

MARCELO APARECIDO CABRAL NOGUEIRA

**UMA CLASSE DE EQUAÇÕES TIPO YAMABE E TEORIA DE
BLOW-UP EM $H_1^2(M)$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

N778u
2015 Nogueira, Marcelo Aparecido Cabral, 19-
Uma classe de equações tipo Yamabe e teoria de
blow-up em H^1 (M) / Marcelo Aparecido Cabral Nogueira.
- Viçosa, MG, 2015.
vi, 84f. ; 29 cm.

Orientador : Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Viçosa.

Referências bibliográficas: f.82-84.

1. Geometria diferencial. 2. Geometria riemanniana.
3. Variedades riemannianas. 4. Equações diferenciais
elípticas. 5. Análise funcional. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.36

MARCELO APARECIDO CABRAL NOGUEIRA

UMA CLASSE DE EQUAÇÕES TIPO YAMABE E TEORIA DE
BLOW-UP EM $H_1^2(M)$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de Fevereiro de 2015.

Ariane Piovezan Entringer

Eder Marinho Martins

Gil Fidelix de Souza

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Orlando e Vanderleia.*

Agradecimentos

- Agradeço a Deus que me capacita, fortalece e guia.
- A minha família, a qual constitui algo precioso em minha vida, fornecendo sempre motivação para que eu possa seguir em frente rumo a difíceis conquistas.
- Ao Prof. Anderson Araujo, pelos conhecimentos que me transmitiu. Pela dedicação, amizade, sugestões e confiança. Agradeço pela verdadeira orientação que me deu.
- Aos professores Ariane Piovezan Entringer, Eder Marinho Martins e Gil Fidelix de Souza, pela gentileza de aceitarem participar da banca examinadora.
- Aos professores Paulo Marcelo Dias de Magalhães (UFOP), Rogério Carvalho Picanço (UFV) pela amizade, boas conversas, incentivo e ensinamentos.
- Aos meus colegas do mestrado, em especial Flávio, Glelson e Lázaro (Baiano) pelas conversas e momentos de descontração.
- Aos funcionários do departamento de Matemática, em especial, João Marcos Viana da secretaria de pós-graduação, por sua competência.
- A CAPES, pela bolsa de estudos.

Resumo

NOGUEIRA, Marcelo Aparecido Cabral, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2015. **Uma Classe de Equações Tipo Yamabe e Teoria de Blow-Up em $H_1^2(M)$.** Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo. Coorientadora: Margareth da Silva Alves.

Nesta dissertação estudamos uma classe de equações elípticas tipo Yamabe em uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão $n \geq 3$. Tais equações tem sido alvo de investigações por décadas. Daremos ênfase à H_1^2 -teoria de blow-up estudando sequências de Palais-Smale associadas com a equação crítica, definindo os pontos de blow-up e provando o teorema de decomposição em bolhas.

Abstract

NOGUEIRA, Marcelo Aparecido Cabral, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2015. **A Class of Equations of Yamabe Type and Blow-up Theory in $H_1^2(M)$.** Adviser: Anderson Luis Albuquerque de Araujo. Co-Adviser: Margareth da Silva Alves.

In this dissertation we study a class of elliptic Yamabe type equations on a compact Riemannian manifold, without boundary, of dimension $n \geq 3$. Such equations have been the target of investigation for decades. The main focus will be on H_1^2 -theory for the blow-up studying Palais-Smale sequences associated with the critical equation, defining the blow-up points and proving the theorem of decomposition in bubbles.

Sumário

1	Introdução	1
2	Resultados Auxiliares	5
2.1	Análise Funcional	5
2.2	Análise em Variedades	6
2.3	Desigualdades	16
2.4	Medida e Integração	16
3	Resultados Básicos de EDP's em Variedades Compactas	17
3.1	Espaços de Sobolev	17
3.2	Imersões e Regularidade	18
3.3	Princípio do Máximo e Multiplicadores de Lagrange	19
3.4	Caracterização do Primeiro Autovalor do Operador Δ_g	21
3.5	Equação de Laplace	23
4	O Problema de Yamabe	25
4.1	A Equação de Yamabe	26
4.2	Formulações do Problema	32
4.3	Propriedades Invariantes	33
5	Teoria de Existência para Equações Críticas e Subcríticas	37
5.1	Existência para a Equação Subcrítica	38
5.2	Regularidade para a Equação Crítica	41
5.3	Teoria de Existência Para Equações Críticas	46
5.3.1	O Caso Negativo	46
5.3.2	O Caso Nulo	49
5.3.3	Melhores Constantes para a Desigualdade de Sobolev	50
5.3.4	O Caso Positivo	53
6	Teoria de Blow-Up no Espaço de Sobolev $H_1^2(M)$	58
6.1	O Teorema do Passo da Montanha	58
6.2	Parte de Existência do Teorema 96 via Sequências de Palais-Smale	62
6.3	Introdução a Teoria de Blow-Up no Espaço H_1^2	66
6.4	Resultados Auxiliares	67
6.4.1	Demonstração do Teorema 100	76
6.5	Unicidade da H_1^2 -decomposição	80

Capítulo 1

Introdução

Em várias áreas da Matemática existe um grande interesse em classificar objetos. Por exemplo, em Topologia, existe o interesse de classificar objetos que são homeomorfos e na Teoria dos grupos, podemos destacar a classificação dos grupos simples finitos. Ainda em relação à Topologia, especificamente na Teoria das variedades, existe o interesse em classificar variedades que possuam uma certa propriedade topológica. Em particular, no estudo de variedades Riemannianas as noções de curvatura existentes permitem extrair (sob certas hipóteses) informações importantes sobre a variedade, permitindo classificá-la de alguma forma, seja em termos topológicos, geométricos ou algébricos. Por exemplo, os resultados a seguir, presentes em [26], evidenciam a situação descrita acima:

Teorema 1 *Se M é uma variedade Riemanniana fechada, simplesmente conexa, com curvatura seccional K satisfazendo $1 \leq K \leq 4 - \delta$, para um certo $\delta > 0$ então M é homeomorfa a uma esfera.*

Teorema 2 *(Cheeger - Gromoll, 1971) Suponha (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci R satisfazendo $R \geq 0$. Então o recobrimento universal $(\tilde{M}, \tilde{g})$ é isométrico a um produto $N \times \mathbb{R}^p$, em que N é uma variedade compacta.*

Corolário 3 *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta e tem curvatura de Ricci satisfazendo $R \geq 0$ e $R > 0$ em algum espaço tangente $T_p M$, então $\pi_1(M)$ é finito.*

Ainda neste sentido, temos o resultado a seguir, conhecido como Teorema de Uniformização, o qual foi conjecturado por Felix Klein em 1883, e provado rigorosamente por Henri Poincaré em 1907:

Teorema 4 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta bidimensional. Então existe uma métrica $\tilde{g}$ que é conforme a g tal que $(M, \tilde{g})$ possui curvatura Gaussiana constante.*

Em 1960, H. Yamabe [34] conjecturou que o Teorema de Uniformização podia ser generalizado como a seguir:

Conjectura 5 *Seja M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$ sem bordo, e seja g uma métrica Riemanniana em M . Então existe uma métrica $\tilde{g}$ que é conforme a g , tal que $(M, \tilde{g})$ possui curvatura escalar constante.*

Qualquer métrica conforme à métrica g pode ser escrita como $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, em que u é uma função real positiva e suave definida em M .

Em seguida, podemos nos perguntar a relação existente entre as expressões das curvaturas escalares S_g e $S_{\tilde{g}}$; para isso, tentamos simplificar a fórmula da curvatura escalar com respeito a métrica $\tilde{g}$, e após alguns cálculos, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad (1.1)$$

em que $\Delta_g = \operatorname{div}_g(\nabla_g u)$ denota o operador de Laplace-Beltrami associado à métrica g . Podemos ainda mostrar que, do ponto de vista analítico, este problema é equivalente a encontrar uma solução positiva $u \in C^\infty(M)$ da equação elíptica não linear, dada por

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}S_g u = \mu u^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ em } M \quad (1.2)$$

em que μ é uma constante. Na primeira parte deste trabalho faremos uma descrição detalhada de como obter a equação (1.2) e faremos o início da abordagem analítica.

A conjectura de Yamabe foi resolvida com os trabalhos de Yamabe [34], Trudinger [31], Aubin [5] e Schoen [30]. Para uma introdução mais detalhada ao problema de Yamabe, veja [23]. A perspectiva analítica do problema de Yamabe envolve ideias interessantes, em especial, na solução de equações envolvendo o expoente crítico, em que certas técnicas conhecidas não funcionam. Yamabe observou que a equação (1.2) estava relacionada com o funcional dado por

$$Y(\tilde{g}) = \frac{\int_M S_{\tilde{g}} dV_g}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

o qual é chamado funcional de Yamabe. Utilizando a desigualdade de Hölder, pode-se verificar que tal funcional é limitado inferiormente, e portanto podemos considerar a constante

$$\mu(M) := \inf_{\tilde{g} \in [g]} \frac{\int_M S_{\tilde{g}} dV_g}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

que é chamada invariante de Yamabe. O resultado a seguir presente em [23], garante que o invariante de qualquer variedade compacta é limitado superiormente por uma constante. Mais precisamente:

Teorema 6 *Se M é qualquer variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, então $\mu(M) \leq \mu(\mathbb{S}^n)$.*

A constante $\mu(M)$ desempenha um papel crucial na solução do problema. O sinal de $\mu(M)$ pode ser positivo (resp. negativo, nulo) implicando que podemos deformar conformalmente uma métrica e obter uma outra de curvatura escalar constante positiva (resp. negativa, nula), e isto também corresponde a determinar soluções para (1.2) associado ao sinal do invariante. A solução é obtida usando técnicas variacionais, e uma das dificuldades vem do fato de que $\frac{n+2}{n-2}$ é o expoente crítico para a imersão contínua de Sobolev $H_1^2 \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}$. Após a solução do problema, surgiu o interesse em estudar equações do tipo

$$\Delta_g u + a(x)u = b(x)u^\alpha \text{ em } M,$$

em que a, b são funções definidas em M e $\alpha > 1$; tais equações são chamadas equações tipo Yamabe. Questões sobre a existência, estimativas e unicidade surgiram. Na segunda parte deste trabalho, apresentamos resultados de regularidade e existência para uma classe de equações tipo Yamabe, da forma

$$\Delta_g u + h(x)u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{em } M,$$

em que h é uma função suave em M e λ é um número real. Como caso particular, considerando $h = \frac{n-2}{4(n-1)}S_g$, obtemos a equação (1.2).

A última parte deste trabalho apresenta alguns aspectos simples da teoria de Blow-Up no espaço de Sobolev $H_1^2(M)$, o qual é definido como sendo o complemento de $C^\infty(M)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{H_1^2}$ dada por

$$\|u\|_{H_1^2} = \|u\|_2 + \|\nabla u\|_2,$$

em que $\|\cdot\|_2$ é a norma em $L^2(M)$. Queremos estudar o comportamento das sequências de Palais-Smale associados à equação crítica. Os argumentos iniciais que serão discutidos neste trabalho utilizam a compacidade das imersões $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M)$ para $1 \leq q < \frac{2n}{n-2}$. No caso em que o expoente crítico aparece, garantimos existência de soluções para a equação crítica desde que a energia seja baixa. Podemos nos perguntar sobre o que ocorre quando temos um problema de expoente crítico com energia arbitrária. Ao tentar responder esta questão, aparece a importante noção de pontos de blow-up, algumas vezes também referidos como pontos de concentração. Esses pontos ocorrem naturalmente quando analisamos o comportamento de sequências de Palais-Smale associados a equação

$$\Delta_g u + hu = u^{2^*-1}, \quad (1.3)$$

em que h é uma função suave em M e $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Seja J o funcional definido em $H_1^2(M)$ por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M |u|^{2^*} dV_g.$$

Uma questão que estaremos interessados é caracterizar o comportamento assintótico das sequências de Palais-Smale ¹ para J para funções não negativas. A resposta à esta questão envolve a contribuição de vários trabalhos desenvolvidos desde a década de 80, veja por exemplo [11, 24].

Neste estudo surge uma noção importante, que é a noção de bolha, a qual é definida como uma sequência de funções B_i^m , para $m = 1, 2, \dots, k$ que são obtidas utilizando a expressão de soluções fundamentais da equação Euclideana crítica $\Delta u = u^{2^*-1}$. Mais precisamente, define-se

$$B_i(x) = \left(\frac{\mu_i}{\mu_i^2 + \frac{d_g(x_i, x)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

em que d_g denota a distância geodésica em M , (x_i) é uma sequência de pontos em M convergente, (μ_i) é uma sequência de números reais positivos convergindo a zero quando $i \rightarrow +\infty$. O fato de que a definição de B_i utiliza a expressão das funções não negativas que são soluções da equação Euclideana crítica pode ser facilmente notado sabendo que as expressões dessas soluções são dadas por

¹Uma sequência de funções (u_i) é dita de Palais-Smale para o funcional J se $J(u_i)$ é limitada com respeito a i , e tal que a diferencial de J , DJ seja tal que $DJ(u_i)$ convirja para 0 no dual de $H_1^2(M)$.

$$u_{a,\lambda}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \frac{|x-a|^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, em que $\lambda > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Para mais detalhes, veja [15]. Um resultado importante para a compreensão do comportamento dessas sequências, cuja demonstração é um dos objetivos deste trabalho, é dado pelo seguinte resultado:

Teorema 7 *Sejam h uma função suave em M e (u_i) uma sequência de Palais-Smale de funções não negativas para J . Então existe $u^0 \geq 0$ uma solução de (1.3) e existem k bolhas (B_i^m) , $m = 1, 2, \dots, k$, tal que, a menos de subsequência,*

$$u_i = u^0 + \sum_{m=1}^k B_i^m + R_i$$

em que (R_i) é uma sequência em $H_1^2(M)$ tal que $\|R_i\|_{H_1^2} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$.

O teorema anterior pode ser visto como uma generalização de um resultado devido a Struwe [28], no qual prova-se a existência de uma decomposição para uma sequência de Palais-Smale associada equação

$$\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, \quad (1.4)$$

em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; tal decomposição é da forma descrita no Teorema 7, sendo que neste caso, as funções B_i^m são reescalamentos de soluções da equação Euclideana

$$\Delta u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Também é provado que existe uma decomposição para o funcional energia associado à Equação (1.4).

No caso do Teorema 7 temos uma consequência, que é uma caracterização da energia dos termos da sequência (u_i) no nível H_1^2 , mais precisamente, mostraremos que existe uma decomposição para o funcional energia J e como consequência, veremos que sob certas condições, vale a igualdade

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \|u^0\|_{H_1^2}^2 + \sum_{m=1}^k \|B_i^m\|_{H_1^2}^2 + o(1),$$

em que u_i , u^0 e B_i são dados pelo Teorema 7. Recentemente, E. Hebey, O. Druet, F. Robert e outros autores vem desenvolvendo resultados na chamada C^0 -teoria, o que seria o próximo passo na direção da H_1^2 -teoria que descreveremos. Para uma introdução a esta teoria veja [15].

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

Neste capítulo, enunciaremos alguns dos principais resultados e definições que usaremos ao longo deste trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências bibliográficas citadas.

2.1 Análise Funcional

Definição 8 Um operador linear $T : E \rightarrow F$ entre espaços normados é dito compacto se $\overline{T(B_E)}$ é um subconjunto compacto em F , em que

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

é a bola fechada unitária de E .

Teorema 9 Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear e compacto. Então, para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E , a sequência $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ tem subsequência convergente em F .

Demonstração. Veja [7].

Proposição 10 Seja E um espaço vetorial normado e $J_E : E \rightarrow E''$ o operador linear dado por

$$J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in E'$. Então J_E é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de E em E'' .

Demonstração. Veja [7], p. 89.

Definição 11 Um espaço normado E é dito reflexivo se o mergulho canônico $J_E : E \rightarrow E''$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E''$. E neste caso, J_E torna-se um isomorfismo isométrico.

Teorema 12 Sejam E, F espaços normados e T linear.

(1) Se T é compacto, vale que

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E \Rightarrow T(x_n) \rightarrow T(x) \text{ em } F. \quad (2.1)$$

(2) Se E é reflexivo, então T é compacto se, e somente se vale (2.1).

Demonstração. Veja [7].

Teorema 13 *Seja E um espaço reflexivo. Então toda sequência limitada em E possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Veja [7].

Proposição 14 *Seja E um espaço normado.*

(1) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E , então a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é limitada, e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

(2) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em E^* , então $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Veja [7].

Definição 15 *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach. Dizemos que X é (continuamente) imerso em Y (denotado $X \hookrightarrow Y$) se existe uma aplicação linear injetiva $i : X \rightarrow Y$ e uma constante C tal que*

$$\|i(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X.$$

Neste caso vamos simplesmente identificar X com o subespaço $i(X) \subset Y$. X é compactamente imerso em Y se i transforma subconjuntos limitados de X em subconjuntos relativamente compactos de Y .

Definição 16 *Um funcional F em um espaço de Banach X é dito Fréchet-Diferenciável em um ponto $u \in X$ se existe uma aplicação linear limitada $DF(u) \in X^*$, chamada a diferencial de F em u , tal que*

$$\frac{|F(u+v) - F(u) - DF(u).v|}{\|v\|_X} \rightarrow 0$$

quando $\|v\|_X \rightarrow 0$. F é de classe C^1 , se a aplicação $u \mapsto DF(u)$ é contínua.

2.2 Análise em Variedades

Definição 17 *Seja M um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se cada ponto de M possui uma vizinhança aberta que é homeomorfa a algum subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Definição 18 *Uma carta em M é um par (Ω, φ) em que Ω é um subconjunto aberto de M , e φ é um homeomorfismo de Ω sobre algum subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para $y \in \Omega$, as coordenadas de $\varphi(y)$ em $\mathbb{R}^n$ são chamadas coordenadas de y em (Ω, φ) .*

Definição 19 *Um atlas em M é uma coleção de cartas (Ω_i, φ_i) , $i \in I$, tal que*

$$M = \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Dado um atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$, chamamos de funções de transição as aplicações

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \rightarrow \varphi_j(\Omega_i \cap \Omega_j),$$

considerando $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$. Um atlas é dito de classe C^k se as funções de transições forem de classe C^k . Para nossos propósitos vamos sempre assumir que $k = +\infty$ e que M é conexa. Hipóteses adicionais sobre M serão feitas ao longo desse trabalho.

Definição 20 *Sejam $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas locais em M . Dizemos que (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis se*

- (i) $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ e $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ são abertos;
- (ii) as funções de transição são diferenciáveis, (no sentido da Definição 22).

A existência de um atlas maximal será admitida sem maiores detalhes. Um atlas é dito maximal se contém todas as cartas que são compatíveis com a estrutura diferenciável.

Definição 21 *Uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma variedade topológica de dimensão M , juntamente com um atlas C^∞ maximal.*

Definição 22 *Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis, em que $m = \dim M, n = \dim N$. Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$ se existe um sistema de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

é diferenciável no ponto $\varphi(p)$.

Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos de M . Defina

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável} \}$$

Definição 23 *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \dots, Y_r$ campos diferenciáveis em $\mathcal{X}(M)$, tem-se que $T(Y_1, \dots, Y_r)$ é uma função diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento.

Definição 24 *Uma conexão afim (representada por ∇) em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que a cada par de campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ associa ao um terceiro campo, denotado por $\nabla_X Y$. Além disso, se $Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, então ∇ tem as seguintes propriedades:

- 1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- 2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- 3) $f\nabla_X Y + X(f)Y$

Definição 25 *Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dada por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Seja $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de u é o campo diferenciável ∇u , que identificamos com o tensor

$$\nabla u : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

dado por

$$\nabla u(X) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x^i},$$

temos que $\nabla(\nabla u)$ é segundo a definição anterior, um tensor de ordem 2, cuja expressão para campos simples é:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &:= \nabla(\nabla u) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\nabla u \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) - \nabla u \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right) - \nabla u \left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right), \end{aligned}$$

em que Γ_{ij}^k denota as funções componentes do campo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$ também chamados de símbolos de Christoffel ¹. Assim, podemos escrever

$$\nabla(\nabla u) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

Desta forma, podemos generalizar e encontrar as derivadas covariantes de ordem mais alta.

Definição 26 *Seja M uma variedade compacta. O conjunto das funções k -vezes diferenciáveis em M , para o qual a norma*

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \sup_M |\nabla^i u|$$

é finita, é denotado por $C^k(M)$.

Se $f \in C^k(M)$ para todo k , dizemos que $f \in C^\infty(M)$, se f é apenas contínua, dizemos que $f \in C^0(M)$. O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(M)$ é definido para $0 < \alpha < 1$ como o conjunto das funções $u \in C^k(M)$ para as quais tenhamos

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} = \|u\|_{C^k} + \sup_{x \neq y} \frac{|\nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Definição 27 *Um vetor tangente à variedade M em $p \in M$ é um funcional linear $v \in \mathcal{F}(M)^*$ tal que*

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \quad f, g \in \mathcal{F}(M).$$

O conjunto dos vetores tangentes a M em p é chamado espaço tangente a M em p , e é denotado por $T_p(M)$.

¹Uma simples observação permite notar que usamos o fato de que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Isto porque estamos assumindo a existência da conexão de Levi-Civita a qual é simétrica. Para mais detalhes, veja [14].

Podemos construir vetores tangentes em uma variedade diferenciável tomando uma carta (U, φ) em M em torno de p , e definimos para cada $i = 1, \dots, m$, o funcional $\partial_i|_p: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\partial_i|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

Como $(f + \lambda g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + \lambda g \circ \varphi^{-1}$, então $\partial_i|_p$ é linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_i|_p(fg) &= \frac{\partial((fg) \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial((f \circ \varphi^{-1}) \cdot (g \circ \varphi^{-1}))}{\partial x^i}(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \\ &= \partial_i|_p(f)g(p) + f(p)\partial_i|_p(g). \end{aligned}$$

Assim, $\partial_i|_p \in T_p M$. Também é comum escrever $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Daqui em diante, para simplificar a notação, escrevemos ∂_i no lugar de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ para quaisquer índices i .

Lema 28 Para cada $p \in M$, temos $T_p M$ espaço vetorial real.

Demonstração. Veja [33].

Seja M uma variedade diferenciável, de dimensão n . Uma métrica Riemanniana g em M é uma família diferenciável de produtos escalares definidos sobre os espaços tangentes de M . Isto é, g associa a cada $p \in M$ uma forma bilinear simétrica em $T_p M$,

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

e a condição de ser diferenciável, é a seguinte: a função

$$p \in M \mapsto g_p(X(p), Y(p)) \in \mathbb{R}$$

deve ser diferenciável, para cada par de campos de vetores diferenciáveis X, Y em M , definidos localmente.

Definição 29 Uma variedade Riemanniana é um par (M, g) em que M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica Riemanniana em M .

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Se $(U, x = (x^1, \dots, x^n))$ é uma carta, uma expressão local para g pode ser dada como segue. Seja $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$ o campo de vetores coordenados e seja $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ as 1-formas duais. Para $p \in U$ e $u, v \in T_p M$, escrevemos

$$u = \sum_i u^i \partial_i|_p \quad \text{e} \quad v = \sum_j v^j \partial_j|_p$$

então, como g_p é bilinear,

$$\begin{aligned}
g_p(u, v) &= \sum_{i,j} u^i v^j g_p(\partial_i, \partial_j) \\
&= \sum_{i,j} g_{ij}(p) u^i v^j \\
&= \sum_{i,j} g_{ij}(p) dx^i(u) dx^j(v) \\
&= \sum_{i,j} g_{ij}(p) (dx^i \otimes dx^j)(u, v)
\end{aligned}$$

em que $g_{ij}(p) = g_p(\partial_i, \partial_j)$ e $dx^i \otimes dx^j$ denota o produto tensorial das 1-formas. Portanto,

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Denotaremos por g a matriz dos coeficientes g_{ij} da métrica, e tem-se que seu determinante é não nulo, e podemos considerar os coeficientes da matriz inversa g^{-1} , os quais denotaremos por g^{ij} .

Teorema 30 *Seja M uma variedade e $p \in M$. Para toda carta (U, φ) em M em torno de p , o conjunto $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ é uma base de $T_p M$, com*

$$v = \sum_{i=1}^m v(\varphi^i) \partial_i|_p,$$

para todo $v \in T_p M$, em que $\varphi^j = \pi^j \circ \varphi$, com π^j denotando a j -ésima projeção. Em particular, $\dim(T_p M) = m$.

Demonstração. Veja [33].

Dada uma variedade M^m , o fibrado tangente de M é o conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Cada elemento de TM é da forma (p, v) , com $v \in T_p M$ e por simplicidade, vamos denotá-lo por v_p e assumimos que $v_p \in T_p M$. Podemos introduzir em TM uma estrutura diferenciável, de modo que ele se torne uma variedade diferenciável de dimensão $2 \dim M$. O conhecimento deste conjunto nos permite definir campo vetorial.

Definição 31 *Um campo vetorial em uma variedade M^m é uma função $X : M \rightarrow TM$ tal que $X_p := X(p) \in T_p M$, para todo $p \in M$.*

O fibrado tangente vem acompanhado de uma projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(v_p) = p$. Para cada $p \in M$, o conjunto $\pi^{-1}(\{p\})$ (que é o espaço $T_p M$) é chamada de fibra sobre p .

Se X é um campo vetorial, então $X_p \in T_p M$ para todo $p \in M$, e portanto, $\pi(X_p) = p$. Reciprocamente, se $X : M \rightarrow TM$ é talque $\pi(X_p) = p$ para todo $p \in M$, então $X_p \in \pi^{-1}(\{p\}) = T_p M$, e temos X campo vetorial. Logo, podemos enunciar:

Lema 32 Uma função $X : M \longrightarrow TM$ é um campo vetorial se, e somente se, $\pi \circ X = id_M$.

Demonstração. Veja [33].

Definição 33 Seja $X : M \longrightarrow TM$ um campo. Considerando uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

em que cada $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ em U e $\{\partial/\partial x^i\}$ é a base associada a φ , $i = 1, \dots, m$. Dizemos que o campo X é diferenciável se, e somente se, a_i é diferenciável para todo $i = 1, \dots, m$ para alguma parametrização. Denotamos o conjunto de todos os campos diferenciáveis por $\mathcal{X}(M)$.

