

WELLINGTON LIMA DOS SANTOS

**Desenvolvimento de uma Metodologia para Representação Analítica de
Curvas Características de Bombas Hidráulicas, Visando sua Seleção,
seu Dimensionamento e a Simulação de sua Operação**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, para obtenção do título de "Doctor Scientiae".

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2001

WELLINGTON LIMA DOS SANTOS

**Desenvolvimento de uma Metodologia para Representação Analítica de
Curvas Características de Bombas Hidráulicas, Visando sua Seleção,
seu Dimensionamento e a Simulação de sua Operação**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa Pós-Graduação em Engenharia Agrícola, para obtenção do título de "Doctor Scientiae".

Aprovada: 22 de fevereiro de 2001.

Prof. Brauliro Gonçalves Leal

Prof. Demétrius David da Silva

Prof. Delly Oliveira Filho
(Conselheiro)

Prof. Heleno Nascimento Santos
(Conselheiro)

Prof. Márcio Mota Ramos
(Orientador)

AGRADECIMENTO

À Universidade Federal de Viçosa, por intermédio do Departamento de Engenharia Agrícola, pela formação profissional e pela oportunidade de realização deste curso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão da bolsa de estudo.

Ao professor Márcio Mota Ramos, pela orientação competente, pelo incentivo e pela amizade.

Aos professores Delly Oliveira Filho e Heleno Nascimento Santos, pela co-orientação neste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Agrícola, pelo tratamento e pela presteza.

BIOGRAFIA

Wellington Lima dos Santos, filho de Rubens Sortica dos Santos e de Florisa Lima dos Santos, nasceu em Miranda - MS, em 22 de outubro de 1968.

Em março de 1992, diplomou-se em Engenharia Agrícola, pela Universidade Federal de Viçosa e iniciou o Curso de Mestrado em Engenharia Agrícola, nesta instituição, concluindo-o em fevereiro de 1995.

ÍNDICE

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução Geral.....	1
Capítulo 1	
Obtenção de coordenadas de pontos sobre as curvas características	3
Capítulo 2	
Representação analítica das curvas características de bombas centrífugas.....	16
Capítulo 3	
Análise da operação de bombas em associações e em rede de condutos sob o aspecto analítico, para implementação computacional	38
Capítulo 4	
Seleção e dimensionamento do conjunto tubulação, motor elétrico e bomba pelo critério de custo mínimo	57
Conclusões Gerais	68

RESUMO

SANTOS, Wellington Lima, D. S. Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2001, **Desenvolvimento de uma Metodologia para Representação Analítica de Curvas Características de Bombas Hidráulicas, Visando sua Seleção, seu Dimensionamento e a Simulação de sua Operação.** Orientador: Márcio Mota Ramos. Conselheiros: Delly Oliveira Filho e Heleno Nascimento Santos.

Neste trabalho, foi desenvolvida e implementada em software uma metodologia para obter as coordenadas de pontos sobre cerca de 4500 curvas características de bombas centrífugas, a partir de suas imagens digitalizadas.

Foram determinados modelos de equações analíticas para representar, de forma precisa e generalizada, as curvas características de bombas centrífugas. As curvas de altura manométrica e de potência, em função, da vazão, foram representadas por polinômios com graus até sete. Cada curva de isorendimento foi representada por uma ou mais curvas Bézier cúbicas e a superfície de rendimento hidráulico foi modelada de forma precisa e irrestrita, utilizando-se o método de interpolação de Hardy.

O funcionamento de bombas associadas em série e em paralelo foi analisado sob o aspecto analítico e a determinação da curva da associação pode ser feita com os algoritmos propostos para cada caso. Para simular o ponto de trabalho de bombas operando em pequenas redes de condutos, desenvolveu-se um algoritmo baseado na solução de um sistema de equações não linear utilizando o método de Newton.

ABSTRACT

SANTOS, Wellington Lima, D. S. Universidade Federal de Viçosa, February 2001, **Development of a methodology for analytic representation of the characteristic curves for hydraulic pumps aiming at their selection, dimensioning and the operational simulation.** Adviser: Márcio Mota Ramos. Committee members: Delly Oliveira Filho and Heleno Nascimento Santos.

In this study, a generic methodology was developed and implemented in software in order to obtain the point coordinates upon approximately 4500 characteristic curves of centrifugal pumps from their images digitalized by scanner. A number of analytic equation models were determined to general and accurately represent the characteristic curves of the centrifugal pumps. The manometric height curves and the power curves, as a function of flow rate, were represented by polynomials with degrees up to seven. Each isoefficiency curve was represented by one or more Béziers cubic curves and the hydraulic efficiency surface was unrestricted and precisely modeled, by using the Hardy's interpolation method. The operation of pumps associated in series and parallel were analytically analyzed and the determination of the association curve might be made with the algorithms proposed for each case. To simulate the operation point of the pumps working in small conduct nets, an algorithm was developed based on solution of a non-linear equation system by using the Newton's method.

INTRODUÇÃO GERAL

As mudanças ocorridas mundialmente nesta transição de século, sobretudo na economia, como a abertura dos mercados, têm exigido esforços cada vez mais concentrados na busca de soluções modernas e criativas, que proporcionem aumento da eficiência nas várias etapas da produção. Esta tendência tem sido verificada em praticamente todos os setores produtivos e, em especial, na agricultura. Igualmente, têm-se observado preocupações crescentes com a degradação dos recursos naturais do planeta, especialmente dos recursos hídricos.

Dentre as técnicas utilizadas para promover o aumento da eficiência na agricultura destaca-se a irrigação, cujo sistema mais apropriado depende de fatores como a cultura a ser irrigada, o tipo de solo, as condições topográficas, o tipo de clima, dentre outros. Em geral, os sistemas de irrigação que se adaptam mais facilmente a este conjunto de fatores são os que utilizam água pressurizada por uma bomba hidráulica, comumente do tipo centrífuga, acionada normalmente por motores elétricos.

Especial atenção deve ser dada à seleção deste conjunto e à adequação do ponto de operação da bomba ao de projeto, a fim de que sejam evitados: 1) dimensionamentos incorretos que podem reduzir a vida útil dos equipamentos; 2) o consumo excessivo de energia elétrica, que é antagônico aos esforços para conservação de energia elétrica no Brasil; e 3) o desperdício de água, considerada um bem público (Lei Nº 9.433 de 8 de janeiro de 1997)

A adequação do ponto de operação da bomba ao de projeto deve ser feito com base nas curvas características, que retratam o funcionamento da bomba em termos da altura manométrica, do rendimento, da potência e do NPSH requerido, em função da vazão. Estas curvas são obtidas e fornecidas pelo fabricante da bomba, a partir de ensaios em laboratório e publicadas na forma de gráficos impressos em catálogos. Assim, para se obterem as grandezas relacionadas com o funcionamento de uma bomba, para uma vazão qualquer, é necessário extraí-las diretamente dos gráficos, o que representa procedimento trabalhoso, especialmente quando diversas situações de funcionamento forem simuladas.

O ideal seria que cada fabricante, com base nos dados obtidos em laboratórios de ensaios, ajustasse e disponibilizasse as equações matemáticas das curvas de cada modelo de bomba. Além de permitirem o dimensionamento hidráulico correto, estas equações poderiam ser utilizadas para simular a operação de associações de bombas e para a análise de custos, uma vez que o consumo de energia pode ser determinado em função da altura manométrica e do rendimento hidráulico reais calculados.

Feita esta constatação, surgem algumas questões: 1) caso os fabricantes de bombas não disponibilizem estas equações, como se sugere, é possível ajustá-las a partir das curvas dos catálogos, de uma forma não muito onerosa? 2) que modelos de equações matemáticas podem ser utilizados para representar estas curvas? 3) como obter os dados das curvas de modo ágil e confiável? e 4) que critérios de precisão devem ser utilizados?

Neste sentido, este trabalho pretendeu contribuir com respostas para as questões levantadas, apresentando os seguintes objetivos:

1. Desenvolver e implementar uma metodologia, disponibilizada na forma de um software, para a obtenção de coordenadas de pontos sobre as curvas características de bombas centrífugas.
2. Determinar os modelos de equações que podem ser utilizados na representação analítica das curvas características de bombas centrífugas.
3. Analisar o funcionamento de bombas centrífugas operando isoladamente, em associações e em rede de condutos, com um enfoque voltado para a implementação computacional.

CAPÍTULO 1

OBTENÇÃO DE COORDENADAS DE PONTOS SOBRE AS CURVAS CARACTERÍSTICAS

1. INTRODUÇÃO

A representação da relação entre duas variáveis ou grandezas pode ser apresentada com vantagens sob a forma de gráficos, onde este relacionamento é usualmente expresso por uma curva contínua, o que permite a observação de pontos de mínimos, de máximos, de inflexão, de assíntotas, entre outros detalhes (SANTOS e RAMOS, 1995).

Estas curvas podem ser traçadas manualmente, com auxílio de instrumentos simples, como se fazia há poucas décadas, traçadas por alguns aparelhos analógicos de registro contínuo ou ainda calculadas e impressas, ou plotadas, a partir de modelos matemáticos, empregando-se softwares e hardwares apropriados.

Na literatura, é usual somente se apresentarem as curvas, ou seja, os dados numéricos que a geraram não estão acessíveis, quer seja porque não foram publicados, quer seja porque simplesmente não existem, como é o caso das curvas geradas pelos aparelhos analógicos. Nestas circunstâncias, as técnicas mais utilizadas para a obtenção de coordenadas aproximadas de pontos sobre a curva são a leitura direta nas escalas gráficas e a digitalização por meio eletrônico.

Exceto quando o volume de dados for reduzido, a leitura direta é um procedimento contra-indicado, pois, além de trabalhoso e lento, pode ser pouco preciso, devido aos erros que podem ser cometidos durante a leitura e a digitação dos dados. A digitalização por meio eletrônico conduz a resultados mais precisos e de forma substancialmente mais rápida, sendo indicada para a obtenção de grandes quantidades de dados. Todavia, a especificidade dos equipamentos e dos softwares empregados faz com os seus preços sejam relativamente altos, o que coloca a técnica fora do alcance da maioria dos usuários.

SANTOS (1995) desenvolveu uma metodologia para obter dados de curvas características de bombas centrífugas que consiste em digitalizar as curvas e converter as coordenadas, ou os pixels, da imagem digital em coordenadas globais. A digitalização foi feita utilizando-se um scanner com resolução óptica de 400 pontos por polegada e a conversão de coordenadas com o auxílio de um software desenvolvido para esta finalidade. Esta metodologia permitiu obter dados isentos de erros grosseiros e de forma bem mais rápida do que o processo de leitura direta das coordenadas e digitação das mesmas. Durante a digitalização dos gráficos, era necessário que os seus eixos ficassem perfeitamente alinhados com as margens do scanner. Esse alinhamento, que podia ser observado na tela, nem sempre era conseguido logo na primeira digitalização, o que exigia a redigitalização até que se conseguisse o alinhamento correto.

A condição de eixos coordenados alinhados horizontal e verticalmente era exigida porque as coordenadas gráficas e globais eram relacionadas considerando-se apenas dois pontos diagonalmente opostos, de onde se conclui que as equações eram determinadas segundo um princípio meramente analítico. Notaram-se duas limitações desta metodologia: 1) a redigitalização da imagem até que o seu alinhamento fosse adequado, tornava o processo mais demorado; e 2) as equações de conversão de escalas não eram determinadas por regressão linear e, sendo assim, não havia uma distribuição estatística dos erros que decorriam de pequenas deformações do gráfico original, provocadas principalmente pela dilatação diferencial do papel e pelos processos de foto-reprodução.

Com base nas limitações observadas, o presente trabalho objetivou:

1. Desenvolver uma metodologia para obtenção de coordenadas globais de imagens digitais, na qual as equações de conversão de escalas sejam ajustadas estatisticamente para qualquer ângulo de inclinação da imagem.
2. Implementar a metodologia em um software de fácil acesso e utilização.

2. MATERIAL E MÉTODOS

O sistema de coordenadas das telas dos computadores é, em geral, é implementado no hardware como um sistema cartesiano bidimensional, cujo eixo das abcissas é orientado da esquerda para a direita e o das ordenadas de cima para baixo. Esse sistema é formado por uma matriz retangular de pixels e as coordenadas de cada pixel são expressas pelos números da coluna e da linha do mesmo, podendo assumir apenas valores inteiros.

A representação de um objeto real nesse sistema requer cálculos de projeção no plano e transformações de coordenadas por meio de translação, de rotação, de mudança de escala e de arredondamento (WARD, 1996).

Neste trabalho, foi feita a transformação inversa, isto é, a extração de coordenadas de um objeto, a partir de sua representação em forma de imagem digital exibida em tela de computador. Para dar suporte ao desenvolvimento das equações, elaborou-se o esquema apresentado na Figura 1, onde estão representados três sistemas de eixos ou de coordenadas, todos em escalas lineares: a) da tela x - y ; b) global x^* - y^* ; e c) virtual x' - y' , sendo que este último foi definido de modo que seja paralelo ao global e que tenha a mesma origem que o sistema da tela. Com isso, as coordenadas globais podem ser relacionadas com as virtuais por meio das duas equações lineares:

$$x^* = a_0 + a_1 x' \quad (1)$$

$$y^* = b_0 + b_1 y' \quad (2)$$

em que

x^*, y^* = abcissa e ordenada globais, em unidades quaisquer;

a_0, a_1 = coeficientes linear e angular da equação de uma reta, respectivamente, obtidos por meio de regressão;

b_0, b_1 = coeficientes linear e angular da equação de uma reta, respectivamente, obtidos por meio de regressão; e

x', y' = abcissa e ordenada virtuais, em pixels.

Conforme esquematizado na Figura 1, as coordenadas virtuais podem ser relacionadas com as da tela por meio das equações:

$$x' = OA + BC = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3)$$

$$y' = OD - EP = y \cos \theta - x \sin \theta \quad (4)$$

em que θ é o ângulo formado entre os eixos virtuais e os da tela, cujo valor é desconhecido, o que eleva o número de incógnitas para cinco (a_0, a_1, b_0, b_1 e θ). Para determinar as cinco incógnitas, utilizou-se o princípio básico das técnicas de regressão que é a minimização da soma dos quadrados dos resíduos, consagrado por sua simplicidade e consistência analíticas.

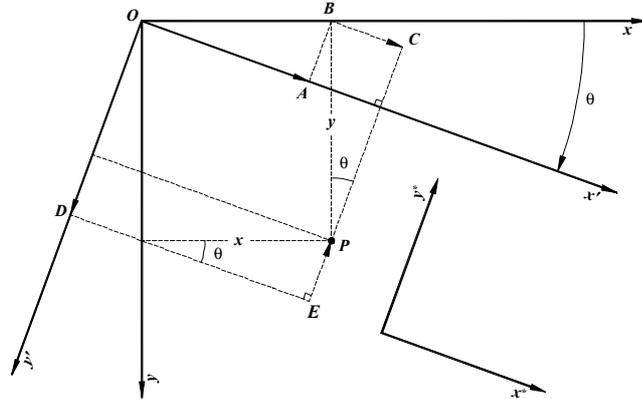


Figura 1 - Representação dos sistemas de coordenadas da tela ($x-y$), global (x^*-y^*) e virtual ($x'-y'$).

O procedimento consistiu em minimizar Z (soma dos quadrados dos resíduos), cuja equação é:

$$Z(a_0, a_1, b_0, b_1, \theta) = Z_1(a_0, a_1, \theta) + Z_2(b_0, b_1, \theta) = Z_1 + Z_2 \quad (4)$$

sendo que

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x'_i - x_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i \cos \theta + a_1 y_i \sin \theta - x_i^*)^2 \quad (5)$$

$$Z_2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 y'_i - y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 y_i \cos \theta - b_1 x_i \sin \theta - y_i^*)^2 \quad (6)$$

em que n é o número de pontos utilizados na definição de escala.

No ponto de mínimo de uma função de múltiplas variáveis, todas as primeiras derivadas parciais são nulas e todas as segundas derivadas parciais são positivas. Pela primeira regra, os valores das incógnitas, que minimizam a equação 4, são a solução do sistema de equações não linear:

$$\begin{cases} \partial Z / \partial a_0 = 0 \\ \partial Z / \partial a_1 = 0 \\ \partial Z / \partial b_0 = 0 \\ \partial Z / \partial b_1 = 0 \\ \partial Z / \partial \theta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

para o qual não existe uma solução direta. O método mais utilizado para resolver um sistema de equações não lineares de ordem k é o método iterativo de Newton, cuja fórmula de recorrência é dada por uma equação matricial. A cada iteração, resolve-se um sistema de equações lineares, cuja matriz (Jacobiana) é composta pelas derivadas parciais de todas as equações em relação a todas incógnitas. A montagem dessa matriz pode exigir o cálculo de até k^2 derivadas parciais, dependendo da presença das incógnitas em cada uma das equações.

No caso presente, a matriz Jacobiana (5x5) contém oito elementos nulos e 17 derivadas parciais, o suficiente para tornar o desenvolvimento analítico complexo. Em vez de utilizar esta abordagem, procedeu-se à solução apenas da equação $\partial Z / \partial \theta = 0$, para θ , segundo o algoritmo:

- i. Estima-se um valor inicial para θ , sendo que $\theta = 0^\circ$ é uma estimativa bastante razoável, uma vez que este valor costuma ser da ordem de uns poucos graus;
- ii. Com o valor de θ , determinam-se a_0 , a_1 , b_0 e b_1 que minimizam as parcelas Z_1 e Z_2 , o que equivale a resolver os dois sistemas:

$$\begin{cases} \partial Z_1 / \partial a_0 = 0 \\ \partial Z_1 / \partial a_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \partial Z_2 / \partial b_0 = 0 \\ \partial Z_2 / \partial b_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

cujas soluções são:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* \sum_{i=1}^n x_i'^2 - \sum_{i=1}^n x_i' x_i^* \sum_{i=1}^n x_i'}{n \sum_{i=1}^n x_i'^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i' \right)^2} \quad (10)$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x'_i x_i^* - \sum_{i=1}^n x'_i \sum_{i=1}^n x_i^*}{n \sum_{i=1}^n x_i'^2 - \left(\sum_{i=1}^n x'_i \right)^2} \quad (11)$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^* \sum_{i=1}^n y_i'^2 - \sum_{i=1}^n y_i' y_i^* \sum_{i=1}^n y_i'}{n \sum_{i=1}^n y_i'^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i' \right)^2} \quad (12)$$

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i' y_i^* - \sum_{i=1}^n y_i' \sum_{i=1}^n y_i^*}{n \sum_{i=1}^n y_i'^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i' \right)^2} \quad (13)$$

iii. Calcula-se, pelo método de Newton-Raphson, uma correção $\Delta\theta$ para θ :

$$\Delta\theta = \frac{\partial Z / \partial \theta}{\partial^2 Z / \partial \theta^2} \quad (14)$$

sendo que as derivadas parciais de primeira e segunda ordem são aproximadas pelas equações:

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} \cong \frac{Z(\theta + \delta\theta) - Z(\theta)}{\delta\theta} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \cong \frac{Z(\theta + 2\delta\theta) - 2Z(\theta + \delta\theta) + Z(\theta)}{\delta\theta^2} \quad (16)$$

$$\delta\theta = 10^{-4}$$

iv. Subtrai-se o valor da correção do valor de θ , ou seja, $\theta_{i+1} = \theta_i - \Delta\theta$;

v. Compara-se o valor absoluto da correção com o valor de uma tolerância preestabelecida. Se a correção for maior, retorna-se ao passo ii; caso contrário, o refinamento de θ termina. Se o valor de $\partial^2 Z / \partial \theta^2$, calculado na última iteração, for positivo, então os valores de θ , a_0 , a_1 , b_0 e b_1 minimizam a soma dos quadrados dos resíduos. Se $\partial^2 Z / \partial \theta^2$ for negativo, adiciona-se ou subtrai-se $\pi/2$ ao/do valor de θ e recalculam-se a_0 , a_1 , b_0 e b_1 (passo ii); este detalhe será discutido adiante.

