

JEAN SILVA SOARES

**DIFUSÃO PARA A INVESTIGAÇÃO DA ESTABILIDADE DE
TROIANOS HIPOTÉTICOS DOS PLANETAS
EXTERIORES**

**Tese apresentada à Universidade
Federal de Viçosa como parte das
exigências do programa de Pós-
Graduação em Física Aplicada para a
obtenção do título de *Magister Scientiae*.**

**VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2005**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

S676d
2005

Soares, Jean Silva, 1978-

Difusão para a investigação da estabilidade de troianos hipotéticos dos planetas exteriores / Jean Silva Soares. - Viçosa : UFV, 2005.
vi, 45f : il. ; 29cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Ricardo Reis Cordeiro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 43-45

1. Difusão. 2. Mecânica celeste. 3. Física – Processamento de dados. I. Universidade Federal de Viçosa.
II. Título.

CDD 22.ed. 530.475

JEAN SILVA SOARES

**DIFUSÃO PARA A INVESTIGAÇÃO DA ESTABILIDADE DE
TROIANOS HIPOTÉTICOS DOS PLANETAS
EXTERIORES**

**Tese apresentada à Universidade
Federal de Viçosa como parte das
exigências do programa de Pós-
Graduação em Física Aplicada para a
obtenção do título de *Magister Scientiae*.**

APROVADA: 20 de julho de 2005

Prof. Marcelo Lobato Martins
(Conselheiro)

Prof. Ismael Lima Menezes Sobrinho

Prof. Rodney da Silva Gomes

Prof. Tadashi Yokoyama

Prof. Ricardo Reis Cardoso
(Orientador)

Agradecimentos

- À minha mãe, Marcelina Pereira da Silva, pelo incentivo aos meus estudos.
- Aos meus irmãos, pela ajuda e compreensão.
- Ao meu orientador da iniciação científica e do mestrado, professor Ricardo Cordeiro, pela paciência comigo.
- Aos meus colegas de curso e aos meus colegas que já não estão mais em meu convívio.
- Aos moradores da república Diagonal, que considero como meus irmãos.
- A CAPES, pelo apoio financeiro.
- A Universidade Federal de Viçosa.

Conteúdo

| | |
|--|-------------|
| Lista de Figuras | iv |
| Resumo | vii |
| Abstract | viii |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Metodologia | 6 |
| 3 Resultados | 14 |
| 3.1 Mapas para tempo de encontros próximos. | 14 |
| 3.2 Expoente H efetivo. | 19 |
| 3.2.1 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter. | 19 |
| 3.2.2 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. | 21 |
| 3.2.2.1 Sistema Sol-Saturno (circular)-partículas. | 21 |
| 3.2.2.2 Sistema-Sol-Saturno-Júpiter-partículas | 23 |
| 3.2.2.3 Saturno na presença dos demais planetas. | 24 |
| 3.2.3 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano | 25 |
| 3.2.4 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno | 26 |
| 3.3 Comparações entre os resultados obtidos através do cálculo do expoente H efetivo e do cálculo do expoente de Lyapunov | 28 |
| 4 Conclusão | 35 |
| 5 Apêndice 1- Os elementos orbitais | 37 |
| 6 Apêndice 2- O expoente de Lyapunov | 39 |
| 7 Apêndice 3- Órbitas girino e ferradura | 41 |
| Referências bibliográficas | 43 |

Lista de Figuras

- 2.1 Os cinco pontos de equilíbrio relativo lagrangeanos, representados por quadrados. Podemos notar os três pontos de equilíbrio relativo colineares e os dois pontos de equilíbrio relativo triangulares. Os dois corpos primários estão representados por círculos. 7
- 2.2 A evolução temporal do desvio padrão versus o tempo para uma simulação do sistema real para uma região próxima ao “ponto instantâneo L_4 ” do planeta Júpiter. A reta mostrada representa o ajuste linear dos pontos superiores, como descreve o método de Cordeiro e Mendes (2005). 10
- 2.3 A evolução temporal do desvio padrão de uma função estocástica Y_H e do desvio padrão da sua fase aleatória X_H no tempo. Figura de Cordeiro e Mendes (2005). 12
- 3.1 Mapas de tempo de ocorrência de encontros próximos no espaço longitude média inicial versus semi-eixo maior inicial para as regiões próximas ao “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter (a), Saturno (b), Urano (c) e Netuno (d). O intervalo de tempo máximo para a integração foi de aproximadamente 10 milhões de anos 16
- 3.2 Perfil da região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno, onde Júpiter apresenta o semi-eixo maior inicial de 4.90229 (a), 5.00229 (b), 5.10229 (c), 5.20229 (d), 5.30229 (e) e 5.40229 (f). Podemos notar que quando Júpiter é deslocado da configuração da quase-ressonância 5:2 a região de instabilidade próxima ao centro desaparece. 18
- 3.3 Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para

| | | |
|-----|---|----|
| | difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d). | 21 |
| 3.4 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno em um problema de três corpos. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c) e coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | 22 |
| 3.5 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno na presença de Júpiter. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c) e coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | 24 |
| 3.6 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno na presença de todos os planetas, com exceção de Mercúrio e Plutão. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | 25 |
| 3.7 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c) e coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d). | 26 |
| 3.8 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c) e coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d). | 27 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.9 | Mapa de LCE máximo obtido por Nesvorný e Dones (2002) par a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter (a), Saturno (b), Urano (c) e Netuno (d). Os menores valores de LCE representam órbitas de partículas teste menos caóticas. | .29 |
| 3.10 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c) e coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | .30 |
| 3.11 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c) e coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | .31 |
| 3.12 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | .32 |
| 3.13 | Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo maior (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo maior (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d) | .33 |
| A3_1 | Órbita girino de uma partícula teste na região do ponto de equilíbrio estável L_4 do planeta Júpiter. | 41 |
| A3_2 | Órbita ferradura de uma partícula teste na região do ponto de equilíbrio estável L_4 do planeta Júpiter. | 42 |

Resumo

SOARES, Jean Silva, M.S., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2005. **Difusão para a Investigação da Estabilidade de Troianos Hipotéticos dos Planetas Exteriores.** Orientador: Ricardo Reis Cordeiro. Conselheiros: Marcelo Lobato Martins e Afrânio Rodrigues Pereira

No presente trabalho estudamos as órbitas de partículas testes simuladas em torno dos “pontos eqüilaterais estáveis L_4 ” dos quatro maiores planetas do Sistema Solar. O método do expoente de Hurst foi aplicado para caracterizar os processos difusivos presentes nestas regiões. A técnica de Cordeiro e Mendes (2005) foi utilizada para o cálculo dos expoentes de Hurst. Os resultados obtidos são comparados com os resultados de Holman e Wisdom (1993) para o cálculo do tempo de encontros próximos e com os resultados de Nesvorný e Dones (2002) para o cálculo do expoente de Lyapunov.

Abstract

SOARES, Jean Silva, M.S., Universidade Federal de Viçosa, July, 2005. **Diffusion for Investigation of Stability of Hypotetic Trojans from the Exterior Planets.**
Adviser: Ricardo Reis Cordeiro. Committee members: Marcelo Lobato Martins e Afrânio Rodrigues Pereira.

In this work we study the orbits of test particles simulating small bodies in Solar System close to the stable equilibria, L_4 , of the exterior planets. For this purpose we use the *exponent* H to characterize the diffusive processes in these regions. The method of Cordeiro and Mendes (2005) was adopted for the calculations of the Hurst exponents and the results were confronted with the results of Holman and Wisdom (1993), for the time of close encounters, and with the results of Nersvorný and Dones (2002), for the values of the Lyapunov exponents.

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica Celeste é a área de conhecimento que estuda a dinâmica do problema de n -corpos que interagem entre si via, principalmente, a força de atração gravitacional. A descrição completa deste sistema consiste em resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual somente pode ser resolvido analiticamente para o caso $n=2$ (problema Kepleriano). Portanto, é de grande necessidade o uso de ferramentas computacionais, de tal forma que possamos obter soluções numéricas para o problema de n -corpos. Ainda assim, dependendo do tipo de estudo a ser desenvolvido, estes cálculos podem consumir um tempo computacional apreciável, fazendo-se necessário o desenvolvimento e o uso de algoritmos que sejam cada vez mais rápidos, assim como simplificações no modelo que possam agilizar o processo computacional.

Um modelo muito estudado no âmbito da Mecânica Celeste é o chamado problema restrito de três corpos. Neste problema, em geral, analisa-se o movimento de um corpo de massa infinitesimal na presença de outros dois corpos massivos denominados primários, de tal forma que o movimento dos primários não é afetado pela presença do corpo infinitesimal, mas este último, por sua vez, é afetado pela atração gravitacional dos corpos massivos. Assim, podemos determinar os movimentos dos corpos primários ao considerá-lo como um problema de dois corpos, e associado a este se analisa o movimento do terceiro corpo. Se os corpos primários possuem órbitas circulares em torno do centro de massa, então este problema possui cinco soluções de equilíbrio quando analisado em um sistema de referência girante, sendo três soluções de equilíbrio colineares instáveis (L_1 , L_2 , L_3), que foram obtidas primeiramente por Leonhard Euler (1707-1783) em 1767, e duas soluções de equilíbrio triangulares estáveis (L_4 , L_5), que foram obtidas por Joseph Louis Lagrange (1763-1813) em 1772.

Estes dois últimos pontos de equilíbrios são conhecidos como pontos triangulares lagrangeanos (Uma revisão sobre o assunto pode ser vista em Bálint Érdi, 1997).

Érdi (1997) criou uma teoria semi-analítica para a análise da dinâmica dos asteróides troianos de Júpiter (asteróides que se encontram na região ao redor do ponto L_4), empregando um modelo tridimensional com Júpiter em uma órbita elíptica fixa. O procedimento consiste na expansão da função perturbadora em uma série de potências nas massas dos planetas, na excentricidade e na inclinação da partícula teste (ver no apêndice 1 as definições destes e dos demais elementos orbitais clássicos). Porém, em um modelo com perturbações externas, às altas inclinações e excentricidades de alguns asteróides troianos observados fazem com que não seja aplicável uma teoria truncada em expansões de potências das inclinações e das excentricidades (Milani, 1993).

F. Marzari e H. Scholl (2000) investigaram os possíveis efeitos de ressonâncias seculares na evolução dos Troianos durante as primeiras fases do Sistema Solar. De acordo com seus resultados, uma significativa população de planetesimais pode ter sido capturada e permanecido como órbita girino (ver no apêndice 3 exemplos de órbitas girino) na região ao redor dos pontos L_4 e L_5 dos planetas Júpiter e Saturno durante a fase de ganho de massa destes planetas, mas esta teoria não explica a alta inclinação de alguns Troianos de Júpiter e o “buraco” na região do L_4 de Saturno. Porém, para os Troianos de Júpiter, os efeitos da ressonância secular \square_{16} podem explicar o aumento nos valores iniciais das inclinações, que passam de $3^\circ - 4^\circ$ para 20° ou mais. Para os Troianos de Saturno, é proposto que um overlap de ressonâncias seculares seja a causa da instabilidade das partículas com pequenos ângulos de libração. O efeito deste overlap é colocado como mais efetivo que o efeito da quase-ressonância 5:2 com Júpiter.

Em 2001, Nesvorný e colaboradores desenvolveram um formalismo não singular para o cálculo da função perturbadora que permite o estudo semi-analítico da região de estabilidade dos asteróides troianos para um problema de três corpos. Como conhecido, a expansão tradicional da função perturbadora não permite a aplicação quando o semi-eixo do planeta perturbador e do corpo perturbado são aproximadamente iguais e quando a inclinação da órbita ou a excentricidade possuem valores altos (Murray e Dermott, 1999). O trabalho de Nesvorny e colaboradores foi aplicado a três aproximações do problema geral de três corpos: os modelos planar circular, planar elíptico e espacial circular. Foi mostrado que famílias de órbitas girino, ferradura (ver no apêndice 3 exemplos de órbita ferradura) e satélites retrógrados possuem forte dependência com a excentricidade e com a inclinação do corpo perturbado. Foram

computadas também a estrutura da dinâmica ressonante e secular para os três modelos descritos, juntamente com a estrutura das trajetórias coorbitais para altas excentricidades e inclinações.

O estudo analítico para o problema dos asteróides coorbitais é de difícil tratamento e de aplicação restrita a análise de poucos corpos. Assim, é de grande importância a aplicação de métodos numéricos para o entendimento da estrutura dinâmica de problemas mais gerais. Innanen e Mikkola (1989) investigaram a estabilidade dos pontos triangulares dos quatro maiores planetas para integrações numéricas com escala de tempo de 10 milhões de anos. Eles verificaram que as órbitas de algumas partículas teste simuladas próximas aos pontos triangulares lagrangeanos de Júpiter, Urano e Netuno sobrevivem a encontros próximos por todo o tempo de integração adotado. Entretanto, partículas teste simuladas muito próximas aos pontos L_4 e L_5 de Saturno sofrem encontro próximo em uma escala muito curta de tempo, mas partículas teste inicialmente deslocadas de uma certa distância do centro da região em torno dos pontos L_4 e L_5 não sofrem encontros próximos durante o tempo de integração de 10 milhões de anos.

Wisdom e Holman (1993) analisaram a estabilidade da região dos pontos L_4 e L_5 dos planetas Jovianos para uma escala de tempo da ordem de vinte milhões de anos, utilizando um mapa simplético desenvolvido para a análise do problema de n-corpos (Wisdom and Holman, 1991). O procedimento de Wisdom e Holman consistiu na integração do movimento tridimensional de muitas partículas teste no campo gravitacional do Sol e dos quatro maiores planetas. Os resultados obtidos indicaram que partículas teste próximas aos pontos L_4 e L_5 dos planetas exteriores (exceto Saturno) permanecem para a escala de tempo utilizada, e que órbitas próximas ao L_4 e ao L_5 de Saturno experimentam encontros próximos para escalas curtas de tempo, confirmando os resultados de Innanen e Mikkola (1989).

Nesvorný e Dones (2002) investigaram a possibilidade de que frações da população primordial de asteróides nos pontos triangulares de Saturno, Urano e Netuno tenham permanecido até os dias atuais. O procedimento adotado consistiu na integração de partículas teste orbitando o Sol e na presença dos quatro maiores planetas do Sistema Solar. Destas integrações foram obtidos mapas da região dos pontos lagrangeanos que mostram o valor do número máximo característico de Lyapunov (ver no apêndice 2 a definição de LCE). Como é conhecido, este número é um indicativo do grau de caoticidade das órbitas presentes. Neste trabalho a causa da instabilidade das órbitas

próximas ao ponto triangular de Saturno é sugerida como resultante do overlap da quase-ressonância 5:2 com Júpiter com a ressonância 1:1 com Saturno, o que cria um domínio caótico.

Andréa Milani (1993) computou os elementos próprios para 174 asteróides na região em torno do ponto L_4 de Júpiter utilizando um modelo que inclui os quatro maiores planetas, para uma escala de tempo de um milhão de anos, analisando os resultados através de filtros digitais. Também foi obtido o número máximo característico de Lyapunov (LCE) para cada asteróide. Um valor positivo do LCE indica que a órbita da partícula no espaço das fases é possivelmente caótica. O inverso do LCE é conhecido como tempo de Lyapunov e muitos tem sido os trabalhos que tentam associar estes aos tempos de *instabilidade macroscópico* (definido como a época quando ocorre algum forte evento como um encontro próximo com algum planeta). Vários asteróides estudados por Milani apresentaram um comportamento estável durante um tempo muito maior que o tempo de Lyapunov. Este comportamento é característico do chamado *caos estável*. Milani teve como objetivo principal deste trabalho encontrar evidências de que alguns asteróides próximos aos pontos L_4 e ao L_5 pertençam a famílias de asteróides que foram formadas por colisões no passado.