Proposição 34 Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g . Se $u \in C^\infty(M)$ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, então o gradiente de u é o operador

$$\nabla : C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

em U , dado por

$$\nabla u = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial u}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Demonstração. Se $\nabla u = \sum_{k=1}^n a^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x^l} = \left\langle \nabla u, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle_g = \sum_{k=1}^n a^k g^{kl}$$

então

$$g^{kl} \frac{\partial u}{\partial x^l} = \sum_{j=1}^n a^j g^{kl} g_{jl} = \sum_{j=1}^n a^j \delta_{kj} = a^k.$$

Agora, se v é outra função em $C^\infty(M)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g &= \sum_{k,l,m,j} \langle g^{kl} \partial_l u \partial_k, g^{mj} \partial_j v \partial_m \rangle_g \\ &= \sum_{k,l,m,j} g^{kl} \partial_l u g^{mj} \partial_j v g_{km} \\ &= \sum_{k,l,j} g^{kl} \partial_l u \partial_j v \delta_{jk} \\ &= \sum_{k,l} g^{kl} \partial_l u \partial_k v, \end{aligned}$$

em particular, se $v = u$, obtemos

$$|\nabla u|^2 = \sum_{k,l} g^{kl} \partial_l u \partial_k u.$$

Definição 35 O divergente é o operador

$$\operatorname{div}_g : \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

tal que, para $X = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{X}(M)$ tem-se

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (b_i \sqrt{\det g}).$$

Definição 36 O operador de Laplace - Beltrami é o operador

$$\Delta_g : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definido como $\Delta_g : \operatorname{div}_g \circ \nabla_g$. Da expressão de ∇_g e div_g em coordenadas locais (x^i) , utilizando as definições de divergente e gradiente, é possível mostrar que

$$\Delta_g(\cdot) = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x^j}(\cdot)).$$

O teorema a seguir fornece uma outra representação para o operador de Laplace-Beltrami.

Teorema 37 Sejam (g_{ij}) a matriz que representa a métrica g em uma base $\{\partial_i\}_i$, (g^{ij}) sua inversa e Γ_{jk}^i , para $1 \leq i, j, k \leq n$ os símbolos de Christoffel então

$$\Delta_g(\cdot) = \sum_{j,k,m} \partial_k(\cdot) g^{jm} \Gamma_{jm}^k - \sum_{j,k} g^{jk} \partial_{j,k}^2(\cdot),$$

em que $\partial_{j,k}^2(\cdot) := \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j \partial x_k}$.

Observação 38 Em alguns textos, o operador Δ_g é definido da forma acima, porém com sinal negativo. Dependendo do sinal, os dois próximos resultados após a Definição 39, são ligeiramente modificados.

Definição 39 Denotamos por dV_g , o elemento de volume em M , que em qualquer carta é dado por

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx,$$

em que g_{ij} são os coeficientes da métrica g na carta considerada, e dx é o elemento de volume em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 40 (Integração por Partes) Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo e $u, v \in C^\infty(M)$, então valem as seguintes afirmações:

- a) $\int_M \Delta u dV_g = 0;$
- b) $\int_M u \Delta v dV_g = \int_M v \Delta u dV_g;$

$$c) \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g dV_g = - \int_M u \Delta v dV_g.$$

Demonstração. Veja [3], p.46.

Observação 41 Em [3] o operador de Laplace-Beltrami é definido sem o sinal de menos e portanto, em nosso caso, igualdade em (c) será escrita como

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g dV_g = \int_M u \Delta v dV_g.$$

para $u, v \in C^\infty(M)$.

Lema 42 (Teste da derivada segunda). Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional, e $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(M)$. Se u tem um ponto de mínimo local em $p \in M$, então $\nabla u(p) = 0$ e $\Delta u(p) \geq 0$.

Demonstração. Veja [3].

Lema 43 Se $f \in C^\infty(M)$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$\nabla(\gamma \circ f) = \gamma'(f) \nabla f.$$

Demonstração. Veja [20].

Lema 44 Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\nabla f = 0$ em M , então f é constante em M .

Demonstração. Veja [20].

Definição 45 Seja M uma variedade diferenciável. Se $q > 1$, definimos o espaço de Lebesgue $L^q(M)$ como sendo o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integráveis em M , tais que a norma

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p := \left(\int_M |u|^q dV_g \right)^{\frac{1}{q}}$$

é finita.

Proposição 46 Seja $1 \leq p < \infty$, então o espaço dual $(L^p(M))^*$ é isomorfo a $L^q(M)$ em que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Portanto, $L^p(M)$ é reflexivo quando $1 < p < \infty$. O isomorfismo: $L^q(M) \ni f \rightarrow I_g \in (L^p(M))^*$ é definido como

$$L^p(M) \ni f \rightarrow I_g(f) = \int f g d\mu.$$

Demonstração. Veja [6].

Proposição 47 (Interpolação) Seja M uma variedade compacta. Se $f \in L^r(M) \cap L^q(M)$, $1 \leq r < q \leq \infty$, então $f \in L^p(M)$ para $p \in [r, q]$ e

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^a \|f\|_q^{1-a} \text{ em que } a = \frac{1/p - 1/q}{1/r - 1/q}.$$

Demonstração. Veja [6].

Lema 48 (Brézis-Lieb) *Suponha que a sequência (f_n) seja tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p e que $\|f_n\|_p \leq C < \infty$ para todo n e para algum $0 < p < \infty$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p) = \|f\|_p^p.$$

Demonstração. Veja [12].

Proposição 49 *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ ,*

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M,$$

em que

$$\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\},$$

tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \varepsilon$.

Demonstração. Veja [14] pág. 72.

Definição 50 *Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição acima. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por*

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Para algumas aplicações, é conveniente restringir a aplicação $\exp$ a um espaço aberto do espaço tangente $T_q M$, isto é, definiremos

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

Proposição 51 *Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M .*

Demonstração. Veja [14], pág.73.

Definição 52 *O raio de injetividade $i_p(g)$ de (M, g) no ponto $p \in M$ é definido como sendo o número real*

$$i_p(M, g) = \sup \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_p M \rightarrow \exp_p(B_\varepsilon(0)) \subset M \text{ é um difeomorfismo} \right\}.$$

Definição 53 *O raio de injetividade i_g de (M, g) é definido como sendo*

$$i_g = \inf \{ i_p(M, g) \mid p \in M \}.$$

Observação 54 *Se M é uma variedade compacta, pode se provar que o raio de injetividade satisfaz*

$$0 < i_g \leq \text{diam}(M),$$

em que $\text{diam}(M)$ denota o diâmetro de M . Isto decorre do fato de que o raio de injetividade $i : M \rightarrow [0, \infty]$ é uma função contínua. Veja [8].

Definição 55 (i) Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em $T_p M$, $\exp_p(V) = U \subset M$ é chamada vizinhança normal de p .

(ii) Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ de bola normal (ou geodésica) de centro p e raio ε .

(iii) A fronteira de uma bola normal é denotada por $S_\varepsilon(p)$ é denominada esfera normal (ou geodésica).

(iv) As geodésicas em $B_\varepsilon(p)$ que partem de p são chamadas geodésicas radiais.

Definição 56 Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Definição 57 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $p, q \in M$. Então podemos definir a distância geodésica (ou intrínseca) entre p e q como

$$d_g(p, q) := \inf \{ \ell_g(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M \text{ é diferenciável por partes e } c(0) = p, c(1) = q \}$$

em que $\ell_g(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle_g^{1/2} dt$.

Proposição 58 Com a distância d_g , M é um espaço métrico, ou seja, dados quaisquer $p, q, r \in M$, vale que

- 1) $d_g(p, r) \leq d_g(p, q) + d_g(q, r)$,
- 2) $d_g(p, q) = d_g(q, p)$,
- 3) $d_g(p, q) \geq 0$, e $d_g(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Demonstração. Veja [14].

Teorema 59 (Hopf e Rinow) Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $\exp_p$ está definida em todo $T_p(M)$.
- b) Os limitados e fechados de M são compactos.
- c) M é completa como espaço métrico.
- d) M é geodesicamente completa.
- e) Existem uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int} K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

- f) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $\ell(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. Veja [14] pág. 163.

Corolário 60 Se M é compacta então M é completa.

Demonstração. Basta notar que M satisfazem a condição b), pois um subconjunto fechado de um espaço topológico compacto também é compacto.

2.3 Desigualdades

Lema 61 (*Desigualdade de Jensen*). Se $p_1 + \dots + p_n = 1$, $p_i \geq 0$, e φ é uma função convexa, então

$$\varphi(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 \varphi(x_1) + \dots + p_n \varphi(x_n).$$

No caso particular em que $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x) = x^\alpha$ para $\alpha \geq 1$ temos

$$(x_1 + \dots + x_n)^\alpha \leq n^{\alpha-1} (x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha).$$

Lema 62 Seja $n \geq 3$ e $p > 0$. Existe $C > 0$ tal que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, valem as seguintes desigualdades:

$$|a + p|^p \leq C(|a|^p + |b|^p) \quad (2.2)$$

$$||a + b|^{2^*} - |a|^{2^*} - |b|^{2^*}| \leq C(|a|^{2^*-1}|b| + |a||b|^{2^*-1}) \quad (2.3)$$

$$||a + b|^{2^*-2}(a + b) - |a|^{2^*-2}a - |b|^{2^*-2}b| \leq C(|a|^q|b|^r + |a|^r|b|^q) \quad (2.4)$$

em que $2^* = \frac{2n}{n-2}$, $q = \frac{(n+2)^2}{2n(n-2)}$ e $r = \frac{n+2}{2n}$.

Este resultado encontra-se em [1], p. 92.

2.4 Medida e Integração

Teorema 63 Sejam $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ o espaço das funções integráveis, e (f_n) uma sequência em L e seja $g \in L$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existe f mensurável tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p então

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [16].

Lema 64 Seja f uma função mensurável não negativa e integrável. Então $\int f d\mu$ é absolutamente contínua em relação a μ , ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $\mu(A) < \delta$ então $\int_A f d\mu < \varepsilon$. Em particular, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} |f| d\mu = 0$.

Demonstração. Veja [16].

Lema 65 Sejam $\{f_n\} \subset L^p(M)$ uma sequência e $f \in L^p(M)$, tal que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\} \subset L^p(M)$ tal que

(i) $f_{n_k} \rightarrow f$ q.t.p em M

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em M , para todo $k \in \mathbb{N}$ com $h \in L^p(M)$.

Demonstração. Veja [10].

Capítulo 3

Resultados Básicos de EDP's em Variedades Compactas

Neste capítulo vamos apresentar algumas construções e resultados que vamos utilizar no restante deste trabalho. Isto inclui uma discussão breve sobre espaços de Sobolev, regularidade, princípio do máximo para equações elípticas e exemplos básicos de aplicações do método variacional.

3.1 Espaços de Sobolev

Nesta seção vamos definir alguns espaços de funções que utilizaremos ao longo deste trabalho. As demonstrações dos resultados desta seção, bem como outros resultados relevantes podem ser encontrados em [18]. Dado um inteiro positivo k , e $p \geq 1$ real, seja

$$C_k^p(M) = \left\{ u \in C^\infty(M) \mid \forall j = 0, \dots, k, \int_M |\nabla^j u|^p dV_g < +\infty \right\}.$$

Quando M é compacta, temos que $C_k^p(M) = C^\infty(M)$. Para $u \in C_k^p(M)$, podemos definir a expressão

$$\|u\|_{H_k^p} = \sum_{j=0}^k \left(\int_M |\nabla^j u|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}},$$

e pode-se verificar que esta expressão define uma norma em $C_k^p(M)$. Definimos o espaço de Sobolev $H_k^p(M)$ como segue.

Definição 66 Dada (M, g) uma variedade Riemanniana diferenciável, k inteiro positivo, e $p \geq 1$ real, o espaço de Sobolev $H_k^p(M)$ é o complemento de $C_k^p(M)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{H_k^p}$.

Em particular, se M é compacta, $k = 1$, e $p > 1$, temos H_1^p como sendo o complemento do espaço $C^\infty(M)$ referente a norma

$$\|\cdot\|_{H_1^p} = \|\cdot\|_p + \|\nabla(\cdot)\|_p,$$

em que $\|\cdot\|_p$ é a norma em $L^p(M)$. Trabalharemos mais frequentemente com o espaço $H_1^2(M)$, em que a norma e o produto interno são dados respectivamente por

$$\|\cdot\|_{H_1^2}^2 = \int_M |\nabla(\cdot)|^2 dV_g + \int_M (\cdot)^2 dV_g$$

e

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1^2} = \int_M \langle \nabla(\cdot) \nabla(\cdot) \rangle_g dV_g + \int_M (\cdot)(\cdot) dV_g.$$

Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

Proposição 67 *Para qualquer inteiro positivo k , $H_k^2(M)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com a norma*

$$\| \cdot \| = \left(\sum_{j=0}^k \int_M |\nabla^j(\cdot)|^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, estes espaços possuem a propriedade de serem reflexivos, conforme enuncia a

Proposição 68 *Se $p > 1$, então $H_k^p(M)$ é um espaço reflexivo.*

Demonstração. Veja [18].

3.2 Imersões e Regularidade

Proposição 69 *Dado $q \in [1, n)$, seja $q^* := \frac{nq}{n-q}$ o expoente crítico de Sobolev. Temos:*

(i) *Para qualquer $q \in [1, n)$, e qualquer $p \in [1, q^*]$, $H_1^p(M) \subset L^p(M)$ e esta imersão é contínua, com a propriedade que é também compacta se $p < q^*$.*

(ii) *A imersão $H_k^q(M) \subset H_m^p(M)$ é contínua se $1 \leq q < p$, $0 \leq m < k$, e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-m)}{n},$$

temos também que $H_k^q(M) \subset C^m(M)$ é contínua se $0 \leq m < k$ e $(k-m)q > n$.

Teorema 70 *(Regularidade Elíptica Global). Seja M uma variedade Riemanniana compacta, e suponha $u \in L_{Loc}^1(M)$ uma solução fraca para $\Delta u = f$.*

(i) *Se $f \in H_k^q(M)$, então $u \in H_{k+2}^q(M)$, e*

$$\|u\|_{H_{k+2}^q} \leq C(\|\Delta u\|_{H_k^q} + \|u\|_{L^q}).$$

(ii) *Se $f \in C^{k,\alpha}(M)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$ e*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}} \leq C(\|\Delta u\|_{C^{k+2,\alpha}} + \|u\|_{C^{k+2,\alpha}}).$$

Demonstração. Veja [23], pág. 46.

Teorema 71 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n (possivelmente com bordo). Então*

(i) *Se $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n}$, então $H_k^q(M)$ está continuamente imerso em $L^r(M)$.*

(ii) *(Rellich - Kondrakov) Se a desigualdade do item (i) for estrita, então a inclusão $H_k^q(M) \subset L^r(M)$ é um operador compacto.*

(iii) Suponha $0 < \alpha < 1$, e

$$\frac{1}{q} \leq \frac{k - \alpha}{n}.$$

Então a imersão $H_k^q(M) \hookrightarrow C^\alpha(M)$ é contínua.

Demonstração. Veja [23].

Proposição 72 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz e $u \in H_1^p(M)$, para $p \geq 1$. Se $h \circ u \in L^p(M)$, então $h \circ u \in H_1^p(M)$ e*

$$|(\nabla(h \circ u)(x))| = |h'(u(x))| |(\nabla u)(x)|$$

para quase todo $x \in M$. Em particular, se $u \in L^p(M)$, vale que $|u| \in H_1^p(M)$, e $|\nabla|u| = |\nabla u|$ quase sempre.

Demonstração. Veja [18].

Proposição 73 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, e $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em M com suporte compacto. Então $u \in H_1^p(M)$ para $p \geq 1$. Em particular, se M é compacta, qualquer função Lipschitz em M pertence a $H_1^p(M)$, para $p \geq 1$.*

Demonstração. Veja [18].

3.3 Princípio do Máximo e Multiplicadores de Lagrange

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, e consideremos equações da forma

$$\Delta_g u + a(x)u = f(x) \quad \text{em } M,$$

em que a, f são funções em M .

Definição 74 *Uma função $u \in H_1^2(M)$ é chamada solução fraca da equação acima se para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,*

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g dV_g + \int_M a(x)u\varphi dV_g = \int_M f(x)\varphi dV_g.$$

Teorema 75 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Se uma função $\psi \geq 0$, pertencendo a $C^2(M)$, satisfaz uma desigualdade do tipo*

$$\Delta_g \psi \geq \psi f(\cdot, \psi),$$

em que f é uma função contínua em $M \times \mathbb{R}$, então ψ é estritamente positiva, ou ψ é identicamente nula.

Demonstração. Veja [6].

Teorema 76 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para espaços de Banach). Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, Ω um subconjunto aberto de E , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Seja também $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{H} = \Phi^{-1}(a)$ é não vazio. Se $x_0 \in \mathcal{H} \subset \Omega$ é tal que

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathcal{H}} f(x)$$

e se $D\Phi(x_0)$ é sobrejetiva, então existem números reais λ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que

$$Df(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D\Phi_i(x_0)$$

em que os Φ_i 's são componentes de Φ .

Definição 77 A equação

$$Df(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D\Phi_i(x_0),$$

é chamada equação de Euler- Lagrange para o problema de minimização

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathcal{H}} f(x).$$

Os números reais λ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ são chamados multiplicadores de Lagrange da equação.

Exemplo 78 Consideremos o caso em que $E = H_1^2(M) = \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(u) = \int_M |\nabla u|^2 dV_g,$$

e $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\Phi(u) = \left(\int_M u dV_g, \int_M f u dV_g \right).$$

Claramente, temos $\Phi^{-1}((0, 1)) = \mathcal{H}$, em que

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in H_1^2(M) \mid \int_M u dV_g = 0 \text{ e } \int_M f u dV_g = 1 \right\}.$$

Denotando $\Phi_1(u) = \int_M u dV_g$ e $\Phi_2(u) = \int_M f u dV_g$, segue que para toda $u \in H_1^2(M)$,

$$D\Phi(u).v = (D\Phi_1(u).v, D\Phi_2(u).v) = \left(\int_M v dV_g, \int_M f v dV_g \right),$$

em particular, isto vale para u_0 tal que $f(u_0) = \min_{u \in \mathcal{H}} f(u)$. Afirmamos que $D\Phi(u_0)$ é sobrejetivo. Para isso, seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer e $u \in \mathcal{H}$. Considere a função $v \in H_1^2(M)$ dada por

$$v = \left(b - \frac{a}{V_g} \int_M f dV_g \right) u + \frac{a}{V_g}.$$

Segue facilmente que $D\Phi(u_0).v = (a, b)$, de modo que $D\Phi(u_0)$ é sobrejetivo. Pelo Teorema 76, segue que existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$Df(u_0).v = \lambda_1 D\Phi_1(u_0).v + \lambda_2 D\Phi_2(u_0).v,$$

ou seja,

$$2 \int_M \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle_g dV_g = \lambda_1 \int_M v dV_g + \lambda_2 \int_M f v dV_g$$

para toda $v \in H_1^2(M)$.

3.4 Caracterização do Primeiro Autovalor do Operador Δ_g

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Dizemos que λ é um autovalor para Δ_g se existe $u \in C^\infty(M)$, u não nula tal que $\Delta_g u = \lambda u$. Multiplicando esta equação por u e integrando sobre M teremos

$$\int_M u \Delta_g u dV_g = \lambda \int_M u^2 dV_g,$$

de modo que se λ é um autovalor de Δ_g então $\lambda = \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV_g}{\int_M u^2 dV_g} \geq 0$. Mostra-se ainda que, se $\lambda_0 = 0$ é um autovalor para Δ_g , então a autofunção u é constante, e que se u é constante e λ_0 o autovalor associado, então $\lambda_0 = 0$. Sabe-se que o conjunto de todos os autovalores de Δ_g formam uma sequência numérica não decrescente divergente

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty.$$

Para a esfera $(\mathbb{S}^n, g_0)$, sabe-se que $\lambda_k = k(n + k - 1)$, e para o espaço projetivo, $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), g_0)$, $\lambda_k = 2k(n + 2k - 1)$. O teorema a seguir fornece uma caracterização do primeiro autovalor do operador de Laplace-Beltrami.

Teorema 79 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Se λ_1 é o primeiro autovalor não nulo de Δ_g , então*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathcal{H}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV_g}{\int_M u^2 dV_g},$$

em que $\mathcal{H}$ consiste no conjunto das funções $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$ tais que $\int_M u dV_g = 0$.

Demonstração. Para começar, repare que uma afirmação equivalente é que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g,$$

em que

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ u \in H_1^2(M) \mid \int_M u^2 dV_g = 1 \text{ e } \int_M u dV_g = 0 \right\}.$$

De fato, como $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$, segue que

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV_g}{\int_M u^2 dV_g} \leq \inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g.$$

Por outro lado, dada $u \in \mathcal{H}$ qualquer, vem

$$\frac{\int_M |\nabla u|^2 dV_g}{\int_M u^2 dV_g} = \int_M \left| \nabla \left(\frac{u}{\|u\|_2} \right) \right|^2 dV_g \geq \inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g,$$

uma vez que $\frac{u}{\|u\|_2} \in \tilde{\mathcal{H}}$. Assim,

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV_g}{\int_M u^2 dV_g} \geq \inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g$$

e a afirmação está provada. Agora, seja μ definido por

$$\mu = \inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g$$

e seja (u_i) em $\tilde{\mathcal{H}}$ uma sequência minimizante para μ , isto é, $\|\nabla u_i\|_2^2 \rightarrow \mu$ quando $i \rightarrow +\infty$ e $\|u_i\|_2 = 1$ para todo i . Então,

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \|u_i\|_2^2 + \|\nabla u_i\|_2^2 \leq 1 + \|\nabla u_i\|_2^2.$$

Como $H_1^2(M)$ é reflexivo, e a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ é compacta, pelo Teorema 69, segue que existe $u \in H_1^2(M)$ e uma subsequência (u_{i_k}) de (u_i) , que denotaremos por (u_i) , para simplificar a notação, tal que

$$(1) \quad (u_i) \rightharpoonup u \text{ em } H_1^2(M),$$

$$(2) \quad (u_i) \rightarrow u \text{ em } L^2(M).$$

Por (2), $u \in \tilde{\mathcal{H}}$. E pela convergência fraca de (1), podemos escrever que

$$\|u\|_{H_1^2} \leq \liminf \|u_i\|_{H_1^2}$$

e, novamente, por (2), e pelo fato de que $\lim \|\nabla u_i\|_2^2 = \mu$ vem que

$$\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \leq \limsup \|u_i\|_2^2 + \limsup \|\nabla u_i\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \mu$$

portanto,

$$\int_M |\nabla u|^2 dV_g \leq \mu.$$

Notemos que $\mu > 0$ pois $\tilde{\mathcal{H}}$ não possui funções constantes. Pelo Teorema 76, existem constantes α, β positivas tais que, para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g dV_g = \alpha \int_M \varphi dV_g + \beta \int_M u \varphi dV_g.$$

Tomando respectivamente, $\varphi = 1$ e $\varphi = u$, encontra-se que $\alpha = 0$ e que $\beta = \mu$. Assim, vemos que u é uma solução fraca da equação $\Delta_g u = \mu u$. Pela teoria de regularidade, $u \in C^\infty(M)$. Portanto, μ é um autovalor de Δ_g . Finalmente, para ver que μ é o menor autovalor não nulo de Δ_g , notemos que se $\tilde{\mu}$ é qualquer outro autovalor e u é autofunção associada, temos

$$\mu \leq \frac{\int_M u \Delta_g u dV_g}{\int_M u^2 dV_g} = \tilde{\mu} \frac{\int_M u^2 dV_g}{\int_M u^2 dV_g} = \tilde{\mu}$$

e o fato de que existe uma única $u \in H_1^2(M)$ tal que $\mu = \int_M |\nabla u|^2 dV_g$ implica que μ é autovalor simples. Então $\mu = \lambda_1$, o que prova o teorema.

3.5 Equação de Laplace

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Vamos discutir a existência e unicidade para a equação de Laplace $\Delta_g u = f$ em M . Assuma por conveniência que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é $C^\infty(M)$. Integrando a equação de Laplace, e utilizando a Proposição 40, segue que

$$0 = \int_M \Delta_g u dV_g = \int_M f dV_g,$$

de modo que uma condição necessária para existência de uma solução é que se tenha

$$\int_M f dV_g = 0.$$

Mais precisamente, temos

Teorema 80 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, e $f \in C^\infty(M)$. A equação de Laplace $\Delta_g u = f$ possui solução se, e somente se $\int_M f dV_g = 0$. Além disso, a solução é única, a menos de adição de uma constante.*

Demonstração. Já vimos que a condição é necessária. Resta então provar que a condição é suficiente. Seja

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H_1^2(M) \mid \int_M u dV_g = 0 \text{ e } \int_M f u dV_g = 1 \right\}.$$

e

$$\mu = \inf_{u \in \mathcal{H}} \int_M |\nabla u|^2 dV_g.$$

Temos que $\mathcal{H} \neq \emptyset$ pois existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $cf \in \mathcal{H}$. Considere agora uma sequência minimizante $(u_i) \in \mathcal{H}$ para μ , isto é, $u_i \in \mathcal{H}$ para todo i , e

$$\int_M |\nabla u_i|^2 dV_g \longrightarrow \mu$$

quando $i \longrightarrow +\infty$. Pela caracterização variacional de λ_1 , se $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$ e possui média nula, então

$$\int_M u^2 dV_g \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_M |\nabla u|^2 dV_g.$$

Podemos supor que todos os elementos da sequência (u_i) tenha esta propriedade, e assim,

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \|u_i\|_2^2 + \|\nabla u_i\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1 \right) \int_M |\nabla u_i|^2 dV_g.$$

Como $H_1^2(M)$ é um espaço reflexivo e a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ é compacta pela parte (ii) do Teorema 71, segue que existe $u \in H_1^2(M)$ e uma subsequência (u_i) de (u_i) tal que

$$(1) \quad (u_i) \rightharpoonup u \text{ em } H_1^2(M),$$

$$(2) \quad (u_i) \rightarrow u \text{ em } L^2(M).$$

Por (2), $u \in \mathcal{H}$. Por (1), e pela propriedade de que $\|u\|_{H_1^2} \leq \liminf \|u_i\|_{H_1^2}$, obtemos que

$$\int_M |\nabla u|^2 dV_g \leq \mu.$$

Logo,

$$\int_M |\nabla u|^2 dV_g = \mu$$

pois $u \in \mathcal{H}$ e obtemos a desigualdade contrária. Assim μ é atingido. Como $\mathcal{H}$ não possui funções constantes $\mu > 0$. Pelo Teorema 76, existem constantes α, β positivas, tais que para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dV_g = \alpha \int_M \varphi dV_g + \beta \int_M f \varphi dV_g.$$

Tomando respectivamente, $\varphi = 1$ e $\varphi = u$, encontra-se que $\alpha = 0$ e que $\beta = \mu$. Portanto, u é uma solução fraca da equação

$$\Delta_g u = \mu f.$$

Por resultados de regularidade, $u \in C^\infty(M)$. Então a função $\mu^{-1}u$ é a solução procurada. Finalmente, para provar a unicidade, sejam u e v duas soluções da equação de Laplace. Então

$$\Delta_g(v - u) = 0.$$

Assim, utilizando a Proposição 40 vem que

$$0 = \int_M (v - u) \Delta_g(v - u) dV_g = \int_M |\nabla(v - u)|^2 dV_g,$$

segue daí que $v - u$ é constante, terminando a prova.

