightarrow C$.

Note que de P e S serem finitamente gerados, U também o é. Mais ainda, de $U \longrightarrow I$ ser um monomorfismo U tem socle simples, Proposição 1.35 item (a), logo U é indecomponível (Proposição 1.35 item d)). Isto implica que S é não projetivo, pois caso contrário $U = P \oplus S$, o que contradiz o fato de U ser indecomponível. Pode-se observar que U também não é projetivo, pois caso contrário a sequência superior seria uma resolução projetiva de S e então $dp(S) = 1 = \phi(M)$, o qual contradiz a hipótese.

Seja $P(S)$ a cobertura projetiva de S. O seguinte diagrama comuta

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & U' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & P(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] & U \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sendo a linha superior a sequência exata curta que resulta de aplicar o Pullback U' à sequência inferior ao longo do epimorfismo $P(S) \longrightarrow S$. Temos assim $U' \cong P \oplus P(S)$. Considere o seguinte diagrama com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega(U) \arrow[r] & P_0(U) \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & ker(\alpha) \arrow[r] & P \oplus P(S) \arrow[r] & U \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Segue-se pelo Lema da Ferradura que 1.44, $\Omega(U) \oplus P \oplus P(S) \cong ker(\alpha) \oplus P_0(U)$. Por outro lado, do Lema da Serpente 1.25 temos $ker(\alpha) \cong \Omega(S)$ donde obtemos:

$$\Omega(U) \oplus P'' \cong \Omega(S) \oplus P_0(U).$$

Temos $[\Omega(S)] = [\Omega(S) \oplus P_0(S)] = [\Omega(U) \oplus P''] = [\Omega(U)]$ em K_0. Como U e S são indecomponíveis temos que os subgrupos gerados por $add(\Omega(U))$ e $add(\Omega(S))$ são iguais em K_0, isto é, $\langle \Omega(U) \rangle = \langle \Omega(S) \rangle$. Temos em K_0

$$\langle \Omega(U \oplus S) \rangle = \langle \Omega(U) \oplus \Omega(S) \rangle = \langle \Omega(U) \rangle + \langle \Omega(S) \rangle = \langle \Omega(S) \rangle.$$

Agora, como S não é somando de U (pois U é indecomponível) então

$$\begin{aligned} rk(U \oplus S) &> rk(S) \\ &= rk(\Omega(S)) \qquad \text{pois } \phi dim(\Lambda) = 0 \\ &= rk(\Omega(U \oplus S)), \end{aligned}$$

assim $\phi(U \oplus S) > 0$, o qual é uma contradição. Portanto, P é injetivo. Donde, Λ é uma álgebra autoinjetiva, como queríamos mostrar.

c) $\Rightarrow$ a) Seja Λ uma álgebra autoinjetiva. Vejamos primeiro que para todo módulo não projetivo indecomponível vale a seguinte afirmação:

Afirmação 3.5. *$M \cong N$ se e somente se $\Omega^n(M) \cong \Omega^n(N)$ para todo M, $N \in mod(\Lambda)$ e todo n.*

De fato, suponha que $M \cong N$. Temos o seguinte diagrama com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r] & P_0(M) \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r] & Q_0(N) \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

então, pelo Lema de Schanuel 1.43 obtemos

$$\Omega(M) \oplus Q_0 \cong \Omega(N) \oplus P_0$$

$$\Omega^{n-1}(\Omega(M) \oplus Q_0) \cong \Omega^{n-1}(\Omega(N) \oplus P_0)$$

$$\Omega^n(M) \oplus \Omega^{n-1}(Q_0) \cong \Omega^n(N) \oplus \Omega^{n-1}(P_0).$$

Como Λ é autoinjetiva e P_0, Q_0 são projetivos então são injetivos, logo $\Omega^{n-1}(P_0) = \Omega^{n-1}(Q_0) = 0$. Assim, $\Omega^n(M) = \Omega^n(N)$.