Finalmente, com os valores de a_0 , a_1 , b_0 e b_1 e θ , as coordenadas globais podem ser relacionadas com as de tela, ou seja, com as coordenadas da imagem por meio das equações:

$$x^* = a_0 + a_1 (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (17)$$

$$y^* = b_0 + b_1 (y \cos \theta - x \sin \theta) \quad (18)$$

Na prática, a transformação de coordenadas de tela para coordenadas globais consiste na digitalização do objeto real (gráfico, mapa, etc.) impresso e na marcação de pontos de controle sobre a imagem digital, fornecendo-se as coordenadas globais de cada ponto. As coordenadas de tela de cada ponto são lidas diretamente quando o ponto é marcado, utilizando-se o mouse ou qualquer outro dispositivo de apontamento.

Objetivando exemplificar o uso da metodologia e discutir os resultados de uma forma mais clara, utilizaram-se dados gerados a partir de uma imagem digital fictícia, representando um gráfico hipotético plotado em uma tela com resolução 800x600 pixels², por meio das equações:

$$x_a = 5x^* + 200 \quad (19)$$

$$y_a = 450 - 10y^* \quad (20)$$

em que

x_a, y_a = abcissa e ordenada da tela;

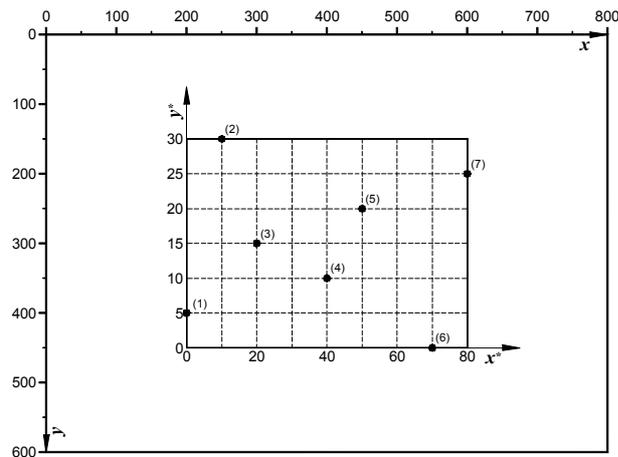
x^* = abcissa global, variando entre 0 e 80; e

y^* = ordenada global, variando entre 0 e 30.

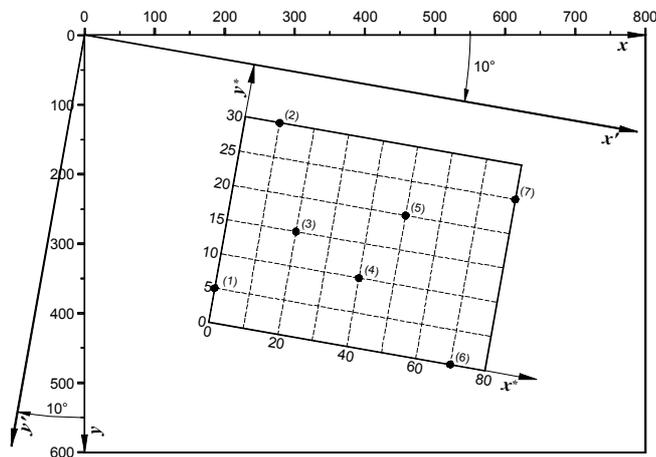
Com as equações 19 e 20, o gráfico seria apresentado na tela alinhado e centralizado horizontal e verticalmente (Figura 2a). Para simular a inclinação ou desalinhamento do gráfico (Figura 2b) rotacionou-se o mesmo de 10° , em relação ao centro da tela, por meio das equações:

$$x = 400 + (x_a - 400) \cos 10^\circ - (y_a - 300) \sin 10^\circ \quad (21)$$

$$y = 300 + (x_a - 400) \sin 10^\circ + (y_a - 300) \cos 10^\circ \quad (22)$$



(a)



(b)

Figura 2. Ilustração de uma imagem alinhada (a) e inclinada de 10° (b).

Os scanners produzem imagens como a da Figura 2b, visto ser difícil alinhar perfeitamente a imagem original sobre a lente destes aparelhos. Este desvio angular, normalmente na faixa de -2 a 2° , depende da habilidade do operador e, sobretudo, da presença de linhas ortogonais bem definidas na imagem original.

A determinação dos parâmetros das equações que relacionam as escalas requer no mínimo três pontos de controle, porém é recomendável a utilização de pelo menos cinco pontos com boa distribuição espacial, para que os erros sejam melhor distribuídos. Em geral, quanto maior o número de pontos

de controle, mais representativas serão as equações, todavia a partir de um certo número de pontos, a distribuição de frequência dos erros praticamente não se altera.

Neste exemplo foram utilizados sete pontos, plotados Figura na 2b a partir das coordenadas apresentadas no Quadro 1, onde os valores das duas primeiras colunas foram arbitrados e os valores das 3^a, 4^a, 5^a e 6^a colunas foram calculados por meio das equações 19 e 20, 21 e 22, respectivamente. Os valores das duas últimas colunas foram arredondados para o valor inteiro mais próximo, o que introduziu pequenos erros, que estão sempre presentes nos casos práticos. A simulação de erros maiores pode ser feita adicionando-se variações aleatórias aos valores das coordenadas.

Quadro 1 Coordenadas dos pontos de controle, para a determinação dos parâmetros das equações de conversão de coordenadas

Coordenadas globais		Coordenadas gráficas			
		imagem alinhada		imagem inclinada	
x^*	y^*	x_a	y_a	x	y
0	5	200	400	186	364
10	30	250	150	278	126
20	15	300	300	302	283
40	10	400	350	391	349
50	20	450	250	458	259
70	0	550	450	522	474
80	25	600	200	614	236

Com as coordenadas (x^*, y^*) e (x, y) do Quadro 1, procedeu-se à determinação do ângulo de rotação (θ) da imagem conforme o algoritmo apresentado. A primeira estimativa para θ foi $\theta = 0^\circ$ e o critério de parada do refinamento do valor de θ foi $\Delta\theta \leq 10^{-4}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como pode ser observado no Quadro 2, foram necessárias apenas três iterações para a determinação de θ , cujo valor ficou cerca de 1% menor que o ângulo de inclinação de 10° , arbitrado inicialmente. Este valor só não foi mais próximo de 10° devido ao arredondamento das coordenadas calculadas pelas equações 21 e 22. O pequeno número de iterações já era esperado, uma vez que se utilizou o método de Newton-Raphson, cuja convergência é quadrática. A periodicidade das funções trigonométricas descarta o risco de o valor de θ não convergir, mesmo que a sua estimativa inicial difira bastante da raiz.

Quadro 2 Valores parciais dos parâmetros a cada iteração do algoritmo, apresentados com quatro algarismos significativos

θ^*	a_0	a_1	b_0	b_1	$\partial z / \partial \theta$	$\partial^2 Z / \partial \theta^2$	$\Delta \theta^*$
0,0000	-40,31	0,2007	43,40	-0,09507	-1418	7961	-10,21
10,21	-49,42	0,2001	37,41	-0,09986	45,36	8348	0,3113
9,895	-49,19	0,2001	37,64	-0,09985	-0,001835	8348	-0,00001259

* valores convertidos para grau.

Observa-se ainda que o valor final de $\partial^2 Z / \partial \theta^2$ é positivo (8348), logo, o extremo de Z é um mínimo. Por ser função de seno e de co-seno, Z também tem comportamento oscilatório, apresentando quatro extremos absolutos (dois mínimos e dois máximos) defasados de 90° (Figura 3). Deste modo, caso o refinamento de θ conduza a um valor negativo para $\partial^2 Z / \partial \theta^2$, basta adicionar $\pm 90^\circ$ ao valor de θ e recalculer os valores de a_0 , a_1 , b_0 e b_1 , conforme o passo ii do algoritmo. Como diferem de 180° , os ângulos de $\theta \pm 90^\circ$ alteram apenas os sinais dos coeficientes angulares a_1 e b_1 .

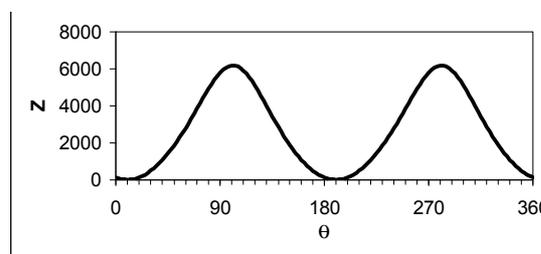


Figura 3 - Soma dos quadrados dos resíduos (Z) em função do ângulo de inclinação da imagem.

Finalmente, é possível observar no Quadro 2 que os coeficientes angulares a_1 e b_1 ficaram bastante próximos, respectivamente, de 0,2 e -0,1, que são os coeficientes angulares obtidos quando x^* e y^* são explicitados nas equações 19 e 20, utilizadas para gerar as coordenadas dos pontos utilizados na demonstração.

A metodologia apresentada foi implementada em um software que recebeu a denominação de SACRID - acrônimo de "Software para Aquisição de Coordenadas Reais de Imagens Digitais" e está disponível na seção "softwares disponíveis" da *home page* da Universidade Federal de Viçosa (www.ufv.br). Sua utilização consiste em: 1) obter a imagem a partir de um arquivo gráfico ou diretamente de um scanner; 2) definir as escalas desejadas, com a marcação de pelo menos quatro pontos de controle e a digitação das coordenadas de cada um deles; e 3) clicar sobre os pontos interesse, cujas coordenadas podem ser armazenadas em arquivo ou copiadas para a área de transferência.

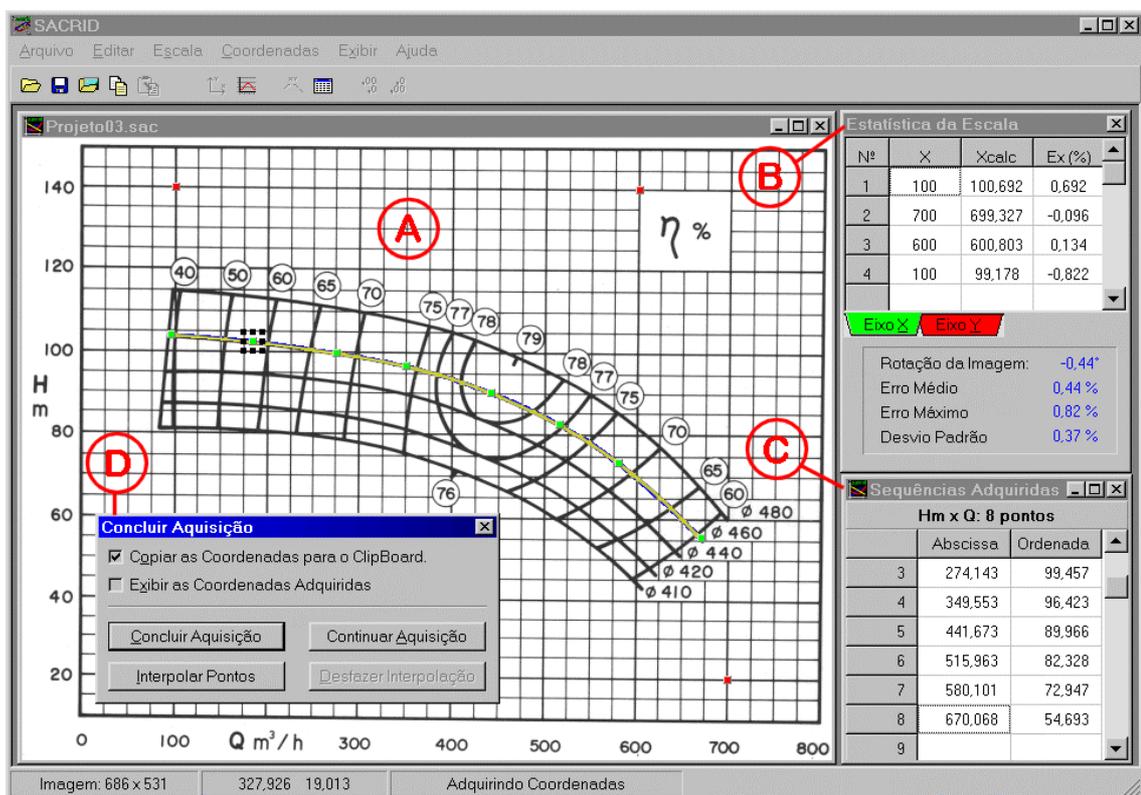


Figura 4 - Janela do software SACRID com alguns destaques em sua área de trabalho: a) imagem digitalizada das curvas características de uma bomba centrífuga; b) estatística dos erros associados à definição de escala; c) lista das coordenadas adquiridas; e d) conclusão da marcação dos pontos de interesse sobre uma curva.

O SACRID foi utilizado para a obtenção das coordenadas de pontos sobre cerca de 4500 curvas características de bombas centrífugas, sendo que não foi registrado problemas quanto à determinação das escalas. Deve-se acrescentar também que o programa exibe o erros relativos associados ao ajuste das equações de conversão de escalas, permitindo que usuário tenha controle sobre a precisão das mesmas (Figura 4).

4. CONCLUSÕES

A metodologia para a obtenção de coordenadas globais a partir de imagens digitais, independente de estarem corretamente alinhadas, mostrou-se: 1) facilmente implementável, pois as equações e os métodos utilizados são simples; e 2) consistente, uma vez que o algoritmo utilizado para determinar o ângulo de inclinação da imagem foi baseado em princípios geométricos, analíticos, estatísticos, além de numéricos no que concerne à utilização do consagrado método de Newton-Raphson, que neste caso tem convergência garantida, pois, como se mostrou, existem quatro raízes por ciclo da função.

Por ter proporcionado a obtenção de dados de cerca de 4500 curvas características de bombas centrífugas, de forma ágil e satisfatoriamente precisa, a metodologia implementada no software SACRID constitui-se no principal argumento de que os objetivos determinantes para o seu desenvolvimento foram alcançados.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MILLER, R.D. **Transforming coordinates from one coordinate plane to another**. Graphics Gems Vol. 5. London: Academic Press, 1995. p. 111.

SANTOS, W. L. **Software para seleção e dimensionamento hidráulico de bombas centrífugas**. Viçosa: UFV, 1995. 79 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) - Universidade Federal de Viçosa, 1995.

SANTOS, W. L.; RAMOS, M. M. Obtenção, por software, de coordenadas de curvas bidimensionais linearmente escaladas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA, 24, 1995, Viçosa. p. 276.

WARD, M. O. **From pixels to scenes**. Worcester Polytechnic Institute. Computer Science Department, 1996. <<http://www.cs.wpi.edu/~matt/courses/cs543/book/book.html>> Acesso em 18 jun. 1997.

CAPÍTULO 2

REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA DAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE BOMBAS CENTRÍFUGAS

1. INTRODUÇÃO

Curvas características de uma bomba hidráulica são a representação gráfica das funções que relacionam os diversos parâmetros ou grandezas intervenientes no seu funcionamento. Podem ser obtidas de gráficos gerais com variáveis adimensionais, ou determinadas experimentalmente em laboratório (PIMENTA 1978).

A curva $H(Q)$, que expressa a variação da altura manométrica em função da vazão, para uma velocidade angular constante do rotor, é denominada curva principal da bomba e seu conhecimento é fundamental tanto para o projeto como para a utilização desta. Para fins de projeto, pode ser determinada por meio da teoria elementar da ação do rotor sobre o líquido ou por meio de ensaio com modelos reduzidos, enquanto que, para fins de utilização na prática, são determinadas pelos fabricantes por meio de ensaios em laboratório com amostras das bombas produzidas em série. A curva característica de uma bomba também pode ser obtida em suas condições reais de funcionamento, porém, os custos decorrentes da necessidade de equipamentos e de pessoal treinado tendem a inviabilizar esse tipo de ensaio.

SANTOS (1995) estudou as curvas características de 126 bombas centrífugas das marcas Mark Peerless e EH e, por meio de análise de regressão, verificou que a altura manométrica e a potência daquelas bombas variavam com a vazão, segundo uma função polinomial do terceiro grau. A análise de regressão foi feita com cerca de 20 pontos por curva, aproximadamente equidistantes, com relação a vazão, sendo que a variância da regressão foi analisada por meio do teste F de Snedecor, com nível de significância de 0,0001 (0,01%). Um dos objetivos naquele estudo foi a elaboração de um banco de dados digital de bombas centrífugas, a partir dos catálogos fornecidos pelos fabricantes, que reproduzisse com precisão suas curvas características.

Segundo SCALOPPI (1998), as curvas de desempenho de bombas centrífugas podem ser representadas, com vantagens, por meio de splines cúbicos, pelo fato de permitirem a utilização de um número satisfatório de pares de pontos não necessariamente eqüidistantes.

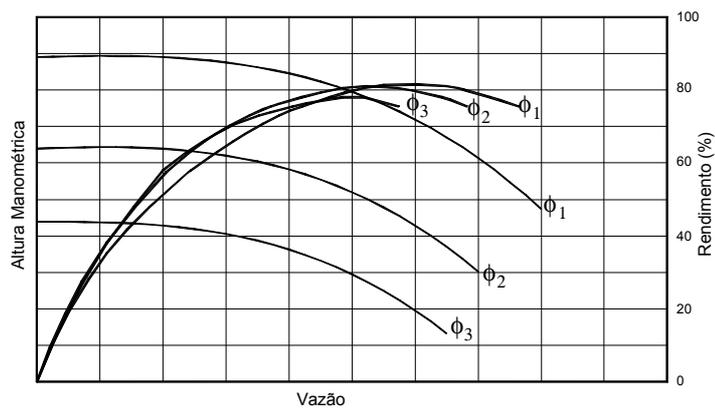
Splines cúbicos são o conjunto de N polinômios de terceiro grau usados como função de aproximação (interpolação) para um conjunto de $N+1$ pontos, sendo que cada polinômio se aplica ao intervalo compreendido entre dois pontos consecutivos. São considerados interpoladores exatos, uma vez que passam exatamente sobre os seus dois pontos extremos, garantindo a continuidade da curva resultante, cujas primeira e segunda derivadas também são contínuas em toda sua extensão.