Capítulo 4

O Problema de Yamabe

Seja (M^2, g) uma variedade Riemanniana compacta sem bordo, bi-dimensional e seja K_g sua curvatura Gaussiana.

Teorema 81 (*Teorema de Uniformização*) *Se (M, g) é uma variedade compacta bidimensional, então existe uma métrica $\tilde{g}$ que é conforme à g de forma que $(M, \tilde{g})$ possui curvatura Gaussiana constante.*

Para uma introdução histórica desse resultado veja [9]. Seja $K_{\tilde{g}}$ a curvatura de Gauss da métrica $\tilde{g}$ constante. O sinal de $K_{\tilde{g}}$ é determinado pelo Teorema de Gauss-Bonnet:

$$2\pi\chi(M^2) = \int K_{\tilde{g}} dA_{\tilde{g}} = K_{\tilde{g}} \cdot \text{Area}(\tilde{g}).$$

A importância geométrica/topológica do Teorema de Uniformização é a seguinte: Como a curvatura com respeito a $\tilde{g}$ é constante, por um teorema conhecido de Hopf, o recobrimento universal $\tilde{M}$ de M é isométrico a: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{H}^2$, em cada caso, o sinal da curvatura é determinado pelo sinal da característica de Euler. Agora, seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$; uma pergunta natural seria a seguinte:

É possível generalizar o Teorema de Uniformização para $n \geq 3$?

Uma resposta foi dada em 1960 pelo matemático Japonês Hidehiko Yamabe. Entretanto, em 1968, Neil S. Trudinger descobriu um sério erro na prova de Yamabe. Ele foi capaz de salvar alguns resultados de Yamabe, introduzindo novas hipóteses sobre a variedade M . De fato, Trudinger mostrou que existe uma constante positiva $\alpha(M)$ de tal forma que o resultado é verdadeiro quando $\mu_g < \alpha(M)$ sendo

$$\mu_g := \inf_{\tilde{g} \in [g]} \frac{\int_M S_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

em que $S_{\tilde{g}}$ e $[g]$ denotam, respectivamente, a curvatura escalar com respeito a métrica $\tilde{g}$ e a classe de todas as métricas conformes a g . Em seguida, em 1976, T. Aubin estende o resultado de Trudinger

Finalmente, em 1984, Richard Schoen fornece os resultados finais da conjectura de Yamabe. Neste capítulo, vamos descrever o problema de Yamabe, focando no procedimento de colocá-lo no contexto de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Para isso, vamos utilizar algumas noções básicas de Geometria Riemanniana.

4.1 A Equação de Yamabe

Nesta seção vamos utilizar algumas definições geométricas simples e relacionar curvaturas através de uma mudança conforme de métricas para obtermos a chamada equação de Yamabe. Iniciamos esta seção com alguns conceitos básicos de geometria conforme.

Definição 82 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. Uma métrica $\tilde{g}$ é dita conforme a g se existe uma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave e positiva tal que $\tilde{g} = \varphi g$.*

A função φ é chamada fator conforme. Podemos introduzir no conjunto de todas as métricas conformes uma relação de equivalência, declarando $\tilde{g}$ equivalente à g (e denotamos $\tilde{g} \sim g$) se, e somente se $\tilde{g}$ é conforme a g . Facilmente, pode-se verificar que isto define uma relação de equivalência. A classe de equivalência da métrica g é dita classe conforme e vamos denotá-la por $[g] := \{\varphi g \mid \varphi \in C_+^\infty(M)\}$. A título de simplificação, convém notar que qualquer métrica conforme a g pode ser escrita na forma $u^{\frac{4}{n-2}}g$ para alguma $u \in C_+^\infty(M)$, e a classe conforme de g fica sendo

$$[g] = \{\tilde{g} \mid \tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g, u \in C^\infty(M), u > 0\}.$$

Seja então $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ com u suave e positiva em M . Estaremos interessados em descobrir informações sobre o que ocorre com a curvatura escalar ao fazermos uma mudança conforme de métricas da forma acima descrita. Como a expressão da curvatura escalar em coordenadas locais depende especialmente dos símbolos de Christoffel, vamos primeiramente descobrir a expressão deles.

Defina $r := \frac{4}{n-2}$, então os coeficientes da métrica conforme são escritos como

$$\tilde{g}_{ij} = u^r g_{ij},$$

de modo que os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^m$ de $\tilde{g}$ são dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^l &= \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i \tilde{g}_{jk} + \partial_j \tilde{g}_{ki} - \partial_k \tilde{g}_{ij}) \tilde{g}^{kl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (u^r g_{jk}) + \partial_j (u^r g_{ki}) - \partial_k (u^r g_{ij})] u^{-r} g^{kl}. \end{aligned}$$

Nos termos que aparecem, temos

$$\partial_\alpha (u^r g_{\beta\gamma}) = \partial_\alpha (u^r) g_{\beta\gamma} + u^r \partial_\alpha g_{\beta\gamma},$$

para quaisquer índices α, β, γ e podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^l &= \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (u^r) g_{jk} + u^r \partial_i g_{jk} + \partial_j (u^r) g_{ki} + u^r \partial_j g_{ki}] g^{kl} u^{-r} - \frac{1}{2} \sum_k [\partial_k (u^r) g_{ij} + u^r \partial_k g_{ij}] g^{kl} u^{-r} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (u^r) g_{jk} + \partial_j (u^r) g_{ki} - \partial_k (u^r) g_{ij}] g^{kl} u^{-r} + \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (g_{jk}) + \partial_j (g_{ki}) - \partial_k (g_{ij})] g^{kl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k (ru^{r-1} \partial_i u g_{jk} + ru^{r-1} \partial_j u g_{ki} - ru^{r-1} \partial_k u g_{ij}) g^{kl} u^{-r} + \Gamma_{ij}^l \\ &= \frac{1}{2} ru^{r-1} \sum_k (\partial_i u g_{jk} + \partial_j u g_{ki} - \partial_k u g_{ij}) g^{kl} u^{-r} + \Gamma_{ij}^l. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ij}^l &= \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2}ru^{-1} \sum_k (\partial_i u g_{jk} g^{kl} + \partial_j u g_{ki} g^{kl} - \partial_k u g_{ij} g^{kl}) \\ &= \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2}ru^{-1} (\partial_i u \delta_{jl} + \partial_j u \delta_{il} - \sum_k \partial_k u g_{ij} g^{kl}).\end{aligned}$$

Uma observação é que vale a equação $\tilde{g}^{kl} = u^{-r} g^{kl}$. De fato, em notação matricial, sendo I_n a matriz identidade de ordem n , temos $[\tilde{g}]_{kl} [\tilde{g}]^{kl} = I_n$ assim, $u^r [g]_{kl} [\tilde{g}]^{kl} = I_n$ e multiplicando à esquerda pela matriz $[g]^{kl}$, obtemos $u^r [\tilde{g}]^{kl} = [g]^{kl}$, donde $[\tilde{g}]^{kl} = u^{-r} [g]^{kl}$. A expressão da curvatura escalar segundo a métrica conforme $\tilde{g}$ é dada por

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ikj} \tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ijk}^j,$$

em que

$$\tilde{R}_{ijk}^s = \partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^s - \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^s + \sum_l \tilde{\Gamma}_{ik}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^s - \sum_l \tilde{\Gamma}_{jk}^l \tilde{\Gamma}_{il}^s,$$

e, portanto, temos

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} u^{-r} g^{ik} [\partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^j - \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^j + \sum_s \tilde{\Gamma}_{ik}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j - \sum_s \tilde{\Gamma}_{jk}^s \tilde{\Gamma}_{is}^j].$$

Utilizando a expressão para o símbolo de Christoffel em relação a métrica $\tilde{g}$ deduzido acima, encontramos que os demais símbolos são dados por:

$$\tilde{\Gamma}_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j + \frac{r}{2u} (\delta_{kj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_k u - \sum_m g_{ij} g^{mj} \partial_m u), \quad (4.1)$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^j = \Gamma_{jk}^j + \frac{r}{2u} (\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u), \quad (4.2)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ik}^s = \Gamma_{ik}^s + \frac{r}{2u} (\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u), \quad (4.3)$$

$$\tilde{\Gamma}_{js}^j = \Gamma_{js}^j + \frac{r}{2u} (\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u), \quad (4.4)$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^s = \Gamma_{jk}^s + \frac{r}{2u} (\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u) \quad \text{e} \quad (4.5)$$

$$\tilde{\Gamma}_{is}^j = \Gamma_{is}^j + \frac{r}{2u} (\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u). \quad (4.6)$$

Substituindo cada um dos símbolos de Christoffel na expressão da curvatura escalar $S_{\tilde{g}}$, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}u^r S_{\tilde{g}} &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j [\Gamma_{ik}^j + \frac{r}{2u} (\partial_i u \delta_{kj} + \partial_k u \delta_{ij} - \sum_m g_{im} g^{mj} \partial_m u)] + \\ &\quad - \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i [\Gamma_{jk}^j + \frac{r}{2u} (\partial_j u \delta_{kj} + \partial_k u \delta_{jj} - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u)] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{ijks} g^{ik} [\Gamma_{ik}^s + \frac{r}{2u} (\partial_i u \delta_{ks} + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u)] \cdot [\Gamma_{js}^j + \frac{r}{2u} (\partial_j u \delta_{sj} + \partial_s u \delta_{jj} - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u)] + \\
& - \sum_{ijks} g^{ik} [\Gamma_{jk}^s + \frac{r}{2u} (\partial_j u \delta_{ks} + \partial_k u \delta_{js} - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u)] \cdot [\Gamma_{is}^j + \frac{r}{2u} (\partial_i u \delta_{sj} + \partial_s u \delta_{ij} - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u)].
\end{aligned}$$

Inicialmente, vamos efetuar os produtos e derivações em cada uma das parcelas acima. Para organizar os cálculos, vamos denotar:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j [\Gamma_{ik}^j + \frac{r}{2u} (\partial_i u \delta_{kj} + \partial_k u \delta_{ij} - \sum_m g_{im} g^{mj} \partial_m u)], \\
\Sigma_2 &= - \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i [\Gamma_{jk}^j + \frac{r}{2u} (\partial_j u \delta_{kj} + \partial_k u \delta_{jj} - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u)], \\
\Sigma_3 &= \sum_{ijks} g^{ik} [\Gamma_{ik}^s + \frac{r}{2u} (\partial_i u \delta_{ks} + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u)] \cdot \\
& \quad \cdot [\Gamma_{js}^j + \frac{r}{2u} (\partial_j u \delta_{sj} + \partial_s u \delta_{jj} - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u)], \\
\text{e } \Sigma_4 &= - \sum_{ijks} g^{ik} [\Gamma_{jk}^s + \frac{r}{2u} (\partial_j u \delta_{ks} + \partial_k u \delta_{js} - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u)] \cdot \\
& \quad \cdot [\Gamma_{is}^j + \frac{r}{2u} (\partial_i u \delta_{sj} + \partial_s u \delta_{ij} - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u)].
\end{aligned}$$

Vamos desenvolver cálculos, seguindo a ordem acima. Primeiramente,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{ijkm} \{ g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{r}{2u} g^{ik} \delta_{kj} \partial_{ji} u + \frac{r}{2u} g^{ik} \delta_{ij} \partial_{jk} u - \frac{r}{2u} g^{ik} \partial_j (g_{ik} g^{mj} \partial_m u) + \\
& - \frac{r}{2u^2} g^{ik} \delta_{kj} \partial_j u \partial_i u - \frac{r}{2u^2} g^{ik} \delta_{ij} \partial_j u \partial_k u + \frac{r}{2u^2} g^{ik} g_{ik} g^{mj} \partial_j u \partial_m u \} \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{r}{2u} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u + \frac{r}{2u} \sum_{jk} g^{jk} \partial_{jk} u - \frac{r}{2u} \sum_m g^{ik} \partial_j (g_{ik} g^{mj} \partial_m u) + \\
& - \frac{r}{2u^2} \sum_{ik} g^{ij} \partial_j u \partial_i u - \frac{r}{2u} g^{ik} \partial_j u \partial_k u + \frac{rn}{2u^2} g^{mj} \partial_j u \partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{r}{u} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{r}{2u} \sum_m g^{ik} \partial_j g_{ik} g^{mj} \partial_m u \\
& - \frac{nr}{2u} \sum_{jm} \partial_j g^{mj} \partial_m u - \frac{nr}{2u} \sum_{jm} g^{mj} \partial_{mj} u + \frac{2}{u^2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_i u \partial_k u.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\sum_{jm} \partial_j (g^{mj}) \partial_m u = \sum_{jm} - \left(\sum_{ik} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{jk} \right) \partial_m u = - \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{jk} \partial_m u,$$

teremos

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{(2-n)r}{2u} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{r}{2u} \sum_m g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\ &+ \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j g_{ik} \partial_m u + \frac{2}{u^2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u.\end{aligned}$$

Para o segundo somatório, temos

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{ijkm} \{g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + g^{ik} \partial_i [\frac{r}{2u} (\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - g_{jk} g^{mj} \partial_m u)]\} \\ &= \sum_{ijkm} \{g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + g^{ik} \partial_i [\frac{r}{2u} (\partial_k u + n \partial_k u - \delta_{km} \partial_m u)]\} \\ &= \sum_{ijk} \{g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + g^{ik} \partial_i [\frac{r}{2u} (\partial_k u + n \partial_k u - \partial_k u)]\} \\ &= \sum_{ijk} \{g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + g^{ik} \frac{rn}{2} \partial_i (u^{-1} \partial_k u)\} \\ &= \sum_{ijk} \{g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + \frac{rn}{2} g^{ik} (u^{-1} \partial_{i,k} u - u^{-2} \partial_i u \partial_k u)\} \\ &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j - \sum_{ik} \frac{nr}{2u^2} g^{ik} \partial_i u \partial_k u + \frac{nr}{2u} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{i,k} u.\end{aligned}$$

O próximo passo será desenvolver Σ_3 . Temos

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{rn}{2u} \sum_{iks} g^{ik} \partial_s u + \frac{r}{2u} \Gamma_{js}^j (\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u) g^{ik} \\ &+ \frac{r^2}{4u^2} g^{ik} (2n \partial_i u \partial_k u - \sum_m n g_{ik} g^{ms} \partial_m u \partial_s u) \\ &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr}{2u} \sum_{iks} \Gamma_{ik}^s g^{ik} \partial_s u + \frac{r}{2u} \sum_{jks} \Gamma_{js}^j \partial_k u g^{ks} - \frac{nr}{2u} \sum_{jms} \Gamma_{js}^j \partial_m u + \\ &+ \frac{nr^2}{2u^2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u - \frac{n^2 r^2}{4u^2} \sum_{ms} g^{ms} \partial_m u \partial_s u \\ &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr}{2u} \sum_{iks} \Gamma_{ik}^s g^{ik} \partial_s u + \frac{(2-n)r}{2u} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \\ &+ \frac{(2n-n^2)r^2}{4u^2} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u \\ &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr}{2u} \sum_{iks} \Gamma_{ik}^s g^{ik} \partial_s u + \frac{2}{u} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \frac{4n}{(2-n)u^2} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u.\end{aligned}$$

Finalmente, desenvolvendo o último somatório, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_4 &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{r}{2u} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{ls} \partial_l u \right) + \\
&\quad \frac{r}{2u} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{is}^j \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) + \\
&\quad + \frac{r^2}{4u^2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{is}^j \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) = \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{r}{2u} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{jk}^j \partial_i u + \frac{r}{2u} \sum_{jks} g^{jk} \Gamma_{jk}^s \partial_s u + \\
&\quad - \frac{r}{2u} \sum_{jsl} \Gamma_{js}^s g^{jl} \partial_l u + \frac{r}{2u} \sum_{ijs} g^{is} \Gamma_{is}^j \partial_j u + \frac{r}{2u} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{is}^s \partial_k u + \\
&\quad - \frac{r}{2u} \sum_{jsm} \Gamma_{js}^j g^{ms} \partial_m u + \frac{r^2}{4u^2} \sum_{is} g^{is} \partial_s u \partial_i u + \\
&\quad + \frac{r^2}{4u^2} \sum_{js} g^{js} \partial_j u \partial_s u - \frac{r^2}{4u^2} \sum_{jksl} (\delta_{ks})^2 \partial_j u g^{jl} \partial_l u + \\
&\quad + \frac{r^2}{4u^2} \sum_{jks} (\delta_{js})^2 g^{ik} \partial_k u \partial_i u + \frac{r^2}{4u^2} \sum_{ks} g^{sk} \partial_k u \partial_s u + \\
&\quad - \frac{r^2}{4u^2} \sum_{sl} \partial_s u g^{sl} \partial_l u - \frac{r^2}{4u^2} \sum_{ms} g^{ms} \partial_s u \partial_m u + \\
&\quad - \frac{r^2}{4u^2} \sum_{ijsm} (\delta_{ij})^2 g^{ms} \partial_m u \partial_s u + \frac{r^2}{4u^2} \sum_{ml} g^{ml} \partial_m u \partial_l u.
\end{aligned}$$

A soma acima possui 16 termos, e podemos escrever, na ordem em que aparecem, que $\Sigma_4 = S_1 + S_2 + \dots + S_{16}$. Verificações simples permitem concluir que: $S_2 + S_7 = 0$, $S_4 + S_6 = 0$, $S_3 = S_5$, $S_8 + S_{14} = 0$, $S_9 + S_{13} = 0$, $S_{11} + S_{15} = 0$, e assim, somando os termos restantes e simplificando, obtemos que

$$\Sigma_4 = \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{r}{u} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u + \frac{2r^2}{4u^2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u - \frac{r^2}{4u^2} \sum_{jksl} (\delta_{ks})^2 \partial_j u g^{jl} \partial_l u,$$

e mais simplesmente,

$$\Sigma_4 = \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{r}{u} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u + \frac{(2-n)r^2}{4u^2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_k u \partial_i u.$$

Após definir os somatórios, notemos que a expressão dada inicialmente fica sendo

$$u^r S_{\tilde{g}} = \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3 - \Sigma_4.$$

Agora, vamos substituir cada um dos somatórios na equação acima e fazer os cálculos. Lembrando a expressão da curvatura escalar, vem que

$$\begin{aligned}
u^{r+1}S_{\tilde{g}} = & uS_g - 2 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j(g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
& + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j(g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + \frac{2}{u} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \frac{nr}{2u} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u + \\
& - \frac{nr}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + \frac{nr}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u - 2 \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \\
& + \frac{4n}{u(2-n)} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u - r \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - \frac{4}{u(2-n)} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u.
\end{aligned}$$

O segundo membro da igualdade acima possui 12 termos. Fazendo a enumeração das parcelas na ordem em que elas aparecem, denotando cada uma delas por S_i , podemos escrever

$$u^{r+1}S_{\tilde{g}} = S_1 + \dots + S_{12},$$

e verificação simples permite concluir que $S_5 + S_6 + S_{10} + S_{12} = 0$. Agora, identificando os somatórios que são iguais a menos de índices, vem que

$$\begin{aligned}
u^{r+1}S_{\tilde{g}} = & uS_g - \frac{4(n-1)}{n-2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j(g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
& + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j(g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2 \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - 2 \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^s \partial_k u.
\end{aligned}$$

Usando a expressão para os símbolos de Christoffel nas duas últimas parcelas do lado direito da equação acima, vem que

$$\sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^s = \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_j(g_{js}) \partial_k u - \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s(g_{jl}) \partial_k u.$$

Substituindo, vem

$$\begin{aligned}
u^{r+1}S_{\tilde{g}} = & uS_g - \frac{4(n-1)}{n-2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + \\
& - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j(g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j(g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + \\
& + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_j(g_{js}) \partial_k u - 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s(g_{jl}) \partial_k u.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{n-2}{n-1} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}} = \frac{n-2}{n-1} uS_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s(g_{jl}) \partial_k u + 4 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l(g_{js}) \partial_k u.$$

Agora, observando que

$$4 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l(g_{js}) \partial_k u = 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l(g_{js}) \partial_k u + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{lj} \partial_j(g_{ls}) \partial_k u,$$

e fazendo a substituição na equação acima, simplificando e lembrando a expressão do operador de Laplace-Beltrami, dada pelo Teorema 37, vem

$$\begin{aligned}
q_n u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}} &= q_n u S_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} (\partial_j g_{ls} + \partial_l g_{js} - \partial_s g_{jl}) \partial_k u \\
&= q_n u S_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + 4 \sum_{jkl} g^{jl} \sum_s \frac{1}{2} (\partial_j g_{ls} + \partial_l g_{js} - \partial_s g_{jl}) g^{ks} \partial_k u \\
&= q_n u S_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + 4 \sum_{jkl} g^{jl} \Gamma_{jl}^k \partial_k u \\
&= q_n u S_g + 4 \left(\sum_{jkl} \partial_k u g^{jl} \Gamma_{jl}^k - \sum_{jl} g^{jl} \partial_{jl}^2 u \right) \\
&= q_n u S_g + 4 \Delta_g u,
\end{aligned}$$

em que $q_n := \frac{n-2}{n-1}$. Finalmente, podemos escrever a equação de Yamabe:

$$\frac{n-2}{4(n-1)} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}} = \frac{n-2}{4(n-1)} u S_g + \Delta_g u.$$

4.2 Formulações do Problema

Utilizando a equação que deduzimos na seção anterior, vamos obter uma formulação do problema no contexto de (EDP). Para isso, notemos que se o problema de Yamabe tem solução, existe uma métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ tal que $S_{\tilde{g}}$ é constante. Então, pela equação de Yamabe, temos

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} = \mu u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

em que $\mu := \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} \in \mathbb{R}$. Agora, se existem $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave e $\mu \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \mu u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

então, considerando a métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ temos

$$\mu u^{\frac{n+2}{n-2}} = \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

e comparando a primeira equação com a última, obtemos que a curvatura escalar com respeito a métrica $\tilde{g}$ é constante, pois

$$S_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \mu.$$

Portanto, o problema de Yamabe tem solução se, e somente se, existem u suave e positiva em M e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \mu u^{2^*-1},$$

em que $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

4.3 Propriedades Invariantes

Nesta seção vamos mostrar invariância do operador de Laplace - Beltrami em um certo sentido, e dar significado preciso a constante μ_g que aparece na introdução deste capítulo, mostrando que ela possui a propriedade de ser invariante por mudanças conformes de métricas.

Definição 83 *O Laplaciano conforme, denotado por L_g , é o operador definido por*

$$L_g u = \Delta_g u - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u.$$

É importante notar que L_g é conformal invariante no seguinte sentido: se $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ é uma métrica conforme a g , e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva, então:

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi). \quad (4.7)$$

Para verificar esta propriedade, note que pela equação de Yamabe,

$$S_{\tilde{g}} = \frac{-4(n-1)}{n-2} u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g u. \quad (4.8)$$

Se $g_0 \in [g]$, temos $g_0 = \varphi^{\frac{4}{n-2}} \tilde{g} = (u\varphi)^{\frac{4}{n-2}} g$. Então, pela equação (4.8)

$$S_{g_0} = \frac{-4(n-1)}{n-2} (u\varphi)^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi) = \frac{-4(n-1)}{n-2} (\varphi)^{-\frac{n+2}{n-2}} L_{\tilde{g}}(\varphi)$$

e comparando as duas últimas equações, segue que $L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(\varphi u)$. Agora, seja

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in H_1^2(M) : \int_M |u|^{2^*} dV_g = 1 \right\},$$

e defina $\mu_g = \inf_{u \in \mathcal{H}} I(u)$, em que $I(u)$ é o funcional definido em $H_1^2(M)$, dado por

$$I(u) = \int_M |\nabla u|_g^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV_g.$$

Afirmamos que μ_g é conformal invariante. Mais precisamente, vale a

Proposição 84 *Se g e $\tilde{g}$ são conformes, com $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$ para alguma $v \in C^\infty(M)$, então $\mu_g = \mu_{\tilde{g}}$.*

Demonstração. Inicialmente, note que se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$ para alguma $v \in C^\infty(M)$ então

$$dV_{\tilde{g}} = (\det(\tilde{g}_{ij}))^{1/2} = (\det(v^{\frac{4}{n-2}} g_{ij}))^{1/2} = v^{\frac{2n}{n-2}} (\det(g_{ij}))^{1/2} = v^{\frac{2n}{n-2}} dV_g,$$

isto é,

$$dV_{\tilde{g}} = v^{\frac{2n}{n-2}} dV_g.$$

Portanto,

$$\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dV_{\tilde{g}} = \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} |v|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g = \int_M |uv|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g.$$

Para prosseguir, precisamos do seguinte lema.