Reciprocamente, se $\Omega^n(M) = \Omega^n(N)$ então das resoluções projetivas

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow Q_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

obtemos as resoluções injetivas

$$0 \longrightarrow \Omega^n(M) \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \Omega^{-n}(\Omega^n(M)) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega^n(N) \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow \Omega^{-n}(\Omega^n(N)) \longrightarrow 0,$$

logo

$$M \cong \Omega^{-n}(\Omega^n(M)) \cong \Omega^{-n}(\Omega^n(N)) = N.$$

Segue da afirmação 3.5 que para todo Λ-módulo não projetivo M, se $rk(M) = k$ então $rk(\Omega^i(M)) = k$ para cada $i \geq 0$, implicando $\phi(M) = 0$. Como isto é satisfeito para todo $M \in mod(\Lambda)$, mostramos que $\phi dim(\Lambda) = 0$

□

Capítulo 4

A ϕ-dimensão de álgebras de radical quadrado zero

Daqui em diante trabalhamos com álgebras Artinianas Λ da forma $KQ/\mathcal{R}^2$, sendo Q um quiver conexo, $\mathcal{R}$ o ideal gerado pelas flechas e n o número de vértices. Chamamos estas álgebras de "*Álgebras de radical quadrado zero*". Neste capitulo, nosso objetivo é mostrar que para álgebras de radical quadrado zero não autoinjetivas a ϕ-dimensão pode ser calculada através dos seus módulos simples, Teorema 4.21. Este capitulo é baseado em [14].

4.1 Álgebras de radical quadrado zero

Seja Λ uma álgebra de radical quadrado zero. Denotamos por S_i o módulo simples indecomponível definido pelo vértice i e $\Lambda_0 = KQ/\mathcal{R}$, o qual é a soma de todos os módulos simples, a menos de isomorfismo. Sejam $\mathcal{S}$ um conjunto completo de Λ-módulos simples a menos de isomorfismos, $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ o conjunto dos módulos injetivos de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ o conjunto dos módulos projetivos de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{S} \setminus \{\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}}\}$.

Observe que todo módulo projetivo que é somando da cobertura projetiva de S_i, é o módulo P_i tal que existe flecha de i para j, $\alpha : i \to j$. Logo $\Omega(S_i) = \bigoplus_{\alpha:i\to j} S_j$.

Proposição 4.1. *Seja Λ uma álgebra Artiniana de radical quadrado zero com n vértices. Se $gldim(\Lambda) < \infty$ então $gldim(\Lambda) \leq n-1$.*

Demonstração. Seja S_i um módulo simples de Λ. Então S_i não é somando direto de $\Omega^k(S_i)$ para todo $k > 0$, pois caso contrário existiria um ciclo, o que implicaria $dp(S_i) = \infty$, que é um absurdo por hipótese. Como $\Omega(S_i) = \bigoplus_{\alpha:i\to j} S_j$ então em $\Omega(S_i)$ só há possibilidade de aparecer um dos $n-1$ simples restantes como somando direto. Seja $S_j \mid \Omega(S_i)$ então S_j não é somando direto de $\Omega^2(S_i)$ nem de $\Omega(S_i)$ logo em $\Omega^2(S_i)$ há possibilidade de aparecer no máximo um dos $n-2$ simples restantes como somando direto, pois nem S_i nem S_j são somandos diretos de $\Omega^2(S_i)$. Podemos continuar com esse processo no máximo $(n-1)$-vezes, nesse caso obtemos $\Omega^{n-1}(S_i)$ projetivo donde $dp(S_i) \leq n-1$ para todo Λ-módulo simples não projetivo S_i e do Teorema 1.39 obtemos $gldim(\Lambda) \leq n-1$. $\square$

O seguinte lema generaliza o Lema 2.5 e vale em geral para álgebras Artinianas à direita.

Lema 4.2. *Se $M = P \oplus M_1^{l_1} \oplus \cdots \oplus M_t^{l_t}$ onde P é projetivo, M_i é não projetivo para cada i e também $M_i \ncong M_j$ para $i \neq j$ então $\phi(M) = \phi(M_1 \oplus \cdots \oplus M_t)$.*

Demonstração. Segue diretamente do fato de $rk(P \oplus M_1^{l_1} \oplus \cdots \oplus M_k^{l_k}) = rk(M_1 \oplus \cdots \oplus M_k)$. $\square$

Daqui em diante ao calcularmos $\phi(M)$ assumiremos M básico.