As curvas de rendimento (η) de bombas centrífugas normalmente são apresentadas como na Figura 5a, onde existe uma curva $\eta(Q)$ para cada curva $H(Q)$ ou, mais comumente, como na Figura 5b, onde existem curvas de isorendimento $\eta(Q, H)$ cobrindo a faixa de operação econômica da bomba. Curvas $\eta(Q)$ podem ser obtidas de curvas $\eta(Q, H)$ para qualquer diâmetro de rotor ϕ ($\phi_1 \leq \phi \leq \phi_3$), bastando traçar uma curva unindo os pontos (Q, η) onde a curva característica desse rotor intercepta as curvas de isorendimento.

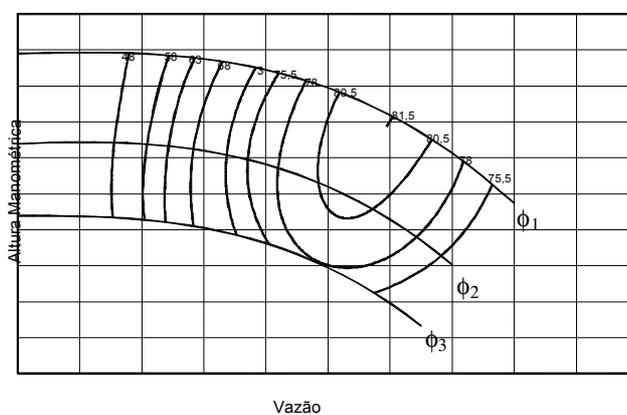
MACINTYRE (1980) cita que as curvas de isorendimento têm aspecto de elipses e que o rendimento máximo ocorre em um ponto no interior das curvas. O autor não comenta, mas apresenta uma ilustração na qual pode-se observar que os eixos das elipses são inclinados em relação aos eixos $Q-H$, semelhantemente ao que se apresenta na Figura 5b, situação em que a equação da elipse tem a forma da equação geral da cônica:

$$aQ^2 + bQH + cH^2 + dQ + eH - f = 0, \quad \{\Delta = b^2 - 4ac < 0\} \quad (23)$$

em que a, b, c, d, e e f são coeficientes determináveis por meio de regressão.



(a)



(b)

Figura 5 - Formas usuais de apresentação das curvas de rendimento hidráulico de bombas centrífugas.

A equação 23 também pode representar uma parábola quando $\Delta = 0$ ou uma hipérbole, quando $\Delta > 0$. Se o coeficiente b for nulo, os eixos da cônica serão paralelos aos eixos $Q-H$.

SANTOS (1995) utilizou com êxito a equação 23 para ajustar 986 curvas de isorendimento de 126 bombas centrífugas, considerando 8 a 20 pontos por curva, conforme o comprimento e a curvatura de cada curva. A análise de variância da regressão foi feita empregando-se o teste F com nível de significância de 0,01%.

Na equação 23, Q e H são interdependentes, ou seja, é necessário fixar uma variável para que se possa calcular a outra, pela redução daquela

equação a uma do segundo grau. O cálculo do valor do rendimento para um ponto de operação qualquer, pelo qual não passa nenhuma curva de isorendimento, deve ser feito por interpolação.

Neste trabalho, objetivou-se a sistematização de métodos para a determinação dos modelos de equações matemáticas e dos parâmetros destas, capazes de representar analiticamente as curvas características de bombas centrífugas comerciais. Buscou-se, principalmente, que essa representação fosse precisa e implementável computacionalmente, ou seja, que os requerimentos de armazenamento e de processamento dos dados por ela exigidos fossem compatíveis com os recursos médios dos computadores pessoais atualmente disponíveis.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Foram considerados 303 modelos de bombas centrífugas da marcas EH, Mark Peerless, KSB e IMBIL. O número de bombas de cada marca e a faixa de velocidade do rotor estão apresentados no Quadro 3.

Quadro 3 - Número de modelos de bombas analisados conforme a marca e a velocidade do rotor

Marcas	velocidades do rotor (rpm)			Total
	1100-1180	1700-1780	3440-3560	
*Mark Peerless		29	32	61
*EH		40	25	65
KSB		43	27	70
IMBIL	41	48	18	107
Total	41	160	102	303

*Bombas estudadas por SANTOS (1995)

2.1. Curvas de Altura Manométrica e de Potência

Os coeficientes das equações polinomiais de terceiro grau utilizadas para descrever as curvas de altura manométrica $H(Q)$ e de potência $P(Q)$ das

bombas EH e Mark Peerless foram aproveitados integralmente, sem qualquer modificação. Os dados das curvas $H(Q)$ e $P(Q)$ das bombas KSB e IMBIL foram obtidos segundo a metodologia descrita no capítulo 1, utilizando-se uma implementação adaptada do software SACRID, que permite ajustar as equações e analisar a variância da regressão. Os primeiros resultados foram comparados com aqueles fornecidos pelo software *STATISTICA 4.2* e as diferenças não foram expressivas, para os propósitos desta análise. A aquisição e a análise dos dados com um único software permitiram uma redução dos erros decorrentes dos arredondamentos e, especialmente, das falhas de natureza humana. Além disso, o software permitia traçar a curva ajustada diretamente sobre imagem da curva original, o que possibilitava uma rápida análise qualitativa do ajuste. As curvas foram digitalizadas por meio de um scanner com resolução óptica máxima de 400 ppp (pontos por polegada), ajustado para uma resolução média de 200 ppp, ou 8 pixels/mm. Com esta resolução, um gráfico de 150 mm x 120 mm, ao ser digitalizado, originava uma imagem de aproximadamente 1200 pixels x 960 pixels.

A análise das curvas $H(Q)$ e $P(Q)$ das bombas KSB e IMBIL revelou que algumas delas não podiam ser descritas por um polinômio de terceiro grau, considerando o critério de precisão utilizado por SANTOS (1995). Naquelas que podiam ser descritas, as curvas ajustadas e originais não apresentavam uma coincidência satisfatória nas extremidades. Esses desvios, que eram de no máximo cinco pixels ($\approx 0,63$ mm), podiam ser vistos diretamente na tela do computador, quando as curvas ajustadas eram traçadas diretamente sobre a imagem digitalizada das curvas originais.

Constatado que um polinômio cúbico era incapaz de descrever a totalidade das curvas, em toda a extensão de cada uma delas, optou-se pelo ajuste de um polinômio de grau variável, obtido do seguinte modo: iniciava-se o ajuste com um polinômio de segundo grau, o qual era elevado até que o traçado do polinômio coincidissem com a curva digitalizada ou até que a elevação do grau do polinômio não trouxesse qualquer contribuição aparente, em termos de observação visual. Desse modo, as curvas $H(Q)$ e $P(Q)$ foram representadas analiticamente por uma equação do tipo:

$$Hm(Q), P(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3 + \dots + a_k Q^k \quad (24)$$

em que

$a_0, a_1, a_3, \dots, a_k$ = coeficientes obtidos da regressão; e
 k = grau do polinômio ajustado.

2.2. Curvas de Rendimento

Algumas curvas de isorendimento de certas bombas KSB e IMBIL não puderam ser ajustadas pela a equação 23, por não apresentarem qualquer das três formas de uma cônica, como pode ser observado na Figura 6, onde as curvas de 50 e 55% não têm formato elíptico, nem parabólico e tampouco hiperbólico.

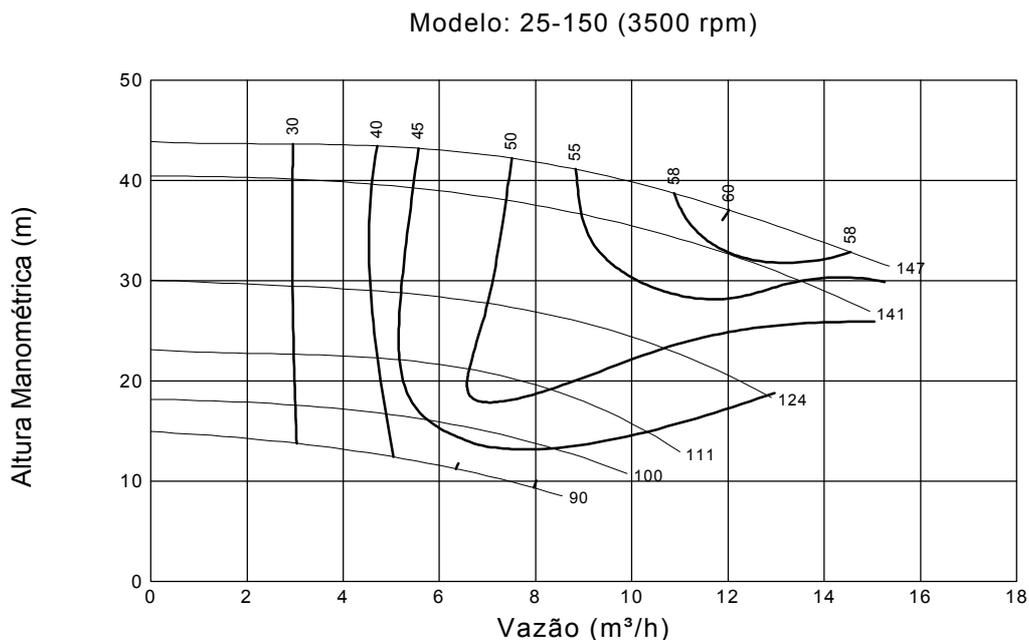


Figura 6 – Curvas características da bomba KSB MEGANORM 25-150, para ilustrar que as curvas de isorendimento 50 e 55% não possuem a forma de uma cônica.

Uma solução para este problema seria dividir a curva de isorendimento em vários trechos ou segmentos e ajustar uma equação da cônica para cada trecho, como se faz na modelagem geométrica de objetos, na qual formas complexas são tratadas como um conjunto de entidades com formas mais simples.

Não seria difícil implementar esta solução, mas haveria um problema: conectar as curvas ajustadas para cada trecho de modo que não houvesse descontinuidade na curva resultante. O problema poderia ser atenuado com o aumento do número de segmentos, o que tenderia a reduzir as distâncias entre os seus extremos; todavia, o número de parâmetros a serem armazenados aumentaria proporcionalmente. A complexidade se tornaria ainda maior, caso também se exigisse continuidade da primeira derivada.

Em vez de utilizar esta abordagem de consistências analítica e geométrica questionáveis, optou-se por representar as curvas de isorendimento por meio de curvas Bézier, descobertas independentemente pelos engenheiros franceses Paul de Casteljaou, em 1959, e por Pierre Bézier, em 1962, que a utilizaram para desenhar componentes automotivos. Ela combina parâmetros geométricos (coordenadas de pontos 2D ou 3D) com funções polinomiais, razão pela qual é bastante utilizada em modelagem geométrica (JOY, 1997).

A curva Bézier de grau k associada aos pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$, denominados pontos de controle, é uma curva paramétrica definida por:

$$B(t) = \sum_{i=0}^k P_i B_i^k(t) \quad \{0 \leq t \leq 1\} \quad (25)$$

em que $B_i^k(t)$ é um polinômio de Bernstein definido como:

$$B_i^k(t) = \frac{k!}{i!(k-i)!} (1-t)^{k-i} t^i \quad \{0 \leq i \leq k\} \quad (26)$$

RISLER (1992) enfoca o estudo sobre estas curvas com maior formalismo matemático e enumera várias propriedades das equações 25 e 26, sendo as principais:

- i) $B(t)$ passa por P_0 e P_k , ou seja, $B(0) = P_0$ e $B(1) = P_k$.
- ii) $B(t)$ tangencia as retas $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_{k-1}P_k}$ em $B(0)$ e $B(1)$, respectivamente.
- iii) $B(t)$ está no interior do menor polígono convexo, “*convex hull*”, que contém os pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$.
- iv) $\sum_{i=0}^k B_i^k(t) = 1$.

Na Figura 7 são mostrados quatro exemplos de curvas Bézier, representadas pelas curvas contínuas, onde as propriedades i e ii podem ser observadas diretamente. Os pontos de controle de cada curva são conectados por linhas tracejadas, formando o polígono de controle de uma curva Bézier.

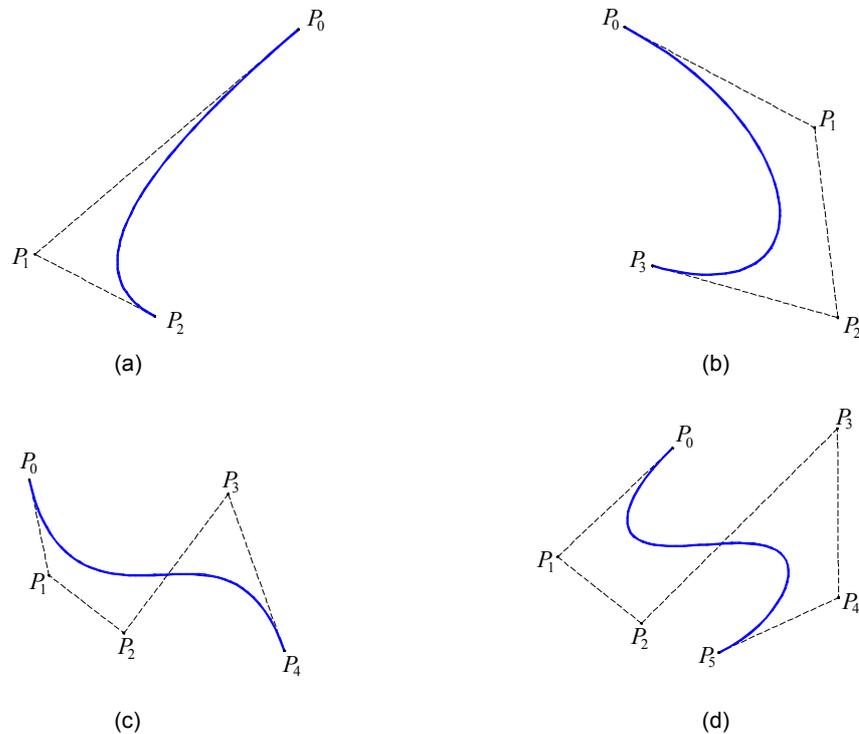


Figura 7 - Exemplos de curvas Bézier: a) $k = 2$; b) $k = 3$; c) $k = 4$; e d) $k = 5$.

Diferentemente e antes de Pierre Bézier, Paul de Casteljaou chegou à curva Bézier a partir de um procedimento geométrico, sem usar polinômios de Bernstein. Mais tarde, desenvolveu-se um algoritmo para a obtenção da curva Bézier, baseado no procedimento de Paul de Casteljaou. Eis a sua fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} P_i^0 = P_i \\ P_i^{r+1}(t) = (1-t)P_{i-1}^r + tP_i^r \\ B(t) = P_k^k(t) \end{cases} \quad (27)$$

No presente trabalho, as curvas de isorendimento foram representadas analiticamente por Bézier cúbicas ($k = 3$), cuja equação é:

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 \quad (28)$$

Neste caso, as coordenadas dos quatro pontos controle de cada curva Bézier são a vazão e a altura manométrica, portanto a curva de isorendimento é constituída pelo conjunto de pontos $(Q(t), H(t))$, calculados pelas equações:

$$Q(t) = (1-t)^3 Q_0 + 3t(1-t)^2 Q_1 + 3t^2(1-t)Q_2 + t^3 Q_3 \quad (29)$$

$$H(t) = (1-t)^3 Hm_0 + 3t(1-t)^2 Hm_1 + 3t^2(1-t)Hm_2 + t^3 Hm_3 \quad (30)$$

Na Figura 8 é mostrada uma curva de isorendimento representada por uma Bézier cúbica, definida pelos pontos (Q_0, H_0) , (Q_1, H_1) , (Q_2, H_2) e (Q_3, H_3) .

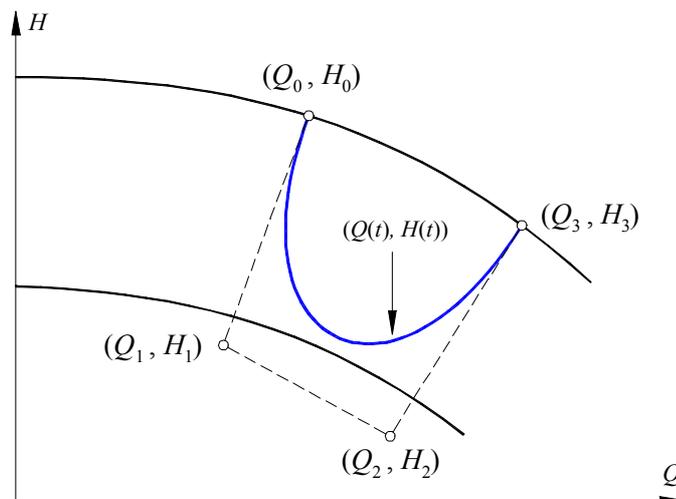


Figura 8 - Ilustração da representação de uma curva de isorendimento por uma Bézier cúbica.

Na maioria dos casos, apenas uma Bézier cúbica foi suficiente para representar cada curva de isorendimento, porém algumas curvas requiseram duas ou mais Bézier cúbicas, como mostrado na Figura 9, onde a curva é formada por duas delas. Nestes casos, a continuidade das curvas foi facilmente conseguida, iniciando-se uma nova curva no extremo final da curva anterior. Obteve-se continuidade da primeira derivada, fazendo-se com que o segundo ponto de controle de cada nova curva ficasse alinhado com os dois últimos pontos de controle da curva anterior, ressaltando-se que o ponto inicial de uma nova curva é ponto final da anterior. Na Figura 9a, onde os pontos P_2 , P_3 e P_4 não são colineares, pode-se observar uma ligeira descontinuidade da primeira derivada no ponto P_3 , o que não ocorre na Figura 9b, onde P_2 , P_3 e P_4 estão alinhados.

Como pode-se verificar, as curvas Bézier proporcionam grande flexibilidade na representação de curvas das mais variadas formas, sejam elas curvas regulares, como funções analíticas, ou irregulares, compostas de arcos e, inclusive, de retas.

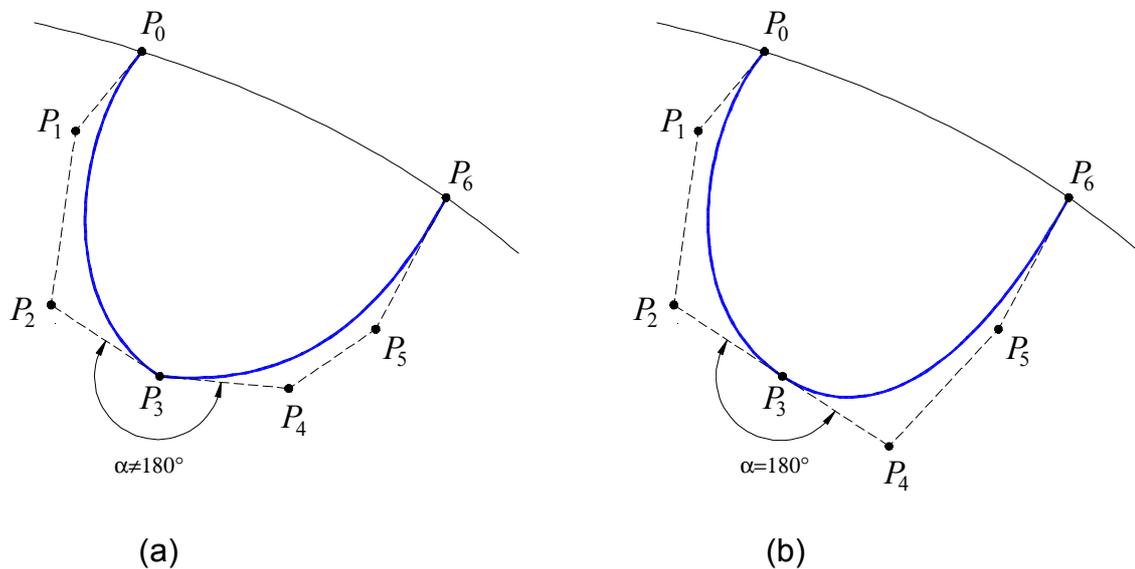


Figura 9 – Representação de uma curva contínua por meio de duas Bézier cúbicas, para ilustrar um caso de primeira derivada descontínua (a) e outro de contínua (b).