Lema 85 Se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}}g$ para alguma função positiva $v \in C^\infty(M)$ então

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = \frac{1}{v^{2^*-1}}\Delta_g u - \frac{u}{v^{2^*}}\Delta_g v, \forall u \in C^\infty(M).$$

Demonstração. Fazemos $\theta_{\tilde{g}} = \frac{1}{\sqrt{\det \tilde{g}}}$. Agora, pela definição do operador de Laplace - Beltrami, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) &= \frac{1}{\sqrt{\det \tilde{g}}} \sum_{i,j} \partial_i [\sqrt{\det \tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_j (v^{-1}u)] \\ &= \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i [v^{2^*} \sqrt{\det g} v^{\frac{-4}{n-2}} g^{ij} \partial_j (v^{-1}u)] \\ &= \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i [v^{\frac{2n-4}{n-2}} \sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j (v^{-1}u)] \\ &= \theta_{\tilde{g}} \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_i [v^2 \sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j (v^{-1}u)] \\ &= \theta_{\tilde{g}} \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_i [v^2 \sqrt{\det g} g^{ij} (-v^{-2} \partial_j (v)u + v^{-1} \partial_j u)] \\ &= \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i (-\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j (v)u + \sqrt{\det g} v g^{ij} \partial_j u) \\ &= \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{\det g} v g^{ij} \partial_j u) - \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j (v)u) \\ &= \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j u) v - \theta_{\tilde{g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j v) u \\ &= \frac{1}{v^{2^*-1}} \Delta_g u - \frac{u}{v^{2^*}} \Delta_g v, \end{aligned}$$

para toda $u \in C^\infty(M)$. Portanto,

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = \frac{1}{v^{2^*-1}} \Delta_g u - \frac{u}{v^{2^*}} \Delta_g v.$$

Fazemos $p := 2^*$, então obtemos que

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = -\frac{u}{v^p} \Delta_g v + \frac{1}{v^{p-1}} \Delta_g u,$$

então

$$\begin{aligned}
v^{p-1} \left(\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}(v^{-1}u) \right) &= v^{p-1} \left(-\frac{u}{v^p} \Delta_g v + \frac{1}{v^{p-1}} \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} v^{-1}u \right) \\
&= -uv^{-1} \Delta_g v + \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} v^{p-2}u \\
&= -uv^{-1} \Delta_g v + \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} \left(\frac{\Delta_g v + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v}{v^{p-1} \frac{n-2}{4(n-1)}} \right) v^{p-2}u \\
&= -uv^{-1} \Delta_g v + \Delta_g u + \left(\Delta_g v + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v \right) v^{1-p+p-2}u \\
&= -uv^{-1} \Delta_g v + \Delta_g u + \left(\Delta_g v + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g v \right) v^{-1}u \\
&= \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = v^{-(p-1)} \left(\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u \right).$$

Finalmente, notando que

$$p-1 = 2^* - 1 = \frac{2n}{n-2} - 1 = \frac{n+2}{n-2},$$

e fazendo $u = wv$, vem que $w = v^{-1}u$, segue que

$$\Delta_{\tilde{g}}(w) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}(w) = v^{\frac{-(n+2)}{n-2}} \left(\Delta_g(wv) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(wv) \right).$$

Queremos mostrar que $I_{\tilde{g}}(u) = I_g(uv)$. Observe que

$$I_{\tilde{g}}(u) = \int_M |\nabla u|_{\tilde{g}}^2 + \gamma_n \int_M S_{\tilde{g}} u^2 dV_{\tilde{g}}$$

e

$$I_g(uv) = \int_M |\nabla(uv)|_g^2 + \gamma_n \int_M S_g(uv)^2 dV_g.$$

Acabamos de provar que

$$\Delta_{\tilde{g}}(u) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}}(u) = v^{\frac{-(n+2)}{n-2}} \left(\Delta_g(uv) + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(uv) \right),$$

então multiplicando por u , fazendo $\gamma_n := \frac{n-2}{4(n-1)}$ e integrando sobre M , vem que

$$\begin{aligned}
\int_M \left(\Delta_{\tilde{g}}(u)u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^2 \right) dV_{\tilde{g}} &= \int_M v^{\frac{-(n+2)}{n-2}} \left(\Delta_g(uv)u + \gamma_n S_g u^2 v \right) v^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \\
&= \int_M \left(\Delta_g(uv)u + \gamma_n S_g u^2 v \right) v^{\frac{2n-n-2}{n-2}} dV_g \\
&= \int_M \left(\Delta_g(uv)u + \gamma_n S_g u^2 v \right) v dV_g \\
&= \int_M \Delta_g(uv)uv + \gamma_n S_g(uv)^2 dV_g.
\end{aligned}$$

Integrando a equação

$$\int_M \left(\Delta_{\tilde{g}}(u)u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^2 \right) dV_{\tilde{g}} = \int_M \Delta_g(uv)uv + \gamma_n S_g (uv)^2 dV_g$$

por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} I_{\tilde{g}}(u) &= \int_M \Delta_{\tilde{g}}(u)u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^2 dV_{\tilde{g}} = \int_M \Delta_g(uv)uv + \gamma_n S_g (uv)^2 dV_g = \\ &= \int_M |\nabla(uv)|_g^2 + \gamma_n \int_M S_g (uv)^2 dV_g = I_g(uv). \end{aligned}$$

Portanto, temos $\mu_g = \mu_{\tilde{g}}$.

Lema 86 *Dada (M, g) compacta de dimensão $n \geq 3$, definimos o invariante de Yamabe μ_g por*

$$\mu_g = \frac{n-2}{4(n-1)} \inf_{\tilde{g} \in [g]} V_{\tilde{g}}^{-\frac{n-2}{n}} \int_M S_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}},$$

em que $V_{\tilde{g}}$ é o volume de M em relação a métrica $\tilde{g}$.

Demonstração. Veja [17], p. 24.

Como vimos na introdução deste capítulo, no caso $n = 2$ o Teorema de Gauss-Bonnet fornece uma relação entre o sinal da curvatura escalar e a característica de Euler de M . No caso $n \geq 3$, o sinal da curvatura está associado ao número μ_g , conforme veremos a seguir.

Teorema 87 *Seja (M, g) uma variedade diferenciável compacta de dimensão $n \geq 3$. Então*

$$\begin{aligned} \mu_g > 0 &\iff \exists \tilde{g} \in [g], S_{\tilde{g}} > 0, \\ \mu_g = 0 &\iff \exists \tilde{g} \in [g], S_{\tilde{g}} = 0, \\ \mu_g < 0 &\iff \exists \tilde{g} \in [g], S_{\tilde{g}} < 0. \end{aligned}$$

Acima $S_{\tilde{g}} > 0$ (respectivamente, $S_{\tilde{g}} = 0$ e $S_{\tilde{g}} < 0$) significa que a relação é válida em todos os pontos de M . Em particular, não podemos obter duas métricas conformes com curvaturas escalares distintas.

Demonstração. Veja [17], p. 24.

Capítulo 5

Teoria de Existência para Equações Críticas e Subcríticas

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão $n \geq 3$, e seja h uma função suave em M . Dado $q \in (2, 2^*]$, em que $2^* = \frac{2n}{n-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, considere para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ a equação

$$\begin{cases} \Delta_g u + hu = \lambda u^{q-1} & \text{em } M \\ u > 0 & \text{em } M, \end{cases}$$

Definição 88 *Ao longo deste capítulo, teremos, para $2 < q \leq 2^*$*

$$\mu_q := \inf_{u \in \mathcal{H}_q} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g$$

em que

$$\mathcal{H}_q = \left\{ u \in H_1^2(M) \mid \int_M |u|^q dV_g = 1 \right\}.$$

Para simplificar a notação, escreveremos apenas μ para denotar μ_q . Além disso, no caso crítico, escreveremos $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{2^*}$.

Observe que dada $u \in \mathcal{H}_q$,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \int_M hu^2 dV_g \geq -(\max |h|) \|u\|_2^2,$$

e, também, pela desigualdade de Hölder, vem

$$\|u\|_2^2 \leq \|u\|_q^2 (V_g)^{1-\frac{2}{q}} = (V_g)^{1-\frac{2}{q}}.$$

Então, $-\|u\|_2^2 \geq -(V_g)^{1-\frac{2}{q}}$ e portanto,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq -(\max |h|) (V_g)^{1-\frac{2}{q}},$$

de modo que $\mu \in \mathbb{R}$ está bem definido.

5.1 Existência para a Equação Subcrítica

Nesta seção vamos estabelecer um resultado que fornece a existência e regularidade de soluções para equações subcríticas.

Teorema 89 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão $n \geq 3$, e h uma função suave em M . Dado $q \in (2, 2^*)$, existe $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ em M , tal que*

$$\Delta_g u + hu = \mu u^{q-1}$$

e $\int_M u^q dV_g = 1$, em que μ é a constante definida anteriormente.

Demonstração. Seja $(u_i) \in \mathcal{H}$ uma sequência minimizante para μ , isto é,

$$I(u_i) := \int_M (|\nabla u_i|^2 dV_g + hu_i^2) dV_g \longrightarrow \mu$$

quando $i \rightarrow +\infty$, e $\int_M |u_i|^q dV_g = 1$ para todo i . Como $u_i \in H_1^2(M)$, segue que $|u_i| \in H_1^2(M)$ e $|\nabla |u_i|| = |\nabla u_i|$ quase sempre, e trocando (se necessário) u_i por $|u_i|$, podemos assumir que $u_i \geq 0$ para todo i . Agora, como $q > 2$, note que

$$\|u_i\|_2^2 \leq \left(\int_M |u_i|^q dV_g \right)^{\frac{2}{q}} V_g^{1-\frac{2}{q}} = V_g^{1-\frac{2}{q}},$$

pois $u_i \in \mathcal{H}$. Assim, (u_i) é limitada em $L^2(M)$.

Agora, escrevendo

$$\int_M |\nabla u_i|^2 dV_g = \int_M (|\nabla u_i|^2 dV_g + hu_i^2) dV_g - \int_M hu_i^2 dV_g,$$

poderemos concluir que existe $C > 0$ tal que $\|\nabla u_i\|_2^2 \leq C$ para todo i , e assim, (u_i) é limitada em $H_1^2(M)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos afirmar que

- (1) $u_i \rightarrow u$ em $H_1^2(M)$ (pois (u_i) é limitada em $H_1^2(M)$ que é reflexivo),
- (2) $u_i \rightarrow u$ em $L^q(M)$ (pois a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M)$ é compacta),
- (3) $u_i \rightarrow u$ q.t.p. (Por (2)).

Por (3), seja $x \in M$ tal que $u_i(x) \rightarrow u(x)$ temos $u_i(x) \geq 0$ para todo i , então $u(x) = \lim u_i(x) \geq 0$, logo $u \geq 0$. Agora, por (2),

$$|\|u\|_q - \|u_i\|_q| \leq \|u - u_i\|_q \rightarrow 0.$$

Como $\|u_i\|_q = 1$ para todo i , segue que $\|u\|_q = 1$, e portanto, $u \in \mathcal{H}$ e μ é atingido. Por convergência fraca,

$$\|u\|_{H_1^2} \leq \liminf \|u_i\|_{H_1^2},$$

e assim,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \limsup \|\nabla u_i\|_2^2.$$

Então,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \limsup \int_M (|\nabla u_i|^2 + hu_i^2) dV_g - \liminf \int_M hu_i^2 dV_g \leq \mu - \int_M hu^2 dV_g,$$

e, portanto,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \leq \mu.$$

Mas, como $u \in \mathcal{H}$,

$$\mu \leq \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g.$$

Assim,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g = \mu.$$

Finalmente, pelo Teorema 76¹, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g dV_g + \int_M hu\varphi dV_g = \alpha \int_M u^{q-1} \varphi dV_g.$$

Tomando $\varphi = u$, obtemos que $\alpha = \mu$. Segue então que existe $u \in \mathcal{H}$, $u \geq 0$, que é solução da equação do enunciado.

Agora, provaremos que u é suave² e que $u > 0$. Seja $p_1 := 2^*$; como a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{p_1}(M)$ é contínua, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{2^*} \leq C\|u\|_{H_1^2}$, logo $u \in L^{p_1}(M)$. Escreva $\Delta_g u = \tilde{f}$ em que $\tilde{f} := \mu u^{q-1} - hu$. Observe que $\mu u^{q-1} \in L^{\frac{p_1}{q-1}}(M)$ uma vez que

$$\|\mu u^{q-1}\|_{\frac{p_1}{p_1/(q-1)}}^{p_1/(q-1)} = \int_M |\mu u^{q-1}|^{\frac{p_1}{q-1}} dV_g = |\mu|^{\frac{p_1}{q-1}} \|u\|_{p_1}^{p_1}.$$

Claramente, $hu \in L^{\frac{p_1}{q-1}}$, pois $1 < \frac{p_1}{q-1} < 2^*$. Então $\tilde{f} \in L^{\frac{p_1}{q-1}}(M)$. Notando que u é solução fraca de $\Delta_g u = \tilde{f}$, segue do Teorema 70 que $u \in H_2^{\frac{p_1}{q-1}}(M)$. Usando o Teorema 71 concluímos que $u \in L^{p_2}(M)$, em que

$$p_2 := \frac{np_1}{n(q-1) - 2p_1},$$

pois, se $n(q-1) - 2p_1 > 0$ então

$$H_2^{\frac{p_1}{q-1}}(M) \hookrightarrow L^{\frac{np_1}{n(q-1)-2p_1}}(M) = L^{p_2}(M).$$

Se $n(q-1) \leq 2p_1$ dividimos em dois casos:

(1) Se $n(q-1) = 2p_1$ então

$$H_2^{\frac{p_1}{q-1}}(M) \hookrightarrow L^s(M) \text{ para todo } s \geq 1.$$

(2) Se $n(q-1) < 2p_1$, usaremos a parte (ii) do Teorema 69. Tomemos $k = 2$ e $m = 0$ então $\frac{1}{q} < \frac{2}{n}$ implica $n < 2q$, e tomando $q = \frac{p_1}{q-1}$, temos $q \geq 1$, e a condição $n < 2q$ é satisfeita, pois $2p_1 > n(q-1)$. Logo,

$$H_2^{\frac{p_1}{q-1}}(M) \hookrightarrow C^0(M) \subset L^s(M) \text{ para todo } s \geq 1.$$

¹Neste caso devemos considerar o funcional $f : H_1^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \int |\nabla u|^2 + \int hu^2$ e observar que a função limite u encontrada acima é tal que $\mu = f(u) = \min_{u \in \mathcal{H}} f(u)$ e ainda considerar o funcional $\Phi : H_1^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\Phi(u) = \int |u|^q$.

²Nesta parte vamos obter a regularidade da solução através de um argumento chamado Bootstrap, o qual é baseado nos resultados de imersão de Sobolev e regularidade elíptica.

Continuando com este processo, obtemos por indução finita que $u \in L^s(M)$ para todo s . De fato, seja $p_0 = \frac{n(q-2)}{2}$. Então $p_1 > p_0$, pois isto equivale a dizer que $\frac{2n}{(n-2)} > \frac{n(q-2)}{2}$, isto é, $2^* > q$, o que é verdadeiro.

Definimos p_i por indução, pondo $p_{i+1} = \frac{np_i}{n(q-1)-p_i}$ se $n(q-1) > 2p_i$ e se $n(q-1) \leq 2p_i$ obtemos que $u \in L^s(M)$ para todo s , pois podemos fazer algo análogo ao que foi feito nas etapas (2) e (3) acima.

Notemos que $p_i > p_0$ para todo i . De fato, já temos $p_1 > p_0$. Suponha $n(q-1) > 2p_i$, então

$$p_{i+1} = \frac{np_i}{n(q-1)-p_i}.$$

Suponha como hipótese de indução que $p_i > p_0$, e observe que $\frac{n}{n(q-1)-p_i} > 1$ se, e somente se $p_i > p_0$. Então nossa hipótese implica $\frac{n}{n(q-1)-p_i} > 1$ logo, $p_{i+1} > p_i > p_0$, e portanto $p_{i+1} > p_0$. Agora, $p_{i+1} > p_i$, se e somente se, $p_i > p_0$, de forma que a sequência (p_i) é estritamente crescente.

Agora, notemos que existe i_0 tal que $p_{i_0} > \frac{n(q-1)}{2}$ ou $p_i \leq \frac{n(q-1)}{2}$ para todo i .

(i) No primeiro caso, $n(q-1) < 2p_{i_0}$ e obtemos que $u \in L^s(M)$ para todo $s \geq 1$.

(ii) No segundo caso, temos (p_i) monótona limitada, logo convergente. Sendo p o limite, temos que $p = \frac{np}{n(q-1)-2p}$ o que implica $p = \frac{n(q-2)}{2} = p_0 < p_i$ para todo i e daí, temos um absurdo.

Então $u \in L^s(M)$ para todo $s \geq 1$. Observe que se $\tilde{f} = \mu u^{q-1} - hu$, então $\tilde{f} \in L^s(M)$ para todo $s \geq 1$. De fato, basta provar que $\mu u^{q-1} \in L^s(M)$ para todo $s \geq 1$. Seja $\tilde{p} = (q-1)s$, como $2 < q < 2^*$, vem que $1 < q-1 < 2^*-1$ e $(q-1)s > s$. Temos por hipótese, que $u \in L^{(q-1)s}(M)$ assim

$$\left(\int_M (u^{q-1})^s dV_g \right)^{\frac{1}{(q-1)s}} < \infty,$$

e portanto $u^{q-1} \in L^s(M)$. Segue do Teorema 70, que $u \in H_2^s(M)$ para todo $s \geq 1$; agora notemos que existe s e $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{s} \leq \frac{2-\alpha}{n},$$

e neste caso, $H_2^s(M) \hookrightarrow C^\alpha(M)$. Pela parte (ii) do Teorema 70, temos $u \in C^{2,\alpha}(M)$ pois $\mu_q u^{q-1} - hu \in C^\alpha(M)$ e ainda,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|\Delta u\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^\alpha}).$$

Como $u \in C^{2,\alpha}(M)$, podemos aplicar o Teorema 75. Observe que

$$\Delta_g u = \mu u^{q-1} - hu = u(\mu u^{q-2} - h) \geq u(\mu u^{q-2} - |h|) = uf$$

em que $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(z, t) = \mu t^{q-2} - |h(z)|$ e

$$f(x, u(x)) = \mu u(x)^{q-2} - |h(x)|.$$

Assim, concluímos que u é positiva em M ou $u \equiv 0$. Como $u \in \mathcal{H}$, não podemos ter $u \equiv 0$. Logo, u é positiva em M . Além disso, $u^{q-1} \in C^{2,\alpha}(M)$ e daí, $\mu_q u^{q-1} - hu \in C^{2,\alpha}(M)$, assim, $u \in C^{4,\alpha}(M)$, de modo que $\mu_q u^{q-1} - hu \in C^{4,\alpha}(M)$, e pelo Teorema 70, $u \in C^{6,\alpha}(M)$. Procedendo indutivamente, obtemos que se $k > 6$, podemos fazer um número finito de iterações e obter que $u \in C^l(M)$ para algum $l > k$. Repetindo esse processo indefinidamente, concluímos que $u \in C^\infty(M)$.

5.2 Regularidade para a Equação Crítica

Como vimos nas seções anteriores, a existência de soluções dependia da compacidade das imersões de $H_1^2(M)$ em $L^p(M)$, em que $p < 2^*$. Discutiremos nesta seção, resultados de regularidade para uma solução fraca da equação crítica, caso em que não podemos usar a compacidade. Um caso particular dessa equação é a equação de Yamabe, que é um exemplo histórico de equação em que a imersão de Sobolev que temos de considerar é apenas contínua. Inicialmente, vamos provar um resultado que garante a regularidade de soluções para a equação crítica. Este resultado é necessário, uma vez que o argumento de regularidade discutido para a equação subcrítica não funciona para a equação crítica, pois a fórmula indutiva usada para definir p_{i+1} não funciona. Entretanto, verifica-se que o argumento vale se provarmos que $u \in L^s(M)$ para algum $s > 2^*$, este resultado foi apresentado por N.S. Trudinger [31] em 1968. Começamos com um lema auxiliar.

Lema 90 *Dado $L > 0$ sejam $F_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $G_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções dadas por*

$$F_L(t) = \begin{cases} |t|^{\frac{2^*}{2}}, & |t| \leq L \\ \frac{2^*}{2} L^{(2^*-2)/2} |t| - \frac{2^*-2}{2} L^{\frac{2^*}{2}}, & |t| > L \end{cases}$$

e

$$G_L(t) = \begin{cases} |t|^{2^*-1}, & |t| \leq L \\ \frac{2^*}{2} L^{2^*-2} |t| - \frac{2^*-2}{2} L^{2^*-1}, & |t| > L. \end{cases}$$

então F_L e G_L são funções Lipschitz em $\mathbb{R}$.

Demonstração. De fato, notemos primeiramente que F_L é Lipschitz em $[-L, L]$, uma vez que F_L' é limitada em $[-L, L]$. Para verificar esta afirmação, notemos que pela definição de F_L , temos :

1. Para $t \in (-L, L) \setminus \{0\}$,

$$F_L'(t) \leq \frac{2^*}{2} |t|^{\frac{2^*}{2}-1} \leq \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*}{2}-1}$$

2. $F_L'(0) = 0$, $F_L'(L) = \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*}{2}-1}$ e $F_L'(-L) = -\frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*}{2}-1}$.

Assim, $|F_L'(t)| \leq \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*}{2}-1}$, de modo que

$$|F_L(t) - F_L(w)| \leq \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*}{2}-1} |t - w|$$

para todo $t, w \in [-L, L]$. Agora, para $t, w \in (-\infty, -L) \cup (L, \infty)$ quaisquer, temos

$$|F_L(t) - F_L(w)| = \frac{2^*}{2} L^{(2^*-2)/2} ||t| - |w|| \leq \frac{2^*}{2} L^{(2^*-2)/2} |t - w|.$$

Consideremos agora o caso em que $t \in [-L, L]$ e $w \in (-\infty, -L)$, assim, $|t| \leq L$ e

$$\begin{aligned}
F_L(t) - F_L(w) &= |t|^{\frac{2^*}{2}} - \left(\frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} |w| - \frac{2^* - 2}{2} L^{\frac{2^*}{2}} \right) \\
&= |t|^{\frac{2^*}{2}} - \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} |w| + \frac{2^* - 2}{2} L^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leq |t|^{\frac{2^*}{2}} - \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} L + \frac{2^* - 2}{2} L^{\frac{2^*}{2}} \\
&= |t|^{\frac{2^*}{2}} - L^{\frac{2^*}{2}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
F_L(w) - F_L(t) &= \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} |w| - \frac{2^* - 2}{2} L^{\frac{2^*}{2}} - |t|^{\frac{2^*}{2}} \\
&= \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} (|w| - L) + L^{\frac{2^*}{2}} - |t|^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leq \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} (|w| - |t|) + L^{\frac{2^*}{2}} - |t|^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leq \frac{2^*}{2} L^{\frac{2^*-2}{2}} |w - t| + L^{\frac{2^*}{2}} - |t|^{\frac{2^*}{2}}.
\end{aligned}$$

Considerando a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = s^{\frac{2^*}{2}},$$

temos pelo Teorema do valor médio que existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$|L^{\frac{2^*-2}{2}} - |t|^{\frac{2^*-2}{2}}| = \frac{2^*}{2} |(\theta L + (1 - \theta)|t|)^{\frac{2^*}{2}-1} |L - |t||,$$

e portanto, como $|w| > L$,

$$|L^{\frac{2^*-2}{2}} - |t|^{\frac{2^*-2}{2}}| \leq \frac{2^*}{2} (L + |t|)^{\frac{2^*}{2}-1} |L - |t|| \leq C|w - t|,$$

em que C é uma constante que depende de L . Segue que existe $C_L > 0$ tal que

$$|F_L(w) - F_L(t)| \leq C_L |w - t|,$$

para quaisquer $t \in [-L, L]$ e $w \in (-\infty, -L)$. Analogamente, podemos repetir a ideia para o caso em que $t \in [-L, L]$ e $w \in (L, +\infty)$. Escolhendo a maior das constantes em cada caso, obtemos que existe $M > 0$ tal que

$$|F_L(w) - F_L(t)| \leq M |w - t|,$$

para todos $t, w \in \mathbb{R}$. Ideias análogas permitem concluir que G_L também é Lipschitz em $\mathbb{R}$.

Teorema 91 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, e seja h uma função suave em M . Se $u \in H_1^2(M)$, $u \geq 0$, é uma solução fraca da equação*

$$\Delta_g u + hu = \lambda u^{2^*-1},$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$, então u é suave e ou $u \equiv 0$, ou $u > 0$ sempre.

Demonstração. Começamos mostrando algumas propriedades das funções F_L e G_L definidas acima. Afirmamos que

$$F_L(t) \leq t^{\frac{2^*}{2}}.$$

De fato, o caso em que $0 \leq t \leq L$ é claro, agora se $t > L$ considere função

$$f(t) = t^{\frac{2^*}{2}} - F_L(t),$$

então

$$f'(t) = \frac{2^*}{2}(t^{2^*/2-1} - L^{2^*/2-1}) > 0.$$

Como $f(L) = 0$, temos $f(t) > 0$ se $t > L$, quer dizer, $F_L(t) < t^{\frac{2^*}{2}}$.