Proposição 4.3. *Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ uma decomposição de M em módulos indecomponíveis, com $[\Omega(M)] \in \langle add(M) \rangle$. Então $\phi(M) \leq k$. Em particular, se $\phi(M) = k$ temos $pd(M) = k$.*

Demonstração. Considere $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ uma decomposição de M em módulos indecomponíveis. Provaremos que $\phi(M) \leq k$ por indução sobre k. Se $k = 1$ então M é um Λ-módulo indecomponível e $rk(\Omega(M)) \leq 1$. Se $rk(\Omega(M)) = 0$ então $\phi(M) = 1$. Se $rk(\Omega(M)) = 1$ então $\langle \Omega(M) \rangle \cong \langle add(M) \rangle$ pois $[\Omega(M)] \in \langle add(M) \rangle$. Logo,

$$\langle add(M) \rangle \cong L\langle add(M) \rangle \cong \cdots \cong L^i \langle add(M) \rangle \cong \cdots,$$

e assim $\phi(M) = 0$.

Suponha o resultado válido para valores menores que k. Como M é básico então $rk(M) = k$.

- Se $rk(\Omega(M)) = k$, como por hipótese $[\Omega(M)]$ está em $\langle add(M) \rangle$ então $\langle add(M) \rangle \cong \langle add(\Omega(M)) \rangle \cong \cdots$, logo $\langle add(M) \rangle \cong L^i \langle add(M) \rangle$ para todo i. Assim $\phi(M) = 0$.
- Se $rk(\Omega(M)) < k$ então $\phi(\Omega(M)) \leq k-1$. Pelo Lema 2.6 temos:

$$\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1 \leq (k-1) + 1 = k.$$

$\square$

Proposição 4.4. *Seja $M \in mod(\Lambda)$ tal que $M \cong \Omega^n(M)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então $\phi(M) = 0$. Em particular se $N \mid M$, temos $dp(N) = \infty$.*

Demonstração. Seja $M \in mod(\Lambda)$ tal que $M \cong \Omega^n(M)$. Logo $rk(M) = rk(\Omega^n(M))$ e assim $rk(\Omega^k(M)) = rk(M)$ para todo $0 \leq k \leq n$. Temos também $\Omega^{mn}(M) = \Omega^n(\overset{\cdots}{}(\Omega^n(M))) \cong M$, donde $rk(\Omega^{mn}(M)) = rk(M)$ para todo inteiro $m > 0$. Portanto o posto estabiliza desde o início, ou seja, $\phi(M) = 0$. $\square$

Proposição 4.5. *Se $L^k|_{\langle add(M)\rangle} : \langle add(M)\rangle \longrightarrow \langle add(\Omega^k(M))\rangle$ é um epimorfismo e $rk(L^k\langle add(M)\rangle) < rk(L^{k-1}\langle add(M)\rangle)$ então $\phi(M) = \phi(\Omega^k(M)) + k$.*

Demonstração. Se $L^k|_{\langle add(M)\rangle} : \langle add(M)\rangle \longrightarrow \langle add(\Omega^k(M))\rangle$ é um epimorfismo então $L^k\langle add(M)\rangle = \langle add(\Omega^k(M))\rangle$. Pela hipóteses $rk(L^k\langle add(M)\rangle) < rk(L^{k-1}\langle add(M)\rangle)$ obtemos que a aplicação $L|_{\langle add(\Omega^{k-1}(M))\rangle} : \langle add(\Omega^{k-1}(M))\rangle \longrightarrow \langle add(\Omega^k(M))\rangle$ não é monomorfismo, donde $L|_{\langle add(\Omega^{k-1}(M))\rangle} : \langle add(\Omega^{k-1}(M))\rangle \longrightarrow \langle add(\Omega^k(M))\rangle$ é um isomorfismo se e somente se a restrição $L|_{L^j\langle add(\Omega^k(M))}$ é um monomorfismo, ou seja, o posto estabiliza. $\square$

Corolário 4.6. *Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i$ a decomposição do módulo básico M. Se $\Omega^k(M_i)$ é indecomponível para todo i e $rk(L^k\langle add(M)\rangle) < rk(L^{k-1}\langle add(M)\rangle)$, então*

$$\phi(M) = \phi(\Omega^k(M)) + k.$$

Definição 4.7. *Seja $M = (M_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma representação K-linear do quiver Q e o ideal admissível $\mathcal{I}$. Definimos o suporte da representação M, que denotamos por $supp(M)$, como o subquiver pleno de Q tal que $(supp(M))_0 = \{b \in Q_0 \mid M_b \neq 0\}$.*

A seguir, definimos o *Coração* e o *Membro* de um quiver Q.