2.2.1. Cálculo do rendimento

Similarmente à equação 23, as equações 29 e 30 apenas permitem calcular, em função do parâmetro t , os inúmeros pontos (Q, H) em que a bomba poderá operar com mesmo rendimento hidráulico. Estas equações são muito úteis para representar, graficamente, as curvas de isorendimento, mas não permitem calcular, de forma direta, o valor do rendimento para um ponto operacional (Q_0, H_0) qualquer. Sabe-se que o rendimento hidráulico pode ser expresso por uma função $\eta(Q, H)$, cuja representação gráfica é uma superfície; porém, é difícil encontrar um modelo de equação geral que represente esta superfície de forma exata ou aproximada, para uma precisão pré-definida. Diante deste fato, optou-se pela utilização de técnicas de interpolação para a determinação do valor do rendimento hidráulico, as quais são descritas a seguir.

2.2.1. Interpolação polinomial ou por splines cúbicos

A determinação da curva de rendimento hidráulico $\eta(Q)$ consistiu em:

- i. Determinar o diâmetro do rotor cuja curva característica passa por um ponto operacional de interesse (Q_0, H_0) , segundo a metodologia proposta por SANTOS (1995); e ajustar uma equação, $H(Q)$, para esta curva.
- ii. determinar, pelo método de Newton, todos os pontos de interseção da curva ajustada $H(Q)$ com as de isorendimento $\eta(Q, H)$ e armazenar as coordenadas (Q, η) de cada ponto, inclusive o ponto $(0, 0)$.
- iii. Ajustar um polinômio ou conjunto de splines cúbicos para os pontos determinados no item ii.

Esta técnica mostrou-se pouco flexível, entretanto, cumpre comentar algumas características e limitações da mesma. Para o cálculo de apenas um valor $\eta(Q_0, H_0)$ não é necessário utilizar todos os pontos determinados em (ii), mas pode-se fazer uma interpolação linear entre um ponto de interseção à esquerda e outro à direita, ou ajustar um polinômio de segundo ou de terceiro grau com quatro a cinco pontos de interseção vizinhos. Polinômios de grau elevado devem ser evitados por que podem apresentar oscilação.

Utilizou-se a forma polinomial incompleta, $\eta(Q) = a_1Q + a_2Q^2 + \dots + a_kQ^k$, para que o polinômio ajustado passasse pela origem, uma vez que para uma vazão nula o rendimento também é nulo. Em teoria, o rendimento pode ser explicado pela equação $\eta(Q) = a_1Q + a_2Q^2$; porém, para cerca de 20 das primeiras 50 bombas analisadas, este não pôde ser explicado de modo satisfatório, mesmo com polinômios de grau cinco. Foram testados polinômios de ordem mais elevada, mas, em alguns casos, observou-se que os mesmos apresentavam comportamento oscilatório.

Diante das limitações do ajuste polinomial, analisou-se o ajuste da curva de rendimento por meio de splines cúbicos, mas o problema de oscilação da curva piorou, pelo fato de que os splines cúbicos passam por todos os pontos e, portanto, não refletem uma tendência média tal qual os ajustes baseados na minimização da soma dos quadrados dos resíduos.

2.2.2. Interpolação pelo método de Hardy.

Este método de interpolação foi desenvolvido por HARDY (1971) para interpolar superfícies topográficas, além de outras. Trata-se de um interpolador global, já que todos os pontos são considerados no cálculo e exato, uma vez que a superfície interpolada intercepta todos eles. O método considera uma função de interpolação da forma:

$$z(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k B_k(x, y) \quad (31)$$

em que n é o número de pontos; e a_k são as incógnitas a serem determinadas, por meio da resolução do sistema de equações:

$$\begin{vmatrix} B_1(x_1, y_1) & B_2(x_1, y_1) & \dots & B_n(x_1, y_1) \\ B_1(x_2, y_2) & B_2(x_2, y_2) & \dots & B_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(x_n, y_n) & B_2(x_n, y_n) & \dots & B_n(x_n, y_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}, \text{ sendo} \quad (32)$$

$$B_k(x, y) = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + R^2} \quad \{k = 1, 2, \dots, n\} \quad (33)$$

em que R um parâmetro arbitrável.

Como o método está baseado no conceito de distância, foi necessário converter as unidades de vazão e de altura manométrica para uma unidade de comprimento, sendo que a escolha natural foi milímetro e a conversão baseada nas dimensões do gráfico das curvas de rendimento. As equações de conversão utilizadas foram:

$$x = \frac{Q - Q_L}{Q_R - Q_L} w \quad (34)$$

$$y = \frac{H - H_B}{H_T - H_B} h \quad (35)$$

em que

x, y = abcissa e ordenada do gráfico, mm;

w, h = largura e altura do gráfico, mm;

Q_L, Q_R = limites inferior e superior do eixo Q , $M^0L^3T^{-1}$; e

H_B, H_T = limites inferior e superior do eixo H , M^0LT^0 .

Transformando-se os valores (Q, H) em (x, y) , por meio das equações 34 e 35, e substituindo z por η , pode-se escrever:

$$\eta(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k B_k(x, y) \quad (36)$$

SPATH (1995) apresenta outras expressões para a função $B_k(x, y)$, denominadas funções de base radial, pelo fato de conterem a sub-expressão $(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$, cujo significado é um raio (distância euclidiana) elevado ao quadrado. O valor escolhido para R não deve ser muito elevado, para que sejam evitados problemas de precisão na resolução do sistema de equações. Segundo o autor, um valor razoável para R pode ser calculado pela equação:

$$R = \sqrt{\frac{1}{10} \text{MAX}(x_{max} - x_{min}, y_{max} - y_{min})} \quad (37)$$

em que

MAX = função que retorna o maior de dois valores; e

min, max = sub-índices que designam valores mínimo e máximo, respectivamente.

Como o método requer um número finito de pontos, as curvas de isorendimento foram divididas em arcos suficientemente pequenos, de modo que suas cordas pudessem representá-las com precisão razoável. Por outro lado, o número de arcos não podia ser muito grande, para que não houvesse comprometimento da precisão da solução do sistema de equações 32. Deste modo, os pontos foram distribuídos de modo que o comprimento máximo do arco entre pontos adjacentes fosse de 5,0mm e a distância máxima do arco até sua corda fosse de 0,1mm. No detalhe ampliado da Figura 10, o arco é representado por L e a distância máxima, entre ele e sua corda, por d .

Pelo fato de o valor do parâmetro R da equação 33 ser arbitrável, investigou-se a sua influência sobre o cálculo do rendimento e sobre a precisão da solução do sistema de equações.

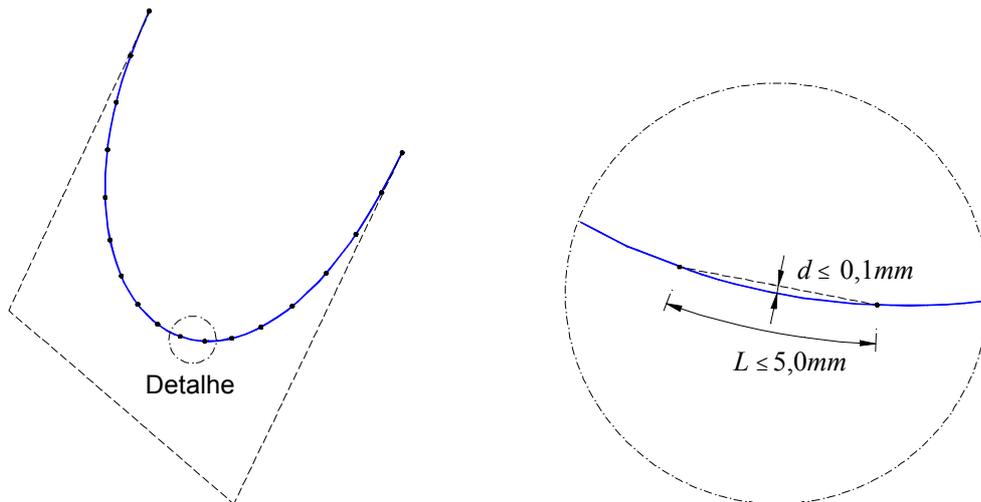


Figura 10 - Distribuição dos pontos ao longo das curvas de isorendimento, para a utilização do método de Hardy.

A precisão da solução calculada de um sistema de equações está relacionada com a precisão da máquina e com o número de condição (*cond*) da matriz de coeficientes, cujo valor tende a crescer com a dimensão e, sobretudo, com o mal condicionamento da matriz.

Segundo SCHEID (1991), o número de condição é a medida da confiança que a matriz oferece nos cálculos e, para uma dada norma, ele é definido por:

$$cond = \|A\| \|A^{-1}\| \quad \{cond \geq 1\} \quad (38)$$

A norma utilizada neste trabalho é definida por:

$$\|A\| = \text{MAX}_{i=1}^n (|A_{i1}| + |A_{i2}| + \dots + |A_{in}|) \quad (39)$$

Como regra prática, segundo CUNHA (1993), a solução calculada de um sistema, cujo *cond* seja igual a 10^q , em uma máquina com p dígitos de precisão, pode ter apenas $p-q$ algarismos significativos confiáveis.

3. Resultados e Discussão

A metodologia para o ajuste de polinômios de grau variável para as curvas de altura manométrica e de potência forneceu curvas ajustadas com maior precisão. Para calcular o nível de probabilidade, pelo Teste F, de as equações ajustadas serem rejeitadas estatisticamente, utilizou-se a função “*F_DISTRIBUTION(Fc, n₁, n₂)*” do Software *DERIVE for Windows 4.08*, em que *Fc*, *n₁* e *n₂* foram obtidos das análises de variância de 381 equações ajustadas às curvas de altura manométrica de 107 bombas IMBIL. Para uma análise conservadora, utilizou-se apenas os 50 maiores valores de probabilidade para gerar o histograma da Figura 11, no qual pode-se observar que a pior equação ajustada, dentre 381 equações, tem probabilidade inferior a 10^{-5} (0,001%) de ser rejeitada estatisticamente. Este procedimento também foi aplicado para as curvas de potência das bombas IMBIL, bem como para curvas das bombas KSB, sendo que os resultados foram similares. Em nenhum ajuste, foi necessário utilizar um polinômio com grau superior a sete.

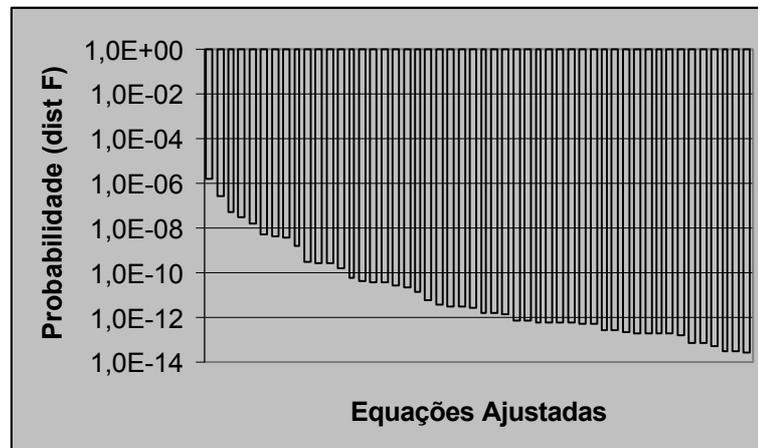


Figura 11 - Histograma dos 50 maiores valores de probabilidade (decimal) de a equação ajustada não representar a curva de altura manométrica.

Para exemplificar a determinação do rendimento hidráulico utilizando método de Hardy, escolheu-se a bomba centrífuga KSB MEGANORM 80-200 de 3500rpm, pelo fato de suas curvas de isorendimento apresentarem o padrão mais comum, com relação à forma e à distribuição das mesmas. A discretização das curvas foi feita segundo os critérios apresentados ($L \leq 5,0\text{mm}$

e $d \leq 0,1\text{mm}$), o que resultou nos 102 pontos representados na Figura 12. Pode-se observar que os pontos encontram-se bem distribuídos espacialmente, exceto em locais de curvatura mais acentuada, onde ficam mais próximos, como nas curvas de 78 e 80,5%, significando que o espaçamento entre os pontos foi determinado pelo critério da máxima distância do arco até sua respectiva corda.

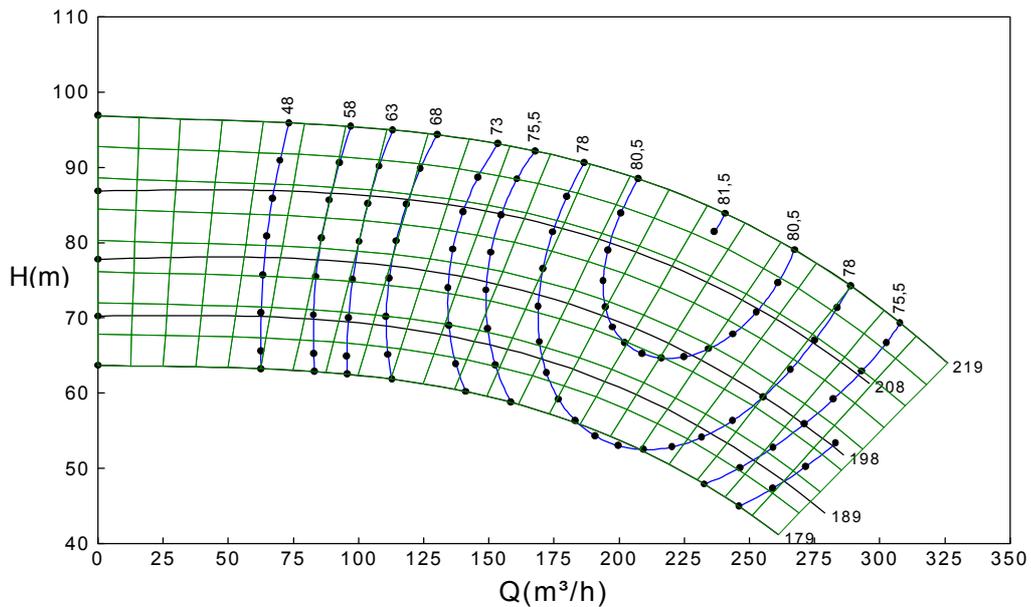


Figura 12 - Discretização das curvas de isorendimento para interpolação do rendimento nos vértices da malha.

Aplicando-se as equações 32, 33 e 37 ao conjunto de pontos obtidos com a discretização, chegou-se a um sistema de 102 equações e 102 incógnitas, que foi resolvido pelo método da eliminação de Gauss com pivotação completa, utilizando-se números de ponto flutuante com 15 dígitos de precisão.

Para gerar a superfície de rendimento da Figura 13, primeiro definiu-se uma malha composta por quadriláteros com lados medindo aproximadamente 5,0mm, o que resultou na malha de 176 quadriláteros, apresentada na Figura 12. A seguir, utilizou-se a equação 31 para calcular os rendimentos nos vértices desses quadriláteros, em função de suas coordenadas, expressas em milímetros.

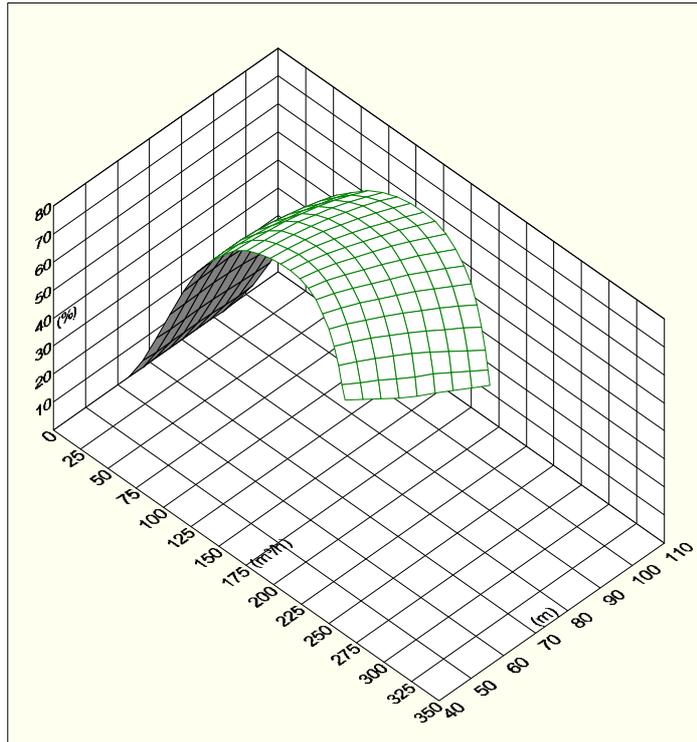
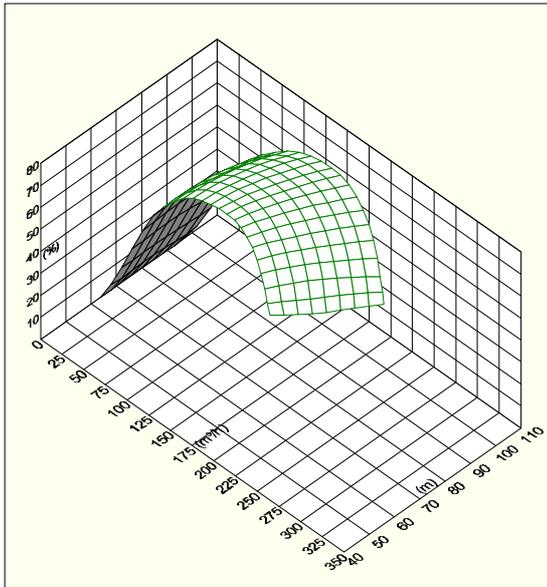
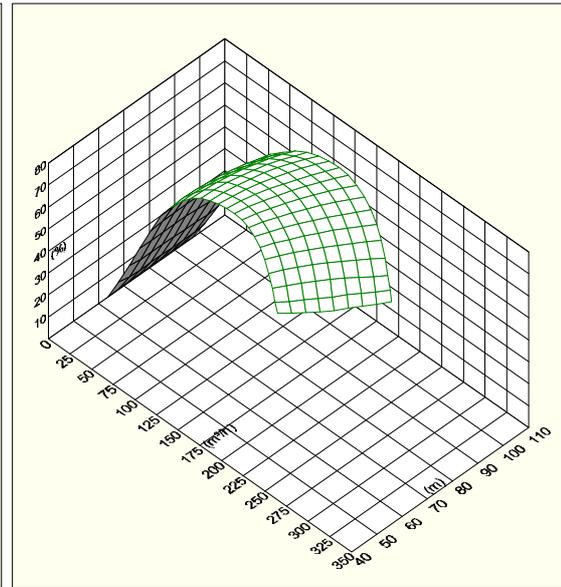


Figura 13 - Superfície gerada com os rendimentos calculados por meio do método de Hardy, com $R = 3,2$ mm (obtido pela equação 37).