Analogamente a afirmação anterior, temos $G_L(t) \leq t^{2^*-1}$; para mostrar isso, basta considerar a função

$$g(t) = t^{2^*-1} - G_L(t)$$

para $t > L$. Note que $(F_L(t))^2 \geq tG_L(t)$. De fato, por definição, Se $0 \leq t \leq L$,

$$(F_L(t))^2 - tG_L(t) = t^{2^*} - tt^{2^*-1} = 0.$$

E, se $|t| > L$,

$$\begin{aligned} (F_L(t))^2 - tG_L(t) &= \left(\frac{2^*}{2} L^{(2^*-2)/2} |t| - \frac{2^*-2}{2} L^{\frac{2^*}{2}} \right)^2 - t \left(\frac{2^*}{2} L^{2^*-2} |t| - \frac{2^*-2}{2} L^{2^*-1} \right) \\ &= \left(\frac{2^*}{2} \right)^2 L^{2^*-2} |t|^2 - 2^* L^{2^*-1} \left(\frac{2^*}{2} - 1 \right) |t| + \left(\frac{2^*}{2} - 1 \right)^2 L^{2^*} - \frac{2^*}{2} L^{2^*-2} |t|^2 + \left(\frac{2^*}{2} - 1 \right) L^{2^*-1} |t| \\ &\geq - \left[\frac{2^*}{2} - \left(\frac{2^*}{2} \right)^2 \right] L^{2^*} + \left[2^* - \frac{(2^*)^2}{2} + \left(\frac{2^*}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2^*}{2} - 1 \right) \right] L^{2^*} = 0. \end{aligned}$$

Tem-se ainda que $(F'_L(t))^2 \leq \frac{2^*}{2} G'_L(t)$ quando $t \neq L$. De fato, se $|t| < L$, temos

$$F'_L(t) = \frac{2^*}{2} |t|^{\frac{2^*}{2}-2} t$$

e

$$G'_L(t) = (2^* - 1) |t|^{2^*-3} t.$$

Então,

$$\frac{2^*}{2} G'_L(t) - (F'_L(t))^2 = \frac{2^*}{2} t^{2^*-2} \left(\frac{2^*}{2} - 1 \right) \geq 0.$$

Se $|t| > L$,

$$(F'_L(t))^2 = \left(\frac{2^*}{2} \right)^2 L^{2^*-2}$$

e

$$G'_L(t) = \frac{2^*}{2} \left(\frac{2^*}{2} \right)^2 \frac{t}{|t|}$$

Assim,

$$\frac{2^*}{2} G'_L(t) - (F'_L(t))^2 = \frac{2^*}{2} L^{2^*-2} \left(\frac{t}{|t|} - 1 \right) = 0.$$

Seja $\tilde{F}_L = F_L(u)$ e $\tilde{G}_L = G_L(u)$. Como F_L e G_L são funções Lipschitz, $u \in H_1^2(M)$, e $F_L(u), G_L(u) \in L^2(M)$ segue da Proposição 72, que $F_L(u), G_L(u) \in H_1^2(M)$. Como u é uma solução fraca de

$$\Delta_g u + hu = \lambda u^{2^*-1},$$

temos para toda $\varphi \in H_1^2(M)$, que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g dV_g + \int_M hu\varphi dV_g = \lambda \int_M u^{2^*-1} \varphi dV_g.$$

Logo, para $\varphi = \tilde{G}_L \in H_1^2(M)$, vale que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \tilde{G}_L \rangle_g dV_g + \int_M hu\tilde{G}_L dV_g = \lambda \int_M u^{2^*-1} \tilde{G}_L dV_g.$$

Agora, como

$$- \int_M |h|u\tilde{G}_L dV_g \leq \int_M hu\tilde{G}_L dV_g,$$

$\tilde{G}_L = \tilde{G}_L(u) \leq u^{2^*-1}$ e $u \in L^{2^*}(M)$ segue que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \tilde{G}_L \rangle_g dV_g \leq \max |h| \|u\|_{2^*}^{2^*} + \lambda \int_M u^{2^*-1} \tilde{G}_L dV_g := C_1 + C_2 \int_M u^{2^*-1} \tilde{G}_L dV_g.$$

Usando a definição de $\nabla \tilde{G}_L$, vem

$$\nabla \tilde{G}_L = G'_L(u) \nabla u,$$

e, daí,

$$\int_M G'_L(u) |\nabla u|^2 dV_g \leq C_1 + C_2 \int_M u^{2^*-1} \tilde{G}_L dV_g,$$

utilizando o fato de que $(F'_L(t))^2 \leq \frac{2^*}{2} G'_L(t)$ e $tG_L(t) \leq (F_L(t))^2$, podemos escrever que

$$\frac{2}{2^*} \int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g = \frac{2}{2^*} \int_M (F'_L(u))^2 |\nabla u|^2 dV_g \leq C_1 + C_2 \int_M u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g. \quad (5.1)$$

Dado $K > 0$, defina

$$K^- = \{x : u(x) \leq K\} \text{ e } K^+ = \{x : u(x) \geq K\}.$$

Segue, da desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
\int_M u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g &= \int_{K^-} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g + \int_{K^+} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g \\
&\leq \int_{K^-} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g + \left(\int_{K^+} (u^{2^*-2})^{n/2} dV_g \right)^{2/n} \left(\int_{K^+} (\tilde{F}_L^2)^{2^*/2} dV_g \right)^{2/2^*} \\
&= \int_{K^-} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g + \left(\int_{K^+} u^{2^*} dV_g \right)^{2/n} \left(\int_{K^+} \tilde{F}_L^{2^*} dV_g \right)^{2/2^*} \\
&= \int_{K^-} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g + \varepsilon(K) \left(\int_{K^+} \tilde{F}_L^{2^*} dV_g \right)^{2/2^*},
\end{aligned}$$

em que

$$\varepsilon(K) := \left(\int_{K^+} u^{2^*} dV_g \right)^{2/n}.$$

Agora, como $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$, existe uma constante $C_3 > 0$ que independe de K e L tal que

$$\|\tilde{F}_L\|_{2^*}^2 \leq C_3 \|\tilde{F}_L\|_{H_1^2}^2.$$

Então,

$$\int_M u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g \leq \int_{K^-} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g + \varepsilon(K) C_3 \int_M (|\nabla \tilde{F}_L|^2 + \tilde{F}_L^2) dV_g,$$

como $u \in L^{2^*}(M)$, temos que $u \in L^1(M)$ e assim, pelo Lema 64, segue que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \varepsilon(K) = 0.$$

Dado $\delta > 0$, fixemos K tal que

$$C_2 C_3 \varepsilon(K) < \frac{2}{2^*} < 1. \quad (5.2)$$

Quando $L > K$,

$$\int_{K^-} u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g \leq \int_{K^-} u^{2^*-2} (u^{\frac{2^*}{2}})^2 dV_g \leq K^{2(2^*-1)} V_g$$

Independentemente, sendo $u \in L^{2^*}(M)$, e $F_L(t) \leq t^{2^*/2}$,

$$\int_M \tilde{F}_L^2 dV_g \leq \|u\|_{2^*}^{2^*} \leq C_4 < \infty,$$

em que C_4 independe de L . Assim, segue de (5.2) que

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g &\leq \frac{2^*}{2} \left(C_1 + C_2 \int_M u^{2^*-2} \tilde{F}_L^2 dV_g \right) \\
&\leq \frac{2^*}{2} \left\{ C_1 + C_2 \left[K^{2(2^*-1)} V_g + C_3 \varepsilon(K) \left(\int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g + \int_M \tilde{F}_L^2 dV_g \right) \right] \right\} \\
&\leq \frac{2^*}{2} \left(C_1 + C_2 K^{2(2^*-1)} V_g + C_2 C_3 \varepsilon(K) \int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g + C_2 C_3 \varepsilon(K) C_4 \right) \\
&= C_5 + C_6 \int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g,
\end{aligned}$$

De (5.2) temos que $1 - C_6 > 0$, e portanto,

$$\int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g \leq \frac{C_5}{1 - C_6},$$

em que $C_6 = \frac{2^*}{2} C_2 C_3 \varepsilon(K)$. Como $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ é contínua,

$$\int_M \tilde{F}_L^{2^*} dV_g \leq C_7 \left(\int_M |\nabla \tilde{F}_L|^2 dV_g + \int_M F_L^2 dV_g \right) \leq C_7 \left(\frac{C_5}{1 - C_6} + C_4 \right)$$

e todos os C_j não dependem de L . Fazendo $L \rightarrow \infty$ temos $u \in L^{\frac{(2^*)^2}{2}}$, uma vez que

$$\tilde{F}_L(u)^{2^*} = (|u|^{2^*/2})^{2^*} = |u|^{\frac{(2^*)^2}{2}}.$$

Como $2^* > 2$ temos $\frac{(2^*)^2}{2} > 2^*$, e como $u \in L^{2^*}(M) \cap L^{\frac{(2^*)^2}{2}}(M)$, temos pela Proposição 47 que $u \in L^r(M)$ para qualquer $2^* < r < \frac{(2^*)^2}{2}$, em particular, existe $s > 2^*$ tal que $u \in L^s(M)$. Pelas ideias utilizadas no Teorema 89 prova-se que u é suave, e pelo princípio do máximo, garantimos que $u \equiv 0$ ou $u > 0$ em M . Isto prova o teorema.

5.3 Teoria de Existência Para Equações Críticas

Na discussão da existência de soluções para equações subcríticas realizada na seção anterior, usamos o fato de que a imersão de H_1^2 em L^p é compacta se $p < 2^*$. Obtivemos a regularidade para o caso crítico sob algumas hipóteses. Nesta seção, discutiremos resultados envolvendo a existência para equações críticas, para o qual a compacidade não é válida. Portanto, para uma sequência (u_i) que converge fracamente em H_1^2 , não podemos afirmar que (u_i) converge fortemente em L^{2^*} , o que impede a obtenção de uma função u minimizante para o invariante μ . Um caso particular em que isto ocorre é na equação de Yamabe, como já citamos.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão $n \geq 3$, e seja h uma função suave em M . Vamos considerar nesta seção, equações da forma

$$\begin{cases} \Delta_g u + hu = \lambda u^{2^*-1} & \text{em } M \\ u > 0 & \text{em } M, \end{cases}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$. Fazendo $\lambda = \mu = \mu_{2^*}$, iremos distinguir três casos. O caso negativo ($\mu < 0$), o caso nulo ($\mu = 0$) e o caso positivo ($\mu > 0$).

5.3.1 O Caso Negativo

Dado $q \in (2, 2^*)$, sejam μ_q e $\mathcal{H}_q$ como na Definição 88. Pelo Teorema 89, existe u_q suave e positiva em M tal que

$$\Delta_g u_q + hu_q = \mu_q u_q^{q-1}$$

e $\int_M u_q^q dV_g = 1$. Assuma $\mu < 0$, portanto, existe $u \in \mathcal{H} := \mathcal{H}_{2^*}$ tal que $I(u) < 0$, em que

$$I(u) = \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g.$$

Notando que

$$\frac{u}{(\int_M |u|^q dV_g)^{1/q}} \in \mathcal{H}_q,$$

segue que

$$\mu_q \leq I \left(\frac{u}{(\int_M |u|^q dV_g)^{1/q}} \right)$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$0 < \int_M |u|^q dV_g \leq \left(\int_M |u|^{2^*} dV_g \right)^{\frac{q}{2^*}} V_g^{1-\frac{q}{2^*}} = V_g^{1-\frac{q}{2^*}}.$$

Observemos agora que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mu_q \leq -\varepsilon_0$ para $2 < q < 2^*$, pois

$$\mu_q \leq I \left(\frac{u}{(\int_M |u|^q dV_g)^{\frac{1}{q}}} \right) = \frac{I(u)}{\|u\|_q^2} < 0.$$

Agora, para $u \in \mathcal{H}_q$, vale que

$$-\|u\|_2^2 \geq -(V_g)^{1-\frac{2}{q}},$$

e portanto,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \int_M hu^2 dV_g \geq -C\|u\|_2^2 \geq -C(V_g)^{1-\frac{2}{q}},$$

de modo que

$$\mu_q \geq -C(V_g)^{1-\frac{2}{q}},$$

para todo $q \in (2, 2^*)$. Diminuindo ε_0 se necessário, podemos supor que

$$-\frac{1}{\varepsilon_0} \leq \mu_q \leq -\varepsilon_0 \quad \text{para todo } q \in (2, 2^*).$$

Seja x_q um ponto em que u_q é máximo, então $\Delta_g u_q(x_q) \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} h(x_q)u_q(x_q) &\leq \Delta_g u_q(x_q) + h(x_q)u_q(x_q) \\ &= \mu_q u_q^{q-1}(x_q) \\ &\leq -\varepsilon_0 u_q^{q-1}(x_q) < 0. \end{aligned}$$

Em particular, $h(x_q) < 0$ e como $h(x_q) \leq \mu_q u_q^{q-2}(x_q)$, temos

$$\varepsilon_0 u_q^{q-2}(x_q) \leq u_q^{q-2}(x_q)(-\mu_q) \leq -h(x_q) \leq \max_{x \in M} |h(x)|,$$

assim,

$$u_q^{q-2}(x_q) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \max |h|.$$

Em outras palavras, existe $C > 0$ tal que $u_q(x) \leq C$ para todo $q \in (2, 2^*)$ e todo $x \in M$.

Pelos Teoremas 89 e 70, podemos afirmar que u_q é limitada em $H_2^p(M)$ para todo p , e todo $q \in (2, 2^*)$. Como $\varepsilon_0 u_q^{q-2}(x_q) \leq \max |h|$, temos

$$u_q^{q-1}(x) \leq \frac{\max |h|}{\varepsilon_0} u_q(x) \quad \text{para todo } x \in M.$$

Logo,

$$\|u_q^{q-1}\|_p^p = \int_M |u_q^{q-1}(x)|^p dV_g \leq C \|u_q\|_p^p < \infty, \quad (5.3)$$

pois $u_q \in L^p(M)$. Novamente, pelo Teorema 89, existe $u_q \in C^\infty(M)$, $u_q > 0$ tal que

$$\Delta_g u_q + h u_q = \mu_q u_q^{q-1}.$$

Façamos $f := \mu_q u_q^{q-1} - h u_q$. Então, $\Delta_g u_q = f$. Claramente, $-h u_q \in L^p(M)$ para todo p , uma vez que a sequência (u_q) é uniformemente limitada e por (5.3), segue que $u_q^{q-1} \in L^p(M)$ para todo p . Logo, $f \in L^p(M)$ pelo Teorema 70, $u_q \in H_2^p(M)$ e

$$\begin{aligned} \|u_q\|_{H_2^p} &\leq C(\|\Delta u_q\|_p + \|u_q\|_p) \\ &= C(\|f\|_p + \|u_q\|_p) \\ &\leq C[\|\mu_q\| \|u_q^{q-1}\|_p + (\max |h| + 1) \|u_q\|_p]. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência (u_q) é uniformemente limitada em $H_2^p(M)$ para todo p . Temos ainda que $H_2^p(M) \subset C^1(M)$ para $p > n \geq 3$. Em particular, (u_q) converge para alguma $u \in C^1(M)$ quando $q \rightarrow 2^*$. Assumindo que (μ_q) converge para algum λ quando $q \rightarrow 2^*$, obtemos que u é solução fraca de

$$\Delta_g u + h u = \lambda u^{2^*-1},$$

além disso, u é não nula desde que $\int_M u_q^q dV_g = 1$ e $u_q \rightarrow u$ uniformemente quando $q \rightarrow 2^*$, temos

$$\int_M u^{2^*} dV_g = 1.$$

Por argumentos de regularidade, e pelo princípio do máximo, obtemos que u é suave e positiva em M . Em particular, u é uma solução forte da equação crítica acima. Não é difícil verificar que $\limsup_{q \rightarrow 2^*} \mu_q \leq \mu$ e que

$$\mu \leq I \left(\frac{u_q}{\|u_q\|_{2^*}} \right),$$

e deste modo, teremos

$$\left(\int_M u_q^{2^*} dV_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \mu \leq \mu_q$$

para todo q . Como $u_q \rightarrow u$ uniformemente, temos que

$$\lim_{q \rightarrow 2^*} \int_M u_q^{2^*} dV_g = \int_M u^{2^*} dV_g = 1.$$

Portanto, temos também que $\liminf_{q \rightarrow 2^*} \mu_q \geq \mu$. Assim, obtemos que $\mu_q \rightarrow \mu$ quando $q \rightarrow 2^*$ e assim, $\lambda = \mu$. Desta forma, provamos que se $\mu < 0$, então existe uma função u suave e positiva tal que

$$\Delta_g u + h u = \mu u^{2^*-1}$$

e $\int_M u^{2^*} dV_g = 1$. Em particular, u é uma solução minimizante dessa equação. Além disso, u é obtida como o limite uniforme de uma subsequência da sequência (u_q) .

5.3.2 O Caso Nulo

Nesta seção, vamos novamente utilizar o Teorema 89 no qual prova-se a existência de solução para a equação subcrítica. Assumimos que $\mu := \mu_{2^*} = 0$ e consideramos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2^*}$. Sejam também μ_q e $\mathcal{H}_q$ como na Definição 88. Pelo Teorema 89, existe $u_q \in C^\infty(M)$, $u_q > 0$, tal que

$$\Delta_g u_q + h u_q = \mu_q u_q^{q-1}$$

e $\int_M u_q^q dV_g = 1$. Afirmamos inicialmente que se $\mu = 0$, então $\mu_q = 0$ para todo $q \in (2, 2^*)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $u_\varepsilon \in \mathcal{H}$ tal que $I(u_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Como a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ é contínua, existe $A > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq A\|u\|_{H_1^2}^2 = A(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)$$

Tomando $u = u_\varepsilon$, temos

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 \leq A(\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2).$$

Além disso,

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 \leq \max |h| \|u_\varepsilon\|_2^2 + \varepsilon,$$

e com isso,

$$1 = \|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 \leq A(\varepsilon + B\|u_\varepsilon\|_2^2),$$

em que

$$B := \max |h| + 1.$$

Portanto, $A^{-1} \leq \varepsilon + B\|u_\varepsilon\|_2^2$ e

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 \geq (A^{-1} - \varepsilon)B^{-1}.$$

Assim $\|u_\varepsilon\|_2 \geq C$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Segue, então, que existe $C > 0$ tal que

$$C \leq \left(\int_M |u_\varepsilon|^q dV_g \right)^{\frac{2}{q}} (V_g)^{1-\frac{2}{q}}.$$

Logo,

$$\int_M |u_\varepsilon|^q dV_g \geq \left(\frac{C}{V_g^{1-\frac{2}{q}}} \right)^{\frac{q}{2}} =: C_q.$$

Claramente,

$$\mu_q \leq I(\|u_\varepsilon\|_q^{-1} u_\varepsilon) = \frac{I(u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_q^2} \leq \frac{\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_q^2}.$$

E obtemos $\mu_q \|u_\varepsilon\|_q^2 \leq \varepsilon$. Fixando $q > 2$, e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, segue que $\mu_q \leq 0$. Por outro lado, utilizando o fato de as u'_q s serem limites de sequências minimizantes para μ_q , como foi utilizado no caso negativo e fato de que $\|u_q\|_{2^*}^{-1} u_q \in \mathcal{H}$, vem que

$$\mu_q = I(u_q) = \|u_q\|_{2^*}^2 I(\|u_q\|_{2^*}^{-1} u_q) \geq \|u_q\|_{2^*}^2 \mu = 0.$$

E, portanto, $\mu_q \geq 0$. Portanto, foi provado que se $\mu = 0$, então $\mu_q = 0$ para todo q . Escolhendo $u = \|u_q\|_{2^*}^{-1} u_q$ para algum q , obtemos que u é uma solução suave positiva da equação

$$\Delta_g u + h u = \mu u^{2^*-1}$$

tal que $\int_M u^{2^*} dV_g = 1$. Em particular, u é uma solução minimizante da equação.

5.3.3 Melhores Constantes para a Desigualdade de Sobolev

Antes de enunciar o teorema de existência para a equação crítica no caso em que $\mu > 0$, vamos fazer uma pequena digressão e apresentar alguns resultados básicos referentes à teoria das melhores constantes de Sobolev.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, dados k, p tal que $kp < n$, a continuidade da imersão de $H_k^p(M)$ em $L^{\frac{pn}{n-pk}}(M)$ (veja a parte (ii) do Teorema 71) implica que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\frac{np}{n-pk}} \leq C\|u\|_{H_k^p} \text{ para toda } u \in H_k^p(M).$$

No caso especial em que $k = 1$, obtemos que para $p < n$, existem $A, B > 0$ tal que

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p}} \leq A\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p \text{ para toda } u \in H_1^p(M) \quad (I_p^1)$$

Agora, elevando (I_p^1) a potência p , obtemos que existem $A, B > 0$ tais que

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}^p \leq A\|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p \text{ para toda } u \in H_1^p(M) \quad (I_p^p)$$

Mais geralmente, elevando (I_p^1) a potência $\theta \in [1, p]$, obtemos a existência de constantes $A, B > 0$ tais que

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}^\theta \leq A\|\nabla u\|_p^\theta + B\|u\|_p^\theta \text{ para toda } u \in H_1^p(M) \quad (I_p^\theta)$$

Uma questão natural seria perguntar sobre o melhor valor de A em (I_p^θ) , o melhor valor de B , a validade dessas desigualdades ótimas, e a existência de funções extremais (funções para as quais vale a igualdade). Neste estágio, para tornar mais claro o sentido da palavra “melhor” definimos

$$A_{\theta,p}(M) = \inf \{ A > 0 \mid \exists B > 0 \text{ tal que } (I_p^\theta) \text{ vale } \forall u \in H_1^p(M) \},$$

e neste caso, estaremos interessados nas seguintes questões:

(i) Qual é o valor de $A_{\theta,p}(M)$?

(ii) A melhor constante $A_{\theta,p}(M)$ é atingida? Em outras palavras, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}^\theta \leq A_{\theta,p}(M)\|\nabla u\|_p^\theta + B\|u\|_p^\theta \text{ para toda } u \in H_1^p(M) \quad (I_{p,opt}^\theta) ?$$

O valor de $A_{\theta,p}(M)$ é fornecido pelo Teorema 94. Denote por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções suaves de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Seja

$$\frac{1}{K(n,p)} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} \right)^{\frac{n-p}{np}}}.$$

A constante $K(n,p)$ foi calculada em [4, 27, 32]. O Teorema a seguir fornece o valor das constantes $K(n,p)$, e caracteriza as funções extremais em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 92 *Seja $1 \leq q < n$ e $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Então:*

(i) Para $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K(n, p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (5.4)$$

em que

$$K(n, 1) = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

e

$$K(n, p) = \frac{p-1}{n-p} \left(\frac{n-p}{n(p-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $K(n, p)$ é a melhor constante para (5.4) e se $p > 1$, a igualdade em (5.4) é atingida pelas funções dadas por

$$u_\lambda(x) = \left(\frac{1}{\lambda + \|x\|^{\frac{q}{q-1}}} \right)^{\frac{n}{q-1}}$$

em que λ é um número real positivo e $\|\cdot\|$ denota a norma em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Veja [18], p. 92.

Observação 93 No Teorema 92, tem-se que ω_{n-1} é o volume de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ e

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

é chamada função Gama.

Em particular, segue do Teorema 92 que, para $p = 2$,

$$K(n, 2) = \frac{1}{(n(n-2))^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Sabe-se que

$$\omega_{n-1} = \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

então,

$$K(n, 2) = \frac{(n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{\frac{n}{2}}}.$$

Agora, para $x > 0$ usamos a fórmula de duplicação para a função Gama (veja [21] p. 42), para obter

$$2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(x),$$

e para $x = \frac{n}{2}$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-n} \sqrt{\pi} \Gamma(n),$$

ou seja,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{1-n}\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Agora, como $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo $x > 0$, vem

$$\omega_n = \text{vol}(\mathbb{S}^n) = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{1-n}\sqrt{\pi}\Gamma(n)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)2^{-n}\sqrt{\pi}\Gamma(n)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{\frac{n}{2}}}{(n+1)2^{-n}\Gamma(n)}\end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{1}{\omega_n} = \frac{(n+1)2^{-n}\Gamma(n)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2^{-n}\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)\omega_{n-1}},$$

e, isto implica que,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)\omega_{n-1}} = \frac{2^n}{\omega_n}.$$

Segue que

$$\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+1)\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{\omega_n^n},$$

e, portanto,

$$K(n, 2) = \frac{1}{(n(n-2))^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{\omega_n^n} = \left(\frac{4}{\omega_n^{\frac{n}{2}}n(n-2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 94 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n , $p \in [1, n)$, e $\theta \in [1, p]$. Então temos que $A_{\theta, p}(M) = K(n, p)^\theta$. Em particular, segue deste resultado que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}^\theta \leq (K(n, p)^\theta + \varepsilon) \|\nabla u\|_p^\theta + B_\varepsilon \|\nabla u\|_p^\theta,$$

para toda $u \in H_1^p(M)$.

Demonstração. Veja [22].

Quando $p = 2$, sabe-se que a constante $K(n, 2)$ é atingida, de acordo com o teorema a seguir. Para mais informações, veja [22].

Teorema 95 *(Desigualdade de Sobolev) Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com $n \geq 3$. Então existe $B > 0$ tal que*

$$\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n, 2)^2 \int_M |\nabla u|^2 dV_g + B \int_M u^2 dV_g,$$

para toda $u \in H_1^2(M)$. Em outras palavras $(I_{2, \text{opt}}^2)$ é válida em M .

5.3.4 O Caso Positivo

Nesta seção, vamos considerar o caso em que $\mu := \mu_{2^*} > 0$. Afirmamos que se $\mu > 0$, então o operador $\Delta_g + h$ é coercivo, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \lambda \|u\|_{H_1^2}^2.$$

A fim de provar a afirmação, note que para qualquer $u \in \mathcal{H}$, tem-se

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \mu > 0.$$

Mas,

$$0 \leq \|u\|_2^2 = \int_M u^2 dV_g \leq V_g^{1-\frac{2}{2^*}} = \left(\frac{V_g^{1-\frac{2}{2^*}}}{\mu} \right) \mu \leq \left(\frac{V_g^{1-\frac{2}{2^*}}}{\mu} \right) \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g.$$

Assim,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \underbrace{\left(\frac{\mu}{V_g^{1-\frac{2}{2^*}}} \right)}_{:=\tilde{\mu}} \int_M u^2 dV_g.$$

Seja $0 < \varepsilon < \tilde{\mu}/2$ tal que $(1 - \varepsilon)\tilde{\mu} + \varepsilon h \geq \tilde{\mu}/2$. Segue então que

$$\begin{aligned} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g &= \varepsilon \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g + (1 - \varepsilon) \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \\ &\geq \varepsilon \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g + (1 - \varepsilon)\tilde{\mu} \int_M u^2 dV_g \\ &= \varepsilon \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \int_M \varepsilon hu^2 dV_g + (1 - \varepsilon)\tilde{\mu} \int_M u^2 dV_g \\ &= \varepsilon \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \int_M (\varepsilon h + (1 - \varepsilon)\tilde{\mu}) u^2 dV_g \\ &\geq \varepsilon \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \frac{\tilde{\mu}}{2} \int_M u^2 dV_g \\ &> \varepsilon \left(\int_M |\nabla u|^2 dV_g + \int_M u^2 dV_g \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \varepsilon \|u\|_{H_1^2}^2,$$

e $\Delta_g + h$ é de fato coercivo se $\mu > 0$.