Definição 4.8. *Dado um quiver finito Q com n vértices, o **Coração** de Q, denotado por $C(Q)$, é o subquiver pleno de Q determinado pelos vértices cujos módulos simples associados estão na interseção do suporte de $\Omega^n(\Lambda_0)$ com o suporte de $\Omega^{-n}(\Lambda_0)$.*

Definimos o **Membro** de um quiver Q, que denotamos por $M(Q)$, ao subquiver pleno determinado pelos vértices que não estão no coração.

Observação 4.9. *O coração de Q, $C(Q)$, é o subquiver pleno de Q determinado pelos vértices cujos módulos simples associados estão no suporte de $\bigcap_{t\in\mathbb{Z}} (\Omega^t(\Lambda_0))$.*

Exemplo 4.10. *Considere o quiver*

$$Q = \begin{tikzcd} & & & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[dr] & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ur] & & & 8 \arrow[r] \arrow[dl] & 9 \arrow[r] & 10 \\ & & & 5 \arrow[ul] & 7 \arrow[l] & & & \end{tikzcd}.$$

As representações dos seus Λ-módulos projetivos estão dadas por:

$$P_1 = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix};\quad P_2 = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix};\quad P_3 = \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix};\quad P_4 = \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix};\quad P_5 = \begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix};\quad P_6 = \begin{smallmatrix}6\\8\end{smallmatrix};$$

$$P_7 = \begin{smallmatrix}7\\5\end{smallmatrix};\quad P_8 = \begin{smallmatrix} & 8 & \\ 7 & & 9\end{smallmatrix};\quad P_9 = \begin{smallmatrix}9\\10\end{smallmatrix};\quad P_{10} = \begin{smallmatrix}10\end{smallmatrix},$$

e dos seus Λ-módulos injetivos por:

$$I_1 = \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix};\quad I_2 = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix};\quad I_3 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 5\end{smallmatrix};\quad I_4 = \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix};\quad I_5 = \begin{smallmatrix}5\\7\end{smallmatrix};\quad I_6 = \begin{smallmatrix}6\\4\end{smallmatrix};$$

$$I_7 = \begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}; \quad I_8 = \begin{smallmatrix}8\\6\end{smallmatrix}; \quad I_9 = \begin{smallmatrix}9\\8\end{smallmatrix}; \quad P_{10} = \begin{smallmatrix}10\\9\end{smallmatrix}.$$

Calculando as resoluções projetivas e injetivas dos simples obtemos o suporte de $\Omega^{10}(\Lambda_0)$, *que é o subquiver pleno associado aos vértices* $\{3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$, *e o suporte de* $\Omega^{-10}(\Lambda_0)$, *que é o subquiver pleno associado aos vértices* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Então:*

$$C(Q) = \begin{tikzcd}
 & \underset{4}{\cdot} \arrow[r] & \underset{6}{\cdot} \arrow[dr] & \\
\underset{3}{\cdot} \arrow[ur] & & & \underset{8}{\cdot} \arrow[dl] \\
 & \underset{5}{\cdot} \arrow[ul] & \underset{7}{\cdot} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

$$M(Q) = \begin{tikzcd} \underset{1}{\cdot} \arrow[r] & \underset{2}{\cdot} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underset{9}{\cdot} \arrow[r] & \underset{10}{\cdot} \end{tikzcd}.$$

Lembremos que um vértice v é **fonte** se não tem predecessores e é **poço** se não tem sucessores.

Proposição 4.11. *Seja* Λ *uma álgebra de radical quadrado zero. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $M(Q) = \emptyset$.

(2) $C(Q) = Q$.