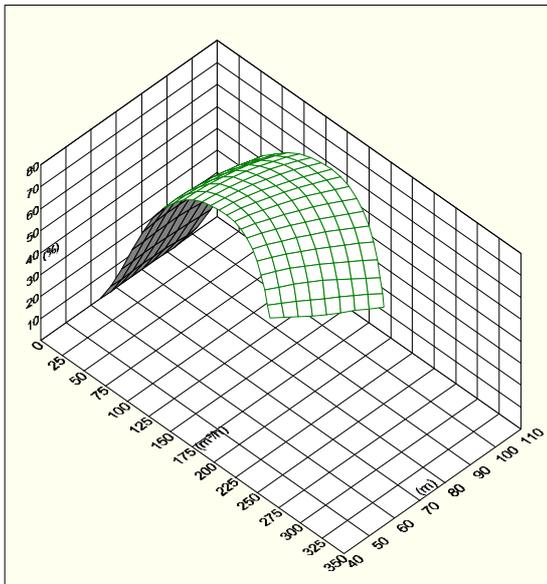
Pelo método de Hardy, o rendimento calculado em qualquer ponto utilizado na interpolação é igual ao rendimento daquele ponto, porém para pontos com coordenadas quaisquer, o valor do rendimento depende do parâmetro R , cuja função é suavizar a superfície, evitando a formação de seios muito afunilados, especialmente em picos e vales, sendo que os vales normalmente não ocorrem em superfícies de rendimento. A Figura 14 permite observar que a alteração dos valores de R não causou variação apreciável na forma da superfície e, conseqüentemente, no valor do rendimento. Isso pode ser explicado pelo fato de o rendimento apresentar taxas de variação praticamente lineares, principalmente com relação a vazão, fazendo com que a superfície $\eta(Q, H)$ tenha curvaturas suaves com, em geral, apenas um máximo. Acrescente-se ainda que o número de pontos foi relativamente grande e a distribuição espacial entre eles homogênea, Figura 12.



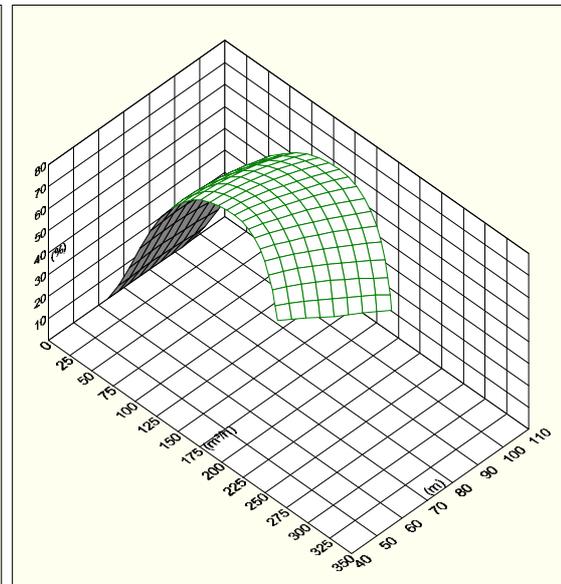
(a) $R = 0,0\text{mm}$



(b) $R = 3,2\text{mm}$



(c) $R = 5,0\text{mm}$



(c) $R = 10,0\text{mm}$

Figura 14 - Superfícies de rendimento obtidas a partir de diferentes valores do parâmetro R .

O Quadro 4 apresenta os valores do número de condição ($cond$) da matriz de coeficientes do sistema 32 em função dos valores de R , inclusive do valor calculado por meio da equação 37, apresentado em destaque. Com estes valores, traçou-se a curva apresentada na Figura 15, na qual pode-se observar que $\text{Log}(cond)$ cresce linearmente com R , significando que o aumento de R

provoca um aumento exponencial em *cond*. Desta análise, pode-se inferir que o número de algarismos confiáveis na solução do sistema 32 diminui linearmente com o valor *R*. Contudo, esse fato não chega a ser preocupante, pois os compiladores e as planilhas eletrônicas atuais operam eficientemente com números de dupla precisão, isto é, com quinze dígitos de precisão. Observe-se que, mesmo no pior caso ($R = 10,0\text{mm}$ – mais do que três vezes o valor calculado), consegue-se oito (15-7) algarismos significativos, que são mais do que suficientes para o cálculo do rendimento hidráulico.

Quadro 4 - Valores do número de condição da matriz do sistema em função do parâmetro *R*

<i>R</i> (mm)	0,0	1,0	2,0	3,0	3,2	4,0
<i>cond</i>	$0,50 \cdot 10^4$	$1,10 \cdot 10^4$	$2,65 \cdot 10^4$	$0,67 \cdot 10^5$	$0,81 \cdot 10^5$	$1,69 \cdot 10^5$
<i>R</i> (mm)	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
<i>cond</i>	$4,22 \cdot 10^5$	$1,04 \cdot 10^6$	$2,49 \cdot 10^6$	$0,59 \cdot 10^7$	$1,34 \cdot 10^7$	$3,02 \cdot 10^7$

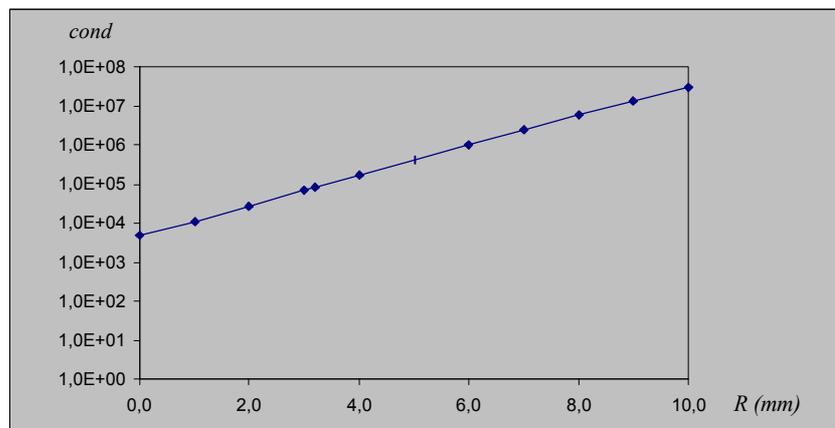


Figura 15 - Curva de $\text{Log}(\text{cond})$ x *R* para ilustrar que o aumento do valor do parâmetro *R* provoca um crescimento exponencial no valor de *cond*.

Esta metodologia foi aplicada a outras 69 bombas KSB MEGANORM e uma síntese dos resultados encontra-se no Quadro 5, no qual pode-se observar que o número de condição máximo foi da ordem de 10^5 , indicando que as soluções dos sistemas apresentaram no máximo cinco algarismos não confiáveis. Os valores do número de condição foram calculados a partir de sistemas montados com o valor calculado de *R*, cujo valor médio foi 3,0mm.

Quadro 5 - Resumo estatístico do número de pontos, do parâmetro R e do número de condição da matriz de coeficientes

	n	R (mm)	$cond$
Valor mínimo	38	2,7	$0,54 \cdot 10^4$
Valor máximo	114	3,3	$3,4 \cdot 10^5$
Valor médio	76	3,0	$0,57 \cdot 10^5$
Desvio Padrão	13	0,1	$3,3 \cdot 10^4$

Sob o aspecto de implementação computacional desta metodologia, a solução pode ser gerada em tempo de execução ou armazenada em disco, sendo esta última a opção mais recomendada, pois representa uma economia substancial de processamento, já não exige a discretização das curvas de isorendimento e a solução do sistema de equações $n \times n$, cujo número de operações aritméticas é proporcional a n^3 . Além do valor de R , devem ser armazenados $(x_1, y_1, \eta_1), (x_2, y_2, \eta_2), \dots, (x_n, y_n, \eta_n)$ e o vetor solução (a_1, a_2, \dots, a_n) , o que dá um total de $4n + 1$ valores. Para economizar espaço em disco, os valores x, y e η podem ser armazenados como números de ponto flutuante com precisão simples, que possuem sete algarismos significativos e ocupam quatro bytes.

4. CONCLUSÕES

A utilização de polinômios de grau variável permitiu ajustes bem mais precisos para as curvas de altura manométrica e de potência, na medida em que proporcionou uma superposição praticamente total da curva ajustada sobre a curva digitalizada. A análise da regressão por meio do teste F revelou níveis de probabilidade muito baixos ou desprezíveis de o polinômio não se ajustar aos dados, evidenciando que a qualidade do ajuste deve ser analisada mais sob o ponto de vista geométrico do que estatístico.

A utilização de curvas Bézier permitiu representar as curvas de isorendimento com traçados complexos e a discretização destas, associadas com método de interpolação de Hardy, mostrou-se uma técnica importante, embora relativamente complexa, para a determinação do valor do rendimento hidráulico.

O valor do parâmetro R , utilizado no método de Hardy, praticamente não interferiu no cálculo do rendimento; porém, o número de algarismos confiáveis da solução do sistema de equações diminuiu linearmente com o seu aumento. Considerando estes dois aspectos, a equação proposta por SPATH (1995) mostrou-se adequada para estimar o valor de R , visto que a solução do sistema apresentou no máximo cinco algarismos não confiáveis, sendo que esta inferência foi feita com base na análise do número de condição da matriz de coeficientes do sistema.

Embora o sistema de equações relacionado com o método de Hardy seja inerentemente mal condicionado e este mal condicionamento aumente com o valor de R , sua solução pode ser determinada pelo método da eliminação de Gauss com pivotação completa com números de ponto flutuante de dupla precisão, disponíveis nas principais linguagens de programação como Fortran, Pascal, C e Java.

Em função do volume de cálculos, especialmente aqueles relacionados à solução do sistema de equações cuja ordem pode superar 100×100 , o emprego desta metodologia só é viável com a utilização de recursos computacionais, que atualmente não representam uma limitação.

Os modelos de equações e os métodos para determiná-los, apesar de um pouco complexos, conduziram a resultados bastante satisfatórios, especialmente com relação à precisão, quando empregados na representação analítica de curvas características de bombas centrífugas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CUNHA, C. **Métodos numéricos para as engenharias e ciências aplicadas**, Campinas: UNICAMP, 1993. 265 p.
- HARDY, R. L. Multiquadrics equations of topograph and other irregular surfaces, **Journal of Geophysical Research**, 76, 1905-1915, 1971
- K. JOY. **Computer graphics notes: Bézier curves**, University of Califórnia, Davis, 1997. <<http://muldoon.cs.ucdavis.edu/GraphicsNotes/Bezier-Curves/Bezier-Curves.html>> Acesso em 12 out. 1997.
- MACINTYRE, A. J. **Bombas e instalações de bombeamento**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 667 p.
- PIMENTA, C. F. **Curso de hidráulica geral**. 3. ed. São Paulo: Laboratório de Hidráulica, 1978. 436 p.
- RISLER, J. J. **Mathematical methods for cad**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 196 p.
- SANTOS, W. L. **Software para seleção e dimensionamento hidráulico de bombas centrífugas**. Viçosa: UFV, 1995. 79 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) - Universidade Federal de Viçosa, 1995.
- SCALOPPI, E. J. Representação analítica de curvas de desempenho de bombas hidráulicas por splines cúbicas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA, 26, 1998, Lavras. Anais do XXVI Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola. Lavras: UFLA, 1998.
- SCHEID, F., **Análise numérica**. Lisboa: Mc Graw-Hill, 1991. 617 p.
- SPATH, H. **Two dimensional spline interpolation algorithms**. Wellesley: A K Peters, 1995. 304 p.
- Schneider, P. J. **Phoenix: an interactive curve design system based on the automatic fitting of hand-sketched curves**. Washington: University of Washington, 1988. 93p.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DA OPERAÇÃO DE BOMBAS EM ASSOCIAÇÕES E EM REDE DE CONDUTOS SOB O ASPECTO ANALÍTICO, PARA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

1. INTRODUÇÃO

Em estações de bombeamento e em numerosas aplicações industriais, a amplitude de variação de vazão (Q) e de altura manométrica (H) pode ser muito grande para ser suprida por uma única bomba, mesmo que se altere a velocidade do seu rotor. Quando isto acontece, recorre-se à associação de duas ou mais bombas, em série ou em paralelo (MACYNTIRE, 1987).

Além dessas situações, outras como a inexistência no mercado de bombas que conseguem fornecer vazões e, ou, alturas manométricas elevadas, o aumento da demanda com o decorrer do tempo ou demandas diferenciadas conforme o período que se queira considerar, levam o projetista a optar por uma associação de bombas, que também pode ser do tipo mista, ou série-paralelo.

Associam-se bombas em série para se obter ganho de altura manométrica e, em paralelo, para se conseguirem vazões maiores. Em ambos os tipos de associação existem particularidades que devem ser observadas para que erros relativamente comuns possam ser evitados. Igualmente ao que ocorre com uma bomba, o ponto de operação de uma associação de bombas é determinado pela intersecção da curva característica da associação com curva característica da tubulação, também denominada curva do sistema. A análise destas duas curvas revela, por exemplo, que a associação de duas bombas iguais em série fornece menos do que dobro da altura manométrica fornecida por apenas uma, bem como a associação de duas bombas iguais em paralelo recalca menos do que o dobro da vazão de uma só bomba. O acréscimo de altura manométrica ou de vazão depende da curva do sistema.

Como, na grande maioria dos casos, não se dispõem das equações de altura manométrica em função da vazão, a curva de altura manométrica da associação é obtida por método gráfico, a partir das curvas impressas nos catálogos. É prescindível acrescentar que este procedimento é um tanto trabalhoso e sujeito a erros, principalmente porque é cada vez menor o número de técnicos que utilizam métodos gráficos para solucionar problemas de engenharia.

Com base nestas considerações e nos resultados do capítulo anterior, onde foram apresentados os modelos de equações que descrevem as curvas características de turbobombas, objetivou-se, neste capítulo, sistematizar as metodologias, visando suas implementações computacionais, para a determinação da curva principal das associações de bombas centrífugas e dos pontos de trabalho de bombas operando em redes de condutos.

2. MATERIAL E MÉTODOS

2.1. Determinação do ponto de operação da bomba ou da associação

O ponto de operação da bomba ou da associação foi determinado calculando-se o ponto de interseção entre a curva de altura manométrica $H(Q)$ com a curva característica da tubulação $H_t(Q)$, referenciadas a partir deste ponto como curva principal da bomba e como curva da tubulação, respectivamente. A equação da curva da tubulação foi obtida aplicando-se a equação da energia entre dois pontos, 1 e 2, convenientemente posicionados na sucção e no recalque, respectivamente. Após alguns arranjos, a equação resultante é:

$$H_t(Q) = Z_2 - Z_1 + P_2 - P_1 + K Q^n \quad (40)$$

em que

Z = cota ou altitude, m;

P = pressão por unidade de peso específico, m;

K = constante característica da tubulação, $m^{1-3n} h^n$; e

n = expoente da vazão que varia entre 1,75 e 2,00, conforme a equação de perda de carga considerada.

Denominando a soma do desnível geométrico ($Z_2 - Z_1$) com a diferença de pressão ($P_2 - P_1$) de altura estática de elevação (He), rescreveu-se a equação 40 sob a forma:

$$Ht(Q) = He + K Q^n \quad (41)$$

Quando a diferença de pressão ($P_2 - P_1$) for negligenciável, tal como no bombeamento de um reservatório aberto para outro também aberto, He será igual ao desnível geométrico, ou seja, igual a diferença entre as cotas dos níveis d'água superior e inferior.

O valor de Q , para o qual $H(Q) = Ht(Q)$, foi calculado por meio do método de Newton, atribuindo-se como estimativa inicial $Q = 0,5 Q_x$, sendo Q_x o limite superior dentro do qual $H(Q)$ foi ajustada. Não se utilizou $Q = 0$ porque, para este valor, $d[H(Q) - Ht(Q)]/dQ$ era, em muitos casos, próximo de zero e isso poderia conduzir a um valor de vazão negativo. O refinamento do valor de Q terminava quando o valor absoluto da diferença entre dois valores sucessivos de Q era inferior a $10^{-6} \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$, o que acontecia após 4 a 7 iterações, em média. Quando o valor de Q ficava fora dos limites do ajuste de $H(Q)$, considerava-se que não havia intersecção entre as curvas.

2.2. Associação em série

A equação da curva principal de uma associação em série de N bombas foi obtida por meio da soma algébrica das equações de todas as curvas principais, ou seja:

$$H^*(Q) = \sum_{i=1}^N H_i(Q) \quad \{Q_o \leq Q \leq Q_x\} \quad (42)$$

em que

H^* = altura manométrica da associação em série, m;

Q_o = vazão mínima, determinada por $Max(Q_{o1}, Q_{o2}, \dots, Q_{oN})$, $\text{m}^3 \text{ h}^{-1}$;

Q_x = vazão máxima, determinada por $Min(Q_{o1}, Q_{o2}, \dots, Q_{oN})$, $\text{m}^3 \text{ h}^{-1}$;

Max = função que retorna o maior valor de uma lista;

Min = função que retorna o menor valor de uma lista;

Q_{oi} = vazão mínima utilizada no ajuste de $H_i(Q)$, $\text{m}^3 \text{ h}^{-1}$; e

Q_{xi} = vazão máxima utilizada no ajuste de $H_i(Q)$, $m^3 h^{-1}$.

Por se constituírem em parcelas de uma soma, as equações $H_i(Q)$ na equação 42 podem ter quaisquer formas analíticas, como é possível acontecer com bombas distintas ou com bombas iguais, mas com rotores diferentes. A amplitude de vazão da associação fica limitada, para propósitos de utilização das equações, entre o máximo das vazões mínimas e o mínimo das vazões máximas. Se as N bombas e suas curvas principais forem iguais a equação 42 fica reduzida a:

$$H^*(Q) = N H(Q) \quad \{Q_0 \leq Q \leq Q_x\} \quad (43)$$

2.3. Associação em paralelo

Na associação em paralelo, as vazões se somam para uma mesma altura manométrica, porém as funções analíticas $H(Q)$ das bombas estudadas são na maioria polinômios de graus entre dois e sete, que não possuem uma função inversa $Q(H)$, logo, a determinação dos valores de Q exigiu que fossem utilizados métodos numéricos apropriados para o cálculo de raízes de funções de uma variável.