S. A. Tabachnik e N. W. Evans (2000) trabalharam com simulações numéricas de partículas próximas aos pontos de estabilidade dos planetas terrestres. Em seu modelo foi incorporado o efeito gravitacional de oito planetas (exceto Plutão). Assim, foi observado que Mercúrio pode reter troianos para uma escala de tempo da ordem de 100 milhões de anos, sendo que estas órbitas são todas do tipo ferradura. Os resultados numéricos mostraram também que a zona estável para Mercúrio é muito pequena e sensivelmente dependente das condições iniciais. O tempo máximo de estabilidade dos troianos de Vênus foi de 25 milhões de anos, tendo como resultado a possível existência de órbitas estáveis do tipo girino. Para o planeta Terra, foi observada uma estabilidade um pouco maior que a de Vênus. Marte é o único planeta terrestre que possui dois asteróides do tipo troiano: 5261 Eureka e 1998 VF31. Neste trabalho, foi observado que partículas teste que inicialmente estão contidas no plano orbital de Marte não permanecem estáveis para integrações de longa duração, mas partículas com inclinações entre 14° e 40° podem ser estáveis. As partículas que inicialmente estão no plano orbital de Marte são desestabilizadas pela ressonância Joviana, a ν_{16} .

O nosso trabalho também tem como objetivo analisar a estabilidade de pequenos corpos nas regiões dos quase pontos de equilíbrio triangulares L_4 dos planetas Jovianos

por meio de técnicas estocásticas. A caracterização da estabilidade das órbitas é feita através do expoente H , que é um indicativo da intensidade dos processos difusivos existentes. No capítulo 2 nós apresentamos o modelo numérico empregado e discutimos a técnica utilizada para o cálculo dos expoentes H . No capítulo 3 são apresentados os mapas obtidos e as comparações feitas com alguns resultados existentes na bibliografia. E finalmente nós tecemos nossas conclusões no capítulo 4.

Capítulo 2

Metodologia

Como já mencionamos no capítulo anterior, um modelo simples e bastante estudado da Mecânica Celeste é o chamado Problema Restrito de Três Corpos. Para o caso dos corpos massivos terem órbitas circulares, então nós sabemos que este problema admite, quando analisado em um sistema de referência posicionado no centro de massa e girando com a mesma frequência dos corpos primários, cinco soluções de equilíbrio conhecidas como soluções Lagrangeanas ou pontos de equilíbrio relativo Lagrangeanos. Estes pontos são usualmente designados por L_n , com $n=1, \dots, 5$. Três destas soluções de equilíbrio (L_1 , L_2 e L_3) posicionam-se sobre a reta que une os corpos massivos enquanto que as outras duas soluções de equilíbrio (L_4 e L_5) formam um triângulo equilátero com os corpos primários (Figura 2.1). Os pontos L_1 , L_2 e L_3 são instáveis, enquanto os pontos L_4 e L_5 são estáveis (Murray e Dermott, 2000). Atualmente, considerando apenas os planetas exteriores, são conhecidos mais de 200 asteróides que estão situados nas proximidades dos pontos L_4 e L_5 (Nesvorný e Dones, 2002).

Neste estudo é feita a integração numérica das órbitas dos sete maiores planetas do Sistema Solar considerando-os como corpos pontuais massivos que interagem entre si via a lei da Gravitação Universal Newtoniana, mais conjuntos de partículas teste com massas desprezíveis. A dinâmica dos corpos componentes do sistema é descrita pelo sistema de equações diferenciais para o problema de n-corpos em um sistema de referência heliocêntrico (Murray e Dermott, 2000):

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{v}}_i, \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -G \frac{(m_c + m_i) \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_i\|^3} + G \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_{ij}\|^3} - G \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_j\|^3} \quad (2.2)$$

onde G é a constante da Gravitação Universal, m_c é a massa do corpo central (Sol), m_i é a massa do i -ésimo corpo, \vec{r}_i é o vetor posição do i -ésimo corpo em relação ao corpo central e \vec{r}_{ij} é a posição do i -ésimo corpo com relação ao corpo j . O primeiro termo à direita da igualdade da segunda equação é a interação Kepleriana. O termo do primeiro somatório corresponde as perturbações diretas de $n-2$ corpos sobre um i -ésimo corpo e o último somatório corresponde aos termos indiretos devidos ao sistema de referência ser não inercial. Se o i -ésimo corpo for uma partícula teste, então $m_c + m_i = m_c$. Neste trabalho as equações 2.1 e 2.2 foram integradas via o mapa de segunda ordem de Holman e Wisdom (1992) que foi implementado por Cordeiro e colaboradores (1997) para o sistema heliocêntrico.

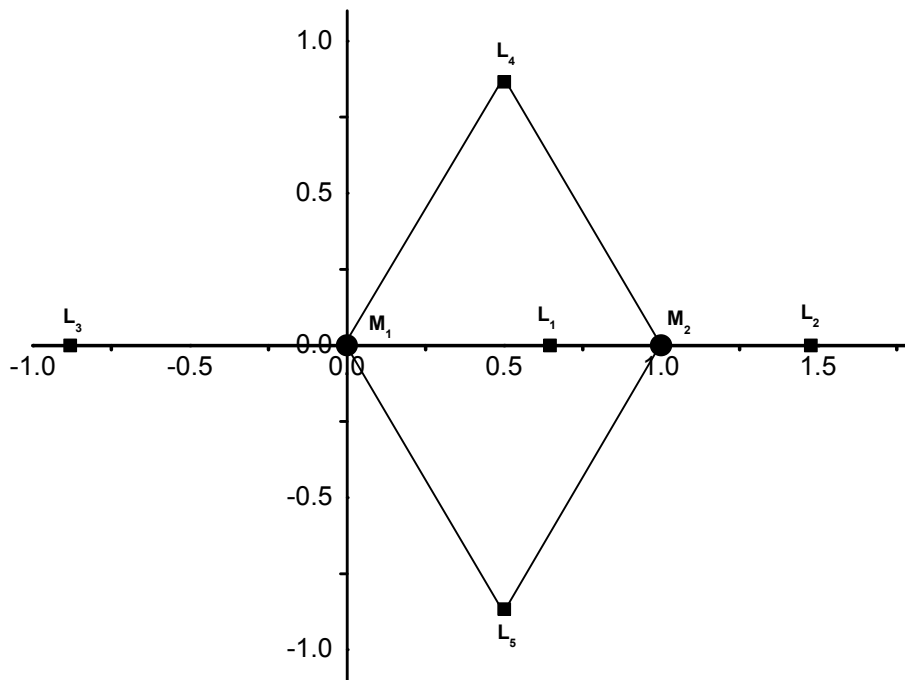


FIGURA 2.1: Os cinco pontos de equilíbrio relativo lagrangeanos, representados por quadrados. Podemos notar os três pontos de equilíbrio relativo colineares e os dois pontos de equilíbrio relativo triangulares. Os dois corpos primários estão representados por círculos.

O procedimento na integração consiste em:

1. Primeiramente, selecionam-se intervalos de longitude média inicial e de semi-eixo maior inicial de tal forma que estes intervalos englobem a região do ponto de equilíbrio L_4 do planeta a ser estudado. Ambos intervalos iniciais de semi-eixo maior e de longitude média são divididos em 50 subintervalos formando uma grade

de ensembles de partículas teste. No centro de cada célula da grade são considerados 101 partículas teste com parâmetros orbitais iniciais com valores muito próximos. A condição inicial de cada planeta foi obtida do *The Astronomical Almanac* (1996) para 07/02/1996, e adotamos um passo de integração correspondendo a 1% do período orbital Kepleriano do planeta em questão (este valor tem como objetivo evitar caos espúrio resultante da integração, Holman e Wisdom, 1992). Em cada ensemble todas as partículas possuem a mesma inclinação e a mesma longitude do nodo ascendente do planeta. A excentricidade inicial de todas as partículas é considerada nula e a longitude do periélio inicial satisfaz $\varpi - \varpi_j = 60^\circ$ para regiões do “L₄ instantâneo” de Júpiter e Saturno e $\varpi - \varpi_j = 240^\circ$ para regiões do “L₄ instantâneo” de Urano e Netuno, onde ϖ refere-se à longitude do periélio da partícula e ϖ_j refere-se à longitude do periélio do planeta associado ao ponto L₄. Neste trabalho a expressão “ponto L₄ instantâneo” refere-se a posição que teria um ponto L₄ ao aproximarmos, em um dado instante, o problema de n-corpos a um problema restrito de três corpos com o planeta associado ao ponto L₄ possuindo uma órbita circular. Este procedimento tem como objetivo garantir que iniciaremos a integração das órbitas a partir das condições iniciais que configuram a órbita mais estável considerando a ressonância secular entre o periélio do planeta e o periélio da partícula teste (Nesvorný e colaboradores, 2001).

2. O intervalo máximo de integração das órbitas de cada partícula teste é de aproximadamente 238.000 anos. A integração de um ensemble é finalizada quando se atinge o tempo máximo estabelecido, ou quando o tempo de integração corresponde a um intervalo de tempo suficiente para determinar o comportamento dos desvios padrão para semi-eixo e excentricidade. Se uma partícula sofrer um encontro próximo com um dos planetas será descartada do ensemble. Em geral, este tempo “suficiente” para determinar o comportamento dos desvios padrão corresponde aquele quando são determinados, no mínimo, 40 pontos superiores da série temporal dos desvios. Neste trabalho um encontro próximo ocorre quando a distância da partícula ao planeta é menor que o raio da esfera de influência do planeta. O valor do raio da esfera de influência é considerado como a distância do planeta até o ponto de equilíbrio instável L₁ ‘instantâneo’ do sistema Sol-partícula-planeta. Quando uma partícula penetra na esfera de influência de um dos planetas,

os valores do seu semi-eixo maior e de sua excentricidade podem sofrer mudanças substanciais fazendo com que a partícula possa até colidir com um planeta ou adquirir uma órbita hiperbólica em relação ao Sol, escapando assim do Sistema Solar.

3. A cada passo de integração, são calculados os valores médios do semi-eixo maior e da excentricidade para o ensemble de 101 partículas, e os respectivos desvios padrão.

A evolução do desvio padrão no tempo caracteriza o processo difusivo apresentado pelo conjunto de partículas analisadas em cada ensemble. Para um conjunto de partículas que apresenta difusão normal o quadrado do desvio padrão é proporcional ao tempo (Uhlenbeck e Ornstein, 1930):

$$\sigma = (2Dt)^{1/2} \tag{2.3}$$

Em geral um processo estocástico que apresenta difusão normal possui uma função de autocorrelação nula, implicando na inexistência de correlação entre incrementos passados e futuros. Entretanto, processos estocásticos também podem apresentar difusões anômalas associadas a leis de potência, cuja relação entre desvio padrão e tempo é do tipo (Feder, 1998),

$$\sigma = (2Dt)^\delta \tag{2.4}$$

onde δ é diferente de $1/2$.

Um processo que possui uma relação como a equação 2.4 é o Movimento Browniano Fracionário (Mandelbrot, 1982; Mandelbrot e Van Ness, 1985). No Movimento Browniano Fracionário a função de autocorrelação entre incrementos passados e futuros é dada por (Feder, 1998):

$$C'(t) = \frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H(t)^2 \rangle} = (2^{2H-1} - 1) \tag{2.5}$$

onde $H = \delta$ (conhecido como expoente de Hurst), e $X_H(t)$ é o caminho ou traço espaço-temporal, e é definido pela seguinte equação:

$$X_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left[\int_{-\infty}^0 \left((t-t')^{H-1/2} - (-t)^{H-1/2} \right) dX(t') + \int_0^t (t-t')^{H-1/2} dX(t') \right] \quad 2.6$$

sendo Γ a função gama e $X(t)$ representa o “movimento Browniano contínuo” (Mandelbrot, 1982). Em 2.5, fazendo-se $H=1/2$, tem-se que $C'(t)=0$, o que corresponde à difusão normal. Para $1/2 < H < 1$, temos $C'(t) > 0$ e o processo é então correlacionado e persistente. Neste caso uma tendência de aumento (ou diminuição) na evolução do parâmetro estocástico no passado implica em uma tendência de aumento (ou diminuição) no futuro para a evolução do mesmo parâmetro. Para $0 < H < 1/2$, temos $C'(t) < 0$ e o processo é correlacionado e antipersistente, e neste caso uma tendência de aumento (ou diminuição) para a evolução no passado implica em uma tendência de diminuição (ou aumento) no futuro (Feder, 1988).

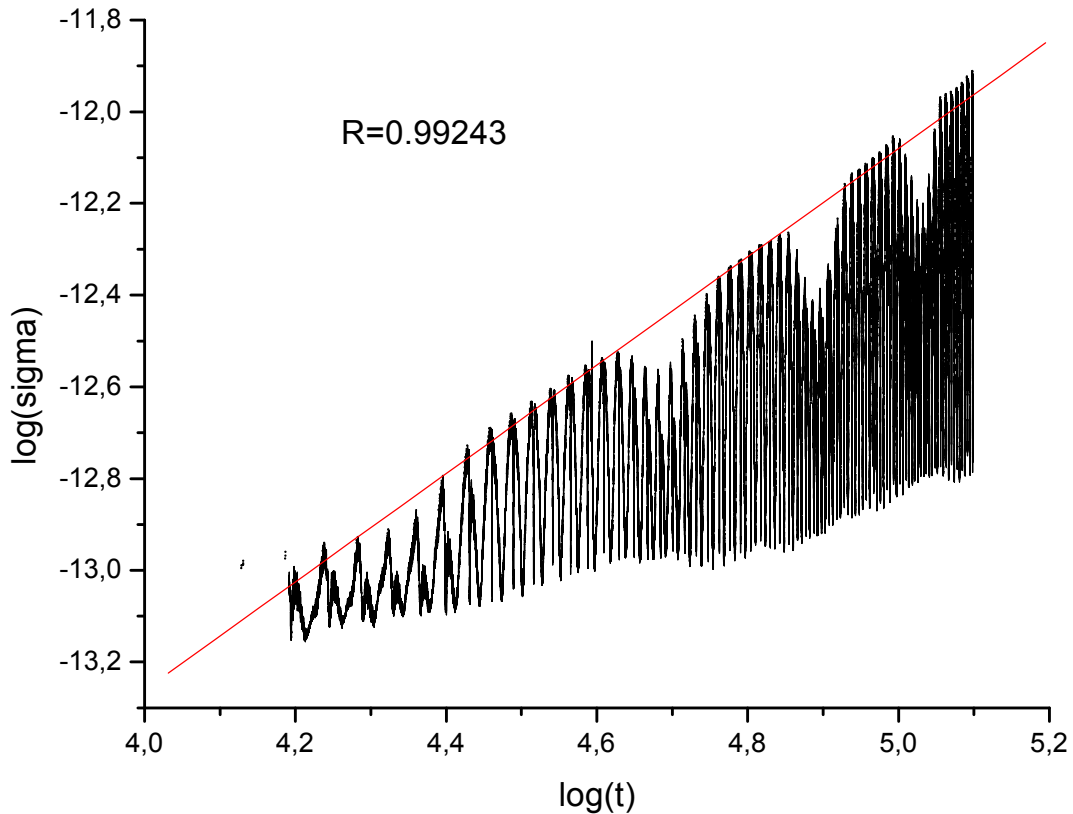


FIGURA 2.2: A evolução temporal do desvio padrão para uma simulação do sistema real. A reta mostrada representa o ajuste linear dos pontos superiores, como descreve o método de Cordeiro e Mendes (2005), para uma região próxima ao “ponto L_4 ” do planeta Júpiter.