(3) *Q não tem poço nem fonte.*

(4) *$mod(\Lambda)$ não tem módulo injetivo simples nem módulo projetivo simples.*

Demonstração. A equivalência entre (1) e (2) segue das definições de coração e membro de Q. A equivalência entre (3) e (4) também é clara. Para provar que (3) implica (2) suponha que Q não tem poço nem fonte então para cada vértice v temos pelo menos uma flecha terminando em v e pelo menos uma começando em v. Assim, podemos construir caminhos de comprimento n começando e finalizando em qualquer vértice de Q, ver Observação 4.9, logo $C(Q) = Q$.
Finalmente, para mostrarmos (1) implica (4) suponha que existe um módulo simples injetivo S_i em $mod(\Lambda)$, então este simples não pode ser somando direto da sizigia de qualquer módulo. Em particular não pode estar no suporte de $\Omega^n(\Lambda_0)$. Analogamente se supomos a existência de um projetivo simples. □

Vejamos um resultado sobre a dimensão finitista para álgebras de radical quadrado zero.

Lema 4.12. *Seja* Λ *uma álgebra de radical quadrado zero não simples. Então* Q *não tem poço se e somente se* $findim(\Lambda) = 0$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $findim(\Lambda) = 0$ e que exista um módulo M tal que $dp(M) = \infty$. Se existir um poço $v \in Q_0$ então v não tem sucessores e assim o simples S_v que corresponde ao vértice v é projetivo. Por ser Λ conexa e não simples, existe predecessor de v em Q, isto é, $w \in Q_0$ e uma flecha $\alpha : w \to v$.

Seja P_w o projetivo que corresponde ao vértice w, então podemos construir a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_v \longrightarrow P_w \longrightarrow P_w/S_v \longrightarrow 0$$

donde $\Omega(P_w/S_v) = S_v$. Portanto $dp(P_w/S_v) = 1$ o que contradiz nossa hipótese de $findim(\Lambda) = 0$. Portanto, Q não tem poço.

($\Rightarrow$) Reciprocamente suponhamos que Q não tem poço, então para todo $v \in Q_0$ temos S_v não projetivo. Como a primeira sizigia de todo módulo é semisimples, isto é, para todo módulo M tem-se $\Omega(M)$ igual à soma de simples, segue que a dimensão projetiva de todo módulo M não projetivo é infinita. Assim, $findim(\Lambda) = 0$. $\square$

Observação 4.13. *Na demonstração do Lema 4.12, obtemos uma sequência exata curta que denotamos por η_{S_v}, ou seja,*

$$\eta_{S_v} : \ 0 \longrightarrow S_v \longrightarrow P_w \longrightarrow P_w/S_v \longrightarrow 0,$$

sendo S_v o módulo simples associado ao vértice $v \in Q_0$ que não é fonte.

Proposição 4.14. *Se Λ é uma álgebra de radical quadrado zero então*

$$\phi dim(\Lambda) \leq \phi(\Lambda_0) + 1.$$

Demonstração. Seja $M \in mod(\Lambda)$. Como $\Omega(M)$ é semisimples e Λ_0 é a soma de todos os módulos simples, da Proposição 2.5, $\phi(\Omega(M)) \leq \phi(\Lambda_0)$. Pelo Lema 2.6, $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$ para todo $M \in mod(\Lambda)$. Portanto, $\phi dim(\Lambda) \leq \phi(\Lambda_0) + 1$.

$\square$

Proposição 4.15. *Seja Λ álgebra de radical quadrado zero. Se Λ tem dimensão global infinita e $M(Q)$ é não vazio então $\phi dim(\Lambda) \leq \#\mathcal{S}_D = n - k$, sendo k o número de simples não projetivos nem injetivos.*

Demonstração. Seja Λ uma álgebra de radical quadrado zero. Como Q tem membro, isto é $M(Q) \neq \emptyset$, Λ tem módulos projetivos simples ou módulos injetivos simples, ver Proposição 4.11. Seja $\#(\mathcal{S}_\mathcal{P} \cup \mathcal{S}_\mathcal{I}) = k$ e $S_D = \{S_{k+1}, \ldots, S_n\}$. Segue da hipótese $gldim(\Lambda) = \infty$ e do Teorema 1.39 que existe um módulo simples com dimensão projetiva infinita. Logo $\phi\big(\bigoplus_{i=k+1}^{n} S_i\big) \leq n - (k+1)$. Pela Proposição 4.14 temos $\phi dim(\Lambda) \leq \phi(\Lambda_0) + 1 \leq (n - (k+1)) + 1$. $\square$

Proposição 4.16. *Seja Λ uma álgebra de radical quadrado zero conexa não simples. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_D$ e para cada módulo $S \in \mathcal{S}$ o módulo M_S é simples.