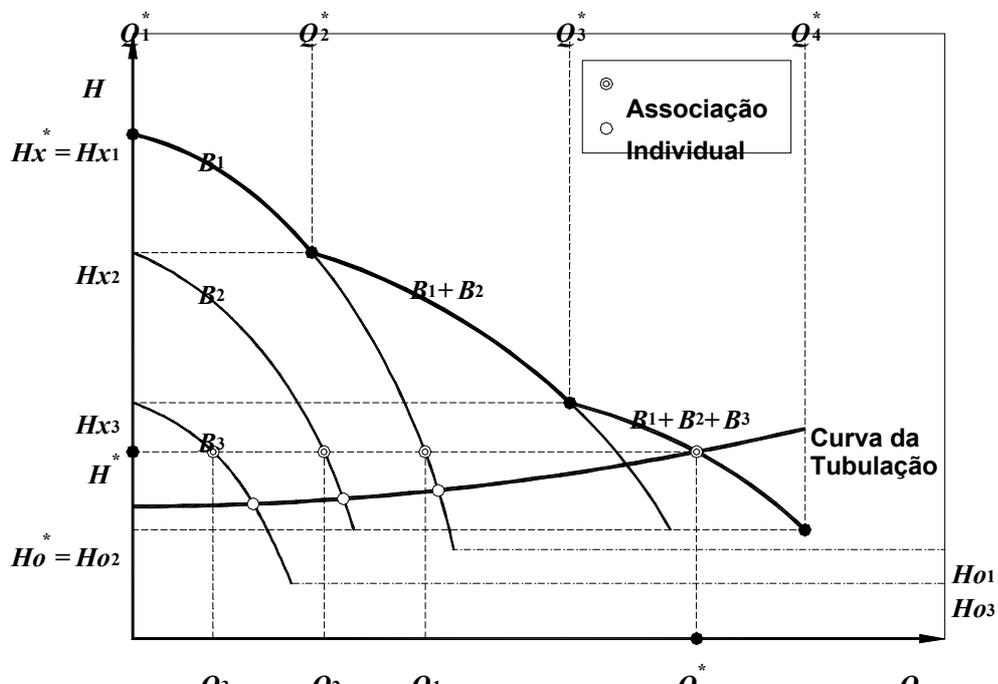


Figura 16 - Esquema de uma associação em paralelo de três bombas diferentes, para a obtenção da curva principal da associação.

Sistematizou-se um conjunto de procedimentos, visando sua implementação computacional, para a determinação da curva principal de uma associação em paralelo de um número N de bombas diferentes ou não. Para auxiliar na compreensão destes procedimentos, foi elaborado o esquema da Figura 16, no qual estão representadas as curvas principais de três bombas diferentes, a curva principal da associação, a curva da tubulação, entre outros detalhes. No esquema, os sub-índices numéricos identificam a bomba, os sub-índices "o" e "x" designam valores mínimo e máximo e o sobre-índice "*" está relacionado com as grandezas da associação.

Considerando L a lista ou o conjunto das B_i ($i = 1, 2, \dots, N$) bombas da associação em paralelo, os passos para determinação da sua curva principal consistiram em:

- i. Calcular as alturas manométricas máxima (Hx_i) e mínima (Ho_i) de cada bomba, ou seja:

para i de 1 até N faça

$$Hx_i = H_i(0)$$

$$Ho_i = H_i(Qx_i)$$

fim

- ii. Encontrar a altura manométrica mínima da associação, Ho^* , cujo valor é igual à maior das alturas manométricas mínimas:

$$Ho^* = \text{Max}(Ho_1, Ho_2, \dots, Ho_N)$$

- iii. Retirar de L todas as bombas cujas alturas manométricas máximas sejam iguais ou inferiores à Ho^* :

para i de N até 1 faça

se $Hx_i \leq Ho^*$ então

$$L = L - B_i$$

$$N = N - 1$$

fim

- iv. Ordenar L de forma decrescente com as alturas manométricas máximas, isto é, com valores Hx_1, Hx_2, \dots, Hx_N . As bombas entrarão em operação segundo

esta ordem, partindo de uma vazão nula.

- v. Dividir os trechos 2, 3, ..., $N-1$ e N em $m=10$ níveis de altura manométrica, eqüidistantes de Δh ; calcular a vazão da associação para cada nível, somando-se as vazões determinadas (conforme o nível) para cada bomba contribuinte; armazenar o par de valores; e no final de cada trecho, ajustar um conjunto de splines cúbicos para os $m+1$ pares de valores.

$$H_1^*(Q) = H_1(Q)$$

$$m = 10$$

para i de 2 até N faça

$$\text{se } i < N \text{ então } \Delta h = (Hx_i - Hx_{i+1})/m$$

$$\text{senão } \Delta h = (Hx_i - Ho^*)/m$$

para j de 0 até m faça

$$H_j^* = Hx_i - j \Delta h$$

$$Q_j^* = 0$$

para k de 1 até i faça

$$Q_j^* = Q_j^* + \text{Raiz}(H_k(Q) = H_j^*)$$

fim "para j "

fim "para k "

$$H_i^*(Q) = \text{SplineCúbico}(Q_0^*, H_0^*, Q_1^*, H_1^*, Q_2^*, H_2^*, \dots, Q_m^*, H_m^*, Q)$$

fim "para i "

Os splines cúbicos permitem que as derivadas sejam fixadas no extremos e os detalhes sobre como fazê-lo são apresentados por SCHEID (1991). Quanto à divisão dos trechos, pode-se utilizar m constante e Δh variável ou Δh constante (0,10 ou 0,20 m, por exemplo) e m variável, conforme a amplitude de altura manométrica de cada trecho. Utilizou-se m constante e Δh variável, por questão de simplicidade, mas a segunda opção é conceitualmente mais consistente.

A vazão da associação é determinada no laço mais interno do algoritmo, para cada nível de altura manométrica. Pode-se observar que, neste laço, são consideradas somente as i bombas que estão operando com vazões

efetivas, ou não nulas. A função *Raiz* retorna o valor de Q para o qual a equação passada como argumento se anula. Se as equações $H_i(Q)$ forem polinomiais, como aquelas estudadas no capítulo anterior, pode-se utilizar um dos vários métodos para a determinação de raízes de polinômios. Para o caso de equações $H_i(Q)$ não polinomiais, recomenda-se a utilização do método de Newton utilizando o valor calculado anteriormente como estimativa inicial. Outro método com excelente convergência é o Pégaso (versão otimizada do método da secante) cujo algoritmo é apresentado por BARROSO *et al* (1987).

Para determinar a altura manométrica da associação para uma vazão qualquer é necessário localizar o trecho onde a vazão se encontra, pois deve-se utilizar o spline cúbico correspondente a ele. Como os trechos estão ordenados, esta localização pode ser feita por meio de uma busca binária, cujo algoritmo é bastante simples e eficiente.

2.4. Operação de bombas em redes de condutos

Conforme a geometria, as redes de condutos podem ser ramificadas ou malhadas, sendo que as primeiras são mais comuns em perímetros irrigados, por terem custos menores, enquanto que as segundas são mais utilizadas nos sistemas de distribuição de água das cidades (SERRANO, 1986).

Existem situações, como na rede de condutos esquematizada na Figura 17, onde as bombas operam simultaneamente para suprirem as demandas de vazão e de pressão exigidas ao longo da rede, porém não compõem uma associação em série, porque estão em condutos diferentes, e tampouco em paralelo, por não estarem submetidas à mesma pressão.

Nesta rede, os reservatórios R_1 e R_2 abastecem os reservatórios R_6 e R_7 por meio das bombas B_1 e B_2 , cujas equações das curvas principais são $H_1(Q)$ e $H_2(Q)$. Admitiu-se que os níveis d'água nos quatro os reservatórios são mantidos constantes, o que caracteriza regime de escoamento permanente.

Redes malhadas de condutos sem perfurações podem ser resolvidas método iterativo de Hardy Cross, pelo qual a rede é analisada como um conjunto de malhas e de nós, sobre os quais são aplicados os balanços de massa e de energia. LENCASTRE (1972), STREETER (1974), VENARD e STREET (1978) e DACACH (1979) exemplificam a aplicação deste método

para resolver redes malhadas simples sem a presença de bombas.

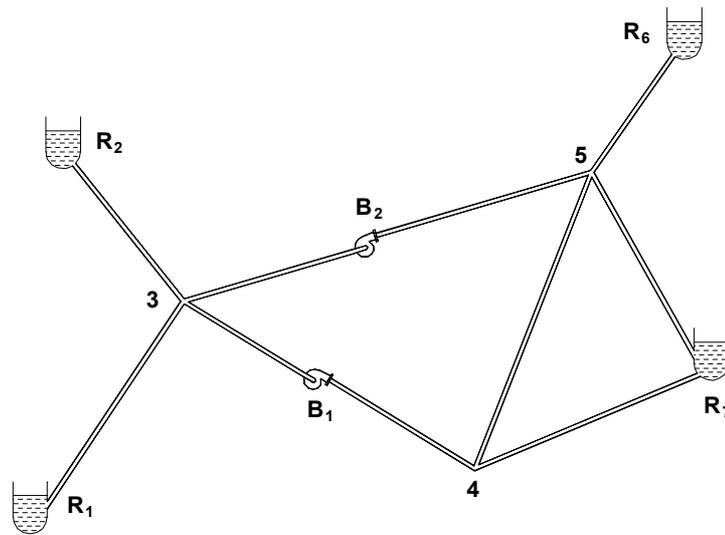


Figura 17 - Esquema de uma rede de condutos, para a análise da operação das bombas que dela fazem parte.

Independente do método, a solução dos problemas consiste em aplicar a equação da energia entre dois pontos quaisquer da rede e a equação da continuidade nos nós. Assim, a primeira etapa da solução consistiu na aplicação da equação da energia para os dois tipos de condutos encontrados na rede da Figura 17: condutos simples e condutos com bomba, ambos esquematizados na Figura 18.

Aplicando a equação da energia entre os pontos 1 e 2 do conduto simples (Figura 18a), tem-se:

$$E_1 = E_2 + Ht \quad (44)$$

em que

E_1 = energia total (por unidade de peso específico) no ponto 1, m;

E_2 = energia total (por unidade de peso específico) no ponto 2, m; e

Ht = perda de carga entre os pontos 1 e 2, m.

Como a perda de carga é proporcional a um expoente da vazão (equação 41), a equação 44 pode ser reescrita como:

$$E_1 - E_2 = KQ^n \quad (45)$$

Para os propósitos desta análise, foi conveniente expressar a vazão em função da variação de energia, ou seja, transformar a equação 45 em:

$$Q = -c (E_2 - E_1)^r \quad (46)$$

em que $c = k^{-1/n}$; e $r = n^{-1}$. O valor c depende das características físicas (diâmetro, comprimento e rugosidade) do conduto e o sinal negativo que o precede, na equação 46, se deve ao fato de E_2 ser menor do que E_1 . O expoente r é igual a 0,50 para a equação de Darcy e 0,54 para a equação de Hazen-Williams.

Aplicando a equação da energia entre os pontos S e R do conduto com bomba (Figura 18b), tem-se:

$$E_S + H(Q) - Ht(Q)_r - E_R = 0 \quad (47)$$

em que

E_S = energia total na sucção, m;

E_R = energia total no recalque, m;

$H(Q)$ = altura manométrica da bomba, m; e

$Ht(Q)$ = perda de carga ocorrida na sucção e no recalque, m;

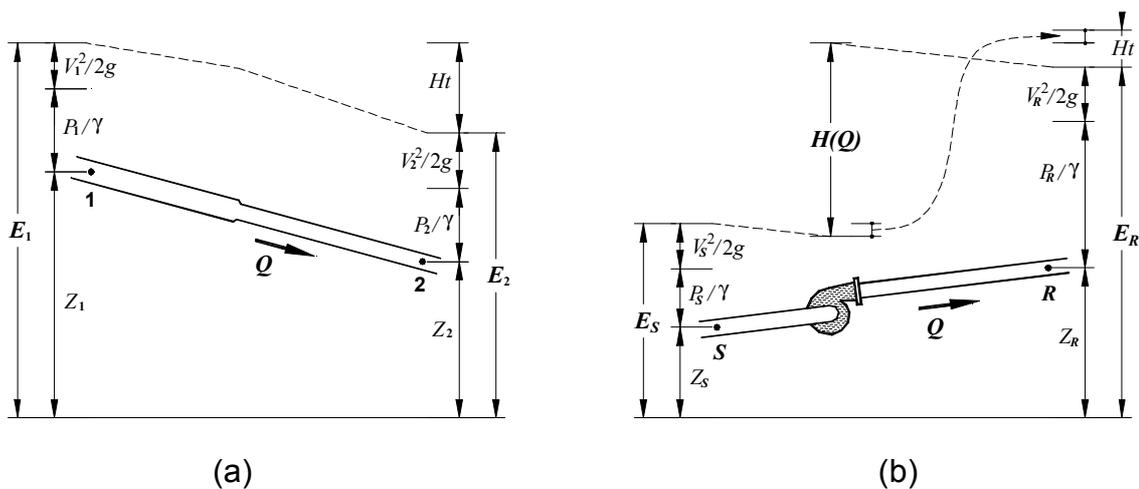


Figura 18 - Esquema de um conduto simples (a); e de outro com bomba (b), para a aplicação da equação da energia.

Na rede da Figura 17 existem cinco incógnitas: E_3 , E_4 , E_5 , $Q_{3,4}$ e $Q_{3,5}$, sendo que as três primeiras são as energias totais nos nós 3, 4 e 5 e, as duas últimas, as vazões conduzidas nos condutos (3,4) e (3,5). Para determiná-las, é necessário montar e resolver um sistema com 5 equações independentes e que contenham as incógnitas.

As três primeiras equações foram obtidas aplicando-se a lei da continuidade para os três nós (3, 4 e 5) e convencionando-se que as vazões que chegam a um nó têm sinais positivos e as que o deixam têm sinais negativos. As duas equações restantes foram escritas com base na equação de altura manométrica de uma bomba instalada (equação 47):

$$\begin{cases} Eq_1 : -Q_{3,5} - Q_{3,4} - c_{3,2}(E_3 - E_2)^r - c_{3,1}(E_3 - E_1)^r = 0 \\ Eq_2 : Q_{3,4} - c_{4,5}(E_4 - E_5)^r - c_{4,7}(E_4 - E_7)^r = 0 \\ Eq_3 : Q_{3,5} - c_{5,4}(E_5 - E_4)^r - c_{5,6}(E_5 - E_6)^r - c_{5,7}(E_5 - E_7)^r = 0 \\ Eq_4 : E_3 + H_{3,4}(Q_{3,4}) - Ht_{3,4}(Q_{3,4}) - E_4 = 0 \\ Eq_5 : E_3 + H_{3,5}(Q_{3,5}) - Ht_{3,5}(Q_{3,5}) - E_5 = 0 \end{cases} \quad (48)$$

O sistema de equações 48 pode ser resolvido pelo método de Newton, bastante utilizado para a resolução de sistemas de equações não lineares, contendo N equações e N incógnitas. Sua fórmula de recorrência é dada por:

$$\begin{vmatrix} X_1^{m+1} \\ X_2^{m+1} \\ \vdots \\ X_N^{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^m \\ X_2^m \\ \vdots \\ X_N^m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_N \end{vmatrix}$$

em que X é um vetor contendo as incógnitas X_1, X_2, \dots, X_N ; e ΔX é outro vetor contendo as correções para X , determinadas na m -ésima iteração por meio da solução do sistema linear:

$$\begin{vmatrix} \partial Eq_1 / \partial X_1 & \partial Eq_1 / \partial X_2 & \dots & \partial Eq_1 / \partial X_N \\ \partial Eq_2 / \partial X_1 & \partial Eq_2 / \partial X_2 & \dots & \partial Eq_2 / \partial X_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial Eq_N / \partial X_1 & \partial Eq_N / \partial X_2 & \dots & \partial Eq_N / \partial X_N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Eq_1(X_1, X_2, \dots, X_N) \\ Eq_2(X_1, X_2, \dots, X_N) \\ \vdots \\ Eq_N(X_1, X_2, \dots, X_N) \end{vmatrix} \quad (49)$$

Na equação 49, a matriz de coeficientes recebe a denominação de matriz Jacobiana e o vetor de termos independentes contém as equações que se pretende anular, quando calculadas com as raízes procuradas. A matriz Jacobiana do sistema 48 está apresentado no Quadro 6.

Mesmo para uma rede simples, como a deste exemplo, a montagem do sistema de equações e da sua matriz Jacobiana, representam a parte mais trabalhosa da solução. Uma vez montados, podem ser resolvidos em calculadoras científicas como as da série HP48, ou em planilhas eletrônicas.

Apesar da aparente complexidade, nota-se que há uma lógica bem definida na montagem do sistema, pois suas equações sempre derivam das equações 46 e 47 e a presença ou não das variáveis em cada equação depende das características topológicas da rede, isto é, da forma como os nós estão conectados por meio dos condutos. Observada esta lógica, decidiu-se desenvolver um algoritmo para montar o sistema de equações e a sua matriz Jacobiana.

Quadro 6 - Matriz Jacobiana do sistema 48

	E_3	E_4	E_5	$Q_{3,4}$	$Q_{3,5}$
Eq_1	$-rc_{3,2} E_3 - E_2 ^{r-1}$	0	0	-1	-1
Eq_2	0	$-rc_{4,5} E_4 - E_5 ^{r-1} +$ $-rc_{4,7} E_4 - E_7 ^{r-1}$	$rc_{4,5} E_4 - E_5 ^{r-1}$	1	0
Eq_3	0	$rc_{5,4} E_5 - E_4 ^{r-1}$	$-rc_{5,4} E_5 - E_4 ^{r-1} +$ $-rc_{5,6} E_5 - E_6 ^{r-1}$	0	1
Eq_4	1	-1	0	$\frac{d[H_{3,4}(Q_{3,4}) - H_{t_{3,4}}(Q_{3,4})]}{dQ_{3,4}}$	0
Eq_5	1	0	-1	0	$\frac{d[H_{3,5}(Q_{3,5}) - H_{t_{3,5}}(Q_{3,5})]}{dQ_{3,5}}$

O algoritmo será descrito utilizando uma pseudo linguagem, similar às linguagens de programação estruturadas mais utilizadas como Pascal, C e Java. Definiu-se uma estrutura de dados simplificada, na qual a clareza foi priorizada, em detrimento de aspectos como estética, tamanho, entre outros.

Sob o aspecto de estrutura de dados, uma rede de condutos pode ser vista como contendo uma lista de nós e outra de condutos conectando os nós. Listas de um mesmo tipo de dado, linearmente indexadas, são estruturas conhecidas como vetores e listas de dupla indexação como matrizes. Dados de tipos diferentes são agrupados em estruturas denominadas registros. Similarmente à estrutura de registro, as linguagens de programação modernas oferecem uma estrutura flexível denominada objeto, na qual dados de diferentes tipos (inclusive objetos) são agrupados com as funções e com as rotinas que os manipulam.