O objetivo deste trabalho é utilizar o expoente H como um índice para a análise da instabilidade de órbitas inicialmente próximas aos pontos L_4 dos planetas exteriores. Para tal nós determinamos mapas do expoente H para obter a região do ponto L_4 dos quatro maiores planetas do Sistema Solar e comparamos os resultados obtidos com os trabalhos encontrados na literatura que utilizam métodos diferentes. Para computar o expoente H associado a cada ensemble, nós determinamos as respectivas séries temporais dos desvios padrão $\sigma(t)$ para a variação do semi-eixo maior e excentricidade. Desta forma, ao fazermos um gráfico de $\log_{10}\sigma(t) \times \log_{10}t$, nós podemos obter o expoente H à partir da inclinação da melhor reta que passa pelos pontos superiores do gráfico (Figura 2.2). De fato, Cordeiro e Mendes (2005) mostraram que, para os problemas da dinâmica orbital, em geral, o ajuste da reta obtido pelos pontos superiores da série temporal é aproximadamente igual à obtenção do expoente H a partir do ajuste de uma reta através de todos os pontos. O procedimento de Cordeiro e Mendes possui a vantagem de evitar que o cálculo do expoente H seja sensível ao comportamento final da série temporal dos desvios padrão. Este comportamento final pode introduzir erros nos cálculos do expoente H quando o ajuste é feito através de todos os pontos da série temporal de σ . Neste trabalho, o expoente H calculado pelo método de Cordeiro e Mendes será referido como *expoente H efetivo*.

Os pontos superiores são obtidos via o seguinte algoritmo: A cada passo de integração os sete últimos valores do desvio padrão são salvos em um vetor que também possui sete componentes (poderiam ser mais ou menos componentes, porém escolhemos usar sete componentes). O valor da componente central deste vetor é então comparado com os demais. Se esta componente central possui o maior valor entre as demais seis componentes, então esta componente corresponde a um ponto de máximo que é salvo em um arquivo de saída. Se a componente central do vetor não é aquela que possui maior valor, então os valores das seis últimas componentes são atribuídos às seis primeiras componentes do vetor. Feito isto, então a última componente do vetor recebe o valor seguinte da série temporal e nova verificação é feita entre os valores da componente central e as demais componentes. Além disto, a componente central de um vetor somente é considerada como um ponto superior se o valor desta componente central for maior que o valor do último ponto superior encontrado.

Para mostrar que a inclinação da reta ajustada pelos pontos superiores da série temporal do desvio padrão corresponde aproximadamente à inclinação da reta ajustada através de todos os pontos, Cordeiro e Mendes (2005) adotaram um modelo de random walk dado por:

$$Y_H(t) = \cos(\omega t + X_H(t)) \quad 2.7$$

onde ω é uma constante e X_H é uma variável randômica que apresenta comportamento de difusão anômala segundo a equação 2.4. Na Figura 2.3 são mostradas três evoluções do desvio padrão de X_H e Y_H considerando X_H como um random walk do tipo movimento Browniano Fracionário para os casos onde $H=0.20$, $H=0.50$ e $H=0.80$. As linhas pontilhadas correspondem à evolução do desvio padrão de X_H , $\sigma_X(t)$, e as linhas contínuas correspondem à evolução do desvio padrão de Y_H , $\sigma_Y(t)$.

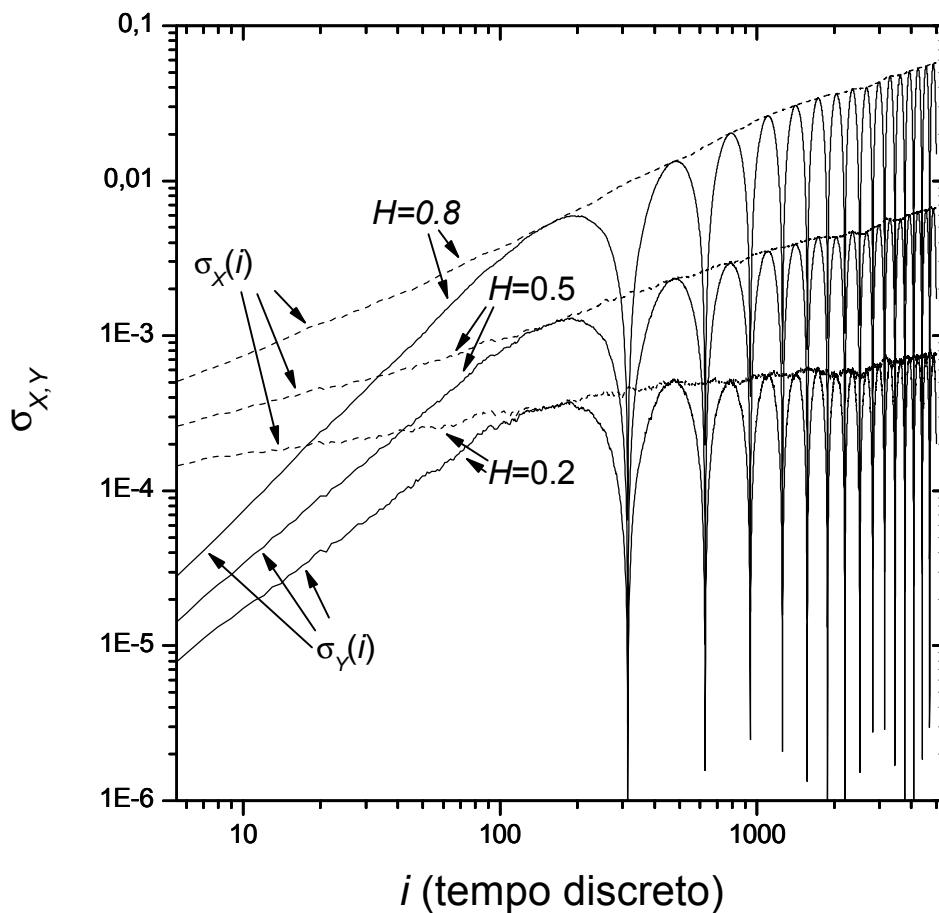


FIGURA 2.3 : A evolução temporal do desvio padrão de uma função estocástica Y_H e do desvio padrão da sua fase aleatória X_H no tempo. Figura de Cordeiro e Mendes (2005).

Pode-se observar que cada linha pontilhada é o limite superior da linha contínua. Assim, a evolução do envelope é um forte indicador da evolução do desvio padrão do argumento $\omega t + X_H(t)$ da função harmônica. Para X_H pequeno, podemos considerar $Y_H(t) \approx \cos(\omega t) - X_H(t) \sin(\omega t)$. Portanto, o valor esperado de Y_H é o valor esperado de X_H modulado por funções seno e co-seno, e a evolução efetiva do desvio padrão de Y_H é similar à evolução ao desvio padrão de X_H (Cordeiro e Mendes, 2005).

Em problemas orbitais, a evolução dos elementos clássicos não é representada por uma única função harmônica com um único argumento. Normalmente, as equações dinâmicas que representam a evolução dos elementos clássicos são desenvolvidas em séries de funções harmônicas, sendo que o argumento de cada função harmônica depende de termos que podem evoluir caoticamente. Cordeiro e Mendes (2005) mostraram que na região dentro das bordas da ressonância a difusão é inicialmente manifestada como uma lei exponencial. Entretanto, dentro da região ressonante o desvio padrão não mostra, inicialmente, a ocorrência de difusão, mas após este transiente inicial, a difusão sofrida pelas partículas teste é uma difusão anômala associada a uma lei de potência. Assim, em um gráfico $\log_{10} \sigma(t) \times \log_{10} t$, espera-se que o ajuste linear através dos pontos superiores, para as regiões de ressonância, apresente um coeficiente de correlação melhor que os ajustes calculados nas respectivas regiões das bordas.

No próximo capítulo nós empregaremos estas idéias ao estudo das regiões dos “pontos instantâneos L_4 ” dos planetas Jovianos.

Capítulo 3

Resultados

3.1 Mapas para tempo de encontros próximos

Antes de determinarmos os mapas dos expoentes H , a nossa primeira tarefa foi determinar mapas do tempo de ocorrência de encontros próximos para as regiões em torno dos “pontos L_4 ” dos planetas Jovianos. Nesta etapa foram integradas as órbitas dos planetas internos e externos (com exceção de Mercúrio e Plutão), mais um total de 2500 partículas teste para cada mapa. O modelo adotado consistiu no mesmo modelo já descrito no capítulo anterior. As equações do movimento foram integradas numericamente por uma versão do método de Holman e Wisdom (1991) que foi implementado por Cordeiro e colaboradores (1997). Os elementos orbitais dos planetas foram obtidos do *The Astronomical Almanac* para a data de 07/02/1996. As partículas teste foram inicialmente posicionadas próximas ao “ponto instantâneo L_4 ” dos planetas exteriores, estando cada uma localizada no centro de uma célula de uma grade de 50x50 no espaço longitude média inicial versus semi-eixo maior inicial. A inclinação inicial de cada partícula teste é a mesma da órbita do planeta, a longitude do nodo inicial é dada por $\Omega - \Omega_{planeta} = 0$, a longitude do perihélio inicial é dado por $\varpi - \varpi_{planeta} = 60^\circ$ para o estudo do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter e Saturno e $\varpi - \varpi_{planeta} = 240^\circ$ para o estudo do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano e Netuno (Nesvorný e Dones, 2002). Os resultados estão apresentados na Figura 3.1, para um tempo máximo de integração de dez milhões de anos.

Os resultados mostrados nestas figuras são compatíveis com os resultados obtidos por Holman e Wisdom (1993). A região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter obtida por Holman e Wisdom (1993) apresenta uma largura em semi-eixo maior inicial de 0,36 UA e em longitude média inicial de 80° , enquanto que na Figura 3.1 (a) esta região apresenta uma largura em semi-eixo maior inicial de

aproximadamente 0,40 UA e em longitude média inicial de aproximadamente 80° . A Figura 3.1 (b) mostra a região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno, que circunda uma outra região central que, por sua vez, apresenta uma forte instabilidade para as órbitas que ali se iniciam (Innanen e Mikolla, 1989; Holman e Wisdom, 1993; Nesvorný e Dones, 2002). Esta região instável interna (área escura instável mais próxima do “ponto instantâneo L_4 ”) de Saturno apresenta um tamanho máximo aproximado de 0.30 UA em semi-eixo maior inicial e 50° em longitude média inicial. Já a região estável (área clara) possui um tamanho máximo externo de 0,48 UA em semi-eixo maior inicial e 90° em longitude média inicial. Estas últimas medidas são semelhantes aos tamanhos da região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” do planeta Júpiter. A região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno é um overlap de várias ressonâncias, sendo as mais importantes as ressonâncias de movimento médio 1:1 da partícula com Saturno e a quase-ressonância 5:2 com Júpiter, o que pode resultar em uma região altamente caótica (Nesvorný e Dones, 2002). Também podem ser efetivamente importantes para a instabilidade desta região as oscilações seculares da excentricidade de Saturno (Marzari e School, 2000). Holman e Wisdom (1993) obtiveram para a região instável interna próxima ao “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno uma largura de 0,30 UA em semi-eixo maior inicial e 40° em longitude média inicial. Para a região estável obtiveram uma largura máxima externa de 0,38 UA em semi-eixo maior inicial e 85° em longitude média inicial, aproximadamente.

A Figura 3.1 (c) representa a região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” do planeta Urano. Podemos notar que a região de estabilidade é circundada por uma larga região de transição, com espessura em semi-eixo maior aproximadamente igual a 0.2 UA quando a longitude média inicial é igual a 0° . A região de estabilidade é pequena, quando a comparamos com a região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter. Possui dimensões máximas de 0.25 UA em semi-eixo maior inicial e 60° em longitude média inicial, enquanto que os valores encontrados por Holman e Wisdom (1993) foram 0,25 UA em semi-eixo maior inicial e 80° em longitude média inicial. Por último, temos a Figura 3.1 (d), que corresponde à região do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno. Assim como na região do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano, esta figura apresenta uma região de transição larga, de espessura 0.39 UA (para longitude média inicial igual a 0°) sendo, então, mais larga que a região equivalente à Urano. Também, a região estável de Netuno apresenta uma largura maior, sendo 0.6 UA em semi-eixo

maior inicial e 90° em longitude média inicial. Netuno possui, portanto, um tamanho da região de estabilidade comparável ao de Júpiter. Para a região de estabilidade em torno do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno, Holman e Wisdom encontraram um tamanho de 0,40 UA para semi-eixo maior inicial e 85° para longitude média inicial.

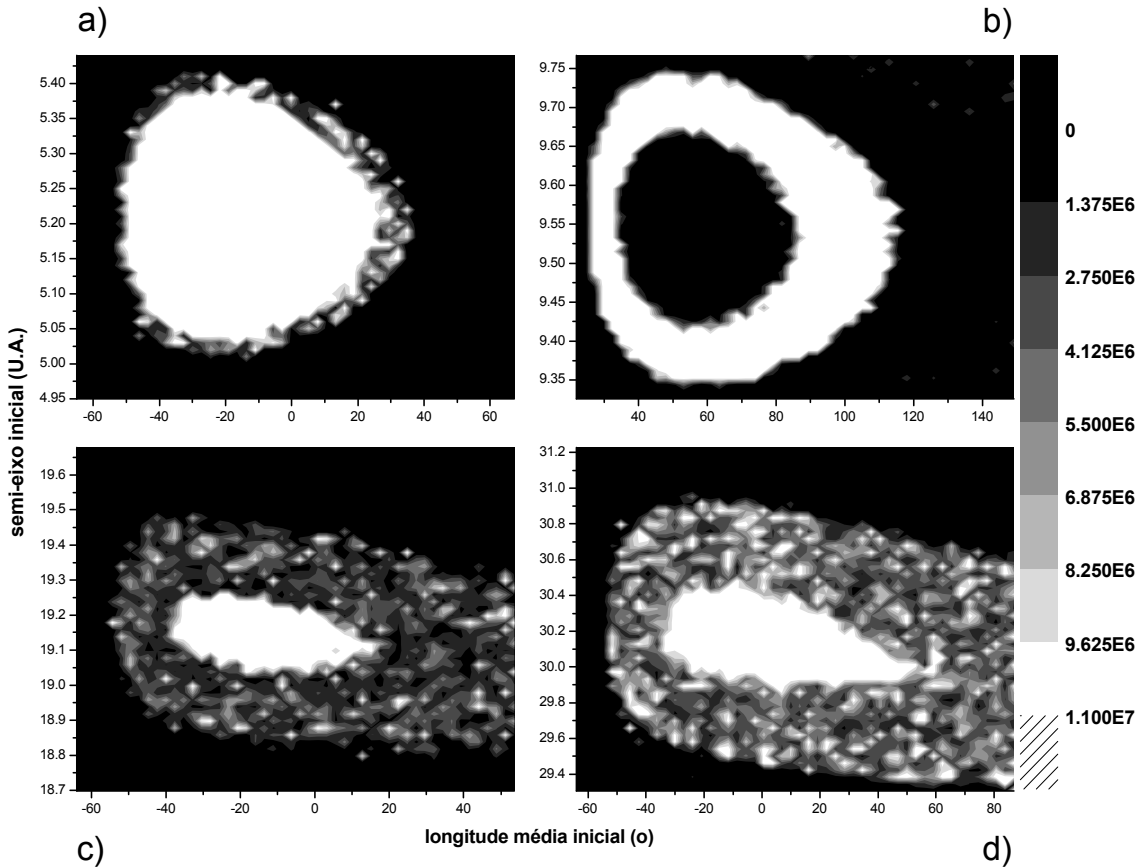


FIGURA 3.1: Mapas do tempo de ocorrência de encontros próximos no espaço longitude média inicial versus semi-eixo maior inicial para as regiões próximas aos “pontos instantâneos L_4 ” de Júpiter (a), Saturno (b), Urano (c) e Netuno (d). O intervalo de tempo máximo para a integração foi de aproximadamente 10 milhões de anos.