2) Q é um ciclo de comprimento n.

3) Λ é uma álgebra autoinjetiva.

Demonstração. 2) $\Rightarrow$ 1) Segue de Q ser um ciclo de comprimento n e Λ ser uma álgebra de radical quadrado zero.

1) $\Rightarrow$ 2) Suponha $\mathcal{S} = \mathcal{S}_D$ e consideremos as sequências exatas curtas η_S (veja Observação 4.13). Se M_S é simples para cada $S \in \mathcal{S}$, aplicando o Corolário 1.23 nas sequências η_S temos $\ell(P_0(M_S)) = 2$ para todo $S \in \mathcal{S}$. Nesse caso, temos que essa família $\{M_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ é a família de todos os simples, logo para cada vértice existe exatamente uma flecha começando nele. Assim, o número de flechas é o mesmo número de vértices do quiver. Como não existe fonte, pois $\mathcal{S} = \mathcal{S}_D$, temos que para cada vértice existe pelo menos uma flecha terminando nele. Como o número de flechas e vértices coincide, para qualquer vértice existe uma flecha começando e uma flecha terminando nesse vértice, e do quiver Q ser finito obtemos que Q é um ciclo.

2) $\Rightarrow$ 3) Segue do fato de Λ ser uma álgebra de radical quadrado zero e do quiver Q ser um ciclo de comprimento n que todo Λ-módulo projetivo é injetivo. Portanto, Λ é uma álgebra autoinjetiva.

3) $\Rightarrow$ 2) Suponha que Λ é uma álgebra autoinjetiva conexa de radical quadrado zero. Então para cada vértice $v \in Q_0$ existe uma flecha começando em v e uma flecha terminando em v. Portanto Q é um ciclo de comprimento n.

$\square$

Proposição 4.17. *Se Q tem n vértices, então $\phi(\Lambda_0) \leq n - 1$.*

Demonstração. Como $[\Omega(\Lambda_0)] \in \langle add(\Lambda_0) \rangle$, segue da Proposição 4.3 $\phi(\Lambda_0) \leq n$. Se $\phi(\Lambda_0) = n$ segue também da Proposição 4.3 que $dp(\Lambda_0) = n$, donde podemos dizer que $gldim(\Lambda)$ é finita, caso contrário existiria um módulo simples com dimensão projetiva infinita, um absurdo. Pela Proposição 4.1 temos $gldim(\Lambda) \leq n - 1$ donde $dp(\Lambda_0) \leq n - 1$, logo $\phi(\Lambda_0) \leq n - 1$, o que é um absurdo. Portanto, $\phi(\Lambda_0) \leq n - 1$. $\square$

Corolário 4.18. *Se Λ é uma álgebra de radical quadrado zero então $\phi dim(\Lambda) \leq n$.*

Demonstração. Pelas proposições 4.14 e 4.17 temos:

$$\phi dim(\Lambda) \leq \phi(\Lambda_0) + 1 \leq (n - 1) + 1.$$

$\square$

Exemplo 4.19. *Seja Λ a álgebra definida pelo quiver:*

$$Q = \underset{1}{\cdot} \circlearrowleft$$

e a relação $\mathcal{R}^2$. Como Λ é autoinjetiva $\phi dim(\Lambda) = 0 < 1$. Ou seja, a desigualdade no Corolário 4.18 é estrita.

Observação 4.20. *Seja Λ uma álgebra de radical quadrado zero. Se S é um módulo simples injetivo somando direto de $\Omega(M)$ para algúm módulo M, então S é projetivo (veja subseção 1.3.7).*

Temos a seguir uma versão do Teorema 1.39 para a ϕ-dimensão no caso de Λ ser uma álgebra de radical quadrado zero e não autoinjetiva.