A seguir, são apresentadas, de forma simplificada, as estruturas de dados utilizadas para definir: *Rede*, *Nó*, *Conduto* e *Bomba*. Os textos inseridos entre aspas e em itálico, nas estruturas e no algoritmo, são comentários.

```

tipo Rede ← objeto
  N : inteiro           "número de nós"
  Nós : vetor[1 a N] de Nó      "lista de nós"
  M : inteiro           "número de condutos"
  Cond : vetor[1 a M] de Conduto "lista de condutos"
  Ne : inteiro          "número de nós com E=?"
  Le : vetor[1 a Ne] de Nó      "nós com E=?"
  Nq : inteiro          "número de bombas (Q=?)"
  Lq : vetor[1 a Nq] de Conduto "cond. com bombas"
  Eqs : vetor[1 a Ne+Nq] de real "termos indep."
  Delta : vetor[1 a Ne+Nq] de real "correções"
  Jac : matriz[1 a Ne+Nq, 1 a Ne+Nq] de real
fim

```

```

tipo Nó ← registro
  N : inteiro           "número de conexões"
  Lc : vetor[1 a N]    "lista de cond. conectados"
  E : real              "energia total"
  Ex : lógico          "verdadeiro se E=?"
  u : inteiro          "índice de E em Eqs"
fim

```

```

tipo Conduto ← objeto
  Na : Nó              "nó inicial"
  Nb : Nó              "nó final"
  c : real              "coeficiente"
  Q : real              "vazão calculada"
  u : inteiro          "índice de Q em Eqs"
  B : objeto_bomba    "bomba; nulo, se não houver"
  função Ht(Q)         "retorna a perda de carga"
  função DHt(Q)        "retorna dHt(Q)/dQ"
fim

```

```

tipo Bomba ← objeto
  Dados : registro
  função H(Q)           "retorna a altura manom."
  função DH(Q)         "retorna dH(Q)/dQ"
fim

```

Considerando que a lista de condutos e a lista de nós são dados de entrada, a solução da rede consiste em:

i. Montar a lista de conexões de cada nó, partir da lista de condutos.

```

para  $i$  de 1 até  $Rede.N$  faça
   $Rede.Nós[i].N = 0$            "zera o núm. de conexões"
para  $i$  de 1 até  $Rede.M$  faça
   $Ci = Rede.Cond[i]$          " $Ci$  (Conduto) é var. auxiliar"
   $Ci.Na.N = Ci.Na.N + 1$ 
   $Ci.Na.Nós[Ci.Na.N] := Nb$ 
   $Ci.Na.Cond[Ci.Na.N] = Ci$ 
   $Ci.Nb.N = Ci.Nb.N + 1$ 
   $Ci.Nb.Nós[Ci.Nb.N] = Na$ 
   $Ci.Na.Cond[Ci.Nb.N] = Ci$ 
fim

```

ii. Montar a lista dos nós ($Rede.Ne$), cujas energias totais são incógnitas.

```

 $Rede.Ne = 0$ ;
para  $i$  de 1 até  $Rede.N$  faça
   $Ni = Rede.Nós[i]$ 
  Se  $Ni.Ex = verdadeiro$  então
     $Rede.Ne = Rede.Ne + 1$ 
     $Rede.Le[Rede.Ne] = Ni$ 
     $Ni.u = Rede.Ne$ 
  fim
fim

```

iii. Montar a lista dos condutos ($Rede.Lq$) que contêm bomba(s) e que em pelo menos um dos seus extremos a energia total seja incógnita. Se os totais de energia na sucção e no recalque são conhecidos, a vazão da bomba é determinada normalmente e não deve entrar como incógnita no sistema.

```

 $Rede.Nq = 0$ ;
para  $i$  de 1 até  $Rede.M$  faça
   $Ci = Rede.Cond[i]$ 
  Se  $Ci.B \neq vazio$  e ( $Ci.Na.u > 0$  ou  $Ci.Nb.u > 0$ ) então
     $Rede.Nq = Rede.Nq + 1$ 
     $Rede.Lq[Rede.Nq] = Ci$ 
     $Ci.u = Rede.Ne + Rede.Ne$ 
  fim "então"
fim "para  $i$ "

```

v. Calcular os elementos do vetor de termos independentes (*Rede.Eq*) e da matriz Jacobiana (*Rede.Jac*).

```

para i de 1 até Rede.Ne faça
  Ni = Rede.Nós[i]
  Eq[i] = 0
  para j de 1 até Ni.N faça
    Cj = Ni.Cond[j]           "Cj (Conduto) é var.aux."
    se Cj.B = vazio então
      Nj = Ni.Nós[j]
      Eq[i] = Eq[i] + -Cj.c * (Ni.E - Nj.E)r
      Jac[i, i] = Jac[i, i] + r * -Cj.c * |Ni.E - Nj.E|r-1
      se Nj.u > 0 então           " se Nj.E=? "
        Jac[i, Nj.u] = r * Cj.c * |Ni.E - Nj.E|r-1
        Jac[Nj.u, i] = Jac[i, Nj.u]
      fim
    fim
  fim
fim
fim
fim

para i de 1 até Rede.Nq faça
  Ci = Rede.Cond[i]
  Ns = Ci.Na
  Nr = Ci.Nb
  Eq[Ci.u] = Ns.E + Ci.B.H(Ci.Q) - Ci.Ht(Ci.Q) - Nr.E
  Jac[Ci.u, Ci.u] = Ci.B.DH(Ci.Q) - Ci.DHt(Ci.Q)
  se Ns.u > 0 então           " se Ns.E=? "
    Eqs[Ns.u] = Eqs[Ns.u] - Ci.Q
    Jac[Ns.u, Ci.u] = -1
    Jac[Ci.u, Ns.u] = 1
  fim
  se Nr.u > 0 então           " se Nj.E=? "
    Eqs[Nr.u] = Eqs[Ns.u] + Ci.Q
    Jac[Nr.u, Ci.u] = 1
    Jac[Ci.u, Nr.u] = -1
  fim
fim
fim

```

vi. Calcular as correções para as incógnitas.

```

Delta = ResolveSistemaLinear(Jac, Eq)
para i de 1 até Ne faça
  Le[i].E := Le[i].E - Delta[i]
para i de 1 até Nq faça
  Lq[i].Q := Lq[i].Q - Delta[Ne+i]

```

vii. Verificar se todas as correções (*Delta[i]*) são suficientemente pequenas; se sim, o problema está solucionado; se não, retorna ao passo (iv).

Para demonstrar o procedimento de determinação da vazão de bombas operando em rede de condutos, utilizou-se a rede esquematizada na Figura 17, arbitrando-se a energia total de cada reservatório, os coeficientes c de cada conduto, a equação de altura manométrica de cada bomba e as estimativas iniciais para as cinco incógnitas do problema. Os valores referidos estão apresentados nos Quadros 7 até 10.

Quadro 7 - Energia total em cada reservatório, em metros

E_1	E_2	E_6	E_7
8,0 m	4,0 m	40,0 m	35,0 m

Quadro 8 - Coeficiente de proporcionalidade (c) da vazão dos condutos

$c_{1,3}$	$c_{2,3}$	$c_{3,4}$	$c_{3,5}$	$c_{4,5}$	$c_{4,7}$	$c_{5,6}$	$c_{5,7}$
0,006	0,007	0,005	0,006	0,004	0,011	0,010	0,008

Quadro 9 - Equações das curvas principais das bombas

${}^*H_{3,4}(Q_{3,4})$	${}^*H_{3,5}(Q_{3,5})$
$50 - 500Q_{3,4} - 9000Q_{3,4}^2 \quad \{0 \leq Q_{3,4} \leq 0,018\}$	$55 - 60Q_{3,5} - 60000Q_{3,5}^2 \quad \{0 \leq Q_{3,5} \leq 0,025\}$

* Vazões expressas em $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ e alturas manométricas em metros.

Quadro 10 - Estimativas iniciais da incógnitas

E_3	E_4	E_5	$Q_{3,4}$	$Q_{3,5}$
3,0 m	42,0 m	50,0 m	$0,018 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$	$0,025 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$

As estimativas iniciais dos valores de E_3 , de E_4 e de E_5 foram feitas supondo-se que as perdas de carga nos condutos (1,3), (4,7) e (5,7) seriam de dois, sete e 10 metros, respectivamente. As estimativas iniciais dos valores de $Q_{3,4}$ e de $Q_{3,5}$ foram as vazões máximas das bombas B_1 e B_2 . Considerou-se que a solução do sistema foi atingida quando as correções das energias e das vazões foram inferiores a 10^{-4} e a 10^{-5} , respectivamente.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A solução do problema de rede proposto, segundo a metodologia apresentada, foi obtida após 9 iterações e os valores das incógnitas e de suas correções estão apresentados no Quadro 11, no qual é observável que todas as correções decrescem, em valor absoluto, mais do que linearmente. Segundo CUNHA (1993), é demonstrável que, também no caso de sistemas, a convergência do método de Newton é quadrática, ou seja, a cada passo a correção decresce proporcionalmente com o quadrado da correção no passo anterior.

Quadro 11 - Refinamento da solução do sistema de equações 48

Iteração	E_3	ΔE_3	E_4	ΔE_4	E_5	ΔE_5	$Q_{3,4}$	$\Delta Q_{3,4}$	$Q_{3,5}$	$\Delta Q_{3,5}$
0	3,0000	—	42,0000	—	50,0000	—	0,01800	—	0,02500	—
1	0,9385	2,0615	36,1839	5,8161	36,7161	13,2839	0,01098	0,00702	0,01665	0,00835
2	2,0075	-1,0691	38,3154	-2,1315	42,8860	-6,1699	0,00875	0,00223	0,01289	0,00376
3	2,3146	-0,3071	36,9347	1,3807	39,5579	3,3281	0,00913	-0,00038	0,01392	-0,00103
4	2,5365	-0,2219	37,3604	-0,4256	41,1605	-1,6026	0,00905	0,00008	0,01333	0,00059
5	2,4713	0,0652	37,1589	0,2014	40,2593	0,9012	0,00910	-0,00005	0,01367	-0,00034
6	2,4838	-0,0125	37,1858	-0,0269	40,3971	-0,1378	0,00909	0,00001	0,01361	0,00005
7	2,4859	-0,0021	37,1892	-0,0034	40,4129	-0,0158	0,00909	0,00000	0,01361	0,00001
8	2,4860	-0,0001	37,1892	0,0000	40,4130	-0,0001	0,00909	0,00000	0,01361	0,00000
9	2,4860	0,0000	37,1892	0,0000	40,4130	0,0000	0,00909	0,00000	0,01361	0,00000

Poder-se-ia argumentar que a boa convergência foi conseguida porque as estimativas iniciais das incógnitas foram relativamente próximas das raízes procuradas. No sentido de verificar se esta suposta argumentação seria procedente ou não, decidiu-se investigar, por meio de simulação, como as estimativas iniciais afetariam a solução do problema. A simulação consistiu em resolver o sistema 1000 vezes, sendo que a cada vez os valores das incógnitas foram estimados aleatoriamente, por uma função geradora de números aleatórios, uniformemente distribuídos no intervalo: a) valor raiz da incógnita dividido por λ ; e b) valor raiz da incógnita multiplicado por λ , sendo $\lambda > 1$. Com $\lambda=2$, por exemplo, variaram-se os valores das incógnitas entre 50 e 100% dos valores das suas respectivas soluções. A "semente" do gerador de números aleatórios foi a mesma para cada valor de λ . Uma síntese dos resultados destas simulações está apresentada no Quadro 12.

Quadro 12 - Estatística sobre a convergência do método de Newton, em função das estimativas iniciais das incógnitas, obtidas por simulação

Parâmetro	Valores de λ							
	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
Número mínimo de iterações	4	5	5	6	6	7	7	8
Número máximo de iterações	12	15	16	33	34	43	36	62
Número médio de iterações	10	11	12	14	15	16	17	19
Desvio padrão do núm. de iter.	1,6	1,9	1,9	2,1	2,2	2,5	2,5	2,9
Número de não convergências	0	0	0	57	23	52	66	96

Analisando o Quadro 12, pode-se observar que: 1) o número médio de iterações para resolver o sistema de equações não linear cresce com o valor de λ , o que é previsível, pois as estimativas iniciais distanciam-se das suas respectivas soluções; 2) até para $\lambda = 1,75$ houve 100% de convergência, com um máximo de 16 iterações; e 3) para estimativas iniciais inferiores a 50% e superiores a 100% aos valores das soluções, a probabilidade de a solução não convergir é maior do que 5%. O fato de que com $\lambda = 2$ houve menos convergências do que com $\lambda = 2,5$ e $\lambda = 3,0$ pode ser atribuído à aleatoriedade.

4. CONCLUSÕES

A análise da associação de bombas em série revelou que não há complexidade, sob o aspecto analítico, para se determinar a curva principal da associação, uma vez esta é obtida pela soma das equações que representam as curvas principais das bombas associadas. Todavia, é lícito levantar a hipótese de que, na prática, haja uma diferença entre a curva real e a curva teórica da associação, sendo que esta diferença seria explicada, em parte, pelo fato de que algumas bombas podem operar mais eficientemente com pressão positiva na sucção, uma vez que não precisando succionar o líquido não haveria a formação de bolhas de vapor, que agem diminuindo seu rendimento. Este raciocínio não é e nem pretende ser conclusivo, mas indica a necessidade de que estudos sejam direcionados para este sentido.

Mostrou-se, de uma forma algorítmica, que a metodologia para a obtenção da curva principal da associação de bombas em paralelo pode ser implementada computacionalmente, na medida em que é conceitualmente

consistente e que os métodos numéricos apresentados e sugeridos são consagrados por suas eficiências e estabilidades. Para tal, é necessário conhecer as equações das curvas principais das bombas associadas e os limites mínimo e máximo da vazão, dentro dos quais estas equações são válidas. A curva resultante será composta de tantos trechos quanto seja o número de curvas principais com equações distintas.

O estudo do problema de determinação do ponto de operação de bombas em redes de condutos revelou que este problema pode ser resolvido satisfatoriamente por meio da solução de um sistema de equações não lineares, cuja montagem pode ser facilitada pela utilização do algoritmo desenvolvido e apresentado.

Embora o problema de rede hidráulica apresentado e resolvido seja incomparável, sob todos os aspectos, aos sistemas de grande porte como aqueles de distribuição de água das grandes cidades, verificou-se que o método de Newton foi adequado para resolvê-lo, mesmo com estimativas iniciais relativamente distantes das soluções, como mostrou a simulação. Como o sistema de equações é esparso, recomenda-se que, em estudos futuros, sejam analisados métodos específicos para a solução de sistemas não lineares esparsos. Com a utilização destes métodos, é presumível que se consigam economias de memória e de processamento, especialmente para sistemas de maior dimensão.

5. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; CAMPOS, F. F. C.; CARVALHO, M. L. B.; Maia, M. L. **Cálculo numérico**. São Paulo: Harbra Ltda, 1987. 367 p.

CUNHA, C. **Métodos numéricos para as engenharias e ciências aplicadas**. Campinas: UNICAMP, 1993. 265 p.

DACACH, N, G. **Sistemas urbanos de água**. Rio de Janeiro: LTC, 1979. 490 p.

LENCASTRE, A. **Manual de hidráulica geral**. São Paulo: USP, 1972. 411 p.

MACINTYRE, A. J. **Bombas e instalações de bombeamento**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 667 p.

SANTOS, W. L. **Software para seleção e dimensionamento hidráulico de bombas centrífugas**. Viçosa: UFV, 1995. 79 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) - Universidade Federal de Viçosa, 1995.

SCHEID, F., **Análise numérica**. Lisboa: Mc Graw-Hill, 1991. 617 p.

SERRANO, J. G. **Redes de distribución de riego**. Córdoba, 1986. 157 p. (Curso Internacional: Ingenieria de Regadios)

STREETER, V. L. **Mecânica dos fluidos**. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1974. 736 p.

VENARD, J. K.; STREET, R. L. **Elementos de mecânica dos fluidos**. Rio de Janeiro: Guanabara dois. 1978. 687 p.

CAPÍTULO 4

SELEÇÃO E DIMENSIONAMENTO DO CONJUNTO TUBULAÇÃO - MOTOR ELÉTRICO - BOMBA CENTRÍFUGA PELO CRITÉRIO DE CUSTO MÍNIMO

1. INTRODUÇÃO

Na agricultura moderna, onde o sucesso ou a frustração de expectativas do empreendimento pode ser definido nos detalhes, é imprescindível que as soluções de engenharia, que a ela são destinadas, sejam fundamentadas em critérios técnicos e econômicos. Cada vez mais, tem-se buscado não apenas soluções viáveis economicamente, mas, sobretudo, soluções que sejam ótimas e que considerem os aspectos relacionados com a exploração sustentável do meio ambiente, tendo em vista que a legislação ambiental e a consciência ecológica evoluíram sobremaneira nos últimos anos.

Quanto ao aspecto econômico, a maximização dos indicadores de rentabilidade do empreendimento está baseada no aumento da produtividade e na redução dos custos dos fatores de produção. Uma técnica incontestável para incrementar a produtividade na agricultura é a irrigação, porém, esta implica no acréscimo dos custos, tantos fixos como variáveis, que podem e devem ser minimizados por meio das várias técnicas existentes.

Segundo GOMES (1994), com relação ao dimensionamento de redes de distribuição, as vantagens dos métodos de otimização são tão grandes sobre os métodos aproximados, que estes últimos praticamente não são mais utilizados. Como exemplo, GOMES (1995) mostra que a utilização do Método de Granados, no dimensionamento de sistemas coletivos de irrigação pressurizada, pode representar uma economia de 10 a 30% no custo total das instalações, quando comparado ao método convencional de dimensionamento.

Para o cálculo dos diâmetros das tubulações de recalque dos sistemas de bombeamento ainda é comum a utilização de fórmulas práticas, que consideram apenas a vazão, como a Fórmula de Bresse. Estas fórmulas contêm implicitamente o conceito de velocidades econômicas, mas segundo

DENÍCULI (1993), o correto é fazer um balanço econômico do custo da tubulação de recalque e do custo de operação e manutenção do sistema.

REIS et al (1998) simularam diversas situações de bombeamento, comuns de campo, objetivando estudar os custos de bombeamento para obter uma relação que expressasse o diâmetro econômico da tubulação de aço zincado em função da vazão, do comprimento da tubulação, do desnível geométrico e do tempo de funcionamento do sistema, em horas por ano. Foram simulados vazões entre 5 e 450 m³/h, diâmetros entre 50 e 250 mm, comprimentos entre 100 e 2000 m, desníveis geométricos entre 0 e 60 m e tempos de funcionamento entre 1000 e 4000 horas por ano. A análise econômica foi feita considerando os preços reais das tarifas de energia elétrica, e de todos os equipamentos envolvidos, incluindo acessórios. Procederam a análises estatísticas e concluíram que o diâmetro econômico pode ser expresso pela equação:

$$D = 2,15 + 0,01T + 6,28(\ln(Q))^2 \quad (50)$$

em que D é expresso em mm; T em horas; e Q em m³ h⁻¹. As variáveis que não constam na equação 50 foram insignificantes, estatisticamente, para o ajuste da equação.

Dada a importância da seleção de equipamentos baseada em critérios técnicos e econômicos e em função da disponibilidade de um extenso banco de dados sobre bombas centrífugas e motores elétricos, objetivou-se neste trabalho selecionar e dimensionar o conjunto tubulação, motor elétrico e bomba centrífuga pelo critério técnico-econômico.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para mostrar a importância da análise de custos em instalações de bombeamento, resolveu-se um estudo de caso hipotético e simplificado, que consistiu em selecionar e dimensionar uma tubulação de aço zincado e um conjunto motobomba para operar 3600 horas por ano, bombeando 325 m³/h para um reservatório situado a 900 m de distância e 30 m acima da fonte de captação.

A seleção do motor elétrico requer a potência da bomba, que requer a vazão e a altura manométrica, que é a soma do desnível geométrico e da perda de carga, cujo valor é calculado em função da vazão, do diâmetro, do comprimento e do material da tubulação. Portanto, o primeiro passo foi a determinação do diâmetro por meio da equação 50, utilizando-se a vazão e o tempo anual funcionamento do sistema. Como a equação 50 indicou um valor de 248mm, utilizou-se o diâmetro comercial de 250mm.