Em nosso trabalho as regiões de estabilidade encontradas foram, em geral, maiores que as regiões de estabilidade encontradas por Holman e Wisdom (1993). Esta diferença pode ser explicada pela diferença no intervalo de tempo máximo de integração adotado (neste trabalho o tempo máximo adotado é de 10 milhões de anos e no trabalho de Holman e Wisdom (1993) é de 20 milhões de anos) e nas condições iniciais adotadas (neste trabalho integramos as órbitas dos planetas internos e no trabalho de Holman e Wisdom (1993) as massas dos planetas internos são somadas à massa do Sol).

Com o objetivo de testar a importância dos efeitos das ressonâncias de movimento médio na região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno, simulamos as órbitas

de 50 partículas teste com o intuito de verificar o tempo de ocorrência de encontros próximos. Nestas simulações nós adotamos os mesmos critérios descritos na obtenção das Figuras 3.1, sendo que

1. todas as partículas possuem a mesma longitude média inicial, cujo valor corresponde ao valor aproximado do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. Este valor de longitude média inicial foi obtido somando-se 60° no valor da longitude média inicial do planeta Saturno;
2. já os valores de semi-eixo maior das partículas variaram de 9,19 UA a 9,84 UA. Os demais elementos orbitais possuem os mesmos valores adotados na obtenção da Figura 3.1 (b);
3. o valor do semi-eixo maior inicial de Júpiter foi modificado com o objetivo de verificar o efeito da configuração da quase ressonância 5:2 no centro da região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno.

Os resultados obtidos, Figura 3.2, reforçam a hipótese da importância da quase-ressonância 5:2 na origem da instabilidade das órbitas das partículas teste com condições iniciais próximas ao centro da região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. De fato, ao alterar o valor do semi-eixo maior de Júpiter de 4,90229 UA até 5,40229 UA podemos observar que o “buraco” correspondente à instabilidade devida a encontros próximos ocorre exatamente para o valor do semi-eixo maior atual. O tempo máximo nesta simulação foi de aproximadamente 20 milhões de anos.

Na Figura 3.2 (a), onde o planeta Júpiter foi deslocado para uma nova órbita com semi-eixo maior de 4,90229 UA, nós não observamos a região central instável (região de encontros próximos) em torno do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. Com Júpiter nesta posição de semi-eixo maior, o comportamento das partículas na região próxima ao “ponto instantâneo L_4 ” é estável para o tempo máximo de integração estabelecido (20 milhões de anos), sendo a faixa de semi-eixo maior, no qual observamos as partículas que não sofrem encontros próximos durante todo o tempo de integração, localizada entre 9,32 UA e 9,76 UA.

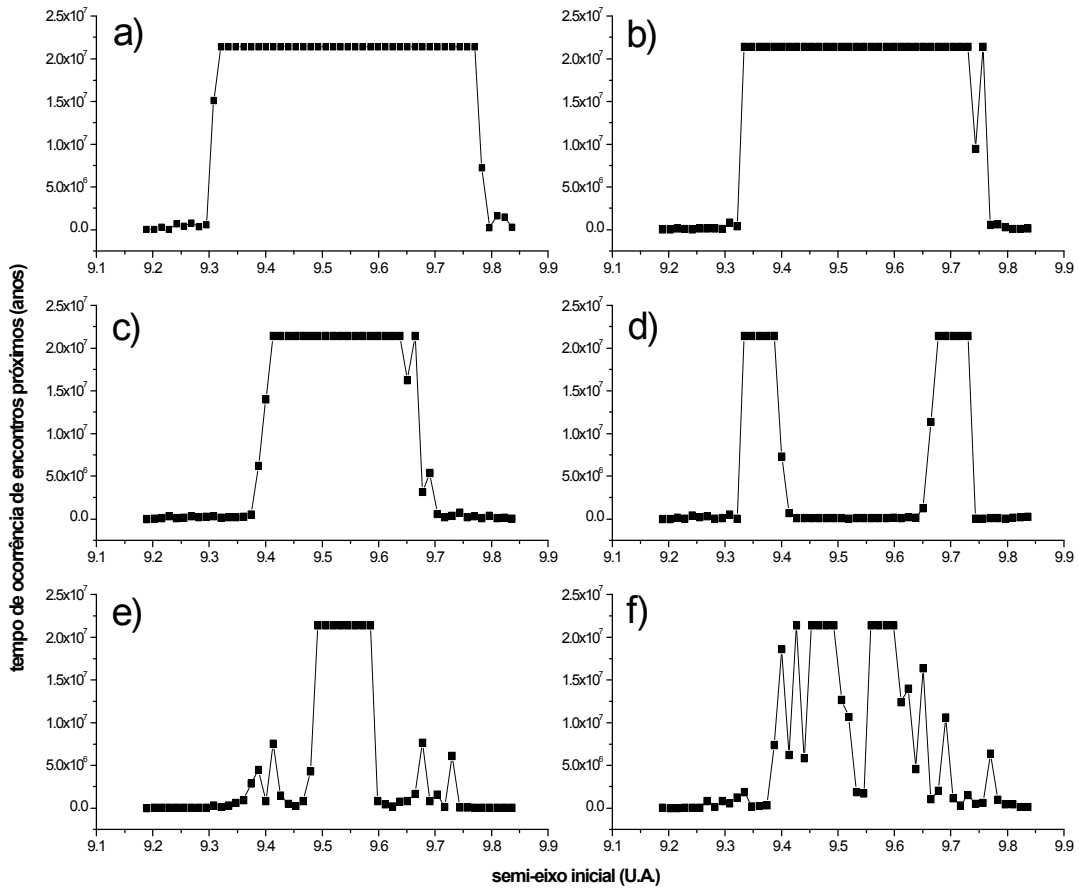


FIGURA 3.2: Perfis da região de estabilidade do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno, onde Júpiter apresenta o semi-eixo maior inicial de 4.90229 (a), 5.00229 (b), 5.10229 (c), 5.20229 (d), 5.30229 (e) e 5.40229 (f). Podemos notar que quando Júpiter é deslocado da configuração da quase-ressonância 5:2 a região de instabilidade próxima ao centro desaparece.

A Figura 3.2 (b) mostra o resultado para o semi-eixo de Júpiter deslocado para o valor de 5,00229 UA. Podemos observar uma pequena modificação no tamanho do intervalo de semi-eixo onde as partículas permanecem até o tempo máximo de integração estabelecido sem sofrer encontros próximos. Ao atribuir ao planeta Júpiter o valor de semi-eixo maior igual a 5,10229 UA, observa-se na Figura 3.2 (c) que a região de não-ocorrência de encontros próximos diminui significativamente, estando estes valores compreendidos entre 9,40 UA e 9,65 UA. Modificando-se o valor do semi-eixo de Júpiter para 5,20229 UA, obtém-se a configuração da condição de quase-ressonância 5:2 com as partículas teste e com Saturno. É observado então na Figura 3.2 (d) a região de instabilidade em torno do centro da região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. Esta região instável está compreendida entre 9,40 UA e 9,65 UA.

Aumentando o valor do semi-eixo maior de Júpiter para 5,30229 UA, a região de instabilidade em torno do centro da figura não aparece mais. Porém a região de

estabilidade sofre uma diminuição drástica, estando compreendida, na Figura 3.2 (e), entre 9,49 UA e 9,59 UA. Aumentando-se mais uma vez o valor do semi-eixo maior de Júpiter para 5,40229 UA, observamos na Figura 3.2 (f) uma tendência de aumento da instabilidade da região do “ponto instantâneo L_4 ” com o aparecimento de um novo “buraco” de encontros próximos, só que bem mais estreito que aquele da Figura 3.2 (d).

3.2 Expoente H efetivo

O procedimento utilizado na obtenção dos mapas do expoente H efetivo está descrito no capítulo dois, sendo que em cada box do grid 50X50 no espaço longitude média inicial versus semi-eixo maior inicial foram integradas as órbitas de 101 partículas teste com diferenças nos valores de seus respectivos parâmetros orbitais iniciais sendo da ordem de 10^{-13} . O tempo máximo de integração adotado foi de aproximadamente 238000 anos. A cada passo no tempo foram calculadas as médias do semi-eixo maior e da excentricidade do ensemble de partículas.

Destes cálculos foram obtidas as séries temporais dos desvios padrão, σ , de semi-eixo maior e de excentricidade e , por meio do método dos mínimos quadrados, foi feito um ajuste linear através dos pontos superiores no gráfico $\log(\sigma) \times \log(t)$. A inclinação da reta ajustada corresponde, então, ao valor do expoente H efetivo do ensemble, conforme descrito no capítulo anterior.

A seguir apresentamos os resultados obtidos para os mapas de expoente H efetivo nas regiões em torno dos “pontos instantâneos L_4 ” dos planetas Jovianos.

3.2.1 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter

As Figuras 3.3 (a) e (c) representam os mapas de expoente H para difusão em semi-eixo maior e excentricidade, respectivamente, na região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter, onde os eixos coordenados representam respectivamente o semi-eixo maior inicial e a longitude média inicial, e a grade de tons de cor cinza representa os valores do expoente H efetivo calculado para a difusão anômala. Nestes gráficos observamos que as regiões mais próximas do “ponto L_4 ” (pequenas regiões escuras centrais) apresentam maior estabilidade em relação às regiões que a circundam. Estas áreas

escuras correspondem às regiões onde os valores dos pontos superiores da série temporal do desvio padrão, σ , não apresentaram $\sigma > 10^{-12}$ durante todo o tempo de integração adotado. As demais regiões escuras apresentam valores pequenos para o expoente H , correspondendo, assim, a uma difusão anômala mais lenta que as regiões mais claras. A região em tracejado representa uma difusão mais rápida sendo que o expoente H efetivo assume valores consideravelmente maiores que aqueles das regiões mais escuras. O tamanho da região estável mostrada nas Figuras 3.3 (a) e (c) está compreendido entre 0,4 UA em semi-eixo maior inicial e 90° em longitude média inicial, apresentando então uma concordância com os resultados apresentados na Figura 3.1 (a) para tempo de não-ocorrência de encontros próximos. As Figuras 3.3 (a) e (c) são qualitativamente semelhantes à Figura 3.1 (a). Assim, o método do cálculo do expoente H efetivo para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter fornece um resultado que também é compatível com os resultados obtidos por Holman e Wisdom (1993).

As Figuras 3.3 (b) e (d) correspondem aos mapas dos coeficientes de correlação para o ajuste linear através dos pontos superiores no gráfico $\log(\sigma) \times \log(t)$. Na escala mostrada à direita destas figuras observamos que quanto mais clara é a região, melhor é o ajuste linear efetuado através dos pontos superiores do gráfico $\log(\sigma) \times \log(t)$.

Cordeiro e Mendes (2005) mostraram que, em geral, para mapas hamiltonianos, uma região de borda é identificada por baixos valores para os coeficientes de correlação e por altos valores para o expoente H efetivo. As linhas tracejadas nas Figuras (a) e (c) (mapas para expoente H) e (b) e (d) (mapas para coeficiente de correlação) indicam uma possível região de borda. Inicialmente acreditávamos que estas supostas bordas observadas na Figura 3.3 representavam separatrizes que dividiam a região em duas: uma região interna a separatriz onde as órbitas predominantes seriam do tipo girino e uma região externa a separatriz onde as órbitas predominantes seriam do tipo ferradura. Porém, os testes computacionais efetuados com o intuito de corroborar esta hipótese nos levaram a abandoná-la, pois as órbitas que identificamos foram todas do tipo girino.

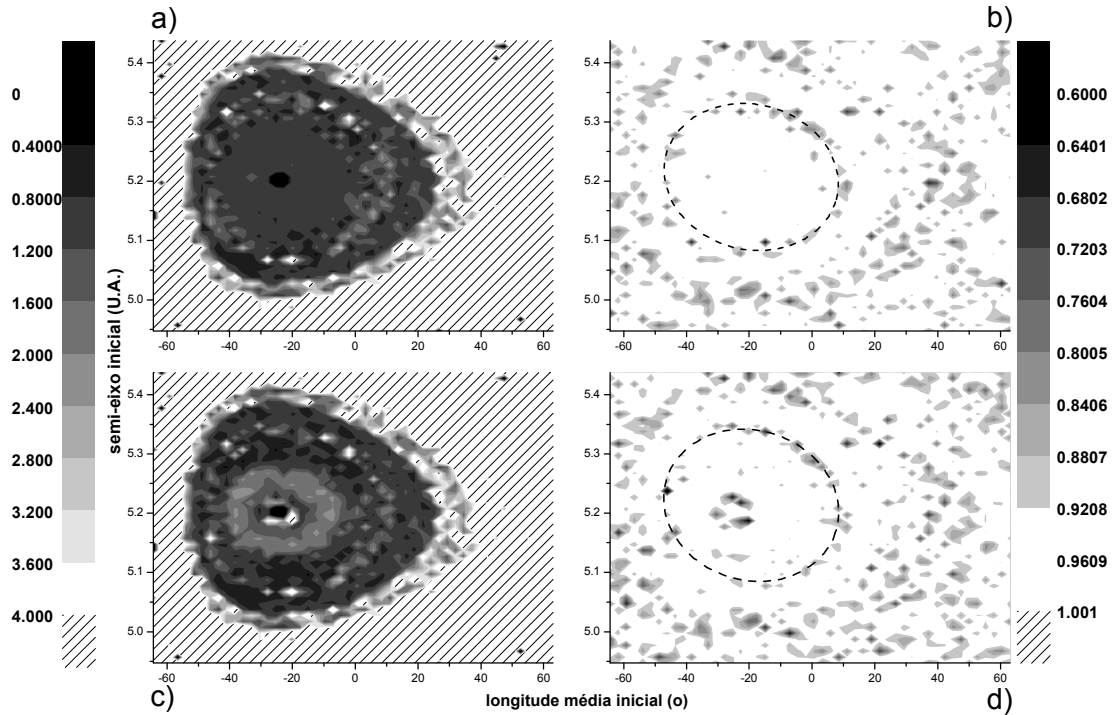


FIGURA 3.3: Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

3.2.2 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno

Para o estudo da estabilidade da região em torno do ponto estável instantâneo L_4 de Saturno via o expoente H , nós adotamos três modelos: Sistema Sol-Saturno-partículas, como um problema restrito de três corpos (circular), sistema Sol-Saturno-Júpiter-partículas e sistema Sol-demais planetas-partículas.

3.2.2.1 Sistema Sol-Saturno (circular)-partículas

Este modelo consiste na simulação do movimento das partículas teste na presença da perturbação de Saturno com uma excentricidade igual a zero. O resultado é apresentado nas Figuras 3.4 (a), (b), (c) e (d) de tal forma que as Figuras (a) e (c) representam os mapas para o expoente H efetivo calculado para a difusão das partículas teste no semi-eixo maior e na excentricidade, respectivamente. As Figuras (b) e (d) correspondem aos respectivos mapas dos coeficientes de correlação. As regiões mais

escuras (regiões escuras centrais) nos gráficos para o expoente H efetivo representam as condições para os quais os valores do desvio padrão para os pontos superiores da série temporal do desvio padrão não ultrapassaram 10^{-12} .