Teorema 4.21. *Se Λ é uma álgebra de radical quadrado zero e não autoinjetiva então $\phi dim(\Lambda) = \phi(\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1$.*

Demonstração. Seja $M \in mod(\Lambda)$ não projetivo. Pelo Lema 2.5 obtemos $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$. Como a sizigia do módulo M é semisimples então $\phi(\Omega(M)) \leq \phi(\bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S)$. Mas, pela Observação 4.20 segue:

$$\phi(\Omega(M)) \leq \phi(\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} S),$$

donde $\phi(M) \leq \phi(\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1$. Como esta desigualdade é satisfeita para todo Λ-módulo não projetivo temos pela definição de $\phi dim(\Lambda)$ que $\phi dim(\Lambda) \leq \phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1$.

Para mostrarmos que $\phi(\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1 \leq \phi dim(\Lambda)$ vamos exibir um módulo $M \in mod(\Lambda)$ tal que $\phi(M) = \phi(\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1$. Para cada $S \in \mathcal{S}_D$ considere o módulo indecomponível M_S tal que $\Omega(M_S) = S$ (veja Observação 4.13).

- Se M_S não é simples para algum $S \in \mathcal{S}_D$. Tome $M = (\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} M_S) \oplus (\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} S)$, aplicando o Corolário 4.6 com $k = 1$ obtemos:

$$\phi(M) = \phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1.$$

- Se M_S é simples para todo $S \in \mathcal{S}_D$, como Λ não é autoinjetiva e é de radical quadrado zero, segue da Proposição 4.16 que existe um simples $S_0 \in \mathcal{S}$ que é injetivo ou é projetivo.
  Seja o S_0 projetivo e não injetivo. Tome $M = (\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} M_S) \oplus M_{S_0}$, sendo $\Omega(M_{S_0}) = S_0$ (veja Observação 4.13). Então

$$rk\big(L\langle add(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} M_S \oplus M_{S_0})\rangle\big) < rk\big(\langle add(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} M_S \oplus M_{S_0})\rangle\big),$$

  e aplicando novamente o Corolário 4.6 com $k = 1$ temos:

$$\phi(M) = \phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1.$$

  Seja o S_0 injetivo e não projetivo. Se S_0 não é isomorfo a M_S para todo $S \in \mathcal{S}_D$. Tome $M = (\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} M_S) \oplus S_0$, segue da Proposição 4.5 que $\phi(M) = \phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1$, com $k = 1$.

  Suponha então que S_0 é isomorfo a M_S para algum $S \in \mathcal{S}_D$. Pela construção de nosso conjunto $\{M_S \mid S \in \mathcal{S}_D\}$ na Observação 4.13, existe um $S_1 \in \mathcal{S}_D$ tal que S_1 não é isomorfo a M_S, para todo $S \in \mathcal{S}_D$, caso contrário teríamos S_0 não injetivo. Seja $M = (\bigoplus_{S \in \mathcal{S}_D} M_S) \oplus S_1$, temos então pelo Corolário 4.6 que $\phi(M) = \phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D} S) + 1$.

□

Corolário 4.22. *Se Λ é uma álgebra de radical quadrado zero não autoinjetiva e $M(Q)$ é vazio então $\phi dim(\Lambda) = \phi(\Lambda_0) + 1$.*

Demonstração. Segue do Teorema 4.21 que $\phi dim(\Lambda) = \phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}} S) + 1$. Como $M(Q) = \emptyset$, temos pela Proposição 4.11 que $mod(\Lambda)$ não tem simples projetivos nem injetivos, logo $\mathcal{S} = \mathcal{S}_D$ e assim $\phi(\oplus_{S \in \mathcal{S}} S) = \phi(\Lambda_0)$. Portanto, $\phi dim(\Lambda) = \phi(\Lambda_0) + 1$. □

Considerações Finais

As funções de Igusa-Todorov ϕ e ψ, generalizam de uma certa forma a noção de dimensão projetiva e nos fornecem uma boa informação sobre a complexidade da categoria dos módulos à direita finitamente gerados sobre uma álgebra autoinjetiva.