Considerando o diâmetro interno da tubulação igual ao nominal, tem-se que a velocidade do escoamento é de 1,84 m s⁻¹ (valor dentro dos limites técnicos recomendados) e a perda de carga é de 12,50 m, calculada pela fórmula de Hazen-Williams, com C_{HW} igual a 125.

Utilizando o programa MaxBombas versão *Millennium* com os dados de projeto ($Q = 325$ m³/h; $H = 42,50$ m) e optando apenas por bombas da marca IMBIL, obteve-se três bombas selecionadas, cujas informações relevantes para esta análise estão apresentadas no Quadro 13. Restringiu-se a seleção à Marca IMBIL porque o fabricante desta marca foi o único a disponibilizar sua lista de preços praticados no mercado

Quadro 13 - Dados das bombas IMBIL selecionadas

Dados	1ª bomba	2ª bomba	3ª bomba
Modelo	ITA 150-330	ITA 150-500	ITA 100-200
Velocidade do rotor (rpm)	1750	1180	3540
Rotor comercial → usinado (mm)	330 → 318	480 → 479	190 → 187
Rendimento (%)	83,6	78,7	71,9
Potência requerida (cv)	61,2	65,0	71,2
Preço* (R\$)	2.910,65	7.463,15	1.811,05
Motor elétrico comercial (cv)	75	75	75

* Fonte: IMBIL - Indústria e Manutenção de Bombas ITA Ltda. (data: 25/01/01)

Comparando os dados dos modelos de bomba ITA 150-330 (B_1), ITA 150-500 (B_2) e ITA 100-200 (B_3), excluiu-se o modelo B_2 da análise econômica, porque além ser menos eficiente hidraulicamente que B_1 , o seu preço é 156,4% maior que o de B_1 . A comparação por meio de critério econômico recaiu sobre os modelos B_1 e B_3 , cujas curvas de isorendimentos, dos rotores comerciais e dos rotores usinados estão apresentadas, respectivamente, nas Figuras 19 e 20, geradas como parte integrante dos resultados da seleção pelo programa MaxBombas.

Analisando os dados das duas bombas, observa-se que B_1 tem preço maior que B_3 , porém, B_1 apresenta rendimento hidráulico superior e, deste modo, a diferença paga a mais para adquiri-la poderia ser superada com a economia de energia ao longo do tempo, conforme o número de horas de utilização. Além disso, o motor elétrico exigido por B_3 deve ser de 3600 rpm (dois pólos), que normalmente é mais barato do que o motor de 1800 rpm (quatro pólos), exigido por B_1 . Todavia, há um problema de natureza técnica com relação à bomba B_3 , qual seja, sua vazão operacional ($325 \text{ m}^3/\text{h}$) está muito próximo da vazão máxima ($\pm 375 \text{ m}^3/\text{h}$, considerando a curva do diâmetro comercial de 190mm), como pode ser observado no ponto A da Figura 20. Embora seja recomendado que a bomba opere em um faixa de vazões mais central, a bomba B_3 continuará sendo analisada em termos econômicos, para que as opções não fiquem muito restritas.

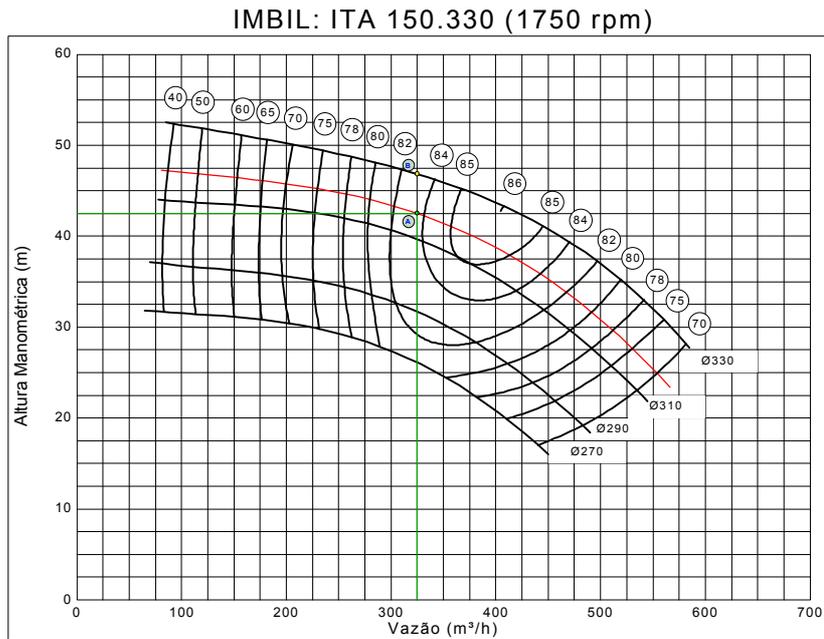


Figura 19 - Curvas características das bombas B₁

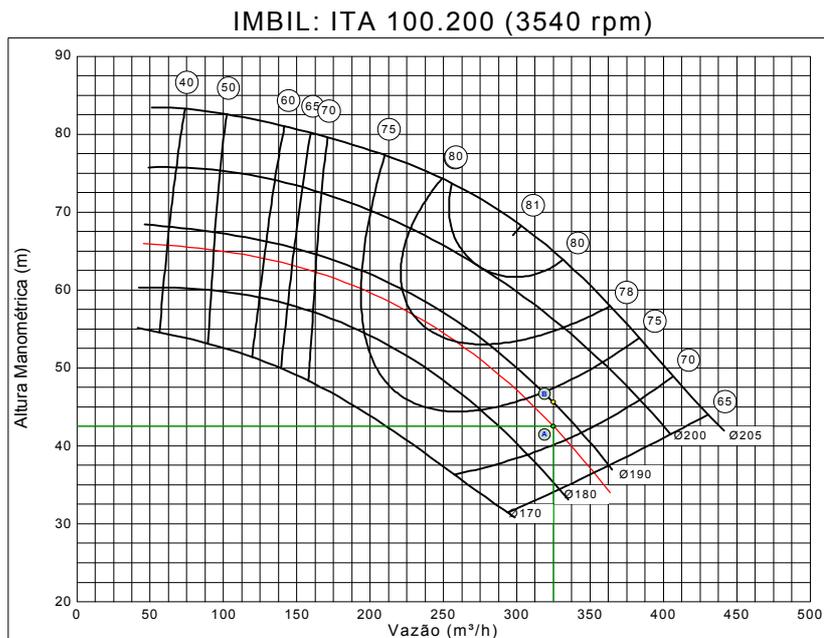


Figura 20 - Curvas características das bombas B₃

Para o acionamento de B₁ e de B₂, foram considerados os motores elétricos Standard e de Alto Rendimento da marca Kohlbach, em função da disponibilidade de preços destes motores. Novamente, utilizou-se o programa MaxBombas versão *Millennium* para selecionar os motores elétricos, cujas informações relevantes estão apresentadas no Quadro 14.

Quadro 14 - Dados dos motores elétricos selecionados

	STD - B ₁	AR - B ₁	STD - B ₃	AR - B ₃
Potência nominal (cv)	75	75	75	75
Velocidade (rpm)	1780	1780	3550	3550
Número de pólos	4	4	2	2
Potência solicitada (cv)	61,2	61,2	71,2	71,2
Rendimento (%)	91,6	94,1	89,6	92,3
Fator de potência	0,87	0,90	0,92	0,95
Corrente nominal (A)	173,3	169,2	169,4	165,5
Preço* (R\$)	2.400,82	2.787,49	2206,98	2610,54

* Fonte: Kohlbach Motores Ltda. (data: 13/02/01)

STD = Standard AR = Alto Rendimento

O custo total anual (CT) do conjunto (tubulação e motobomba) foi calculado adicionando-se os custos fixo anual (CF) e variável anual (CV), decorrentes, respectivamente, da amortização do capital investido e dos gastos com o consumo de energia elétrica e com a manutenção do sistema.

$$CT = CF + CV \quad (51)$$

O custo fixo anual foi calculado a partir dos dados apresentados nos Quadros 13, 14, 15 e 16 e da equação:

$$CF = (P_b - S_b + P_m - S_m + P_t - S_t) \frac{(1+i)^t i}{(1+i)^t - 1} \quad (52)$$

em que

P_b, P_m, P_t = preços de aquisição da bomba, do motor e da tubulação, respectivamente, R\$;

S_b, S_m, S_t = valores de sucata da bomba, do motor e da tubulação, respectivamente, R\$;

i = taxa anual de juros ou de desconto, decimal; e

t = tempo de investimento ou horizonte de planejamento, anos.

Quadro 15 - Dados para a análise dos custos fixos dos equipamentos

Valor de sucata da tubulação	0%
Valor de sucata da bomba	5% do preço inicial
Valor de sucata do motor elétrico	15 % do preço inicial
Horizonte de planejamento	10 anos
Taxa anual de juros	10 %

Quadro 16 - Preços dos tubos de aço galvanizado de 6 m

Diâmetro de 250 mm	R\$208,50
Diâmetro de 300 mm	R\$258,00

Fonte: SISTEMAQ - Sistemas de Irrigação, <http://www.sistemaq.com.br> (Data: 13/02/01)

Considerou-se o custo variável anual como a soma do custo de manutenção (C_{Man}) do sistema e do custo da energia elétrica (C_{En}), dado por:

$$C_{En} = C_C + T_A + C_D \quad (53)$$

sendo

$$C_C = 0,736 \frac{Pot_M}{\eta_M} N P_{kWh}$$

$$T_A = C_C \left(\frac{0,85}{\cos \phi} - 1 \right)$$

$$C_D = 0,736 \frac{Pot_M}{\eta_M} P_{kW}$$

em que

C_{En} = custo da energia elétrica, R\$;

C_C = custo do consumo de energia, R\$;

Pot_M = potência fornecida pelo motor elétrico, cv;

η_M = rendimento do motor elétrico, decimal;

P_{kWh} = preço da tarifa para o consumo de energia elétrica, R\$ kWh⁻¹;

N = número de horas de funcionamento do motor, por ano;

T_A = taxa adicional a ser paga, R\$;

$\cos \phi$ = fator de potência, decimal;

C_D = custo de demanda, R\$; e

P_{kW} = preço da tarifa para a demanda de energia elétrica, R\$ kW⁻¹.

O custo de manutenção de cada equipamento foi calculado como um valor percentual do seu preço inicial, sendo que os valores utilizados foram os apresentadas por BERNARDO (1989): a) 0,5% para a tubulação; b) 2,0% para o motor elétrico; e c) 4,0% para a bomba.

Quadro 17 - Preços das tarifas de energia elétrica da classe A4, para o cálculo dos custos variáveis

Tarifa para o consumo, sem ICMS	0,09273 R\$ kWh ⁻¹
Tarifa para a demanda, sem ICMS	6,33 R\$ kW ⁻¹
Alíquota do ICMS	18,0%

Fonte: <http://www.cemig.com.br/atendimento/tarifas.htm> (data: 13/02/01)

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Analisando o Quadro 18, no qual estão apresentados os custos totais anuais de cada conjunto, pode-se observar que o conjunto de custo mínimo é o AR-B₁, isto é, a bomba ITA 150-330 acionada pelo motor Kohlbach de alto rendimento. A análise dos custos reforça ainda mais a escolha da bomba B₁, uma vez que a bomba B₃ já estava tecnicamente descartada, pelo fato de operar com vazão muito próxima da máxima.

Quadro 18 - Custo total anual dos quatro conjuntos possíveis

Custo total anual em R\$ ano ⁻¹			
STD-B ₁	AR-B ₁	STD-B ₃	AR-B ₃
20.580,04	19.431,15	22.995,73	21.680,80

Como a potência da bomba B₁ (61,2 cv) é apenas 2% maior que a potência de um motor elétrico de 60 cv, analisou-se a redução da altura manométrica de modo que potência solicitada por B₁ pudesse ser suprida por um motor de 60 cv.

Analisando a Figura 19, pode-se observar que o rotor de diâmetro igual a 310 mm proporciona, para a vazão de projeto, altura manométrica de 39,60 m e rendimento de 83,7%, ou seja, potência de 57,0 cv, aproximadamente. Estes três valores também podem ser obtidos diretamente no programa MaxBombas *Millennium*, posicionando-se o cursor do mouse em um ponto que esteja sobre a curva correspondente ao rotor de 310mm e que tenha como abcissa a vazão de projeto.

A potência de 57,0 cv pode ser suprida por um motor de 60 cv, o que confere a este um índice de carregamento 95%. Diante dessa possibilidade, analisou-se o acionamento da bomba B₁, com rotor de 310 mm, pelos motores

Standard e Alto Rendimento da marca Kohlbach, cujos dados estão apresentados no Quadro 19. Para isso, a tubulação foi redimensionada de modo que a perda de carga fosse de 9,60 m (12,50 - (42,90-39,60)), conseguida com 59 tubos de 300 mm e com 91 tubos de 250mm.

A análise dos custos foi refeita considerando os novos dados e os seus resultados estão apresentados no Quadro 20.

Quadro 19 - Dados dos motores elétricos selecionados após a redução da potência requerida pela bomba B₁

	STD-B ₁	AR-B ₁
Potência nominal cv	60	60
Velocidade (rpm)	1780	1780
Número de pólos	4	4
Potência solicitada (cv)	57,0	57,0
Rendimento (%)	90,8	93,4
Fator de potência	0,86	0,90
Corrente nominal (A)	140,3	137,0
Preço* (R\$)	1.2130,07	1.809,91

* Fonte: Kohlbach Motores Ltda. (data: 13/02/01)
 STD = Standard AR = Alto Rendimento

Quadro 20 - Custo total anual dos dois conjuntos possíveis, após redução da potência da bomba B₁

Custo total anual em R\$ ano ⁻¹	
STD-B ₁	AR-B ₁
20.007,39	18.263,89

O Quadro 20, permite observar que: 1) o motor de alto rendimento continuou sendo a opção mais atraente, economicamente, em relação ao motor standard; e 2) o redimensionamento da tubulação proporcionou um redução do custo total anual de 6% (de R\$19.431,15 para R\$18.263,89), evidenciando que o acréscimo no custo da tubulação foi mais do que superado pela redução do custo com o consumo de energia elétrica.

Mesmo utilizando esta metodologia simplificada, o número de variáveis que influenciam na seleção do conjunto de custo mínimo é relativamente grande e, conseqüentemente, devem existir muitos cenários que podem conduzir a soluções complementemente diferentes da que foi obtida. A análise destes cenários envolve claramente uma análise combinatória, onde cada variável de

interesse assume determinados valores. Como é difícil a análise de todas as combinações possíveis, é preferível recorrer-se às técnicas de simulação. Uma delas consiste em considerar as variáveis ou grandezas que intervêm no problema como variáveis aleatórias, para as quais se arbitram funções densidade de probabilidade e os parâmetros destas funções. Por exemplo, pode-se considerar que a vida útil de um dado equipamento segue a distribuição normal, com média de 12000 horas e desvio padrão de 1800 horas. A simulação propriamente consiste em resolver o problema um número razoável de vezes que pode ser 100, 1000 ou outro número, suficientemente grande. Devido a aleatoriedade das variáveis, cada solução é obtida a partir de dados diferentes. No final, a análise das freqüências relativas das soluções permite que sejam feitas inferências como: a) a probabilidade de o custo mínimo ser superior (ou inferior) a tanto é de tanto; b) a probabilidade de uma alternativa "A" ser economicamente mais atraente que outra "B" é de tanto.

4. CONCLUSÕES

Com base nos dados do problema apresentado, nos métodos de cálculo utilizados e nos resultados gerados, pode-se concluir que a tubulação composta por 91 tubos de 250mm e por 59 tubos de 300mm, a bomba IMBILITA 150-330 e o motor elétrico Kohlbach de 60 cv de alto rendimento se apresentam como o conjunto de custo mínimo.

Outro cenário de dados ou outros métodos de cálculos ou, ainda, considerações diferentes das que foram feitas, certamente apontariam para uma solução diferente para o mesmo problema, o que indica claramente que o problema seria melhor resolvido, por meio de técnicas de simulação. Portanto, embora se proceda à análise econômica de uma forma determinística, bem definida, é possível e vantajoso considerá-la como um problema de natureza estocástica.

5. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

BERNARDO, S. **Manual de irrigação**. 5. ed. Viçosa: UFV, 1989. 596 p.

DENÍCULI, W. **Bombas hidráulicas**. Viçosa:, UFV, 1993. 162 p.

GOMES, H. P. Dimensionamento ótimo de sistemas coletivos de irrigação pressurizada. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA, 24, 1995, Viçosa. p. 276.

GOMES, H. P. **Engenharia de irrigação: hidráulica dos sistemas pressurizados, aspersão e gotejamento**. João Pessoa: UFPB, 1994. 344 p.

CONCLUSÕES GERAIS

Com base nos objetivos estabelecidos e nos resultados obtidos, tiraram-se as seguintes conclusões:

A metodologia desenvolvida e implementada no software SACRID, visando a obtenção de coordenadas de pontos sobre as curvas características de bombas centrífugas, mostrou-se consistente e aplicável, uma vez que, por meio desse software, obtiveram-se dados de mais 4500 curvas de uma forma bastante ágil e confiável.

Por estar disponível na Internet a quem possa interessar, por sua facilidade de uso e pelos resultados que com ele se obtiveram, o software SACRID, que opera semelhantemente a uma mesa digitalizadora, representa uma boa opção para digitalização de quaisquer gráficos impressos, cujas escalas dos eixos sejam lineares ou linearizáveis.

Os modelos de equações determinados para a representação analítica das curvas de altura manométrica e de potência foram polinômios, cujos graus variaram entre dois e sete. Os splines cúbicos também representam uma opção para a representação destas curvas, com uma ressalva: como passam por todos os pontos utilizados no ajuste, não refletem uma tendência média destes, tal como fazem os polinômios e todas as equações ajustadas segundo o princípio da minimização da soma dos quadrados dos resíduos.

As curvas de isorendimento foram representadas de modo totalmente satisfatório por uma ou mais curvas Bézier de terceiro grau; embora não se possa calcular o rendimento por meio delas, são bastante úteis na representação gráfica dessas curvas, pois o sistema operacional Windows possui a função "*PolyBezier*", que permite o seu traçado em qualquer dispositivo de saída gráfica, como a tela e a impressora.

O Método de Hardy, aplicado à representação da superfície que caracteriza o rendimento hidráulico de uma turbobomba, conduziu a resultados excelentes e, apesar de aparentemente complexo, pode ser implementado sem maiores dificuldades. Como não se conhecem modelos de equações que representem rendimento hidráulico de uma forma generalizada, recomenda-se a utilização deste método.

O estudo sobre a operação de bombas em associações e em redes de condutos mostrou que as soluções desses problemas podem ser implementadas computacionalmente, por meio dos algoritmos propostos para cada caso.

Finalmente, conclui-se que presente trabalho atingiu os seus objetivos e ainda produziu um fruto tecnológico: o software MaxBombas versão *Millennium*, que reúne um banco de dados contendo as informações técnico-comerciais e as curvas características das 303 bombas estudadas no segundo capítulo e ainda um banco de dados de 1164 motores elétricos das marcas WEG e Kohlbach.