Teorema 96 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana Compacta de dimensão $n \geq 3$, e h uma função suave em M . Se*

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g < \frac{1}{K(n, 2)^2},$$

em que $K(n, 2)$ é como na seção (4.3) e $\mathcal{H}$ como na Definição 88. Nestas condições, existe $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, tal que

$$\Delta_g u + hu = \mu u^{2^*-1},$$

e $\int_M u^{2^} dV_g = 1$. Em particular, u é uma solução minimizante para a equação crítica.*

Demonstração. Provaremos que a solução u do teorema acima pode ser obtida como o limite das soluções subcríticas dadas pelo Teorema 89. Dado $2 < q < 2^*$, sejam μ_q e $\mathcal{H}_q$ para $2 < q < 2^*$, e seja $u_q \in C^\infty(M)$, $u_q > 0$, dada pelo Teorema 89, tal que

$$\Delta_g u_q + h u_q = \mu_q u_q^{q-1}$$

e $\int_M u_q^q dV_g = 1$. Afirmamos que $\mu_q \rightarrow \mu$ quando $q \rightarrow 2^*$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $u \in \mathcal{H}$ tal que $\mu \leq I(u) < \mu + \varepsilon$. Agora, note que $\|u\|_q \rightarrow \|u\|_{2^*}$. Para provar esta afirmação, observe em primeiro lugar, que

$$\left(\int_M |u|^q dV_g \right)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{\ln(\int_M |u|^q dV_g)}{q}}$$

Agora, notemos que existe uma limitação por uma função integrável:

$$|u|^q \leq (1 + |u|)^q \leq (1 + |u|)^{2^*} \in L^1(M).$$

Além disso, por continuidade, $|u|^q \rightarrow |u|^{2^*}$ quando $q \rightarrow 2^*$, uma vez que

$$\lim_{q \rightarrow 2^*} |u|^q = \lim_{q \rightarrow 2^*} e^{q \ln |u|} = e^{2^* \ln |u|} = |u|^{2^*}.$$

Então, pelo Teorema da convergência dominada,

$$\int_M |u|^q dV_g \rightarrow \int_M |u|^{2^*} dV_g \text{ quando } q \rightarrow 2^*.$$

Logo,

$$\lim_{q \rightarrow 2^*} \left(\int_M |u|^q dV_g \right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{q \rightarrow 2^*} e^{\frac{\ln(\int_M |u|^q dV_g)}{q}} = e^{\lim_{q \rightarrow 2^*} \frac{\ln(\int_M |u|^q dV_g)}{q}} = e^{\frac{\ln(\int_M |u|^{2^*} dV_g)}{2^*}} = \|u\|_{2^*}.$$

Agora, como $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{2^*} = 1$, e assim,

$$I(\|u\|_q^{-1} u) \rightarrow I(u),$$

quando $q \rightarrow 2^*$. Como $\|u\|_q^{-1} u \in \mathcal{H}_q$, temos $\mu_q \leq I(\|u\|_q^{-1} u)$, de modo que

$$\limsup_{q \rightarrow 2^*} \mu_q \leq I(u) < \mu + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtemos que $\limsup_{q \rightarrow 2^*} \mu_q \leq \mu$.

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$1 = \|u_q\|_q^q = \int_M |u_q|^q dV_g \leq \|u_q\|_{2^*}^q V_g^{1 - \frac{q}{2^*}},$$

e, portanto, $1 \leq \liminf_{q \rightarrow 2^*} \|u_q\|_{2^*}$. Temos também que

$$\mu \|u_q\|_{2^*} \leq \mu_q = I(u_q).$$

Para ver isso, note que

$$I(u_q) = \int_M (|\nabla u_q|^2 + h u_q^2) dV_g = \mu_q \int_M u_q^q dV_g = \mu_q. \quad (5.5)$$

Por outro lado, para qualquer $u \in \mathcal{H}$ $\mu \leq I(u)$. Então, como $u = \frac{u_q}{\|u_q\|_{2^*}} \in \mathcal{H}$, teremos

$$\mu \leq I(u) = \frac{I(u_q)}{\|u_q\|_{2^*}^2},$$

e isto implica, juntamente com (5.5) que

$$\mu \|u_q\|_{2^*}^2 \leq I(u_q) = \mu_q,$$

como $\mu > 0$ temos $\mu_q \geq 0$ para todo q . Usando as mesmas idéias do caso negativo, segue que $u_q \rightarrow u$ uniformemente quando $q \rightarrow 2^*$ e $\int |u_q|^{2^*} \rightarrow \int |u|^{2^*} = 1$, quando $q \rightarrow 2^*$ e pela desigualdade anterior, temos

$$\mu \leq \liminf_{q \rightarrow 2^*} \mu_q.$$

Com estas informações, segue que $\lim_{q \rightarrow 2^*} \mu_q = \mu$ como afirmado. Mas o operador $\Delta_g + h$ é coercivo no caso em que $\mu > 0$ e existe $\lambda > 0$ tal que

$$\|u_q\|_{H_1^2}^2 \leq \frac{I(\mu_q)}{\lambda} = \frac{\mu_q}{\lambda}.$$

Como $H_1^2(M)$ é reflexivo, existe $u \in H_1^2(M)$ tal que, a menos de subsequência,

- (1) $u_q \rightharpoonup u$ em $H_1^2(M)$ (pois (u_q) é limitada em $H_1^2(M)$),
- (2) $u_q \rightarrow u$ em $L^2(M)$ (pois a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ é compacta),
- (3) $u_q \rightarrow u$ q.t.p. (Consequência de (2)).

Por (3), u é não negativa. Pela teoria da integração, se (f_q) é uma sequência limitada em $L^p(M)$ para algum $p > 1$, e se (f_q) converge q.t.p para f , então $f \in L^p(M)$ e $f_q \rightarrow f$ em $L^p(M)$. Vamos verificar que as f'_q s dadas por $f_q = u_q^{q-1}$ são limitadas em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(M)$. Para isso, usamos que a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ é contínua, assim existe $C > 0$ tal que

$$\|u_q\|_{2^*} \leq C \|u_q\|_{H_1^2}.$$

Como $1 < \frac{2^*-1}{q-1}$ e $u_q \in L^{2^*}(M)$, segue pela desigualdade de Hölder, que

$$\|f_q\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq \|u_q\|_{2^*}^{q-1} V_g^{1-\frac{q}{2^*}}.$$

Agora, usando o resultado de integração mencionado, e sabendo que $f_q \rightarrow u^{2^*-1}$, q.t.p por (2), segue que para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M u_q^{q-1} \varphi dV_g \rightarrow \int_M u^{2^*-1} \varphi dV_g$$

quando $q \rightarrow 2^*$. Portanto, obtemos de (1) e (2) que para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M (\Delta_g u_q + h u_q) \varphi dV_g = \int_M \langle \nabla u_q, \nabla \varphi \rangle_g + h u_q \varphi dV_g \rightarrow \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g + h u \varphi dV_g,$$

quando $q \rightarrow 2^*$. Multiplicando por φ a equação subcrítica que u_q satisfaz, e em seguida integrando teremos

$$\int_M \varphi \Delta_g u_q + \varphi h u_q dV_g = \mu_q \int_M u_q^{q-1} \varphi dV_g.$$

Usando a Proposição 40 na equação anterior e passando ao limite quando $q \rightarrow 2^*$, obtemos

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g + hu\varphi \, dV_g = \mu \int_M u^{2^*-1} \varphi dV_g,$$

de modo que u é uma solução fraca da equação

$$\Delta_g u + hu = \mu u^{2^*-1}.$$

Por resultados de regularidade discutidos anteriormente, e pelo princípio do máximo, obtemos que u é suave e que $u \equiv 0$ ou $u > 0$ em M . Vamos provar diretamente que $u \neq 0$. Pela desigualdade de Sobolev, existe $B > 0$ tal que

$$\|u_q\|_{2^*}^2 \leq K(n, 2)^2 \|\nabla u_q\|_2^2 + B\|u_q\|_2^2,$$

para todo q . Pela desigualdade de Hölder, e pela desigualdade anterior vem

$$1 = \|u_q\|_q^2 \leq V_g^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^*}} K(n, 2)^2 \left(\|\nabla u_q\|_2^2 + \frac{B}{K(n, 2)^2} \|u_q\|_2^2 \right).$$

Mas,

$$\int_M (|\nabla u_q|^2 - |h(x)|u_q^2) dV_g \leq I(u_q),$$

e assim,

$$\|\nabla u_q\|_2^2 \leq I(u_q) + \max_{x \in M} |h(x)| \|u_q\|_2^2,$$

logo,

$$1 \leq V_g^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^*}} K(n, 2)^2 (I(u_q) + C\|u_q\|_2^2),$$

em que $C := \max_{x \in M} |h(x)| + \frac{B}{K(n, 2)^2}$. Fazendo $q \rightarrow 2^*$, segue que

$$1 \leq K(n, 2)^2 (\mu + C\|u\|_2^2)$$

e por hipótese, $\mu < 1/K(n, 2)^2$ então $\mu K(n, 2)^2 < 1$. Assim,

$$1 \leq 1 + K(n, 2)^2 C\|u\|_2^2.$$

Portanto, $\|u\|_2 > 0$. Como já mencionado, u é suave, e pelo que acamos de provar, u é positiva em M . Finalmente, vamos mostrar que $\|u\|_{2^*} = 1$. Com efeito, como a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ é contínua, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_q\|_{2^*} \leq C\|u_q\|_{H_1^2}.$$

Agora, pelo fato de $L^{2^*}(M)$ ser reflexivo, vem que existe uma subsequência de (u_q) (que ainda denotaremos por (u_q)) tal que $u_q \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(M)$. Dessa forma, tomando o limite inferior quando $q \rightarrow 2^*$, vem

$$\|u\|_{2^*} \leq \liminf \|u_q\|_{2^*} \leq \liminf \frac{\mu_q}{\mu} = 1.$$

Agora, como u satisfaz a equação $\Delta_g u + hu = \mu u^{2^*-1}$, segue que

$$I(u) = \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g = \mu \int_M u^{2^*} dV_g = \mu \|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Portanto, dividindo ambos os membros da equação acima por $\|u\|_{2^*}^2$ vem

$$I(\|u\|_{2^*}^{-1}u) = \mu\|u\|_{2^*}^{2^*-2},$$

mas,

$$I(\|u\|_{2^*}^{-1}u) \geq \mu,$$

e juntando essas informações, vem

$$\mu \leq I(\|u\|_{2^*}^{-1}u) = \mu\|u\|_{2^*}^{2^*-2},$$

e portanto, $\|u\|_{2^*}^{2^*-2} \geq 1$, isto é, $\|u\|_{2^*} \geq 1$. Como já provamos a desigualdade oposta, temos $\|u\|_{2^*} = 1$ como queríamos mostrar.

Capítulo 6

Teoria de Blow-Up no Espaço de Sobolev $H_1^2(M)$

Até o momento, utilizamos argumentos que foram baseados nas imersões

$$H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M) \quad \text{para } 1 \leq q \leq 2^*.$$

Discutimos o caso crítico em que $\mu > 0$ onde o expoente crítico aparece, mas a energia é baixa. Ainda resta explicar o que acontece quando temos um problema de expoente crítico com energia arbitrária. Uma importante noção que aparece é a noção de pontos de Blow-Up, algumas vezes também referidos como pontos de concentração.

Um cenário em que esta noção aparece naturalmente é quando se discute sequências de Palais-Smale associados à equação

$$\Delta_g u + hu = u^{2^*-1}, \quad (6.1)$$

em que

$$\Delta_g u = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (\partial_{ij} u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u)$$

é o operador de Laplace-Beltrami, e h é uma função suave em M .

Uma questão geral que estaremos interessados é a de caracterizar o comportamento assintótico das sequências de Palais-Smale para funções não negativas. Um resultado similar existe quando nenhuma condição é feita em relação ao sinal da sequência de Palais-Smale. A resposta a esta questão envolve a contribuição de vários trabalhos desenvolvidos desde a década de 80.

6.1 O Teorema do Passo da Montanha

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Consideremos a equação dada por

$$\Delta_g u + hu = u^{2^*-1},$$

com $u > 0$, em que $h \in C^\infty(M)$. No que segue, assumiremos que o operador $\Delta_g + h$ é coercivo. Note que se h é uma função positiva em M , temos coercividade, pois

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq h(x_0) \int_M u^2 dV_g$$

para algum $x_0 \in M$ e analogamente ao que fizemos no Capítulo anterior, pode-se concluir que $\Delta_g + h$ é coercivo.

Seja $J : H_1^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M |u|^{2^*} dV_g.$$

Definição 97 Uma sequência de funções (u_i) em $H_1^2(M)$ é chamada de Palais-Smale para J se:

- (i) $J(u_i)$ é limitada com respeito a i , e
- (ii) $DJ(u_i) \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)^*$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Uma ferramenta básica para construir sequências de Palais-Smale é o Teorema do passo da montanha de Ambrosetti-Rabinowitz (Veja [2]). Usaremos o Teorema do passo da montanha sob a seguinte forma:

Teorema 98 (Ambrosetti-Rabinowitz) Seja $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em um espaço de Banach E . Suponha que existe uma vizinhança U de 0 em E , $u_0 \in E \setminus U$, e uma constante ρ tal que

$$\Phi(0) < \rho, \quad \Phi(u_0) < \rho, \quad \Phi(u) \geq \rho$$

para todo $u \in \partial U$. Seja

$$c = \inf \left\{ \max_{u \in \gamma} \Phi(u); \gamma \in \Gamma \right\},$$

em que Γ representa a classe dos caminhos contínuos ligando 0 a u_0 . Então existe uma sequência (u_i) em E tal que $\Phi(u_i) \rightarrow c$ e $D\Phi(u_i) \rightarrow 0$ em E^* quando $i \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Veja [2].

Em nosso caso, vamos considerar $E = H_1^2(M)$ e $\Phi = J$. Seja $U = B_0(r)$ a bola de centro 0 e raio r em $H_1^2(M)$. A fim de aplicar o Teorema 98, devemos a priori mostrar que J é um funcional C^1 . Primeiro, vamos mostrar que J é Frechét-Diferenciável. Para simplificar a notação, escreveremos $\int_M (\cdot) dV_g$ como $\int (\cdot)$. Seja

$$DJ(u)v = \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g + \int huv - \int u^{2^*-1}v.$$

Utilizando a expressão do funcional J obtemos

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g + \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} \int hu^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int v^2 + \int huv - \frac{1}{2^*} \int |u|^{2^*} - \int u^{2^*-1}v + \tilde{o}(v) \end{aligned} \tag{6.2}$$

em que $\tilde{o}(v) = \int_M o(v)$, $o(v)/v \rightarrow 0$, quando $v \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$ e

$$J(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int hu^2 - \frac{1}{2^*} \int |u|^{2^*},$$

temos

$$J(u+v) - J(u) = \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g + \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + \int huv + \frac{1}{2} \int v^2 - \int u^{2^*-1}v + \tilde{o}(v),$$

e, portanto,

$$\frac{|J(u+v) - J(u) - DJ(u)v|}{\|v\|_{H_1^2}} \leq \frac{1}{2}\|v\|_{H_1^2} + \frac{|\tilde{o}(v)|}{\|v\|_{H_1^2}}.$$

Mas, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta$ implica $|o(v)| < \varepsilon|v|$. Neste caso,

$$|\tilde{o}(v)| = \left| \int o(v) \right| \leq \int |o(v)| \leq \varepsilon \int |v| \leq \varepsilon \|v\|_{H_1^2}^2 (V_g)^{1/2},$$

e, assim,

$$\frac{|\tilde{o}(v)|}{\|v\|_{H_1^2}} \leq \varepsilon \|v\|_{H_1^2} (V_g)^{1/2} \longrightarrow 0,$$

quando $v \longrightarrow 0$ em $H_1^2(M)$, mostrando que J é diferenciável. Agora, resta mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} DJ : H_1^2(M) &\longrightarrow B(H_1^2(M), \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto DJ(u), \end{aligned}$$

em que $B(H_1^2(M), \mathbb{R})$, representa o conjunto dos funcionais lineares limitados, é contínua. Para isso, consideremos separadamente os seguintes funcionais, definidos em $H_1^2(M)$:

$$DJ_1(u)\varphi = \int \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g + \int hu\varphi$$

e

$$DJ_2(u)\varphi = \int u^{2^*-1}\varphi.$$

Em relação a este último funcional, considerando a função real dada por $f(x) = |x|^{2^*}$, podemos mostrar que $f'(x) = 2^*|x|^{2^*-2}x$. Com isso, podemos considerar o funcional acima como sendo

$$DJ_2(u)\varphi = \int |u|^{2^*-2}u\varphi.$$

Seja $u_n \longrightarrow u$ em $H_1^2(M)$. Então, para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$, temos:

$$\begin{aligned} |DJ_1(u)\varphi - DJ_1(u_n)\varphi| &= \left| \int \nabla(u - u_n)\nabla\varphi + \int (u - u_n)h\varphi \right| \\ &\leq |\langle (u - u_n), \varphi \rangle_{H_1^2}| + \max |h - 1| \int |u - u_n||\varphi| \\ &\leq \|u - u_n\|_{H_1^2} \|\varphi\|_{H_1^2} + C_1 \|u - u_n\|_2 \|\varphi\|_2 \\ &\leq \|u - u_n\|_{H_1^2} \|\varphi\|_{H_1^2} + C_2 \|u - u_n\|_{H_1^2} \|\varphi\|_{H_1^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|DJ_1(u_n) - DJ_1(u)\|_{B(H_1^2, \mathbb{R})} &= \sup_{\|\varphi\|_{H_1^2} \leq 1} |DJ_1(u)\varphi - DJ_1(u_n)\varphi| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_1^2} \leq 1} \left(\|u - u_n\|_{H_1^2} \|\varphi\|_{H_1^2} + C_2 \|u - u_n\|_{H_1^2} \|\varphi\|_{H_1^2} \right) \\ &\leq \|u - u_n\|_{H_1^2} + C_2 \|u - u_n\|_{H_1^2}, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\|DJ_1(u_n) - DJ_1(u)\|_{B(H_1^2, \mathbb{R})} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Agora, considerando o funcional DJ_2 , suponhamos que $u_n \rightarrow u \in H_1^2(M)$. Então, $u_n \rightarrow u \in L^q(M)$ para $1 \leq q \leq 2^*$ e, a menos de subsequência, $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p em M . Além disso, existe $g \in L^q(M)$ tal que $|u(x)|, |u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em M (a menos de subsequência) veja o Lema 65. Queremos mostrar que $DJ_2(u_n) \rightarrow DJ_2(u)$ em $B(H_1^2, \mathbb{R})$. Para isso defina $f(u) := |u|^{q-2}u$. Então

$$|f(u)|^{\frac{q}{q-1}} = ||u|^{q-2}u|^{\frac{q}{q-1}} = |u|^q \in L^1(M).$$

Logo, $f(u) \in L^{\frac{q}{q-1}}(M)$, e ainda, temos

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(u)|^{\frac{q}{q-1}} &\leq 2^{\frac{q}{q-1}} \left(||u_n|^{q-2}u_n|^{\frac{q}{q-1}} + ||u|^{q-2}u|^{\frac{q}{q-1}} \right) \\ &\leq 2^{\frac{q}{q-1}} (|u_n|^q + |u|^q) \\ &\leq 2^{\frac{q}{q-1}+1} |g|^q \in L^1(M). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da convergência dominada, segue que $f(u_n) \rightarrow f(u)$ em $L^{\frac{q}{q-1}}(M)$ para $q > 2$. Daí, dada $\varphi \in H_1^2(M)$, e $q = 2^*$, segue da desigualdade de Hölder, que

$$|DJ_2(u_n) \cdot \varphi - DJ_2(u) \cdot \varphi| \leq \int |f(u_n) - f(u)| |\varphi| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_r \|\varphi\|_{2^*}$$

em que $r = \frac{2^*}{2^*-1}$ é o conjugado de 2^* . Então, utilizando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$, vem que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\|_{B(H_1^2, \mathbb{R})} &= \sup_{\|\varphi\|_{H_1^2} \leq 1} |DJ_2(u_n) \cdot \varphi - DJ_2(u) \cdot \varphi| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_1^2} \leq 1} \|f(u_n) - f(u)\|_r \|\varphi\|_{2^*} \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_1^2} \leq 1} C \|f(u_n) - f(u)\|_r \|\varphi\|_{H_1^2} \\ &= C \|f(u_n) - f(u)\|_r \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\|DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\|_{B(H_1^2, \mathbb{R})} \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow +\infty$ e concluímos que os funcionais DJ_1 e DJ_2 são contínuos. Logo, DJ é contínuo.

Agora, vamos garantir a existência de uma sequência de Palais-Smale para J . Suponhamos que $\Delta_g + h$ coercivo, então existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g \geq \lambda \|u\|_{H_1^2}^2$$

então

$$J(u) \geq \frac{\lambda}{2} \|u\|_{H_1^2}^2 - \frac{1}{2^*} \int_M |u|^{2^*} dV_g.$$

A imersão contínua $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ implica que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} \leq C\|u\|_{H_1^2}^{2^*},$$

para toda $u \in H_1^2(M)$. Logo $-\|u\|_{2^*}^{2^*} \geq -C\|u\|_{H_1^2}^{2^*}$ e, com isso,

$$J(u) \geq \frac{\lambda}{2}\|u\|_{H_1^2}^2 - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} \geq \frac{\lambda}{2}\|u\|_{H_1^2}^2 - \frac{C}{2^*}\|u\|_{H_1^2}^{2^*}.$$

Façamos $C_1 = \frac{\lambda}{2}$ e $C_2 = \frac{C}{2^*}$, então

$$J(u) \geq C_1\|u\|_{H_1^2}^2 - C_2\|u\|_{H_1^2}^{2^*}.$$

Tomando $r > 0$ suficientemente pequeno, segue que existe $\rho > 0$ tal que se $u \in \partial B_0(r)$, então $J(u) \geq \rho$. De fato, se $u \in \partial B_0(r)$ então $\|u\|_{H_1^2} = r$, logo $\|u\|_{H_1^2}^{2^*} = r^{2^*}$ e $\|u\|_{H_1^2}^2 = r^2$, de modo que

$$J(u) \geq C_1 r^2 - C_2 r^{2^*}.$$

Considere a função $f(r) = C_1 r^2 - C_2 r^{2^*}$ então $f(r) > 0$ se, e somente se, $\frac{C_1}{C_2} > r^{2^*-2}$ e existe $r_0 > 0$ nestas condições. Tomando $r = r_0$ vem que $J(u) \geq \rho$ para toda $u \in \partial B_0(r)$ em que $\rho = C_1 r_0^2 - C_2 r_0^{2^*}$.

Por outro lado, $J(0) = 0$, e para $0 \neq v_0 \in H_1^2(M)$, vemos que existem constantes K_1, K_2 positivas tais que

$$J(tv_0) = |t|^2 (1 - |t|^{2^*-2} K_1) K_2,$$

e portanto, $J(tv_0) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Segue que existe $r > 0$, $\rho > 0$, e $u_0 = tv_0$ tal que $J(0) < \rho$, $J(u_0) < \rho$, $u_0 \in H_1^2(M) \setminus B_0(r)$, e $J(u) \geq \rho$ para todo $u \in \partial B_0(r)$. O Teorema 98 então nos garante a existência de uma sequência de Palais-Smale para o funcional J .

6.2 Parte de Existência do Teorema 96 via Sequências de Palais-Smale

Vamos utilizar a noção de sequências de Palais-Smale para mostrar que existe $u > 0$ suave, que é solução de

$$\Delta_g u + hu = u^{2^*-1}.$$

A abordagem que seguiremos é devida a Brézis e Nirenberg [13]. Com o objetivo de obter soluções positivas, vamos modificar a definição do funcional J , considerando um novo funcional J^+ dado por

$$J^+(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M (u^+)^{2^*} dV_g,$$

em que $u^+ = \max\{0, u\}$. Como no Teorema 96, assumimos que

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} I(u) < \frac{1}{K(n, 2)^2},$$

em que $\mathcal{H}$ é o conjunto de todas as funções em $H_1^2(M)$ tais que $\|u\|_{2^*} = 1$ e I é o funcional definido por

$$I(u) = \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $v_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$I(v_0) < \inf_{u \in \mathcal{H}} I(u) + \varepsilon < \frac{1}{K(n, 2)^2} + \varepsilon.$$

Uma vez que $I(v_0) = I(-v_0)$ e $|\nabla|v_0|| = |\nabla v_0|$, podemos tomar $v_0 \geq 0$. Desta forma, $v_0^+ = v_0$ e

$$J^+(tv_0) = \frac{t^2}{2} I(v_0) - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_M (v_0^+)^{2^*} dV_g = \frac{t^2}{2} I(v_0) - \frac{t^{2^*}}{2^*},$$

pois $\|v_0\|_{2^*} = 1$. Considere a função $f(t) := \frac{t^2}{2} I(v_0) - \frac{t^{2^*}}{2^*}$, um cálculo direto mostra que

$$f'(t) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = (I(v_0))^{\frac{n-2}{4}}.$$

Tem-se $f''(t) = I(v_0) - (2^* - 1)t^{2^*-2}$, e portanto,

$$f''(0) = I(v_0) \geq 0 \text{ e } f''(I(v_0)^{\frac{n-2}{4}}) = (2 - 2^*)I(v_0) \leq 0.$$

Portanto, $t_0 := (I(v_0))^{\frac{n-2}{4}}$ é ponto de máximo global de f para $t \in [0, \infty)$. Consequentemente,

$$\max_{t \geq 0} J^+(tv_0) = J^+(t_0 v_0) = \frac{2^* - 2}{2 \cdot 2^*} I(v_0)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n} I(v_0)^{\frac{n}{2}}.$$

Assim, como $I(v_0) < K(n, 2)^{-2}$, vem

$$\max_{t \geq 0} J^+(tv_0) = \frac{1}{n} I(v_0)^{\frac{n}{2}} < \frac{1}{n} K(n, 2)^{-n}.$$

Repetindo um procedimento já realizado no final da Seção 6.1, sejam $r > 0$ pequeno, e $\tilde{t} > 0$ adequados. Usando o Teorema 98, com $U = B_0(r)$ e $u_0 = \tilde{t}v_0$, obtemos a existência de uma sequência de Palais-Smale (u_i) para J^+ tal que $J^+(u_i) \rightarrow c$ quando $i \rightarrow +\infty$, em que

$$c = \inf \{ \max_{u \in \gamma} J^+(u) : \gamma \in \Gamma \} \leq \max_{t \geq 0} J^+(tv_0) < \frac{K(n, 2)^{-n}}{n}.$$

Em particular, podemos escrever que

$$\frac{1}{2} \int_M (|\nabla u_i|^2 + hu_i^2) dV_g = \frac{1}{2^*} \int_M (u_i^+)^{2^*} dV_g + c + o(1), \quad (6.3)$$

em que $o(1) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$. Agora, tomando $\tilde{u}_i = \|u_i\|_{H_1^2}^{-1} u_i$, teremos

$$DJ^+(u_i) \cdot \tilde{u}_i \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow +\infty. \quad (6.4)$$

Segue de (6.3) que

$$\frac{1}{2} I(u_i) = \frac{1}{2^*} \int_M (u_i^+)^{2^*} dV_g + c + o(1) \quad (6.5)$$

e da convergência de (6.4), obtemos

$$\frac{1}{2^*}I(u_i) = \frac{1}{2^*} \int_M (u_i)^{2^*-1} u_i dV_g + o(\|u_i\|_{H_1^2}). \quad (6.6)$$

Fazendo a subtração das equações acima membro a membro, e usando a coercividade de $\Delta_g + h$ segue que

$$\lambda \|u_i\|_{H_1^2}^2 \leq I(u_i) \leq n(c + o(1) + o(\|u_i\|_{H_1^2})),$$

e portanto,

$$\|u_i\|_{H_1^2} \leq \frac{n}{\lambda} \left(\frac{c + o(1)}{\|u_i\|_{H_1^2}} + \frac{o(\|u_i\|_{H_1^2})}{\|u_i\|_{H_1^2}} \right).$$

Afirmamos que $\|u_i\|_{H_1^2} \leq C$ para todo i . De fato, supondo que $\|u_i\|_{H_1^2} \rightarrow +\infty$, teríamos pela equação acima que $\|u_i\|_{H_1^2} \leq 0$ o que é uma contradição. Passando a uma subsequência, se necessário, obtemos:

- (i) $u_i \rightarrow u$ em $H_1^2(M)$;
- (ii) $u_i \rightarrow u$ e $u_i^+ \rightarrow u^+$ em $L^2(M)$, e
- (iii) $u_i \rightarrow u$ q.t.p quando $i \rightarrow +\infty$.