Vemos que no caso de Λ ser uma álgebra de radical quadrado zero, podemos calcular $\phi dim(\Lambda)$ em termos dos seus simples como no caso da $gldim(\Lambda)$ sendo Λ uma álgebra Artiniana de dimensão finita.

Esse assunto é interessante no sentido de que há mais de cinquenta anos se conjectura que a dimensão finitista de uma álgebra de dimensão finita é finita. Em [21] se introduziu a noção de *Álgebras de Igusa-Todorov* definidas a partir das funções de Igusa-Todorov. Nesse artigo provou-se que a conjectura da dimensão finitista é verdadeira para essa classe de álgebras.

A classe das Álgebras de Igusa-Todorov contém várias outras, por exemplo: álgebras de dimensão de representação menor ou igual que 3, álgebras de radical cubo zero, álgebras monomiais e álgebras seriais à esquerda. Acredita-se que todas as álgebras Artinianas são Álgebras de Igusa-Todorov.

Referências Bibliográficas

[1] F. Anderson, K. Fuller. Rings and Categories of Modules. Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1992).

[2] I. Assem. Algebres et modules: Cours et exercices. Les Presses de l'Université d Ottawa, Ontario, Canada, (1997).

[3] I. Assem, D. Simpson, A. Skowronski. Elements of the Representation Theory of associative Algebras. London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

[4] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalo. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[5] M. Auslander. Representation dimension of Artin algebras. Lecture Notes, Queen Mary College, London, (1971).

[6] H. Bass. *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings.* Trans. Amer. Math. Soc. 95, pp. 466-488, (1960).

[7] M. Broué. *Equivalences of blocks of group algebras.* in: V. Dlab, L.L. Scottand (Ed.), Finite Dimensional Algebras and Related Topics, Kluwer, pp. 1-26, (1994).

[8] S. Eilenberg, S. MacLane. General Theory of Natural Equivalences. American Mathematical Society, Vol. 58 No. 2, 231 - 294, (1945).

[9] P. Gabriel. *Unzerlegbare Darstellungen I.* Manuscripta Math., 71-103, 6 (1972).

[10] D. Hilbert. *Üeber die Theorie der algebraischen Formen.* Springer Berlin Heidelberg, Math. Ann. 36, 473-534, (1890).

[11] F. Huard, M. Lanzilotta. *Self-injective right artinian rings and Igusa Todorov functions.* Algebras Represent. Theory 16(3), 765-770, (2012).

[12] K. Igusa, G. Todorov. *On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras.* Representation algebras and related topics, 201 - 204. Field Inst Commun., 45, Ammer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[13] S. Lang. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag , New York, Inc., (2002).

[14] M. Lanzilotta, E. Marcos, G. Mata. *Igusa-Todorov functions for radical square zero algebras.* Journal of Algebra, Vol. 487., pp. 357 - 385, (2017).

[15] K. Morita. *Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with Minimum Condition.* Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, section A, vol. 6, no. 150, pp. 83-142. JSTOR, www.jstor.org/stable/43698445, (1958).

[16] T. Nakayama. *On algebras with complete homology.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22, 300-307, (1958).

[17] S. Pan, C. Xi. *Finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences.* School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, MOE, 100875 Beijing, People's Republic of China, (2009).

[18] C. Polcino. Anéis e Módulos. Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, (1972).

[19] A. V. Roiter. *The unboundedness of the dimension of the indecomposable representations of algebras that have an infinite number indecomposable representations.* Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat, 32, 1275-1282, Russian, (1968).

[20] J. Rotman. An introduction to Homological Algebra. PhD Springer, USA, (2009).

[21] J. Wei. *Finitistic dimension and Igusa-Todorov algebras.* Adv Math 222, 2215-2226, (2009).

[22] Ch. A. Weibel. Histoy of Homological Algebra. www.math.uiuc.edu/K-theory/0245, (1997).

[23] A. Zimmermann. Representation Theory: A Homological Algebra Point of View. PhD Springer, France, (2004).

[24] B. Zimmermann-Huisgen. *The finitistic dimension conjectures-a tale of 3.5 decades.* Abelian groups and modules (Padova, 1994), 501-517, Math. Appl., 343, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1995).