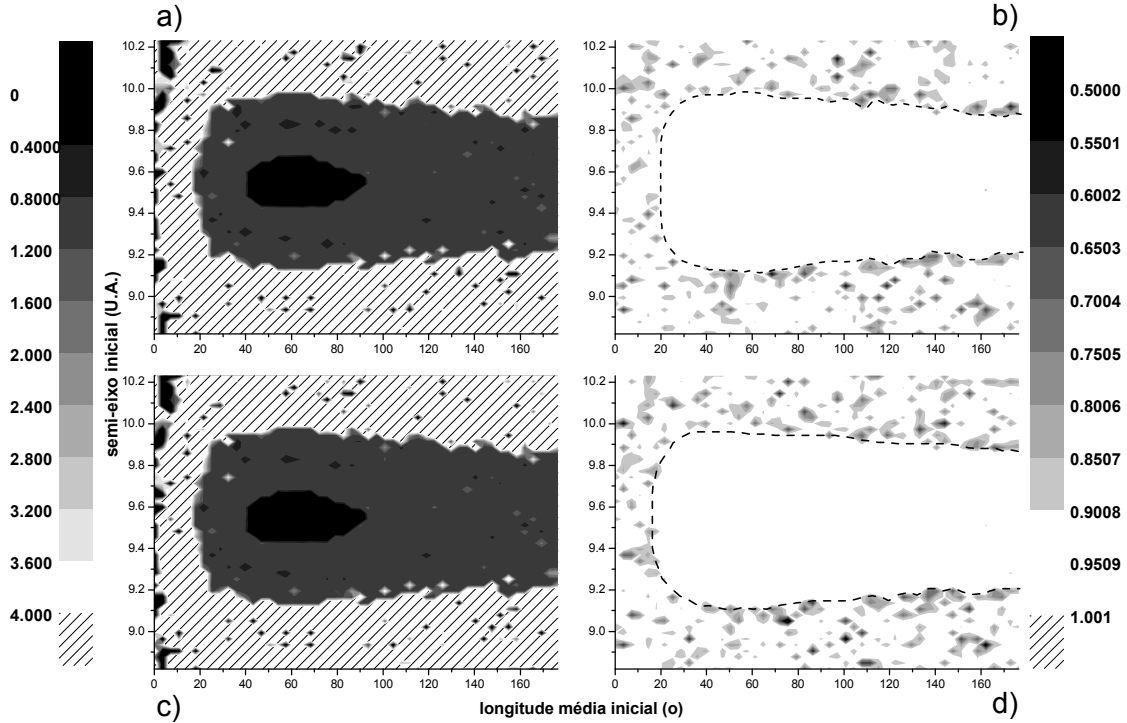


FIGURA 3.4: Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno em um problema de três corpos. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

Nós podemos observar nas Figuras 3.4 (a) e (b) que a região de estabilidade ultrapassa o valor de 180° em longitude média e apresenta uma largura máxima igual a $0,90$ UA para o intervalo em semi-eixo maior. Uma possível região de borda é mostrada por linha tracejada nas Figuras 3.4 (b) e (d). Podemos observar que estas linhas tracejadas representam, nas Figuras 3.4 (a) e (c), um limite entre regiões onde os valores do expoente H efetivo são bastante diferentes, mudando abruptamente de valores de aproximadamente $1,2$ para valores acima de $4,0$.

O sistema Sol-Saturno (excêntrico)-partículas não é muito diferente do caso circular, portanto não será descrito nesta dissertação.

3.2.2.2 Sol-Saturno-Júpiter-partículas

Neste modelo nós acrescentamos o planeta Júpiter (com excentricidade inicial diferente de zero) com o intuito de observar o efeito das perturbações deste planeta sobre as partículas teste na região próxima ao “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno, tendo este último excentricidade inicial diferente de zero. As Figuras 3.5 (a) e (c) representam os mapas de expoente H para difusão em semi-eixo maior e excentricidade e as Figuras 3.5 (b) e (d) correspondem aos mapas dos coeficientes de correlação. Muito provavelmente os efeitos da ressonância 1:1 com Saturno combinado com os efeitos da ressonância 5:2 com Júpiter na região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno causam uma instabilidade nas órbitas das partículas teste próxima ao ponto L_4 . O expoente H efetivo nas proximidades da região do “ponto L_4 ” apresenta um valor maior que 3. Assim, podemos interpretar que o efeito das ressonâncias faz com que tanto a difusão para o semi-eixo maior quanto para a excentricidade nas regiões próximas ao “ponto instantâneo L_4 ” ocorra mais rápido. O tamanho máximo da região de estabilidade nas Figuras 3.5 (a) e (c) é de 100° em longitude média inicial e 0,50 UA em semi-eixo maior inicial, e o tamanho máximo para a região instável em torno do centro é de 35° em longitude média inicial e 0,20 UA em semi-eixo maior inicial. Este resultado é semelhante à Figura 3.1 (b), fazendo com que o método do cálculo do expoente H efetivo para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno seja também compatível com os resultados obtidos por Holman e Wisdom (1993). Não foi observada nenhuma diferença substancial entre as Figuras 3.5 (a) e 3.5 (c).

Os gráficos 3.5 (b) e (d) provavelmente apresentam duas bordas (indicadas por linhas em tracejado), sendo que a possível separatriz externa separa a região de órbitas instáveis (região em tracejado nos gráficos (a) e (c)) das órbitas mais estáveis. A suposta separatriz interna separa esta mesma região de órbitas estáveis de uma segunda região instável localizada no centro dos gráficos (área central tracejada nos gráficos (a) e (c)). A região estável apresenta uma predominância de órbitas do tipo girino, não sendo identificado em nossos testes órbitas do tipo ferradura.

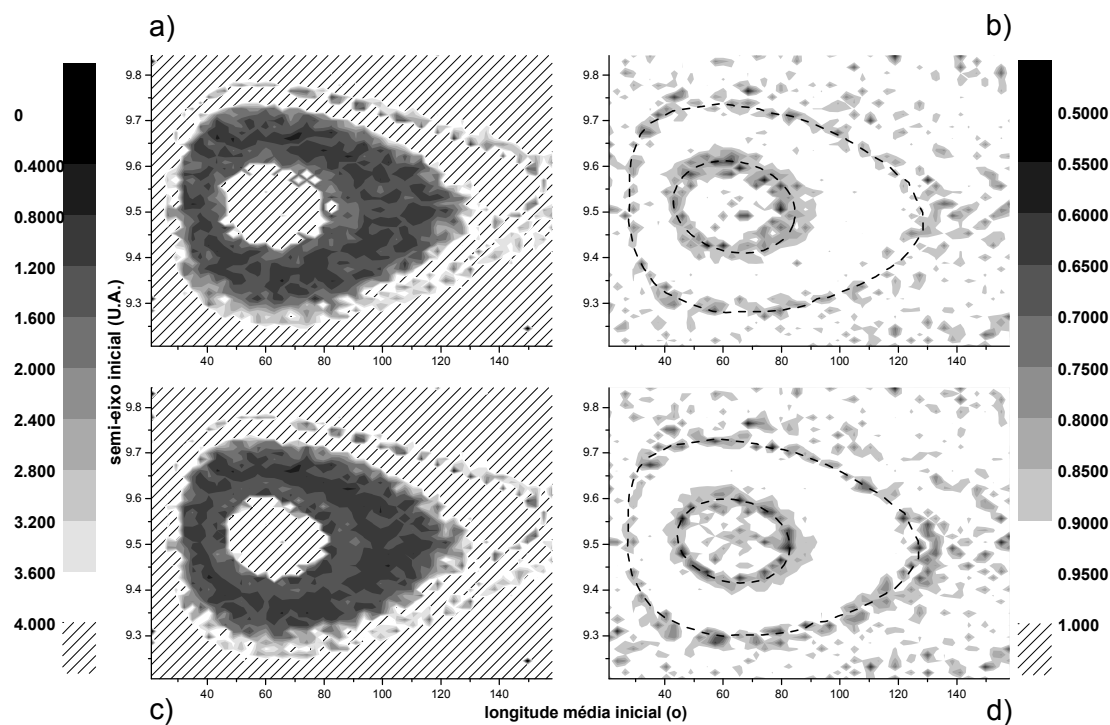


FIGURA 3.5 Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno na presença de Júpiter. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

3.2.2.3 Saturno na presença dos demais planetas

Acrescentamos ao modelo anterior a perturbação dos demais planetas (exceto Mercúrio e Plutão) com o intuito de verificar o efeito destas perturbações na região em torno do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. As Figuras 3.6 (a) e (c) representam os mapas de expoente H para difusão em semi-eixo maior e excentricidade e as Figuras 3.6 (b) e (d) correspondem aos mapas dos coeficientes de correlação. Estas regiões apresentam um tamanho máximo de 0,30 UA em semi-eixo maior inicial e 90° em longitude média inicial para a região de baixa difusão em torno do centro da região do “ponto instantâneo L_4 ”. Observamos então um encolhimento no tamanho destas figuras, quando comparadas às Figuras 3.5. Este encolhimento é devido às perturbações dos demais planetas sobre as órbitas das partículas teste. As Figuras 3.6 (b) e (d) permanecem qualitativamente inalteradas em relação às Figuras 3.5 (b) e (d), sendo mostrado em tracejado as linhas que representam as possíveis bordas. Desta forma podemos concluir que os principais efeitos sobre esta região são realmente devidos ao

potencial perturbador de Júpiter na condição da quase ressonância 5:2 com as partículas juntamente com a ressonância 1:1 com Saturno.

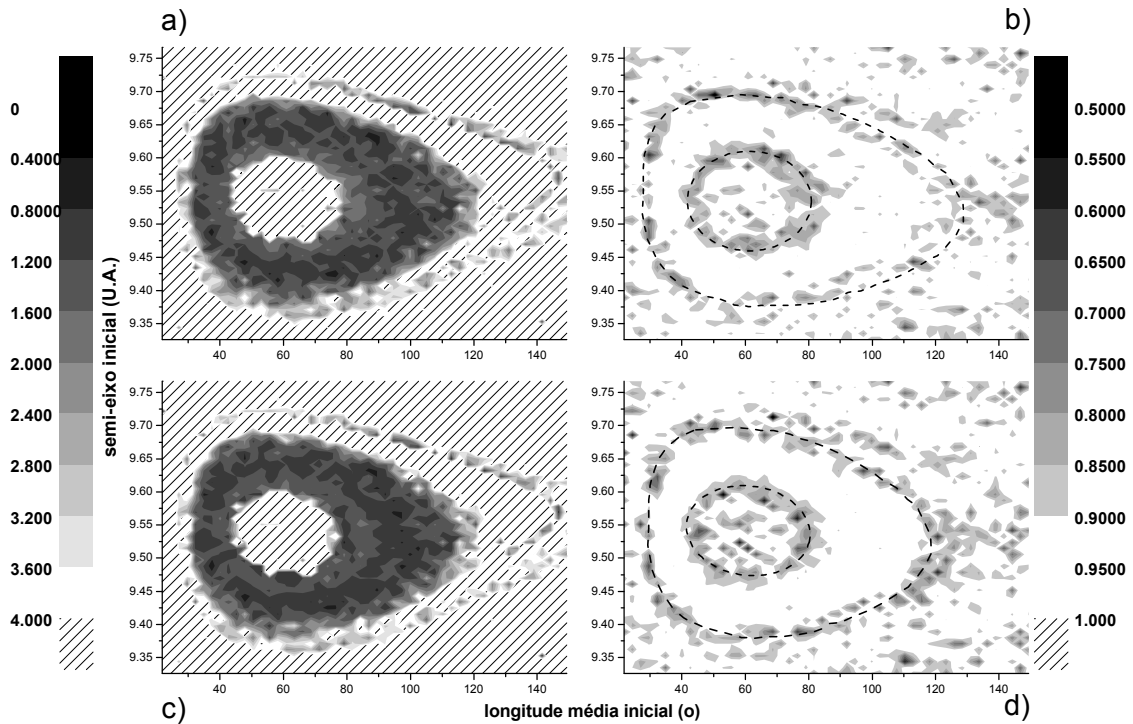


FIGURA 3.6 Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno na presença de todos os planetas, com exceção de Mercúrio e Plutão. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

3.2.3 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano

As Figuras 3.7 (a) e (c) representam os mapas de expoente H obtidos para difusão em semi-eixo maior e excentricidade e as Figuras 3.7 (b) e (d) correspondem aos mapas dos coeficientes de correlação para o planeta Urano. Novamente pode ser observada uma região central escura em torno do “ponto instantâneo L_4 ” correspondendo às condições onde os valores do desvio padrão para os pontos superiores da série temporal do desvio padrão não ultrapassam 10^{-12} , sendo que esta região apresenta um tamanho de 0,20 UA em semi-eixo maior inicial e 40° em longitude média inicial. Em volta desta região escura existe uma outra região que varia entre tons claros e mais escuros, representando outra difusão anômala mais intensa para as partículas teste. Nas Figuras 3.7 (b) e (d) podemos observar as linhas tracejadas correspondendo às possíveis separatrizes, sendo mais nítidas na Figura 3.7 (b). Não foi

observada em nossas simulações uma mudança no tipo de órbita (girino ou ferradura) das partículas teste que inicialmente encontra-se com condições iniciais dentro ou com condições iniciais fora da possível borda.

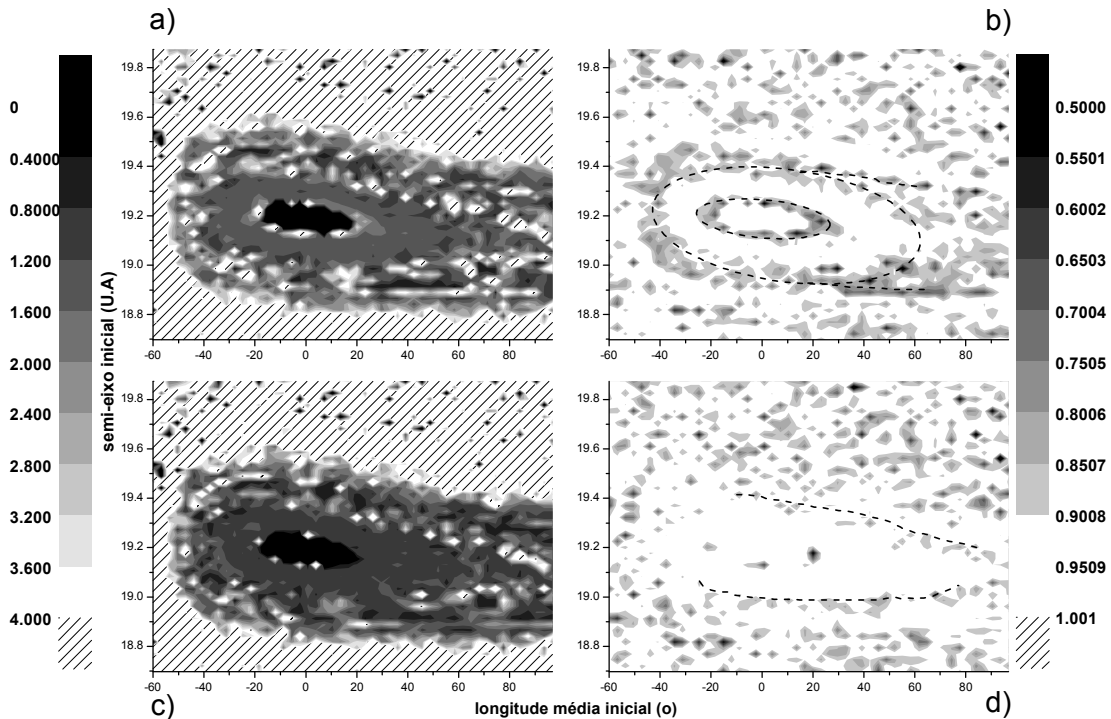


FIGURA 3.7 Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

O resultado obtido através do cálculo do expoente H efetivo para o “ponto instantâneo L_4 ” de Urano apresenta aspecto qualitativo compatível com o resultado obtido pelo método utilizado para a obtenção da Figura 3.1 (c). Porém, a região de mais “baixa difusão” possui um tamanho em semi-eixo maior inicial e em longitude média inicial menor que o resultado da região de estabilidade obtida por Holman e Wisdom (1993). A região estável de Holman e Wisdom (1993) corresponde a nossa região com $H < 2,0$.