Como $DJ^+(u_i) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$, temos que para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$,

$$\int_M \langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle dV_g + \int_M h u_i \varphi dV_g = \int_M (u_i^+)^{2^*-1} \varphi dV_g + o(1).$$

Usando as convergências de (i) à (iii) e passando ao limite quando $i \rightarrow +\infty$, segue que u é solução fraca de

$$\Delta_g u + h u = (u^+)^{2^*-1}.$$

Em particular, tomando $\varphi = u^-$, obtemos

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla u^- \rangle_g dV_g + \int_M h u u^- dV_g = \int_M (u^+)^{2^*-1} u^- dV_g.$$

Utilizando a definição das funções u^+ e u^- , concluímos que a segundo membro da equação acima é nulo, de forma que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla u^- \rangle_g dV_g + \int_M h u u^- dV_g = 0.$$

Agora, como $u = u^+ - u^-$ segue que

$$u u^- = u^+ u^- - (u^-)^2 = -(u^-)^2 \quad \text{e} \quad \int_M \langle \nabla u, \nabla u^- \rangle_g dV_g = - \int_M |\nabla u^-|^2 dV_g,$$

onde também, usamos o fato de que

$$\langle \nabla u^+, \nabla u^- \rangle_g = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i u^+ \partial_j u^- = 0.$$

Portanto,

$$\int_M |\nabla u^-|^2 + h (u^-)^2 dV_g = 0.$$

Como $\Delta_g + h$ é coercivo, segue que $u^- = 0$, logo, $u \geq 0$. Para mostrar que u não é identicamente nula, suponha que se tenha $u \equiv 0$.

Como a sequência $(\int_M |\nabla u_i|^2)_i$ é limitada, podemos assumir, passando a uma sub-sequência, que

$$\int_M |\nabla u_i|^2 dV_g \longrightarrow S \geq 0,$$

quando $i \longrightarrow +\infty$. Por passagem ao limite, obtemos da equação (6.6) que

$$S = \int_M (u^+)^{2^*} dV_g,$$

uma vez que

$$o(\|u_i\|_{H_1^2}) = \frac{o(\|u_i\|_{1,2})}{\|u_i\|_{H_1^2}} \cdot \|u_i\|_{H_1^2} \longrightarrow 0,$$

pois

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \int_M |\nabla u_i|^2 dV_g + \int_M u_i^2 dV_g \longrightarrow S,$$

quando $i \longrightarrow +\infty$.

Por outro lado, pela equação (6.5) obtemos, por passagem ao limite, que

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2^*} \int_M (u^+)^{2^*} dV_g + c.$$

Observe que como estamos assumindo $u \equiv 0$, temos, pelo passo (ii), que $u_i \rightarrow 0$ em $L^2(M)$. Juntando estas equações, obtemos que S satisfaz a equação

$$\frac{S}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) S + c,$$

o que implica $S = nc$. Pela desigualdade de Sobolev, temos

$$\|u_i^+\|_{2^*}^2 \leq \|u_i\|_{2^*}^2 \leq K(n, 2)^2 \|\nabla u_i\|_2^2 + B\|u_i\|_2^2,$$

para todo $B > 0$ e todo i . Agora, notando que

$$\|u_i^+\|_{2^*}^{2^*} \longrightarrow S,$$

vem que

$$\|u_i^+\|_{2^*}^2 \longrightarrow S^{\frac{2}{2^*}}.$$

Além disso, como $\|\nabla u_i\|_2^2 \longrightarrow S$, a desigualdade acima nos dá que

$$S^{\frac{2}{2^*}} \leq K(n, 2)^2 S + B\|u\|_2^2 = K(n, 2)^2 S,$$

e, portanto, $K(n, 2)S^{\frac{1}{n}} \geq 1$. Mas, sabemos que

$$S = nc \text{ e } c < \frac{1}{K(n, 2)^{nn}},$$

assim,

$$S < n \frac{1}{K(n, 2)^{nn}} = \frac{1}{K(n, 2)^n}$$

logo,

$$S^{\frac{1}{n}}K(n, 2) < 1,$$

o que é uma contradição. Portanto, u não é identicamente nula. Assim, existe $u > 0$ suave, solução de

$$\Delta_g u + hu = u^{2^*-1}.$$

Ao lidar com sequências de Palais-Smale perdemos a priori a minimalidade da solução. Por outro lado, as abordagens baseadas em sequências Palais-Smale evitam o uso de multiplicadores de Euler-Lagrange. Assim, podemos lidar com equações mais gerais. Como em Brézis-Nirenberg [13], isto inclui o caso das equações dadas por

$$\Delta_g u + hu = u^{2^*-1} + fu^q,$$

em que f é uma função suave e $q \in (1, 2^* - 1)$.

6.3 Introdução a Teoria de Blow-Up no Espaço H_1^2

Para começar a estabelecer a H_1^2 -teoria de Blow-Up, vamos introduzir a noção de bolha.

Definição 99 *Dada uma sequência (x_i) em M , e uma sequência $\{\mu_i\}$ de números reais positivos, tal que $\lim \mu_i = 0$, definimos uma bolha como uma sequência $(B_i)_i$ de funções definidas em M , dadas por:*

$$B_i(x) = \left(\frac{\mu_i}{\mu_i^2 + \frac{d_g(x_i, x)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

em que d_g é a distância com respeito a g . Chamamos x_i 's de centros da bolha, e os μ_i 's como o peso das bolhas.

Facilmente verifica-se que uma bolha converge para zero se existir $c > 0$ tal que $c < d_g(x_i, x)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, enquanto $B_i(x_i) \rightarrow +\infty$. A definição acima relembra a expressão das funções extremas da desigualdade de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq K_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

As bolhas possuem uma expressão parecida com a expressão das soluções fundamentais da equação Euclideana

$$\Delta u = u^{2^*-1}.$$

A H_1^2 -teoria de blow-up pode ser estabelecida como se segue.

Teorema 100 *Seja (M^n, g) uma variedade compacta, com $n \geq 3$, e h uma função suave em M . Seja também (u_i) uma sequência de Palais-Smale de funções não negativas para J . Então existe $u^0 \geq 0$ uma solução da equação (6.1) e existem k bolhas (B_i^m) , $m = 1, 2, \dots, k$, tal que, a menos de subsequência,*

$$u_i = u^0 + \sum_{m=1}^k B_i^m + R_i$$

em que (R_i) é uma sequência em $H_1^2(M)$ tal que $\|R_i\|_{H_1^2} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Quando $k = 0$ neste teorema, a sequência (u_i) convergem em H_1^2 para u^0 . Quando $k \geq 1$, aparece a situação de blow-up. A menos de subsequência, podemos assumir que os centros x_i^m das bolhas convergem quando $i \rightarrow +\infty$. Seja S o conjunto de todos esses limites. Então S é finito, possivelmente reduzido a um único ponto, e

$$S = \{x \in M \mid \exists m, x = \lim x_i^m\}.$$

Os pontos em S são chamados de pontos geométricos de blow-up de (u_i) .

6.4 Resultados Auxiliares

Nesta seção, vamos enunciar e provar alguns lemas que serão de suma importância para demonstrarmos o Teorema 100. Começamos com um resultado que garante que uma sequência de Palais-Smale para J é limitada em $H_1^2(M)$. Sendo este reflexivo, garantimos, a existência de uma única $u^0 \in H_1^2$ que é limite fraco de alguma subsequência da sequência de Palais-Smale dada.

Lema 101 *As sequências de Palais-Smale para J são limitadas em $H_1^2(M)$, em que*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_M (|\nabla u|^2 + hu^2) dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M |u|^{2^*} dV_g.$$

para $u \in H_1^2(M)$.

Demonstração. Seja (u_i) uma sequência de Palais-Smale para J . Como já vimos, $DJ(u_i)u_i = o(\|u_i\|_{H_1^2})$. Agora, observemos que

$$\begin{aligned} J(u_i) &= \frac{1}{2} I(u_i) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \int_M |u_i|^{2^*} dV_g \\ &= \frac{1}{2} I(u_i) - \frac{1}{2} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g + \frac{1}{n} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g \\ &= \frac{1}{2} DJ(u_i)u_i + \frac{1}{n} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g \end{aligned}$$

e, assim,

$$J(u_i) - \frac{1}{n} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g = \frac{1}{2} DJ(u_i)u_i = o(\|u_i\|_{H_1^2}),$$

quer dizer,

$$J(u_i) = \frac{1}{n} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g + o(\|u_i\|_{H_1^2}).$$

Como $J(u_i)$ é limitada, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{1}{n} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g + o(\|u_i\|_{H_1^2}) \leq c.$$

Consequentemente,

$$\int_M |u_i|^{2^*} dV_g \leq nc + o(\|u_i\|_{H_1^2}). \quad (6.7)$$

Agora, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_M u_i^2 dV_g &\leq \|u_i\|_{2^*}^2 V_g^{1-\frac{2}{2^*}} \\
&\leq (nc + o(\|u_i\|_{H_1^2}))^{\frac{2}{2^*}} V_g^{1-\frac{2}{2^*}} \\
&= C + o(\|u_i\|_{H_1^2}^{\frac{2}{2^*}}) \\
&= C + o\left(\|u_i\|_{H_1^2}^{\frac{2}{2^*}}\right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_M u_i^2 dV_g \leq C + o\left(\|u_i\|_{H_1^2}^{\frac{2}{2^*}}\right). \quad (6.8)$$

Usando a definição de J , podemos escrever que

$$I(u_i) = 2J(u_i) + \frac{2}{2^*} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g. \quad (6.9)$$

Assim, como $J(u_i)$ é limitado e vale (6.7), temos

$$I(u_i) \leq C + o(\|u_i\|_{H_1^2}). \quad (6.10)$$

Notando que

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 \leq I(u_i) + C\|u_i\|_2^2, \quad (6.11)$$

segue de (6.8), (6.10) e (6.11) que existe $C > 0$ tal que

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 \leq C + o(\|u_i\|_{H_1^2}) + o\left(\|u_i\|_{H_1^2}^{\frac{2}{2^*}}\right),$$

em particular,

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 \leq C \text{ para algum } C > 0.$$

Isto prova o Lema 101.

Seja agora o funcional $\tilde{J} : H_1^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{J}(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M |u|^{2^*} dV_g. \quad (6.12)$$

Claramente, se $h = 0$ então $J = \tilde{J}$. Uma sequência de Palais - Smale para $\tilde{J}$ é uma sequência $(\tilde{u}_i)$ em $H_1^2(M)$ tal que:

- (a) $\tilde{J}(\tilde{u}_i)$ é limitada com respeito a i , e
- (b) $D\tilde{J}(\tilde{u}_i) \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Seja (u_i) uma sequência de Palais-Smale de funções não negativas para J . Pelo Lema 101, podemos assumir que, a menos de subsequência,

- (i) $u_i \rightharpoonup u^0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$,
- (ii) $u_i \rightarrow u^0$ em $L^2(M)$,
- (iii) $u_i \rightarrow u^0$ q.t.p.

Como $u_i \geq 0$ segue pelo item (iii), que $u^0 \geq 0$.

Lema 102 *Seja (u_i) uma sequência de Palais-Smale para J e u^0 a função limite dada pelo Lema 101. Então $\tilde{u}_i = u_i - u^0$. Afirmamos que $(\tilde{u}_i)$ é uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}$ com a propriedade de que*

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i) = J(u_i) - J(u^0) + o(1),$$

e além disso, u^0 é solução da equação (6.1).

Demonstração. Começamos observando que, por hipótese, para qualquer $\varphi \in H_1^2(M)$ tem-se

$$DJ(u_i)\varphi = \int_M \langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle_g dV_g + \int_M h u_i \varphi dV_g - \int_M u_i^{2^*-1} \varphi dV_g = o(1). \quad (6.13)$$

Considere o funcional $\Phi_\varphi : H_1^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_\varphi(u) = \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_g dV_g.$$

Pelo item (i) concluímos que $\Phi_\varphi(u_i) \rightarrow \Phi_\varphi(u^0)$. O item (ii) garante que

$$\int_M h u_i \varphi dV_g \rightarrow \int_M h u^0 \varphi dV_g,$$

finalmente, observe que, pelo Lema 101, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_M |u_i^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dV_g \right)^{1-\frac{1}{2^*}} = \left(\int_M |u_i|^{2^*} dV_g \right)^{1-\frac{1}{2^*}} = \|u_i\|_{2^*}^{2^*-1} \leq C,$$

e, como $u_i^{2^*-1} \rightarrow u^{2^*-1}$ q.t.p, tem-se que $u_i^{2^*-1} \rightarrow u^{2^*-1}$ em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(M)$ em particular, a convergência é fraca. Assim, para toda $\varphi \in (L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(M))^* = L^{2^*}(M)$, teremos

$$\int_M u_i^{2^*-1} \varphi dV_g \longrightarrow \int_M (u^0)^{2^*-1} \varphi dV_g.$$

Em particular, $\varphi \in H_1^2(M) \subset L^{2^*}(M)$, tem-se que

$$\int_M u_i^{2^*-1} \varphi dV_g \longrightarrow \int_M u_0^{2^*-1} \varphi dV_g.$$

Passando ao limite em (6.13) obtemos

$$\int_M \langle \nabla u^0, \nabla \varphi \rangle_g dV_g + \int_M h u^0 \varphi dV_g = \int_M (u^0)^{2^*-1} \varphi dV_g,$$

implicado que u^0 é solução fraca da equação (6.1). Pela argumentação feita no capítulo anterior, na prova do Teorema 96 segue-se que u^0 é de fato uma solução de (6.1). Finalmente, para provar que $(\tilde{u}_i)$ é uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}$ com a propriedade enunciada, vamos calcular a energia $\tilde{J}(\tilde{u}_i)$. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_M h(u_i^2 - (u^0)^2) dV_g \right| &\leq C \int_M |u_i - u^0| |u_i + u^0| dV_g \\ &\leq C \|u_i - u^0\|_2 \|u_i + u^0\|_2 \end{aligned}$$

e pelo item (ii) acima, podemos escrever que

$$\int_M h u_i^2 dV_g = \int_M h (u^0)^2 dV_g + o(1).$$

Utilizando a definição de J e $\tilde{J}$, teremos

$$J(u_i) - J(u^0) - \tilde{J}(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2}(I(u_i) - I(u^0)) - \frac{1}{2}\|\nabla(u_i - u^0)\|_2^2 - \frac{1}{2^*}(\|u_i\|_{2^*}^{2^*} - \|u^0\|_{2^*}^{2^*} - \|u_i - u^0\|_{2^*}^{2^*}).$$

A primeira parcela do segundo membro da equação acima é tal que

$$I(u_i) - I(u^0) = (\|\nabla u_i\|_2^2 - \|\nabla u^0\|_2^2) + o(1),$$

agora, por convergência fraca, temos

$$-(\|\nabla(u_i - u^0)\|_2^2 + \|\nabla u^0\|_2^2 - \|\nabla u_i\|_2^2) = o(1).$$

De fato,

$$\|\nabla(u_i - u^0)\|_2^2 = \|\nabla u_i\|_2^2 - 2 \int \langle \nabla u_i, \nabla u^0 \rangle + \|\nabla u^0\|_2^2,$$

Consideremos o funcional Φ dado por

$$\Phi(\varphi) = \int \langle \nabla \varphi, \nabla u^0 \rangle,$$

para $\varphi \in H_1^2(M)$. Então Φ é um funcional linear contínuo, uma vez que

$$|\Phi(\varphi)| \leq \int |\nabla \varphi| |\nabla u^0| \leq \|\nabla \varphi\|_2 \|\nabla u^0\|_2 \leq \|\nabla u^0\|_2 \|\varphi\|_{H_1^2},$$

e como estamos supondo que a sequência (u_i) converge fracamente para u^0 em $H_1^2(M)$, segue-se que

$$\int \langle \nabla u_i, \nabla u^0 \rangle \longrightarrow \int |\nabla u^0|^2,$$

quando $i \longrightarrow +\infty$, provando a afirmação.

Finalmente, pelo Lema 48 temos

$$\|u_i\|_{2^*}^{2^*} - \|u^0\|_{2^*}^{2^*} - \|u_i - u^0\|_{2^*}^{2^*} = o(1).$$

Portanto,

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i) = J(u_i) - J(u^0) + o(1),$$

de modo que $\tilde{J}(\tilde{u}_i)$ é limitado. Seja $\varphi \in H_1^2(M)$, então a continuidade da imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz permite-nos concluir que

$$\begin{aligned} \left| \int_M h u_i \varphi - h u^0 \varphi dV_g \right| &= \left| \int_M h \varphi \tilde{u}_i dV_g \right| \\ &\leq \max |h| \int_M |\varphi \tilde{u}_i| dV_g \\ &\leq \max |h| \|\varphi\|_2 \|\tilde{u}_i\|_2 \\ &\leq C \|\varphi\|_{H_1^2} \|\tilde{u}_i\|_2 \\ &= C \|\varphi\|_{H_1^2} \|u_i - u^0\|_2 \end{aligned}$$

e, portanto, a convergência em $L^2(M)$ na última desigualdade permite concluir que

$$\int_M hu_i \varphi dV_g = \int_M hu^0 \varphi dV_g + o(\|\varphi\|_{H_1^2}).$$

Desde que u^0 é uma solução de (6.1) tem-se que $u^0 \in C^\infty(M)$. Um fato importante é que vale a seguinte igualdade

$$DJ(u_i) \cdot \varphi = D\tilde{J}(\tilde{u}_i) \cdot \varphi + o(\|\varphi\|_{H_1^2}). \quad (6.14)$$

Para mostrar isso, vamos verificar que

$$DJ(u_i) \cdot \varphi = D\tilde{J}(\tilde{u}_i) \cdot \varphi - \int_M \Psi_i \varphi dV_g + o(\|\varphi\|_{H_1^2}), \quad (6.15)$$

em que Ψ_i é tal que $\int_M \Psi_i \varphi dV_g = o(\|\varphi\|_{H_1^2})$. Para simplificar a notação, escreveremos $\int(\cdot)$, ao invés de $\int_M(\cdot)dV_g$. As expressões das diferenciais de J e $\tilde{J}$ são dadas por

$$DJ(u_i) \varphi = \int \langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle_g + \int hu_i \varphi - \int |u_i|^{2^*-2} u_i \varphi$$

e

$$D\tilde{J}(\tilde{u}_i) \varphi = \int \langle \nabla \tilde{u}_i, \nabla \varphi \rangle_g - \int |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i \varphi.$$

Então,

$$\begin{aligned} DJ(u_i) \varphi - D\tilde{J}(\tilde{u}_i) \varphi &= \int \langle \nabla u^0, \nabla \varphi \rangle_g + \int hu_i \varphi - \int |u_i|^{2^*-2} u_i \varphi + \int |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i \varphi \\ &= \int \langle \nabla u^0, \nabla \varphi \rangle_g + o(\|\varphi\|_{H_1^2}) + \int hu^0 \varphi - \int |u_i|^{2^*-2} u_i \varphi + \int |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i \varphi \\ &= \int (u^0)^{2^*-1} \varphi - \int |u_i|^{2^*-2} u_i \varphi + \int |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i \varphi + o(\|\varphi\|_{H_1^2}) \\ &= - \left(\int |u_i|^{2^*-2} u_i \varphi - \int (u^0)^{2^*-1} \varphi - \int |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i \varphi \right) + o(\|\varphi\|_{H_1^2}) \\ &= - \left[\int (|u_i|^{2^*-2} u_i - (u^0)^{2^*-2} u^0 - |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i) \varphi \right] + o(\|\varphi\|_{H_1^2}) \\ &= - \int \Psi_i \varphi + o(\|\varphi\|_{H_1^2}), \end{aligned}$$

em que

$$\Psi_i := |u_i|^{2^*-2} u_i - (u^0)^{2^*-2} u^0 - |\tilde{u}_i|^{2^*-2} \tilde{u}_i.$$

Assim, utilizando a terceira desigualdade do Lema 62, o fato de que a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ é contínua, e a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned} \int |\Psi_i \varphi| &= \int |\Psi_i| |\varphi| \\ &\leq C \int |\tilde{u}_i|^q |u^0|^r |\varphi| + C \int |\tilde{u}_i|^r |u^0|^q |\varphi| \\ &\leq C \left(\left\| |\tilde{u}_i|^q |u^0|^r \right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \|\varphi\|_{2^*} + \left\| |u^0|^r |\tilde{u}_i|^q \right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \|\varphi\|_{2^*} \right) \\ &\leq C_1 \left(\left\| |\tilde{u}_i|^q |u^0|^r \right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} + \left\| |u^0|^r |\tilde{u}_i|^q \right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \right) \|\varphi\|_{H_1^2}, \end{aligned}$$

para algum $C_1 > 0$ em que $q = \frac{(n+2)^2}{2n(n-2)}$ e $r = \frac{n+2}{2n}$. Agora, observemos que

$$\left\| |\tilde{u}_i|^q |u^0|^r \right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} = o(1) \quad (6.16)$$

e

$$\left\| |u^0|^r |\tilde{u}_i|^q \right\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} = o(1) \quad (6.17)$$

De fato, $|\tilde{u}_i|^q |u^0|^r \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(M)$, pois

$$\int (|\tilde{u}_i|^q |u^0|^r)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dV_g = \int |u^0| |\tilde{u}_i|^{2^*-1} dV_g \leq \max |u^0| \int |\tilde{u}_i|^{2^*-1} dV_g.$$

Agora, como $1 < 2^* - 1 < 2^*$, tem-se que a imersão $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*-1}(M)$ é compacta, e existe $C > 0$ tal que

$$\int (|\tilde{u}_i|^q |u^0|^r)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dV_g \leq \max |u^0| \int |\tilde{u}_i|^{2^*-1} dV_g \leq C \|u_i - u^0\|_{2^*-1}.$$

Como $u_i \rightharpoonup u^0$ em $H_1^2(M)$, a compacidade da imersão garante que $u_i \rightarrow u^0$ em $L^{2^*-1}(M)$ e a menos de subsequência, obtemos (6.14). Analogamente, mostra-se que o mesmo vale para a equação (6.15). Finalmente, observando que

$$\frac{o(\|\varphi\|_{H_1^2})}{\|\varphi\|_{H_1^2}} \cdot \|\varphi\|_{H_1^2} \longrightarrow 0,$$

quando $i \rightarrow +\infty$, obtemos que $(\tilde{u}_i)$ é uma sequência de Palais - Smale para $\tilde{J}$, finalizando a prova do Lema 102.

Seja $\beta^* = \frac{1}{n}K(n, 2)^{-n}$. Se u é uma solução fundamental positiva da equação Euclidiana crítica

$$\Delta u = u^{2^*-1},$$

podemos multiplicar ambos os membros da equação por u e integrar, para obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_M u^{2^*} dx,$$

e, por uma propriedade das soluções fundamentais positivas, (veja [17]), teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_M u^{2^*} dx &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) K(n, 2)^{-n} \\ &= \frac{1}{n} K(n, 2)^{-n}. \end{aligned}$$

Lema 103 *Seja $(\tilde{u}_i)$ uma sequência de Palais - Smale para $\tilde{J}$ tal que $\tilde{u}_i \rightharpoonup 0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$ e tal que $\tilde{J}(\tilde{u}_i) \rightarrow \beta < \beta^*$ quando $i \rightarrow +\infty$. Então $\tilde{u}_i \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Pelo que estamos assumindo, $\tilde{J}(\tilde{u}_i)$ é limitada, e pelo Lema 101 com $h = 0$, teremos

$$\|\tilde{u}_i\|_{H_1^2}^2 \leq C + o(\|\tilde{u}_i\|_{H_1^2}) + o(\|\tilde{u}_i\|_{H_1^2}^{2/2^*})$$

e as $\tilde{u}'_i$ s são limitadas em $H_1^2(M)$. Então pela equação (6.13) com $h = 0$, vem

$$D\tilde{J}(\tilde{u}_i) \cdot \tilde{u}_i = \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g - \int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g = o(1). \quad (6.18)$$

Por definição de $\tilde{J}$,

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M |\tilde{u}_i|^{2^*} dV_g$$

e pela equação (6.18),

$$\int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g = \int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g + o(1).$$

Logo,

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g + o(1) - \frac{1}{2^*} \int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g = \frac{1}{n} \int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g + o(1). \quad (6.19)$$

Novamente por (6.18),

$$\int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g = \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g + o(1),$$

substituindo em (6.12), teremos

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i) = \frac{1}{n} \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g + o(1). \quad (6.20)$$

Assim, por hipótese, $\tilde{J}(\tilde{u}_i) = \beta + o(1)$. Considerando as equações (6.19) e (6.20), poderemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{u}_i) &= \frac{1}{n} \int_M \tilde{u}_i^{2^*} dV_g + o(1) \\ &= \frac{1}{n} \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g + o(1) \\ &= \beta + o(1). \end{aligned}$$

Assim, $\beta = \frac{1}{n} \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g + o(1)$ e

$$\|\tilde{u}_i\|_{H_1^2} = \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g + \int_M \tilde{u}_i^2 dV_g$$

é limitada. Podemos admitir que, a menos de subsequência,

$$\int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g \longrightarrow L \geq 0 \text{ quando } i \longrightarrow +\infty.$$

Logo, quando $i \longrightarrow +\infty$ na igualdade

$$\frac{1}{n} \int_M |\nabla \tilde{u}_i|^2 dV_g = \beta + o(1),$$

obtemos

$$\beta = \frac{L}{n} \geq 0.$$

Agora, como $(\tilde{u}_i) \subset H_1^2(M)$ podemos usar a desigualdade de Sobolev, e, a menos subsequência, existe $B > 0$ tal que

$$\|\tilde{u}_i\|_{2^*}^2 \leq K(n, 2)^2 \|\nabla \tilde{u}_i\|_2^2 + B \|\tilde{u}_i\|_2^2,$$

para todo i . Além disso, como a imersão $H_1^2 M \hookrightarrow L^2(M)$ é compacta, tem-se que $\tilde{u}_i \rightarrow 0$ em $L^2(M)$, (uma vez que $\tilde{u}_i \rightharpoonup 0$ em $H_1^2(M)$). Além disso,

$$\begin{aligned} (n\tilde{J}(\tilde{u}_i))^{2/2^*} &= (\|\tilde{u}_i\|_{2^*}^{2^*} + o(1))^{2/2^*} \\ &\leq \|\tilde{u}_i\|_{2^*}^2 + o(1) \\ &\leq K(n, 2)^2 \|\nabla \tilde{u}_i\|_2^2 + B \|\tilde{u}_i\|_2^2 + o(1) \\ &= K(n, 2)^2 (n\tilde{J}(\tilde{u}_i) + o(1)) + B \|\tilde{u}_i\|_2^2 + o(1) \\ &= nK(n, 2)^2 \tilde{J}(\tilde{u}_i) + B \|\tilde{u}_i\|_2^2 + o(1). \end{aligned}$$

Fazendo $i \rightarrow +\infty$, vem $(n\beta)^{2/2^*} \leq K(n, 2)^2 n\beta$. Observe que pelas equações acima, $\|\nabla \tilde{u}_i\|_2^2 = n\beta + o(1)$. Assim, se mostrarmos que $\beta = 0$, e juntarmos isto ao fato de que $\|\tilde{u}_i\|_2^2 \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$, teremos $\tilde{u}_i \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$. Assumindo que $\beta > 0$ podemos dividir ambos os membros da desigualdade $(n\beta)^{2/2^*} \leq K(n, 2)^2 n\beta$, por $\beta^{2/2^*}$ e em seguida, elevar a potência $n/2$ para obter

$$n^{n/2^*} \leq K(n, 2)^n n^{n/2} \beta.$$

Assim, obtemos $K(n, 2)^{-n} n^{-1} \leq \beta$, isto é, $\beta^* \leq \beta$. Mas por hipótese $\beta < \beta^*$ e obtemos uma contradição. Portanto, temos $\beta = 0$, e a prova do Lema 103 termina.