3.2.3 Região do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno

As Figuras 3.8 (a) e (c) representam os mapas de expoente H para difusão em semi-eixo maior e excentricidade e as Figuras 3.8 (b) e (d) correspondem aos mapas dos coeficientes de correlação para o planeta Netuno. Novamente podemos ver que no

centro da ressonância 1:1 com Netuno temos uma região escura com $\sigma < 10^{-12}$ para todo o intervalo de integração. Este resultado é muito semelhante ao resultado obtido para Urano, com uma diferença nítida apenas entre os coeficientes de correlação, Figuras 3.8 (b) e (d).

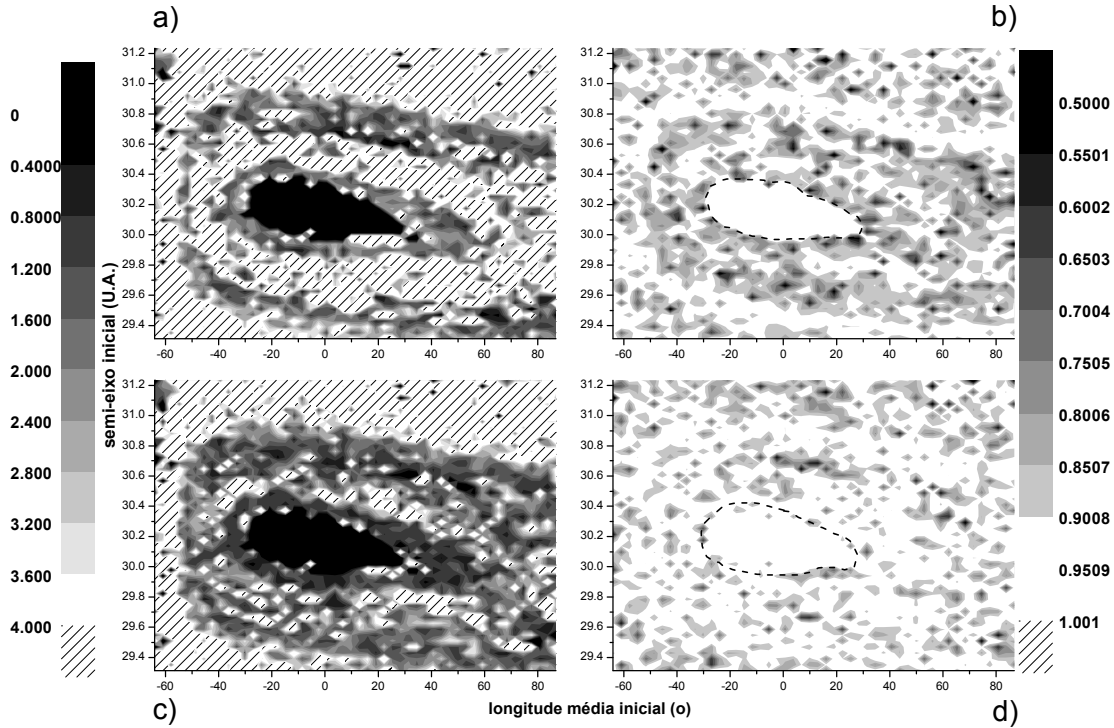


FIGURA 3.8 Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

Podemos observar que apenas a região mais central possui, de modo mais uniforme, baixos valores do expoente H , sendo toda esta região circundada por uma possível borda representada pelas linhas tracejadas nas Figuras 3.8 (b) e (d). Esta região possui um tamanho de 0,50 UA em semi-eixo maior inicial e 65° em longitude média inicial. Nas Figuras 3.8 (b) e (d) podemos visualizar as linhas tracejadas representando a localização de possíveis bordas. Nas Figuras 3.8 (a) e (c) esta possível borda pode ser visualizada através da transição da região de menores valores do expoente H efetivo para a região de maiores valores do expoente H , sendo mais bem definida para o mapa de difusão em semi-eixo maior. Estes resultados são qualitativamente semelhantes à Figura 3.1 (d), possuindo, portanto um tamanho máximo em semi-eixo maior inicial um pouco maior e em longitude média inicial um pouco menor que os resultados obtidos por Holman e Wisdom (1993).

3.3 Comparações entre os resultados obtidos através do cálculo do expoente H efetivo e do cálculo do expoente de Lyapunov

Nesvorný e Dones (2002) computaram o número máximo característico de Lyapunov (LCE) para partículas teste distribuídas ao redor do “ponto instantâneo L_4 ” dos quatro maiores planetas do Sistema Solar (Figura 3.9) representando seus resultados em mapas de LCE máximo no espaço semi-eixo maior versus excentricidade. O cálculo do LCE máximo foi feito a partir da integração da equação variacional para cada partícula teste, utilizando um tempo computacional muito elevado, e sendo processado em sistemas computacionais de alta performance. Em nosso trabalho, e visando uma comparação dos resultados de Nesvorný e Dones (2002) com o método do cálculo do expoente H efetivo, nós fizemos integrações de ensembles de partículas teste em torno do “ponto instantâneo L_4 ” dos quatro maiores planetas utilizando condições iniciais semelhantes às usadas por Nesvorný e Dones (2002) (inclusive mudando a representação dos resultados para o espaço semi-eixo maior versus excentricidade), sendo o tempo máximo de integração adotado correspondendo a 238000 anos.

Figura 3.10 mostra o nosso resultado para mapa do expoente H encontrado para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter. O eixo horizontal corresponde ao valor do semi-eixo maior inicial e o eixo vertical corresponde à excentricidade inicial. A Figura 3.9 (a) de Nesvorný e Dones (2002) é o resultado apresentado para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter. Esta figura mostra uma região onde o expoente máximo de Lyapunov assume os menores valores na região ao redor de 5,2 UA com valores da excentricidade entre 0,00 a 0,28. Como é usualmente considerado, uma maior estabilidade das partículas teste está associada aos menores valores do LCE máximo. A largura máxima da região de maior estabilidade nesta figura vai de 5,0 UA a 5,4 UA. A Figura 3.10 (a) e (c) mostra a mesma região da Figura 3.9 (a), porém obtida através do cálculo do expoente H efetivo para difusão em semi-eixo maior e em excentricidade. Podemos observar que os gráficos são qualitativamente muito parecidos. As regiões de baixa difusão também estão centradas em 5,2 UA e com intervalo em semi-eixo maior indo de 5,0 UA a 5,4 UA e intervalo na excentricidade indo de 0,00 a 0,28.

As Figuras 3.10 (b) e (d) representam, como mostrado no último capítulo, o coeficiente de correlação respectivo a cada ensemble. A região em branco representa a melhor correlação obtida pelo ajuste linear através dos pontos superiores da série temporal do desvio padrão.

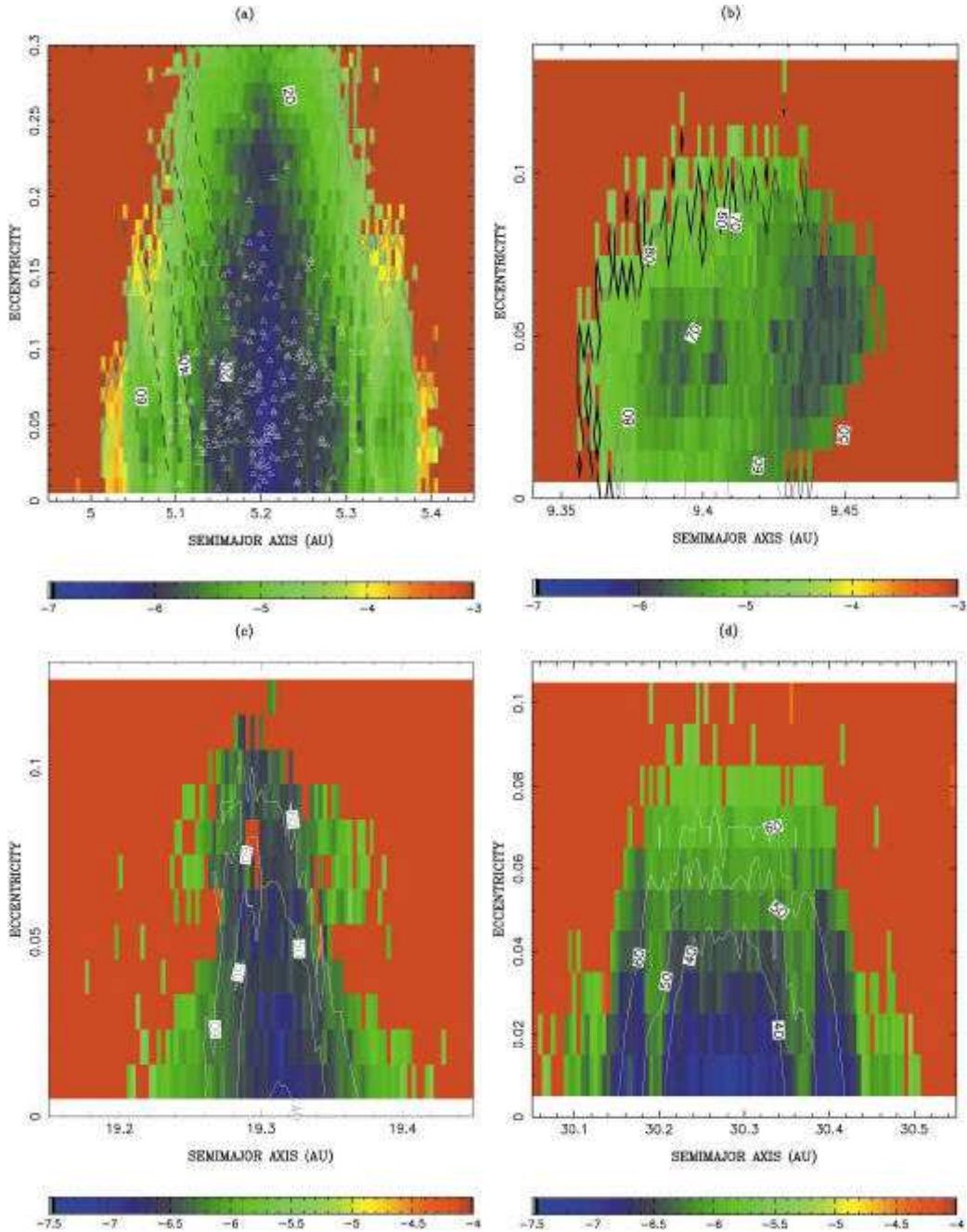


FIGURA 3.9: Mapas de LCE máximo obtidos por Nesvorný e Dones (2002) para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter (a), Saturno (b), Urano (c) e Netuno (d). Os menores valores de LCE representam órbitas de partículas teste menos caóticas.

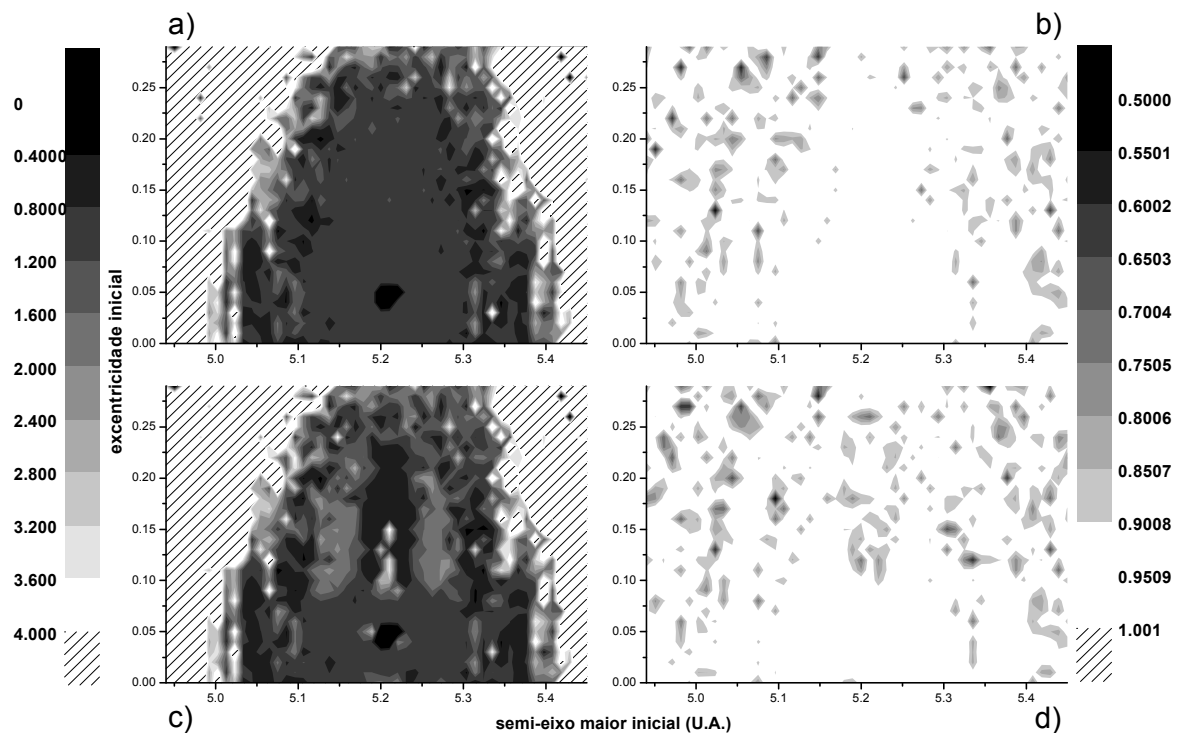


FIGURA 3.10: Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Júpiter no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

As Figuras 3.11 (a) e (c) apresentam os mapas do expoente H para difusão em semi-eixo maior e excentricidade para o planeta Saturno e as Figuras 3.11 (b) e (d) correspondem aos mapas dos coeficientes de correlação no espaço semi-eixo maior versus excentricidade. No nosso trabalho a região de difusão mais lenta está centrada em 9,40 UA em semi-eixo maior inicial, coincidindo com o resultado obtido por Nesvorný e Dones (2002) (Figura 3.9 (b)). A região onde o expoente H assume os menores valores está distribuída entre 9,32 e 9,44 UA em semi-eixo maior e entre 0,00 e 0,14 em excentricidade. Podemos observar também que no trabalho de Nesvorný e Dones (2002), Figura 3.9 (b), existe uma região próxima a 9,42 UA mais escura que também é observada em nosso resultado, Figura 3.11 (c). As figuras obtidas através do cálculo do expoente H efetivo para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno mostram que a área de baixa difusão é maior que a região de órbitas “menos caóticas” obtida por Nesvorný e Dones (2002) para a mesma região estudada em torno do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno. Este fato provavelmente refere-se à diferença entre os

métodos adotados (o LCE mede o “grau de caoticidade” de uma órbita enquanto que o expoente H mede a intensidade do processo difusivo).

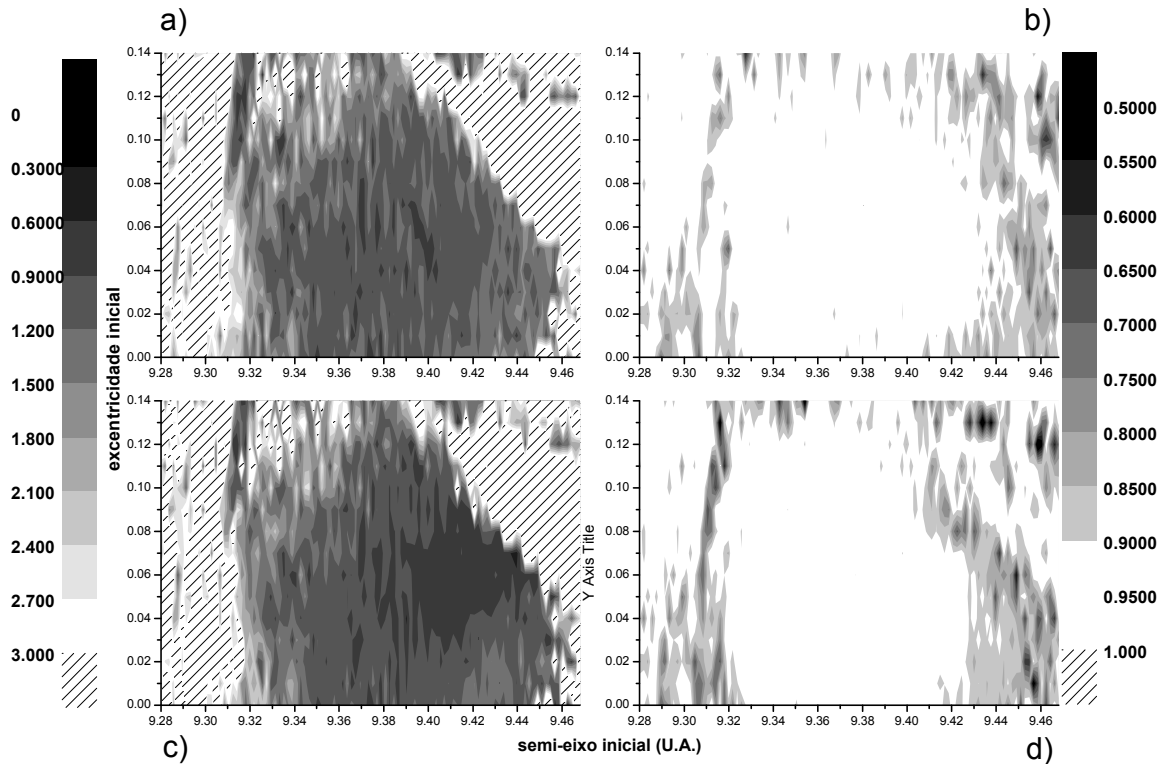


FIGURA 3.11: Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Saturno no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

Para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano, Figura 3.9 (c), Nesvorný e Dones (2002) obtiveram uma região de baixos valores para o LCE máximo entre 19,26 UA a 19,36 UA em semi-eixo maior inicial e entre 0,00 a 0,12 em excentricidade inicial. Esta região está centrada em 19,30 UA e possui um “pico” que não é simétrico em relação a um eixo vertical, sendo inclinado para a esquerda da figura. As nossas Figuras 3.12 (a), (b), (c) e (d) representam os resultados obtidos para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano utilizando o cálculo do expoente H efetivo, sendo (a) e (c) para a difusão no semi-eixo maior e na excentricidade, respectivamente, e (b) e (d) os respectivos mapas dos coeficientes de correlação. Podemos observar que a posição central da região escura na Figura 3.12 está deslocada mais para a esquerda em relação ao valor médio do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano (o valor do semi-eixo maior do planeta, que no caso de Urano é 19,29 UA). Na Figura 3.12 a região de baixa difusão está centrada em 19,25 UA e possui uma extensão em semi-eixo maior que vai de 19,

225 UA e 19,275 UA, sendo assim um pouco menor que o valor da região de baixa caoticidade obtida por Nesvorný e Dones. Apesar disto, nos dois trabalhos o tamanho em excentricidade da região de maior estabilidade é o mesmo e o deslocamento da posição central, em semi-eixo maior, para a esquerda também é observado. Porém o nosso resultado é mais próximo do valor do semi-eixo de Urano que o resultado obtido por Nesvorný e Dones (2002). Os gráficos de correlação apresentam um bom ajuste dentro e fora da região de maior estabilidade. Entretanto, podemos ver representado por uma linha tracejada o que consideramos como sendo uma possível borda.

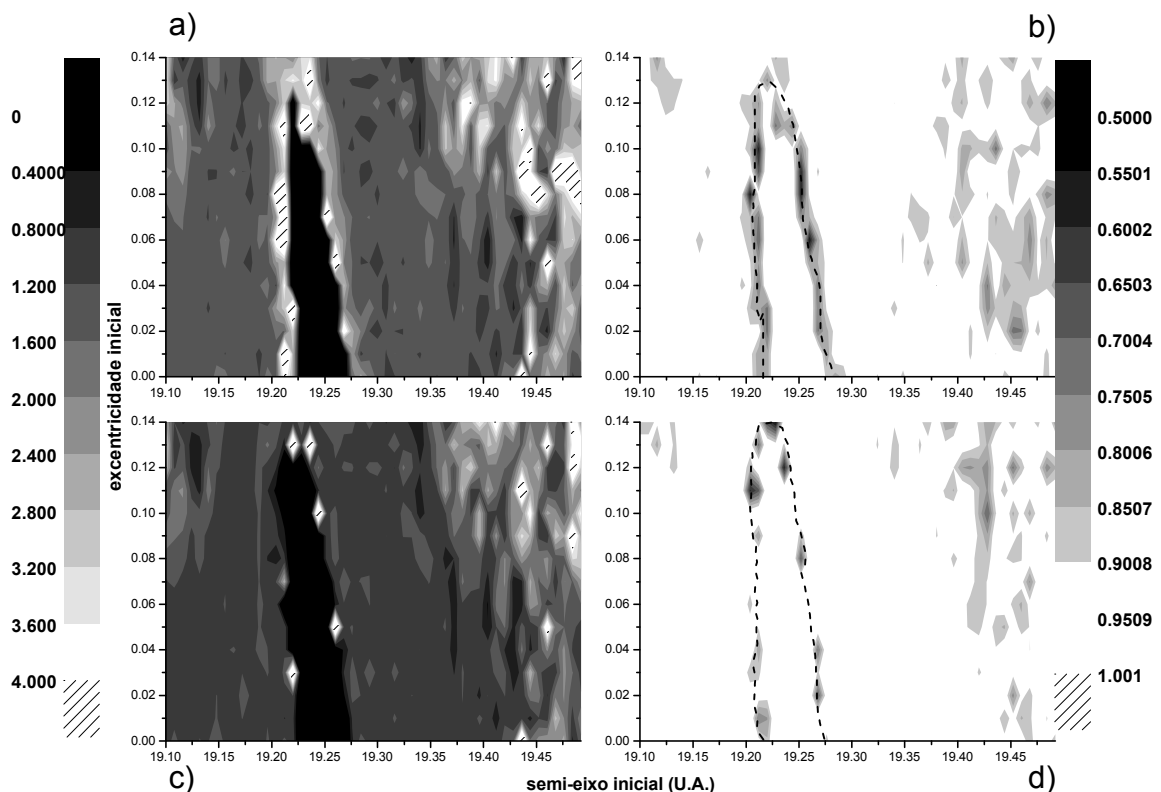


FIGURA 3.12: Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Urano no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

O resultado para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno está apresentado nas Figuras 3.13 (a), (b), (c) e (d). As Figuras (a) e (c) representam os mapas para o expoente H para difusão em semi-eixo maior e em excentricidade, respectivamente. Na Figura 3.9 (d) (resultado obtido por Nesvorný e Dones (2002) para a região do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno) a região de órbitas menos caóticas está centrada em 30.3 UA e possui uma extensão máxima em semi-eixo maior inicial que vai de 30.14 a 30.44

UA e uma extensão em excentricidade que vai de 0,00 a 0,06. Os nossos resultados obtidos através do cálculo do expoente H efetivo estão deslocados para a esquerda, em relação à figura 3.9 (d) (o resultado esperado seria centrado no valor do semi-eixo maior do planeta, sendo neste caso próximo a 30,27 UA). Nos mapas de H as regiões de baixa difusão estão centradas em 30,15 UA e possuem uma extensão que vai de 29,80 a 30,35 UA em semi-eixo maior inicial, aproximadamente, e uma extensão em excentricidade que vai de 0,0 a 0,14. Para o “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno, o centro da região menos caótica calculada por Nesvorný e Dones (2002) é mais distante do valor do semi-eixo maior de Netuno que o centro da região de baixa difusão para o mapa do expoente H calculado por nós.

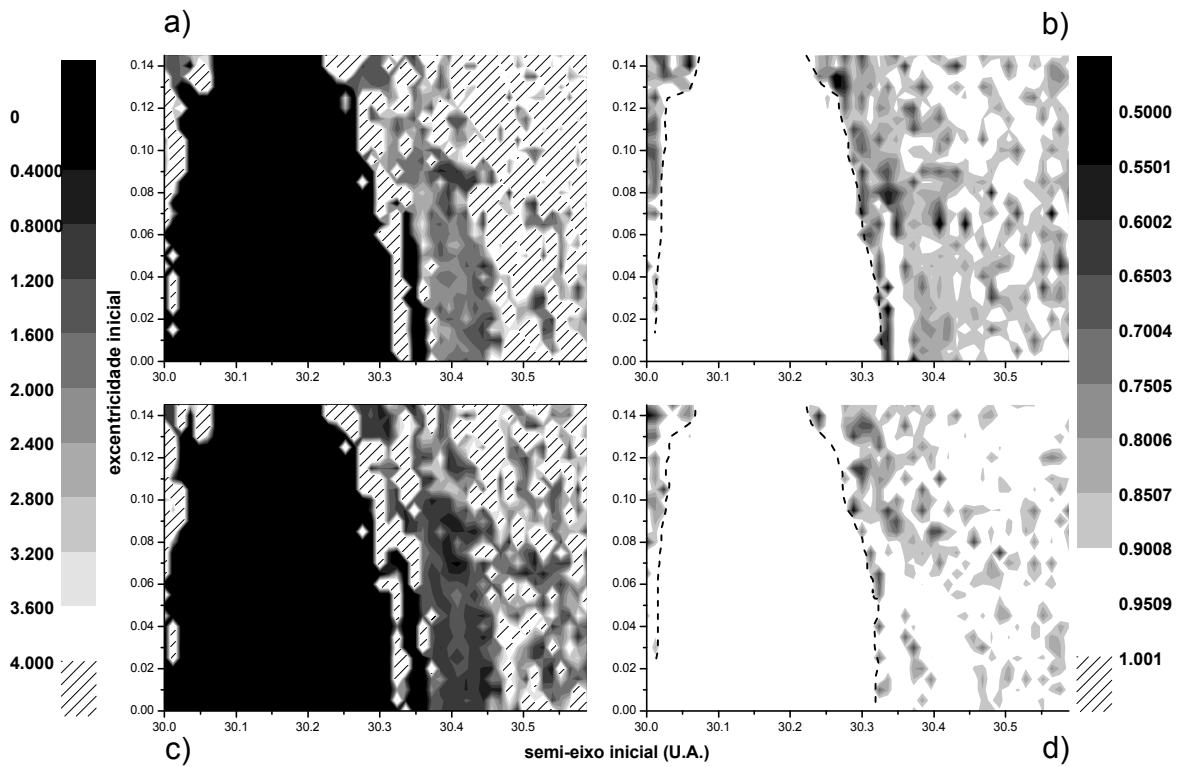


FIGURA 3.13: Região de “baixa difusão” do “ponto instantâneo L_4 ” de Netuno no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial. Expoente H efetivo para difusão no semi-eixo (a), coeficiente de correlação R para difusão no semi-eixo (b), expoente H efetivo para difusão na excentricidade (c), coeficiente de correlação R para difusão na excentricidade (d).

Os gráficos de correlação, Figuras 3.13 (b) e (d) apresentam uma boa correlação dentro da região de baixa difusão, pois esta região é mais bem representada por uma lei de potência, como mostrado por Cordeiro e Mendes (2005). Nós lembramos aqui que segundo Cordeiro e Mendes (2005) esta é uma característica das regiões de ressonância.

Também podemos observar nestes gráficos uma linha tracejada representando uma possível borda.

Capítulo 4

Conclusão

O presente trabalho apresenta uma aplicação dos mapas de expoente H desenvolvido por Cordeiro e Mendes (2005) para a região do “ponto lagrangeano L_4 ” dos quatro maiores planetas do Sistema Solar. As equações do movimento do problema de n -corpos foram integradas para diferentes intervalos de tempo e os nossos resultados foram comparados com os de Holman e Wisdom (1993) para tempo de ocorrência de encontros próximos, e com os resultados de Nesvorný e Dones (2002) para valores de máximo LCE. Mostramos que os resultados encontrados através do cálculo do expoente H se mostram equivalentes aos resultados encontrados para o cálculo do tempo de ocorrência de encontros próximos. De fato, em nossos resultados a região onde os processos difusivos das partículas teste são mais lentos correspondem aos resultados de Holman e Wisdom (1993) para a região onde as partículas teste não sofrem encontros próximos para um tempo máximo de 20 milhões de anos sendo que em nosso trabalho as regiões de estabilidade são um pouco menores. Esta diferença em tamanho das regiões de estabilidade provavelmente é devida a diferenças no modelo utilizado por nós, e por Holman e Wisdom (1993), sendo que estes últimos consideram as massas dos planetas internos somadas ao Sol. Por sua vez, nós consideramos os efeitos perturbadores do potencial dos planetas internos sobre as partículas teste. Identificamos também possíveis regiões que, de acordo com Cordeiro e Mendes (2005), podem representar bordas. Porém, não identificamos qual é a diferença dinâmica das órbitas das partículas teste que possuem condições iniciais nas diferentes regiões.

Constatamos que ao se modificar, para o planeta Júpiter, o valor do seu semi-eixo maior de 5,20229 UA para outros valores de semi-eixo maior, distanciando assim da condição da quase ressonância 5:2 entre as partículas e Saturno com Júpiter, não se observa a região de ocorrência de encontros próximos ao redor do “ponto instantâneo

L_4 ” de Saturno, corroborando, desta maneira, a hipótese da importância desta ressonância de movimento médio na formação desta região de alta instabilidade orbital.

Nossos resultados também mostraram, para o cálculo do expoente H no espaço semi-eixo maior inicial versus excentricidade inicial das partículas teste, uma boa concordância com os resultados encontrados por Nesvorný e Dones (2002) para o cálculo do máximo LCE nas regiões vizinhas aos “pontos instantâneo L_4 ” dos quatro maiores planetas do Sistema Solar. Para os planetas Júpiter e Saturno, a concordância entre os resultados é muito boa de tal forma que em nossas figuras os tamanhos das regiões de estabilidade para ambos os planetas foram praticamente os mesmos daqueles obtidos por Nesvorný e Dones (2002). Para a região do “ponto instantâneo L_4 ” do planeta Urano, obtivemos uma região para a “difusão lenta” que na figura se apresenta como um “pico” que não é simétrico em relação a um eixo vertical, e não possui seu centro com o mesmo valor de semi-eixo maior do planeta Urano. Este resultado também foi obtido por Nesvorný e Dones (2002) para as regiões menos caóticas. Porém, o resultado que apresentamos neste trabalho para a região de mais baixa difusibilidade está mais próximo do valor do semi-eixo maior de Urano que o resultado obtido por Nesvorný e Dones (2002) para as regiões de órbitas menos caóticas. Para a região do “ponto instantâneo L_4 ” do planeta Netuno, a região de baixa difusão em nosso resultado possui um tamanho maior que o resultado obtido por Nesvorný e Dones (2002) para a região de órbitas menos caóticas. Em ambos os trabalhos a região estável é simétrica em relação ao semi-eixo maior, porém, deslocada quando comparado com o valor do semi-eixo maior de Netuno. Novamente em nosso trabalho este deslocamento é menor que aquele observado no trabalho de Nesvorný e Dones.