O próximo lema é um dos principais argumentos utilizados na prova do Teorema 100. Para a prova deste resultado no contexto Euclidiano indicamos [28, 29]. Agora, para a prova no contexto Riemanniano, indicamos [15]. Finalmente, para a prova no caso de outros tipos de operadores indicamos [19].

Observação 104 *No enunciado do próximo lema, teremos a seguinte notação:*

- (i) $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ denota o completamento do espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto, com respeito a norma $\|\cdot\| = \|\nabla(\cdot)\|_2$.
- (ii) Dado $\delta > 0$ denotamos por η_δ a função corte suave em $\mathbb{R}^n$ tal que $\eta_\delta(x) = 1$ se $x \in B_\delta(0)$ e $\eta_\delta(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(0)$. Usando o fato de que a aplicação exponencial

$$\exp_p : T_p M \longrightarrow M.$$

é um difeomorfismo local, de acordo com a Proposição 51, podemos definir uma função corte suave em M por

$$\eta_{\delta, x_i} := \eta_\delta(\exp_{x_i}^{-1}(x))$$

em que $\exp_{x_i}$ é a aplicação exponencial em $x_i \in M$.

(iii) Para $i \in \mathbb{N}$, defina a função B_i em M , por

$$B_i(x) = \eta_{\delta, x_i} \left(\frac{1}{\mu_i} \right)^{\frac{n-2}{2}} u \left(\frac{1}{\mu_i} \exp_{x_i}^{-1}(x) \right)$$

em que u é uma solução da equação $\Delta u = |u|^{2^*-1}u$ em $\mathbb{R}^n$. Então, definimos sua energia pela expressão

$$E(B_i) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx.$$

(iv) Denotamos por $i_g := \text{inj}(M, g)$ o raio de injetividade da variedade compacta M , o qual satisfaz a condição

$$0 < i_g \leq \text{diam}(M, g).$$

Lema 105 Seja $(\tilde{u}_i)$ uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}$, tal que $\tilde{u}_i \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_1^2(M)$ mas não fortemente. Então existe uma sequência (μ_i) de números reais positivos, $\mu_i \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow +\infty$, uma sequência convergente (x_i) em M , e uma solução não trivial $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ da equação Euclideana crítica

$$\Delta u = |u|^{2^*-2}u$$

tal que, a menos de subsequência, a sequência $(\hat{u}_i)$ dada por

$$\hat{u}_i = \tilde{u}_i - B_i,$$

em que

$$B_i(x) = \eta_i \left(\frac{1}{\mu_i} \right)^{\frac{n-2}{2}} u \left(\frac{1}{\mu_i} \exp_{x_i}^{-1}(x) \right)$$

e $\eta_i = \eta_{\delta, x_i}$, $0 < \delta < \frac{i_g}{2}$, é uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}$, $\hat{u}_i \rightharpoonup 0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$, e

$$\tilde{J}(\hat{u}_i) = \tilde{J}(\tilde{u}_i) - E(B_i) + o(1).$$

em que $o(1) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Veja [15], Capítulo 3.

O próximo passo se refere à energia de uma bolha. Sabe-se que as soluções positivas da equação $\Delta u = |u|^{2^*-1}u$ são funções extremais para a desigualdade ótima de Sobolev em $\mathbb{R}^n$. Para tais funções temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = K(n, 2)^{-n} = \int_{\mathbb{R}^n} u^{2^*} dx,$$

veja ([17]). Segue-se então que, para bolhas não negativas, a energia é precisamente β^* , uma vez que a expressão da energia se torna

$$E(B_i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dV_g = \frac{1}{n} K(n, 2)^{-n} = \beta^*.$$

Lema 106 Seja (B_i) uma bolha como no Lema 105. Então $E(B_i) \geq \beta^*$.

Demonstração. De fato, se u é uma solução não trivial da equação $\Delta u = |u|^{2^*-2}u$, então multiplicando por u e integrando sobre $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx.$$

Pela desigualdade de Sobolev em $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq K(n, 2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = K(n, 2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx,$$

assim,

$$\frac{1}{K(n, 2)^2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{1-\frac{2}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{n}},$$

então,

$$K(n, 2)^{-n} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx,$$

e, portanto,

$$E(B_i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dV_g \geq \frac{1}{n} K(n, 2)^{-n} = \beta^*,$$

terminando a prova do Lema 106.

Agora, vamos utilizar os lemas anteriores para provar o Teorema 100.

6.4.1 Demonstração do Teorema 100

Seja (u_i) uma sequência de Palais - Smale de funções não negativas para J . Pelo Lema 101 temos que existe $C > 0$ tal que $\|u_i\|_{H_1^2} \leq C$. Podemos afirmar que

- (i) Existe $u^0 \in H_1^2(M)$, tal que $u_i \rightharpoonup u^0$ em $H_1^2(M)$,
- (ii) $u_i \rightarrow u^0$ em $L^2(M)$,
- (iii) $u_i \rightarrow u^0$ q.t.p quando $i \rightarrow +\infty$.

Além disso, por definição, podemos assumir que, a menos de subsequência, $J(u_i) \rightarrow c$, quando $i \rightarrow +\infty$. Pelo Lema 102 temos $u^0 \geq 0$ solução de (6.1) e $\tilde{u}_i = u_i - u^0$ é uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}$ com

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i) = J(u_i) - J(u^0) + o(1).$$

Se $\tilde{u}_i \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$, então

$$u_i = u^0 + \tilde{u}_i$$

e o não a nada há fazer.

Caso contrário, pelo Lema 105 existe (B_i^1) tal que a menos de subsequência, a sequência consistindo dos $\tilde{u}_i^1$'s dados por

$$\tilde{u}_i^1 = \tilde{u}_i - B_i^1$$

é tal que $(\tilde{u}_i^1)$ é uma sequência de Palais-Smale para $\tilde{J}$, $\tilde{u}_i^1 \rightharpoonup 0$ em $H_1^2(M)$, e

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i^1) = \tilde{J}(\tilde{u}_i) - E(B_i^1) + o(1) \leq \tilde{J}(\tilde{u}_i) - \beta^* + o(1),$$

pois pelo Lema 106, $E(B_i) \geq \beta^*$.

Se $\tilde{u}_i^1 \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$, o teorema é provado, pois

$$\tilde{u}_i = u^0 + B_i^1 + \tilde{u}_i^1.$$

Agora, se $\tilde{u}_i^1 \not\rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$, mas não fortemente, aplicamos o Lema 105, e garantimos a existência de uma bolha (B_i^2) tal que a menos de subsequência, a sequência consistindo dos $\tilde{u}_i^2$ dados por

$$\tilde{u}_i^2 = \tilde{u}_i^1 - B_i^2$$

é tal que $(\tilde{u}_i^2)$ é de Palais-Smale para $\tilde{J}$, $\tilde{u}_i^2 \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$ e

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i^2) = \tilde{J}(\tilde{u}_i^1) - E(B_i^2) + o(1) \leq \tilde{J}(\tilde{u}_i) - 2\beta^* + o(1).$$

Novamente, se $\tilde{u}_i^2 \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$, o teorema é provado pois

$$u_i = u^0 + B_i^1 + B_i^2 + R_i^2,$$

em que $R_i^2 = \tilde{u}_i^2$. Procedemos indutivamente.

Após k iterações, obtemos

$$J(\tilde{u}_i^k) \leq (J(u_i) - J(u^0)) - k\beta^* + o(1) \leq C - k\beta^*,$$

para algum $C > 0$ e então para algum k , teremos a menos de subsequência, que

$$J(\tilde{u}_i^k) \rightarrow \beta < \beta^*,$$

e, neste caso, aplicamos o Lema 103 e obtemos que $\tilde{u}_i^k$ converge fortemente para 0 em $H_1^2(M)$ e para este k , tem-se o teorema provado.

Observação 107 *Outra possibilidade é que, como a energia de $\tilde{J}(\tilde{u}_i^k)$ fica menor a cada iteração, temos a igualdade*

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i^k) = \tilde{J}(\tilde{u}_i) - \sum_{i=1}^k E(B_i^m) + o(1).$$

Podemos encontrar k de modo que o lado direito da equação acima fique menor que β^ e aplicamos novamente o Lema 105. Desta forma, obtemos por meio de um desses processos a tese do teorema.*

O corolário a seguir fornece uma caracterização da energia dos termos da sequência de Palais-Smale no nível H_1^2 .

Corolário 108 *Dada a decomposição em bolhas, tem-se que a energia da sequência (u_i) referente a esta decomposição é dada por*

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \|u^0\|_{H_1^2}^2 + \sum_{m=1}^k nE(B_i^k) + o(1).$$

Demonstração. Utilizando a prova do Teorema 100 obtemos

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i^k) = \tilde{J}(\tilde{u}_i) - \sum_{m=1}^k E(B_i^m) + o(1)$$

e como vimos, $\tilde{J}(\tilde{u}_i) = J(u_i) - J(u^0) + o(1)$. Assim

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i^k) = J(u_i) - J(u^0) - \sum_{m=1}^k E(B_i^m) + o(1).$$

Para este índice k , vale que $\|\tilde{u}_i^k\|_{H_1^2} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$, isto é,

$$\|\nabla \tilde{u}_i^k\|_2 + \|\tilde{u}_i^k\|_2 \rightarrow 0,$$

quando $i \rightarrow +\infty$. Por imersão, existe $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{u}_i^k\|_{2^*} \leq C \|\tilde{u}_i^k\|_{H_1^2}.$$

Portanto, $\|\tilde{u}_i^k\|_{2^*} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Agora, notando que

$$\tilde{J}(\tilde{u}_i^k) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla \tilde{u}_i^k|^2 dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M |\tilde{u}_i^k|^{2^*} dV_g = \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}_i^k\|_2^2 - \frac{1}{2^*} \|\tilde{u}_i^k\|_{2^*}^{2^*},$$

tem-se que $\tilde{J}(\tilde{u}_i^k) = o(1)$, e assim,

$$J(u_i) = J(u^0) + \sum_{m=1}^k E(B_i^m) + o(1). \quad (6.21)$$

Usando o fato que u^0 é solução da equação $\Delta_g u + hu = u^{2^*-1}$ vem que

$$J(u^0) = \frac{1}{n} \int_M (u^0)^{2^*} dV_g = \frac{1}{n} \|u^0\|_{2^*}^{2^*}. \quad (6.22)$$

Por outro lado, pelo Lema 101, tem-se que a sequência (u_i) é limitada em $H_1^2(M)$. Portanto,

$$J(u_i) = \frac{1}{n} \int_M |u_i|^{2^*} dV_g + \frac{o(\|u_i\|_{H_1^2})}{\|u_i\|_{H_1^2}} \cdot \|u_i\|_{H_1^2} = \frac{1}{n} \|u_i\|_{2^*}^{2^*} + o(1). \quad (6.23)$$

Substituindo (6.22) e (6.23) em (6.21), temos

$$\|u_i\|_{2^*}^{2^*} = \|u^0\|_{2^*}^{2^*} + n \sum_{m=1}^k E(B_i^m) + o(1).$$

Agora, como $DJ(u_i)u_i = o(\|u_i\|_{H_1^2})$, podemos escrever que

$$\int_M |\nabla u_i|^2 + hu_i^2 dV_g = \int_M (u_i)^{2^*} dV_g + o(1),$$

logo,

$$\int_M |\nabla u_i|^2 + h(u^0)^2 dV_g = \int_M (u_i)^{2^*} dV_g - \int_M h(u_i^2 - (u^0)^2) dV_g + o(1).$$

Como

$$\int_M h(u_i^2 - (u^0)^2) dV_g = o(1),$$

segue que

$$\int_M |\nabla u_i|^2 + h(u^0)^2 dV_g = \int_M (u_i)^{2^*} dV_g + o(1).$$

Usando o fato de que u^0 é tal que $\Delta u^0 + h u^0 = (u^0)^{2^*-1}$ podemos escrever que

$$-\int_M h(u^0)^2 dV_g = \int_M |\nabla u^0|^2 dV_g - \int_M (u^0)^{2^*} dV_g,$$

e, finalmente,

$$\int_M |\nabla u_i|^2 dV_g - \int_M |\nabla u^0|^2 dV_g = \int_M (u_i)^{2^*} dV_g - \int_M (u^0)^{2^*} dV_g + o(1),$$

ou

$$\|\nabla u_i\|_2^2 - \|\nabla u^0\|_2^2 = \|u_i\|_{2^*}^{2^*} - \|u^0\|_{2^*}^{2^*} + o(1),$$

e isto prova o corolário, pois

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \|u^0\|_{H_1^2}^2 + \sum_{m=1}^k nE(B_i^m) + o(1) \iff \|\nabla u_i\|_2^2 = \|\nabla u^0\|_2^2 + \sum_{m=1}^k nE(B_i^m) + o(1),$$

uma vez que $u_i \rightarrow u^0$ em $L^2(M)$, e portanto, $\|u_i\|_2 - \|u^0\|_2 = o(1)$. Se u é uma solução positiva da equação Euclidiana crítica, pode-se escrever

$$\|u_i\|_{H_1^2}^2 = \|u^0\|_{H_1^2}^2 + kK(n, 2)^{-n} + o(1),$$

conforme a observação a seguir.

Observação 109 *Se $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ é uma solução não trivial, vimos que podemos definir uma bolha (B_i) pela expressão*

$$B_i(x) = \eta_{\delta, x_i} \left(\frac{1}{\mu_i} \right)^{\frac{n-2}{2}} u \left(\frac{1}{\mu_i} \exp_{x_i}^{-1}(x) \right).$$

Um fato importante citado em [17], é o seguinte: Se u é não negativa, existe uma sequência $(\tilde{x}_i)$ em M e uma sequência de números reais positivos $\tilde{\mu}_i$ tal que

$$B_i(x) = \left(\frac{\tilde{\mu}_i}{\tilde{\mu}_i^2 + \frac{d_g(\tilde{x}_i, x)^2}{n(n-2)}} \right)^{\frac{n-2}{2}} + R_i(x),$$

em que $R_i \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$. Isto nos faz notar uma conexão com a definição original de bolha dada no início deste capítulo. Assim, neste caso

$$B_i = \tilde{B}_i + R_i,$$

em que R_i é uma função em $H_1^2(M)$ para cada i e $R_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$. De acordo com [17], tem-se a norma em $H_1^2(M)$ de uma bolha como na Definição 99 satisfaz

$$\|\tilde{B}_i\|_{H_1^2}^2 = K(n, 2)^{-n} + o(1).$$

Note que $\tilde{B}_i$ dada neste exemplo está na forma da Definição 99. Assim, supondo u solução positiva da equação Euclidiana crítica, teremos

$$E(B_i^m) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{n} K(n, 2)^{-n} = \frac{1}{n} \|\tilde{B}_i^m\|_{H_1^2}^2 + o(1).$$

6.5 Unicidade da H_1^2 -decomposição

Uma questão natural que surge a respeito da decomposição em bolhas dada pelo Teorema 100, é se tal decomposição é única. Nesta seção, vamos fazer comentários a respeito desta questão.

Sejam B_i^1, B_i^2, B_i^3 bolhas. Assuma que $F(B_i^1, B_i^2) \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$, e que $F(B_i^1, B_i^3)$ seja limitado, em que

$$F(B_i^1, B_i^3) = \frac{\mu_i^3}{\mu_i^1} + \frac{\mu_i^1}{\mu_i^3} + \frac{d_g(x_i^1, x_i^3)^2}{\mu_i^1 \mu_i^3}.$$

Então $F(B_i^2, B_i^3) \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$. De fato, pela definição de F e por hipótese, podemos escrever que

- (1) $\frac{\mu_i^2}{\mu_i^1} + \frac{\mu_i^1}{\mu_i^2} + \frac{d_g(x_i^1, x_i^2)^2}{\mu_i^1 \mu_i^2} \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$,
- (2) $\frac{\mu_i^3}{\mu_i^1} + \frac{\mu_i^1}{\mu_i^3} + \frac{d_g(x_i^1, x_i^3)^2}{\mu_i^1 \mu_i^3} \leq C$, para alguma constante $C > 0$,
- (3) $F(B_i^2, B_i^3) = \frac{\mu_i^3}{\mu_i^2} + \frac{\mu_i^2}{\mu_i^3} + \frac{d_g(x_i^2, x_i^3)^2}{\mu_i^2 \mu_i^3}$.

Supondo (3) limitado, vem que cada parcela de $F(B_i^2, B_i^3)$ é limitada, assim, $\frac{\mu_i^3}{\mu_i^2} \cdot \frac{\mu_i^1}{\mu_i^3} = \frac{\mu_i^1}{\mu_i^2}$ é limitada. Da mesma forma, obtemos que $\frac{\mu_i^2}{\mu_i^1}$ é limitada. Assim,

$$\frac{\mu_i^1}{\mu_i^2} + \frac{\mu_i^2}{\mu_i^1} = \frac{(\mu_i^2)^2 + (\mu_i^1)^2}{\mu_i^1 \mu_i^2},$$

e por definição de bolha, temos $(\mu_i^2)^2 + (\mu_i^1)^2$ convergente, e assim o fator $(\mu_i^1 \mu_i^2)^{-1}$ é limitado e como M é compacta, $d_g(x_i^1, x_i^2)^2 \leq \text{diam}(M)^2 < +\infty$, mas isto contraria a hipótese (1). Agora, vamos discutir a unicidade referente a decomposição em H_1^2 . Suponha que tenhamos dois conjuntos (B_i^m) e $(\tilde{B}_i^m)$ de bolhas, $m = 1, \dots, k$, correspondentes a duas decomposições em H_1^2 da sequência (u_i) . Denotemos por x_i^m e $\tilde{x}_i^m$ respectivamente, os centros das bolhas (B_i^m) e $(\tilde{B}_i^m)$, e $\mu_i^m, \tilde{\mu}_i^m$ os respectivos pesos. Suponhamos que para qualquer $\tilde{m}$, exista m tal que

$$K(n, 2)^{-n} = \langle B_i^m, \tilde{B}_i^{\tilde{m}} \rangle_{H_1^2} + o(1).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \|B_i^m - \tilde{B}_i^{\tilde{m}}\|_{H_1^2}^2 &= \|B_i^m\|_{H_1^2}^2 - 2\langle B_i^m, \tilde{B}_i^{\tilde{m}} \rangle_{H_1^2} + \|\tilde{B}_i^{\tilde{m}}\|_{H_1^2}^2 \\ &= 2K(n, 2)^{-n} + o(1) - 2(K(n, 2)^{-n} + o(1)) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

então, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|B_i^m - \tilde{B}_i^{\tilde{m}}\|_{H_1^2} = 0$. Pode-se verificar que a condição

$$K(n, 2)^{-n} = \langle B_i^m, \tilde{B}_i^{\tilde{m}} \rangle_{H_1^2} + o(1),$$

é equivalente a

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\mu}_i^{\tilde{m}}}{\mu_i^m} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{d_g(x_i^m, \tilde{x}_i^{\tilde{m}})}{\mu_i^m} = 0.$$

Portanto, mostramos que se temos dois conjuntos (B_i^m) e $(\tilde{B}_i^{\tilde{m}})$ de bolhas, $m = 1, \dots, k$, correspondentes a duas decomposições de (u_i) em H_1^2 , então, a menos de reenumeração,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\mu}_i^{\tilde{m}}}{\mu_i^m} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{d_g(x_i^m, \tilde{x}_i^{\tilde{m}})}{\mu_i^m} = 0,$$

em que x_i^m e $\tilde{x}_i^{\tilde{m}}$ denotam respectivamente, os centros das bolhas (B_i^m) e $(\tilde{B}_i^{\tilde{m}})$, e μ_i^m , $\tilde{\mu}_i^{\tilde{m}}$ os respectivos pesos. Em outras palavras, a H_1^2 -decomposição é única a menos das equações acima. Mais precisamente, as equações acima implicam que $B_i^m = \tilde{B}_i^{\tilde{m}} + \tilde{R}_i$ em que $\tilde{R}_i \rightarrow 0$ em H_1^2 , então dada a decomposição

$$u_i = u^0 + \sum_{m=1}^k B_i^m + \hat{R}_i,$$

poderemos também escrever

$$u_i = u^0 + \sum_{m=1}^k \left(\tilde{B}_i^{\tilde{m}} + \tilde{R}_i \right) + \hat{R}_i,$$

e, portanto,

$$u_i = u^0 + \sum_{m=1}^k \tilde{B}_i^{\tilde{m}} + R_i,$$

em que $R_i \rightarrow 0$ em $H_1^2(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrosetti, A. Malchiodi, A. *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^n$* . Birkhäuser Verlag, 2006.
- [2] Ambrosetti, A., e Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Func. Anal., 14, 349-381, 1973.
- [3] Andrews, B., Christopher, H., *The Ricci Flow in Riemannian Geometry- A complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2011.
- [4] Aubin, T., *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*. C. R. Acad. Sci. Paris 280, 347-371, 1974.
- [5] Aubin, T., *équation différentielles non linéaires et probleme de Yamabe concernat la courbure scalaire*. J. math. Pures Appl., 55: 269 - 296, 1976.
- [6] Aubin, T., *Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère Equations*. Springer - Verlag, 1982.
- [7] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Textos Universitários, SBM, 2012.
- [8] Berger, M., *Some relations between volume, injectivity radius, and convexity radius in Riemannian manifolds*. Differential Geometry and Relativity Mathematical Physics and Applied Mathematics Volume 3, 1976.
- [9] Berger, M., *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer -Verlag, Berlin, 2003.
- [10] Brézis, H., *Análisis Funcional. Teoría e Aplicações* Alianza Universidad Textos, 1983.
- [11] Brézis, H., and Coron, J.M., *Convergence de solutions de H-systèmes et applications aux surfaces à courbure moyenne constante*, C. R. Acad. Sci. Paris. 298, 389-392, 1984.
- [12] Brézis, H., and Lieb, E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*. Proc. Amer. Math. Soc., 88, 486-490, 1983.
- [13] Brézis, H., e Nirenberg, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math., 36, 437-477, 1983.
- [14] Do Carmo, Manfredo Perdigão, *Geometria Riemanniana*. (5ª edição). Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

- [15] Druet, O., Hebey, E., e Robert, F., *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry* . Princeton University Press, 2004.
- [16] Fernandez, P., *Medida e Integração* . Projeto Euclides, IMPA, 2002. Pisa Cl. Sci, 22(3): 165-274, 1968.
- [17] Hebey, E., *Variational methods and elliptic equations in Riemannian geometry*. Notes from lectures at ICTP, 2003.
- [18] Hebey, E., *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev Spaces and inequalities*. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1999.
- [19] Hebey, E., and Robert, F., *Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients*. Calc. Var. Partial Differential Equations, 13, 491-517, 2001.
- [20] Jost, J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Universitext, Sexta Edição, Springer, 2011.
- [21] Karatsuba, A., *Basic Analytic Number Theory*. Springer Verlag, 1983.
- [22] Krupla, D., Saunders, D., *Handbook of Global Analysis*. Elsevier Science; First edition , 2008.
- [23] Lee, J. M., and Parker, T. H., *The Yamabe problem*. Bull. Math. Soc., 17, 37-91, 1987.
- [24] Lions, P.L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations I, II*, Rev. Mat. Iberoamericana. 1, 145-201 and 45-121, 1985.
- [25] Miyagaki, O. H., *Equações Elípticas modeladas em variedades Riemannianas: uma introdução*. Viçosa : UFV- DMA, 2004.
- [26] Petersen, P., *Riemannian Geometry* . Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer -Verlag, 2006.
- [27] Rodemich, E., *The Sobolev inequalities with best possible constants*. Analysis Seminar at Californi Institute of Tecnology, 1966.
- [28] Struwe, M., *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*. Math. Z., 187, 511-517, 1984.
- [29] Struwe, M., *Variational Methods* . Springer-Verlag, 1990.
- [30] Schoen, R., *Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature*. J. Differential Geometry/ 20: 479-495, 1984.
- [31] Trudinger, N., *Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, p.265-274, 1968.
- [32] Talenti, G., *Best Constant in Sobolev inequalities* Ann. Mat. Appl.. 110, 353-372, 1976.
- [33] Tu, L., *An Introduction to Manifolds*. Universitext, Second edition, Springer, 2011.

- [34] Yamabe, H., *On a deformation of riemannian structures on compact manifolds.*
Osaka Math. J., 12: 21-37, 1960.