Desta forma, mostramos que o método de mapeamento através do cálculo do expoente H para o estudo da estabilidade da região dos pontos L_4 dos planetas Jovianos apresenta resultados qualitativos semelhantes aos métodos de cálculo do tempo máximo de ocorrência de encontros próximos e do cálculo do máximo LCE. Mas o cálculo do expoente H possui a vantagem de não exigir um tempo de integração elevado podendo ser, assim, uma importante ferramenta na investigação dos fenômenos estudados em Dinâmica Orbital. É importante destacar que o método de mapeamento através do cálculo do expoente H nos mostra as regiões onde os processos difusivos são mais lentos ou mais rápidos. Portanto este método possui um significado físico diferente dos métodos utilizados por Holman e Wisdom (1993) e por Nesvorný e Dones (2002) apesar dos resultados semelhantes encontrados.

Apêndice 1

Os elementos orbitais

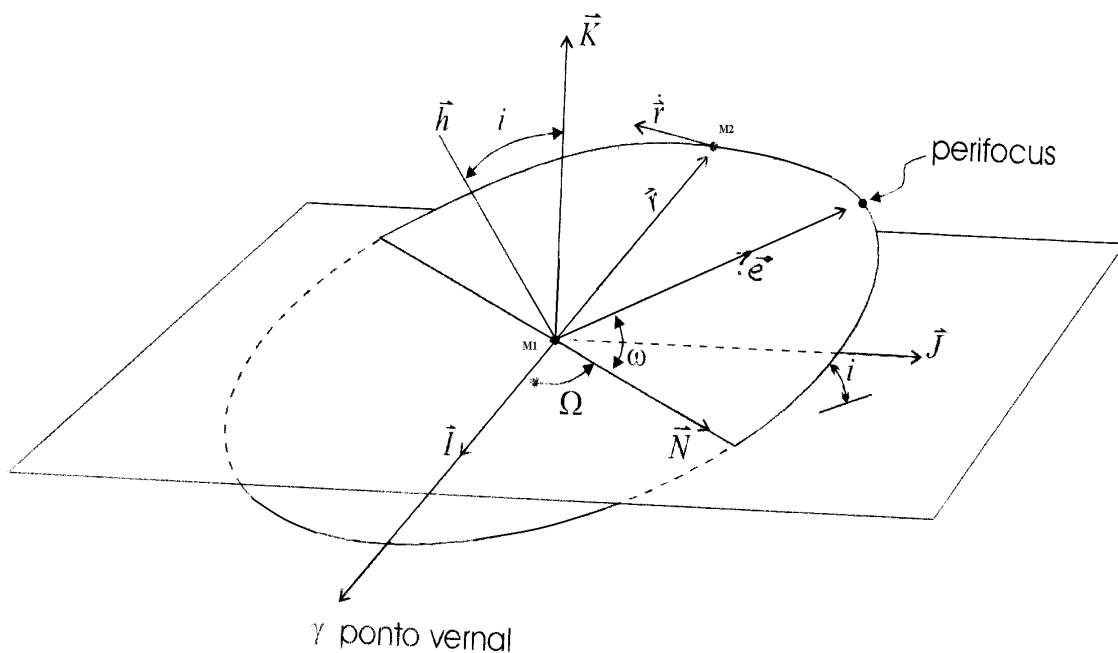


FIGURA 3.14: Plano orbital e plano de referência da órbita de um corpo. Nesta figura estão representados os elementos orbitais.

Conhecendo-se a posição e a velocidade de um corpo em órbita de outro, podemos calcular os chamados elementos orbitais deste corpo, ou conhecendo-se os elementos orbitais, podemos encontrar a posição e a velocidade deste corpo. Os elementos orbitais podem ser vistos na figura 3.14. Eles são:

- 1- O semi-eixo maior, representado pela letra “a”, é o parâmetro orbital associado ao tamanho da órbita e corresponde ao raio médio orbital num problema de dois corpos.

- 2- A excentricidade, representa da pela letra “ e ”, está associada a forma da órbita. Caso $e=0$, então a órbita será uma circunferência, se $0 < e < 1$ então a órbita será uma elipse, se $e=1$ então a órbita será uma parábola e se $e > 1$ a órbita será uma hipérbole.
- 3- A inclinação do plano da órbita em relação ao plano de referência, representado pela letra “ i ”.
- 4- A longitude do nodo ascendente, representado pela letra Ω . É o ângulo no plano de referência entre o eixo que aponta na direção do ponto vernal (direção de referência) e a linha de intersecção entre o plano orbital e o plano fundamental, considerando o sentido quando a órbita cruza o plano fundamental do sul para o norte, e é medido no sentido anti-horário quando vista do norte.
- 5- O argumento do perifocus, representado pela letra ω . É o ângulo no plano orbital entre a linha do nodo ascendente até o perifocus. É medido na direção do movimento orbital (para $i=0$ ou $e=0$ ω é indefinido).
- 6- Longitude do perifocus, representado pela letra ϖ . É a soma da longitude do nodo ascendente com o argumento do perifocus.
- 7- Longitude média, representada pela letra λ . É a soma da longitude do perifocus com o parâmetro conhecido como anomalia média M (relata a posição do corpo na órbita para o tempo transcorrido via equação de Kepler).

Apêndice 2

O expoente de Lyapunov

Seja um sistema dinâmico descrito por $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, de tal forma que:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Seja \vec{x}^* uma solução do sistema dinâmico acima e seja \vec{x} uma órbita vizinha de \vec{x}^* descrita por $\vec{x} = \vec{x}^* + \vec{\varepsilon}$, sendo que:

$$|\varepsilon_j| \ll 1 \quad \text{e} \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \text{sendo que} \quad |\varepsilon_j| \ll 1 \quad \forall \quad j = 1, \dots, n.$$

Portanto:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (\text{equação 1})$$

$$\dot{\vec{x}}^* = \vec{f}(\vec{x}^*) \quad (\text{equação 2}).$$

Da equação 1, temos que $\dot{\vec{x}}_1 = f_1(\vec{x})$ (equação 3) e da equação 2, temos que $\dot{\vec{x}}_1^* = f_1(\vec{x}^*)$ (equação 4).

Expandindo a equação 3 (em uma série de Taylor) em torno de \vec{x}^* temos:

$$\dot{\vec{x}}_1 = \dot{\vec{x}}_1^* + \delta \dot{\vec{x}}_1 = f_1(\vec{x}^*) + (x_1 - x_1^*) \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}^*} + K + (x_n - x_n^*) \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}^*} + O(\varepsilon_1^2, K, \varepsilon_n^2), \quad \text{para uma}$$

aproximação em primeira ordem. Assim:

$$\delta \dot{\vec{x}}_1 \approx \varepsilon_1 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}^*} + K + \varepsilon_n \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}^*} \Rightarrow$$

$$\delta_j \approx \varepsilon_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \Big|_{x^*} + K + \varepsilon_n \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \Big|_{x^*} \Rightarrow$$

$$\delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x^*} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{x^*} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_{x^*} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_{x^*} \end{pmatrix} \times \varepsilon^p \quad (\text{Equação variacional})$$

Assim, para $t \rightarrow \infty$ pode-se considerar que $|\varepsilon^p(t)| = |\varepsilon_0^p| \times e^{\lambda t}$, onde $\lambda = \frac{1}{t} \times \ln \left| \frac{\varepsilon^p(t)}{\varepsilon_0^p} \right|$ com

$\lambda > 0$, sendo λ conhecido como expoente de Lyapunov (T. Pankew, 1988).

Apêndice 3

Órbitas girino e ferradura

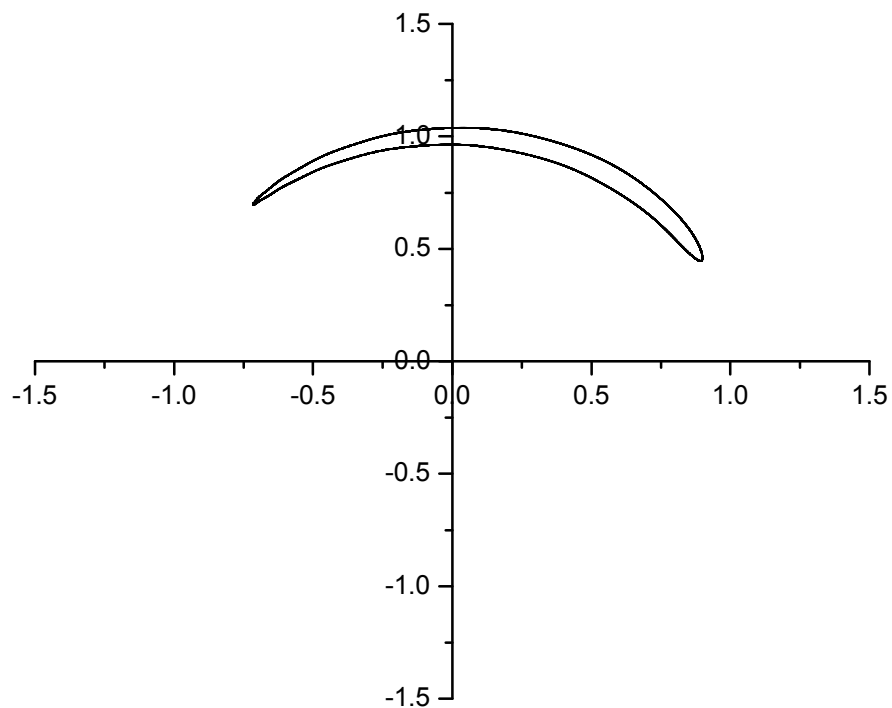


FIGURA A3_1: Órbita girino de uma partícula teste na região do ponto de equilíbrio estável L_4 do planeta Júpiter.

Na figura A3_1 temos uma órbita do tipo girino de uma partícula teste nas proximidades do ponto de equilíbrio estável L_4 do planeta Júpiter para o sistema de três corpos Sol-Júpiter-partícula teste. O planeta Júpiter está em uma órbita circular. Podemos observar que a partícula teste não cruza o eixo x, permanecendo em seu movimento de libração em torno do ponto L_4 . O tempo de integração utilizado foi de aproximadamente 25000 anos.

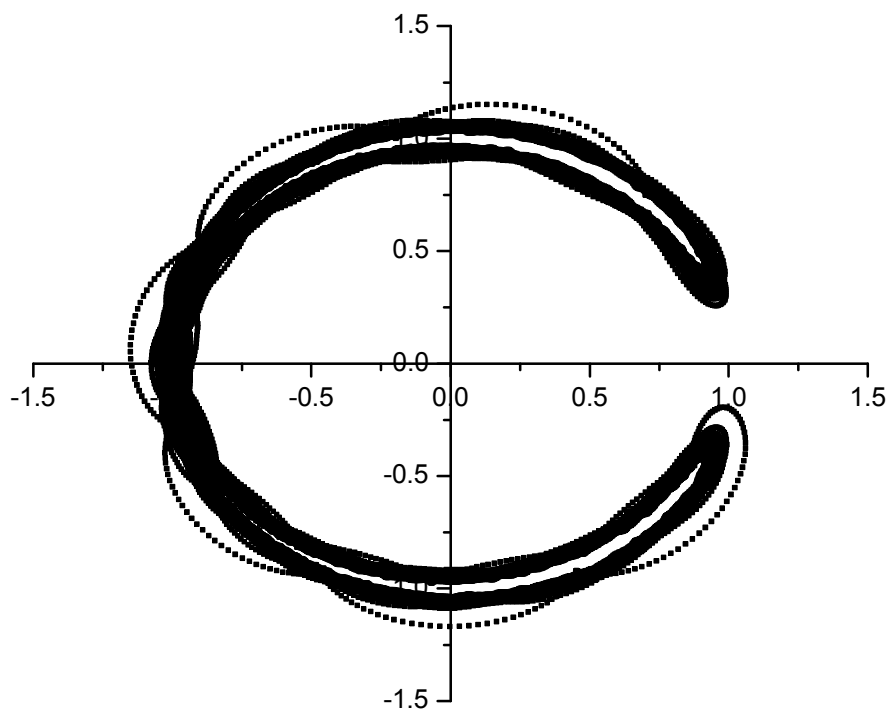


FIGURA A3_2: Órbita ferradura de uma partícula teste na região do ponto de equilíbrio estável L_4 do planeta Júpiter.

Na figura A3_2 temos uma órbita do tipo ferradura de uma partícula teste nas proximidades do ponto de equilíbrio estável L_4 do planeta Júpiter para o sistema de três corpos Sol-Júpiter-partícula teste. O planeta Júpiter está em uma órbita circular. Podemos observar que a partícula teste não permanece em um movimento exclusivamente em torno do ponto L_4 , mas cruza o eixo x passando pelo ponto L_3 , contorna o ponto L_5 e retorna para o ponto L_4 . O tempo de integração utilizado foi de aproximadamente 25000 anos.

Referências Bibliográficas

- [1] Cordeiro, R. R. & Souza, L. A. Mendes de, 2005. Anomalous Diffusion in the First-Order Jovian Resonance. *Astronomy & Astrophysics*.
- [2] Cordeiro, R. R., R. S. Gomes e R. Vieira Martins 1997. A Mapping for Nonconservative System. *Celestial Mechanics*. **65**,407 – 419.
- [3] Cordeiro, R. R, R.Vieira Martins e E. D. Leonel 1999. Complexity of the Capture Phenomena in the Conservative and Dissipative Three-Body Problem. *Astron. J.* **117**, 1634 – 1642.
- [4] Danby, J. M. A. (1988). Fundamental of Celestial Mechanics. *Willman-Bell*.
- [5] de la Barre, C. M., W. M. Kaula e F. Varadi 1996. A Study of the Orbits Near Saturn's Triangular Lagrangian Points. *Icarus* **121**, 88-113.
- [6] Érdi, B. 1988. Long Periodic Pertubations of Trojan Asteroids. *Celestial Mechanics*. **43**, 303 – 308.
- [7] Feder, J. 1988. Fractal. *Plenum Press, New york*. **163**.
- [8] Holman, M. J., e J. Wisdom 1993. Dynamical Stability in The Outer Solar Sistem and The Delivery of Short Period Comets. *Astron. J.* **105** (5), 1987 - 1999.
- [9] Inannen, K. A., S. Mikkola 1989. Uus, Neptune and the Formation of Pluto. *Bulletin of the American Astronomical Society*. **21**, p.1007.

- [10] Mandelbrot, B. B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. *W. H. Freeman, New York*. **247**.
- [11] Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. 1968. *SIAM Rev.* **10**, 422.
- [12] Marzari, F. & H. Scholl, 2000. The Role Of Secular Resonances in the History of Trojans. *Icarus*. **146**, 232 – 239.
- [13] Milani, A. 1993. The Trojan Asteroid Belt: Proper Elements, Stability, Chaos and Families. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **57**, 59 – 94.
- [14] Murray, C. D., e S. F. Dermott 2000. *Dynamical of Solar System*. *Cambridge Uni. Press*.
- [15] Nesvorný, D. & L. Dones 2002. How Long-Lived Are the Hypothetical Trojan Populations of The Saturn, Uranus, and Neptune?. *Icarus*. **160**, 271 – 288.
- [16] Pankew, T 1988. Lyapunov Expoentes. *Berkeley Class Notes*.
- [17] Shlesinger, M. F., G. M. Zaslavsky & J. Klafter, 1993. Strange Kinetics. *Nature*. **363**, 31 – 37.
- [18] Tabachnik, S. A. & N. W. Evans, 2000. Asteroids in the Inner Solar System I – Existence. *MNRAS*. **000**, 000 – 000.
- [19] *The Astronomical Almanac 1996* – Kemeth Seidelmann, Govenment Printing Office.
- [20] Uhlenbeck, G. E. & L. S. Ornstein, 1930. On the Theory of the Brownian Motion. *Physical Review*. **36**, 823 – 841.
- [21] Wisdom, J., e M. Holman 1991. Symplectic Maps For The n-Body Problem. *Astron. J.* **102** (4), 1528-1538.

[22] Wisdom, J., e M. Holman 1992. Symplectic Maps For The n-Body Problem: Stability Analisis. *Astron. J.* **104** (4), 2022-2029.